الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي -سكيكدة-

Ecole Normale Supérieure d'Enseignement Technologique - Skikda-

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم المتوسط

تحويل لابلاس وبعض تطبيقاته

من اعداد الطالبتين:

- جوامع ماريهان
- مرغاد نسرين

لجنة المناقشة:

- **الأستاذ الرئيسي:** قواسمية محمد
- **الأستاذ المشرف:** رمضان سميرة
- **الأستاذ المناقش:** بن حيونة صالح
- **الأستاذ المناقش:** فراق عزوز

2024/2023

شُكر وَ تَقدير

الحمد لله نحمده و هو المستحق للحمد و الثناء، و نستعين به و نتوكل عليه في السراء و الضراء، ونصلي على خير خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم و صحبه أجمعين و من تبع هديه إلى يوم الدين.

و عملا بقوله صلى الله عليه و سلم:{من لم يشكر الناس لم يشكره الله}

نتقدم بأسمى عبارات الشكر و التقدير إلى كل من أوقد لنا مشعل الحياة و حملنا على سفينة النجاة

إلى كل من علمنا علما ينتفع به و أدبا نرتفع به

بدأً من معلمي الإبتدائي وصولا إلى أساتذتنا الكرام في المدرسة العليا للأساتذة بسكيكدة.

تحية عطرة و شكر خاص للأستاذ «فراق عزوز» الذي أفادنا بنصائحه و توجيهاته طيلة إنجاز هذه المذكرة.

وتحية طيبة إلى اللجنة التي تكرمت بمناقشة مذكرتنا.

كما نتقدم بعظيم التقدير و العرفان إلى الأستاذ «بوجعدار جمال»

و في الأخير نشكر كل من ساهم في مساعدتنا لإنجاز هذا العمل المتواضع من قريب أو من بعيد.

إهداء

من قال أنا لها "نالها "
أنا لها و إن أبت أتيت بها رغما عنها
ها قد انتهت حكاية ختمت فصولها كتبها القدر و أنا محررتها أقف اليوم على هاته الحروف وقفة شموخ يداي تخطها و بنت العين تبللها أحمد الله حمدا و أشكره عن النعم كثيرا

.و ها أنا الآن يا والداي أقف الآن على عتبة تخرجي وقفة فخر و اجلال بعد سنين عجاف طوال مليئة بالعثرات مليئة بالأحلام و خيبات الأمل التي تحطمها مليئة بالصبر والإنكسار لم يكن سهل لا والله لكنبوجودكم صار سهل و تحقق بإذن الله إنه ليس نجاحي وحدي إنما هو نجاحكم هي بذرتكم التيزرعتموها إنه نتيجة تعبكم و جهدكم سهركم
ودعائكم لي كل الكلمات تنحني لكم و أنا أنحني معها شكرا لكم
شكرا للتي صبرت و كابدت الصعاب من أجلي التي سهرت و أرهقت طوال عمرها من أجلي أمي ياحنونتي
شكرا لأبي حبيبي و قدوتي من كنت أرى نفسي فيه قدمت لي الكثير ربيتني أفضل تربية أنا اليوم أهديك نجاحي رغم أنه لا يكفي
إلى أختي سلمى عنوان البراءة و نور الدار و أخي مرتضى سندي و حافظي إلى من كانت معي في كلخطوة في حياتي معلمتي و مرشدتي في هاته الحياة أختي آمنة لو تجسدت الأخوة في انسان لكنت أنتي
إلى زوج أختي أمين أدام الله فرحكما و أسعدكما انشالله
إلى من آوتني في مرحلة الثانوية و منحتني عائلة و منزلا واعتبروني ابنة لهم إلى من رعاني ثلاث سنين لكم فضل كبير إلى عمي بوجمعة و زوجته عزيزة جزاكم الله ألف خير
إلى صديقاتي العوض الجميل من كانوا معي في أسعد أيامي و أسوئها على حد سواء من عشت معهم المرح مجموعة No risque No fun
كنتم عسل أيامي يا جهينة و إكرام
و في الختام السلام عليكم ورحمة الله و بركاته

ماريهان

إهـــداء

الحمد لله حبا و شكرا و امتنانا على البدء و الختام
{و آخر دعواهم أن الحمد لله رب العالمين}
لم تكن الرحلة قصيرة و لا ينبغي لها أن تكون لم يكن الحلم قريباً و لا كان محفوفا بالتسهيلات لكنني فعلتها فالحمد لله الذي يسر البدايات و بلغنا النهايات بفضله و كرمه
أهدي هذا النجاح إلى نفسي الطموحة أولا ابتدأت بطموح و انتهت بنجاح ثم إلى كل من سعى معي لإنهاء مسيرتي الجامعية
إلى اليد الخفية التي أزالت عن طريقي الأشواك و من تحملت كل لحظة ألم مررت بها و ساندتني و سهرت ليالي طويلة من أجل راحتي و استيقظت فجراً للدعاء لي ...أمي حفظها الله
إلى الرجل العظيم الذي سبقني للوصول إلى طموحاتيسندي و رفيق دربي... أبي حفظه الله
إلى من غرسوا في قلبي بذرة الإيمان بقدراتي من علموني معنى العطاء و الصبر جدي و جدتي
إلى من شجعتني ووصلت العطاء دون مقابل، إلى من كانت جزء من هذه الانتصارات أختي الحبيبة
إلى أصدقاء السنين و أصحاب الشدائد إلى من رسموا بسمتي وقت الصعاب إلى الذين لم يحبطوني و آمنوا بقوتي و شجاعتي إلى الشموع التي تنير مل طريق صديقاتي
و أخيرا من قال أنا لها نالها و أنا لها و إن أبت أتيت بها ما كنت لأفعل هذا لولا توفيق الله فالحمدلله الذي أغرقنا سرورا و فرحا ينسيني مشقتي

نســـريـــن

المحتويات

مقـــدمة:

عند حل المسائل الهندسية التطبيقية قد نواجه بعض المعادلات التفاضلية ذات قيم حدية أو ابتدائية التي تختلف طريقة حلها عن المعادلات الأخرى أو يصعب حلها بالطرق التقليدية لذا وجب البحث عن طرق وأساليب رياضية للتعامل مع مثل هذه المسائل. إحدى هذه الطرق ما يعرف بالتحويلات التكاملية ونخص بالدراسة تحويل لابلاس الذي يعتبر من الوسائل الرياضية الهامة التي تلعب دورا كبير في دراسة علم التحكم الآلي. فمن المعلوم أن أي نظام ديناميكي يمكن تمثيله بمجموعة من المعادلات الجبرية والمعادلات التفاضلية، ولكي يتم التعامل مع هذه المعادلات بالتبسيط والاختصار يلزم تحويلها جميعا إلى معادلات جبرية، وهو ما يوفره تحويل لابلاس. وبالاضافة إلى ذلك فإن حل المعادلة التفاضلية ذاتها يتم بتحويل لابلاس ويعود أصل التسمية إلى عالم الرياضيات الفيزيائي وعالم الفلك الفرنسي بيير سيمون لابلاس $(Laplace P.C., 1749 - 1827)$ الذي قام بدراسات شهيرة في مجال الإحصاء والإحتمالات ونشر عدة أبحاث حول التفاضل والتكامل خلال فترة عمله كمدرس للرياضيات.

الهدف من هذه المذكرة هو تسليط الضوء على تحويل لابلاس وبعض تطبيقاته في حل المعادلات التفاضلية والتكاملية ولأجل ذلك قمنا بتقسيم هذا العمل إلى ثلاثة فصول:

الفصل لأول: نقدم فيه تعاريف ونظريات حول تحويل لابلاس وتحويله العكسي مع إعطاء بعض الأمثلة.

الفصل الثاني: تطرقنا فيه إلى دراسة تفصيلية لطرق حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويل لابلاس.

الفصل الثالث: تناولنا فيه أهم تطبيقات تحويل لابلاس في حل المعادلات التكاملية.

باب 1

تحويل لابلاس

في هذا الفصل سنقدم تعريف تحويل لابلاس و أهم خصائصه ثم نتطرق إلى تحويل لابلاس العكسي. اعتمدنا في صياغة معظم المفاهيم و الأمثلة من المرجعين [1] و[2].

1.1 تحويل لابلاس

1.1.1 تعريف تحويل لابلاس وتحويل لابلاس العكسي

يمكن وصف تحويل لابلاس على أنه تقنية تكاملية تؤثر على الدالة $f(t)$ المعرفة على مجال المتغير t، وتحوّلها إلى دالة أخرى $F(s)$ المعرفة على مجال المتغير s.

تعريف 1.1.1
ليكن التطبيق $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ حيث $f(t)=0$ من أجل كل $t<0$ من أجل كل $s>0$ نعرف العبارة

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt=F(s);\ \ s\in\mathbb{R}^+$$

إذا كان هذا التكامل موجود. F يسمى تحويل لابلاس لـ f

نقول كذلك f هو أصل F بتحويل لابلاس، وتكتب

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)\Leftrightarrow\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$$

و يسمى $\mathcal{L}^{-1}$ بـ "**تحويل لابلاس العكسي**".

1.1.2 تحويلات لابلاس و تحويلات لابلاس العكسية لبعض الدوال المعروفة

نحاول الحصول على شكل تحويل لابلاس لبعض الدوال المعروفة مثل دوال كثيرات الحدود، الدوال الأسية، الدوال المثلثية، والدوال الزائدية وغيرها.

1) $f(t)=t$
لدينا

$$\mathcal{L}\{t\}=\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha}te^{-st}dt=\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha}te^{-st}dt$$

بإستعمال التكامل بالتجزئة نضع

$$u=t,dv=e^{-st}\Rightarrow du=dt,v=\frac{-1}{s}e^{-st}$$

فنجد أن

$$\int_0^\alpha te^{-st}dt = \frac{-t}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\alpha} + \frac{1}{s}\int_0^\alpha e^{-st}dt = \frac{-t}{s}e^{-st} + \frac{-1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^\alpha$$
$$= \left(\frac{-\alpha}{s}e^{-s\alpha} + 0\right) + \left(\frac{-1}{s^2}e^{-s\alpha} + \frac{1}{s^2}\right)$$

و بالتالي فإن

$$\left[\frac{-\alpha}{s}e^{-s\alpha} + 0\right] + \left[\frac{-1}{s^2}e^{-s\alpha} + \frac{1}{s^2}\right] = \frac{1}{s^2}; s > 0$$

إذن فإن

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2},\ s > 0$$

و بالتالي فإن تحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{1}{s^2}$ هو $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} = t,\ s > 0$

2) $f(t) = t^n$

تحويل لابلاس للدالة $f(t) = t^n$ حيث n أي عدد صحيح موجب هو $\mathcal{L}^n\{t\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$، وتحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{n!}{s^{n+1}}$ هو $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$ حيث $s > 0$.

3) $f(t) = c$

تحويل لابلاس للدالة $f(t) = c$ حيث c أي عدد حقيقي هو $\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s}$، وتحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{c}{s}$ هو $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c}{s}\right\} = c$ حيث $s > 0$.
الإثبات نجده في المعادلة:

$$\mathcal{L}\{c\} = \int_0^\infty ce^{-st}dt = c\lim_{\alpha\to\infty} e^{-st}dt = c\lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{-1}{s}e^{-s\alpha} + \frac{1}{s}\right] = \frac{c}{s}; s > 0$$

4) $f(t) = e^{kt}$

لدينا

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^\infty e^{kt}e^{-st}dt = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha e^{-(s-k)t}dt$$
$$= \lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{-1}{s-k}e^{-(s-k)\alpha} + \frac{1}{s-k}\right] = \frac{1}{s-k}; (s-k) > 0$$

و تحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{1}{s-k}$ هو e^{kt}

5) $f(t) = \cos(at)$

لدينا

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \int_0^\infty \cos(at)e^{-st}dt = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta \cos(at)e^{-st}dt$$

باستخدام التكامل بالتجزئة مرتين لحساب التكامل نجد أن

$$\int_0^\beta \cos(at)e^{-st}dt = \lim_{\beta\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\cos(at))+a\sin(at)\right]$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\left[\frac{e^{-s\beta}}{s^2+a^2}(-s\cos(a\beta))+a\sin(a\beta)+\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

و تحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{s}{s^2+a^2}$ هو $\cos(at)$

6) $f(t) = \sin(at)$

لدينا

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \int_0^\infty \sin(at)e^{-st}dt = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta \sin(at)e^{-st}dt$$

بإستخدام التكامل بالتجزئة لحساب التكامل

$$I = \int_0^\beta \sin(at)e^{-st}dt$$

نضع

$$u = \sin(at), dv = e^{-st}dt \Rightarrow du = a\cos(at)dt, v = \frac{-1}{s}e^{-st}$$

و بالتالي فإن

$$I_1 = \frac{cos(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta - \frac{a}{s}I$$

إذن فإن

$$I = \frac{sin(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta + \frac{a}{s}\frac{cos(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta - \frac{a^2}{s^2}II\left(1+\frac{a^2}{s^2})\right)$$
$$= \frac{sin(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta + \frac{a}{s}\frac{cos(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta$$

أي أن

$$I = \frac{s^2}{s^2+a^2}\left(\frac{sin(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta + \frac{a}{s}\frac{cos(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta\right)$$

و بالتالي فإن

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta \sin(at)e^{-st}dt = \lim_{\beta\to\infty} I$$
$$= \lim_{\beta\to\infty}\frac{s^2}{s^2+a^2}\left(\frac{sin(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta + \frac{a}{s}\frac{cos(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta\right)$$
$$= \lim_{\beta\to\infty}\frac{s^2}{s^2+a^2}\left(\frac{-\sin(a\beta)}{s}e^{-s\beta} + 0 + \frac{a}{s}\frac{-\cos(a\beta)}{s}e^{-s\beta} + \frac{1}{s}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

حيث a ثابت.

1.1.3 تحويل لابلاس لبعض الدوال الإعتيادية

يمكن تلخيص تحويل لابلاس لبعض الدوال الأساسية في الجدول التالي:

$f(t)$	$F(s)$
a	$\frac{a}{s},\ s>0$
at	$\frac{a}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ n=1,2,3...$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}},\ s>a$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}},\ s>0$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$t\sin(wt)$	$\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}$
$t\cos(wt)$	$\frac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}$
$\sinh(wt)$	$\frac{s^2}{s^2-w^2},\ s>\|w\|$
$\cosh(wt)$	$\frac{s}{s^2-w^2},\ s>\|w\|$
$e^{at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$
$e^{at}\cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$
$e^{-at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
$e^{-at}\cos(wt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$

1.1.4 تحويل لابلاس العكسي لبعض الدوال الخاصة

للحصول على تحويل لابلاس العكسي فإن جدول تحويل لابلاس هو أقصر الطرق لذلك ولكن هذا الجدول محدود و لا يحوي جميع صور الدوال الممكنة، لذلك يلزم تفكيك الدالة المراد تحويلها العكسي إلى كسور جزئية يمكن معها إستعمال الجداول مباشرة ،أي أن الدالة تفكك إلى مجموع

عدة دوال

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + ... + F_n(s)$$

و يكون التحويل العكسي هو على الصورة التالية

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)..... + f_n(t)$$

و تكون الدالة $F(s)$ عادة مكونة من بسط و مقام أي أنها تكون على الصورة التالية

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

حيث يكون كل من البسط و المقام عبارة عن كثير حدود في المتغير s و يمكن تصور المعادلة السابقة على الصورة العامة التالية

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k(s+z_1)(s+z_2).....(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2).....(s+p_n)}$$

حيث $z_1, z_2 ... z_m$ وكذلك $p_1, p_2 ... p_n$ عبارة عن أعداد حقيقية أو مركبة مع افتراض أن رتبة المقام هي أعلى من رتبة البسط ،و هو الوضع الغالب في معظم أنظمة التحكم الآلي.أي أن n أكبر من m فإذا لم يتحقق هذا الإفتراض فيجب قسمة البسط على المقام لتحويل الكسر الأخير ليحقق هذا الإفتراض.

ويتوقف شكل الكسور الجزئية على ما إذا كانت الكميات $p_1, p_2 ... p_n$ أعداد حقيقية مختلفة أو أن فيها كميات مكررة أو كان فيها كميات مركبة و هي ما تظهر دائما على شكل أزواج مركبة مترافقة .أي أن الكسور الجزئية تعتمد في الواقع على أقطاب الدالة المراد تحويلها عكسيا و سوف نقوم الآن بدراسة جميع هذه الحالات بالتفصيل.

1-الكسور الجزئية عندما تحتوي الدالة على أقطاب مختلفة

في هذه الحالة يمكن كتابة مفكوك الدالة على صورة كسور جزئية بسيطة كما يلي

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + ... + \frac{a_n}{s+p_n}$$

$a_1, a_2 ... a_n$ تسمى أحيانا بالمتبقي عند القطب المقابل ولتحديد قيمة هذه الثوابت نطبق ذلك في المعادلات التالية

$$a_1 = (F(s)(s+p_1) \mid_{s=-p_1}$$

$$a_2 = (F(s)(s+p_2) \mid_{s=-p_2}$$

$$a_n = (F(s)(s+p_n) \mid_{s=-p_n}$$

و في هذه الحالة فإن تحويل لابلاس العكسي من المعادلة $F(s)$ يصبح

$$f(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + ... + a_n e^{-p_n t}$$

مثال 1.1.1

جد تحويل لابلاس العكسي للدالة التالية

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$$

أقطاب هذه المعادلة هي $s = 0 \ s = -1 \ s = -3$

$$F(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+1} + \frac{a_3}{s+3}$$

نوجد قيم هذه الثوابت

$$a_1 = (sF(s)) \mid_{s=0} = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = ((s+1)F(s)) \mid_{s=-1} = \frac{-1}{2}$$

$$a_3 = ((s+3)F(s)) \mid_{s=-3} = \frac{-1}{6}$$

$$F(s) = \frac{\frac{2}{3}}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s+1} - \frac{\frac{1}{6}}{s+3}$$

فبعمل تحويل لابلاس العكسي بإستخدام الجدول تصبح المعادلة

$$f(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

2-الكسور الجزئية عندما تحتوي الدالة على أقطاب مركبة مترافقة

إذا كانت الدالة تحتوي على قطبين p_1 , p_2 مثلا كأقطاب مركبة مترافقة ،فإنه يمكن كتابة مفكوك الدالة على الصورة التالية

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1 s + a_2}{(s+p_1)(s+p_2)} + \frac{a_3}{s+p_3} + ... + \frac{a_n}{s+p_n}$$

و تحدد قيم كل من a_1 , a_2 بضرب طرفي المعادلة بالكمية $(s+p_1)(s+p_2)$ ثم التعويض $s = -p_1$ فينتج

$$\mid a_1 s + a_2 \mid_{s=-p_1} = \mid F(s)(s+p_1)(s+p_2) \mid_{s=-p_1}$$

و عند التعويض بقيمة p_1 في الطرفين و هي قيمة مركبة ،فإن المعادلة السابقة تعطي في الواقع معادلتين إحداهما بمساواة الكميات الحقيقية والأخرى عند مساواة الكميات التخيلية في الطرفين ومن ثم يمكن تحديد قيم a_1 , a_2 .

مثال 2.1.1
جد تحويل لابلاس العكسي للدالة

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

يمكن كتابة مفكوك الدالة كما يلي

$$F(s) = \frac{a_1 s + a_2}{s^2+s+1} + \frac{a}{s}$$

ويلاحظ هنا أن أقطاب الدالة هي

$$s = 0, s = -0.5 \pm j0.866$$

أي أن

$$p_1, p_2 = -0.5 \pm j0.866, p_3 = 0$$

و بضرب الطرفين بالكمية (s^2+s+1) والتعويض $s = -0.5 \pm j0.866$ ينتج

$$\begin{aligned} \mid \frac{s+1}{s} \mid_{s=-0.5-j0.866} &= \mid \alpha_1 s + \alpha_2 \mid_{s=-0.5-j0.866} \\ \frac{0.5-j0.866}{-0.5-j0.866} &= \alpha_1(-0.5-j0.866) + \alpha_2 \\ 0.5-j0.866 &= \alpha_1(0.25+j0.866-0.75) + \alpha_2(-0.5-j0.866) \end{aligned}$$

و بمساواة الكميات الحقيقية و الكميات التخيلية من الطرفين ينتج

$$-0.5\alpha_1 - 0.5\alpha_2 = 0.5$$

$$0.866\alpha_1 - 0.866\alpha_2 = -0.866$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -1$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = -1$$

$$\alpha_1 = -1\alpha_2 = 0$$

ولتحديد قيمة الثابت الثالث

$$a = \mid sF(s) \mid_{s=0} = a = \mid \frac{s(s+1)}{s(s^2+s+1)} \mid_{s=0} = 1$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{-s}{s^2+s+1} + \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+(0.866)^2} + \frac{0.5}{(s+0.5)^2+(0.866)^2} \end{aligned}$$

و بإستعمال جدول تحويل الدوال نوجد قيمة الدالة النهائية في الزمن و لا ننسى أن هذه الدالة معرفة في الجزء الموجب من محور الزمن

$$f(t) = 1 - e^{-0.5t}\cos(0.866t) + 0.578e^{-0.5t}\sin(0.866t)$$

3-الكسور الجزئية عندما تحتوي الدالة على أقطاب متكررة

إذا كان أحد أقطاب الدالة يتكرر عدد r من المرات ،فإن شكل مفكوك الدالة يختلف كثيرا عن الحالات السابقة ،و يصبح شكل الكسور الجزئية على الصورة التالية

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_r}{(s+p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s+p_2)^{r-1}} + ... + \frac{b_1}{(s+p_1)}$$

و لايجاد قيم كل من الثوابت $b_1, ..., b_{r-1}, b_r$ نتبع الخطوات التالية

أ) نضرب طرفي المعادلة في $(s+p_1)^r$ ثم نعوض $s = p_1$ فينتج

$$b_r = \mid (s+p_1)^r F(s) \mid_{s=-p_1}$$

ب) نضرب طرفي المعادلة في $(s+p_1)^r$ ثم نفاضل طرفي المعادلة مرة واحدة بالنسبة إلى s ثم نعوض $s = p_1$ فينتج

$$b_{r-1} = \mid \frac{d(s+p_1)^r F(s)}{ds} \mid_{s=-p_1}$$

ج) نتبع نفس الطريقة السابقة في الخطوة (ب) مع معامل التفاضل مرتين بالنسبة إلى s ينتج

$$b_{r-2} = \mid \frac{d^2(s+p_1)^r F(s)}{ds^2} \mid_{s=-p_1}$$

د) نتبع نفس الطريقة السابقة و في كل مرة نزيد رتبة التفاضل مرة واحدة حتى نحصل على جميع الثوابت و يمكن كتابة الصورة العامة

$$b_{r-k} = \frac{1}{k!} \mid \frac{d^k(s+p_1)^r F(s)}{ds^k} \mid_{s=-p_1}$$

مثال 3.1.1

أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$$

تكتب الكسور الجزئية لهذه الدالة على الصورة التالية

$$F(s) = \frac{b_1}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_3}{(s+1)}$$

ومع ملاحظة أن الأقطاب الثلاثة متكررة ثلاث مرات أي أنها $s=-1$ $s=-1$ $s=-1$ نوجد قيم الثوابت

$$b_1 = \frac{1}{2!} \mid \frac{d(2s+2)}{ds} \mid_{s=-1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{1!} \mid \frac{d(s^2+2s+3)}{ds} \mid_{s=-1} = \mid 2s+2 \mid_{s=-1} = 0$$
$$b_3 = \mid F(s)(s+1)^3 \mid_{s=-1} = \mid s^2+2s+3 \mid_{s=-1} =$$

نعوض بقيم الثوابت في الدالة $F(s)$ فينتج

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

وبتحويل الدالة بإستخدام جدول التحويل نحصل على الدالة التالية

$$f(t) = t^2e^{-t} + e^{-t}$$

1.2 الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس

1.2.1 الدالة المستمرة بالقطعة

تعريف 1.2.1

نقول أن الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرة بالقطعة على المجال $a \leq x \leq b$ إذا أمكن تجزئة هذا المجال إلى عدد محدود من المجالات الجزئية $c_i < x < d_i$ بحيث

1-الدالة f مستمرة على المجال المفتوح $c_i < x < d_i$

2-النهايتين $\lim\limits_{x\to\ c^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\ d^-} f(x)$ موجودتان

مثال 1.2.1

الدوال الموضحة في الشكل -1- هي تابع مستمر بالقطعة على المجال $0 \leq x \leq 6$

1.2.2 الدالة ذات الرتبةالاسية

تعريف 2.2.1

نقول ان الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ذات رتبة أسية γ عند اللانهاية إذا وجد ثابتان $a > 0$ و $t_0 > 0$ و تحقق المتراجحة

$$|f(x)| \leq ae^{\gamma t},\ t > t_0$$

مثال 2.2.1

إذا كان k ثابت حقيقي فإن الدوال التالية هي ذات رتبة أسية

1-$f(x) = x^k$

2-$g(x) = e^{kx}$

3-$h(x) = sin(kx)$

1.2.3 الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس

نظرية 1.2.1
لتكن الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ حيث $f(t)=0$ و $t<0$ إذا تحققت الشروط التالية
1- f مستمرة بالقطعة على $]0,+\infty[$
2- f ذات رتبة أسية γ
3- من أجل كل $t_0>0$ يوجد $\int_0^{t_0}|f(t)|\,dt<+\infty$
حينها يوجد تحويل لابلاس من أجل $s>\gamma$.

البرهان
يجب التأكد أن $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x e^{-st}f(t)dt$ موجودة، لذلك يكفي إثبات أن

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-st}|f(t)|\,dt<+\infty$$

لدينا

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-st}|f(t)|\,dt &= \int_0^{t_0} e^{-st}|f(t)|\,dt+\int_{t_0}^x e^{-st}|f(t)|\,dt\\ &\leq \int_0^{t_0} e^{-st}|f(t)|\,dt+\int_{t_0}^x ae^{\gamma t}e^{-st}dt\end{aligned}$$

بما أن f دالة مستمرة بالقطعة على المجال $[0,t_0[$ فإن التكامل $\int_0^{t_0}e^{-st}|f(t)|\,dt$ موجود ، و من كون الدالة f ذات رتبة أسية عند γ من أجل $t>t_0$ فإن :

$$\int_{t_0}^x ae^{\gamma t}e^{-st}dt=\frac{a}{\gamma-s}[e^{(\gamma-s)t}]_{t_0}^x$$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{(\gamma-s)x}=0$ فإن تحويل لابلاس موجود من أجل $s>\gamma$.

ملاحظة 1.2.1
النظرية السابقة تعطي الشرط الكافي فقط لوجود تحويل لابلاس و لا تعطي الشرط اللازم، أي أنه توجد دوال لها تحويل لابلاس و لا تحقق شروط النظرية.

مثال 3.2.1
الدالة $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ ليست مستمرة على أي مجال محدود $[0,b]$ حيث $b>0$، و ذلك لأن هذه الدالة تعطي قيمة لانهائية عند $t=0$ لكن في المقابل فإن تكامل هذه الدالة له وجود (يعطي قيمة

محدودة) على أي مجال $[0,b]$ لكل $b>0$ إذ أن

$$\begin{aligned}\int_0^b f(t)dt &= \lim_{a\to 0}\int_a^b f(t)dt\\ &= 2\sqrt{t}\Big|_a^b\\ &= \lim_{a\to 0}\left(2\sqrt{b}-2\sqrt{a}\right)\\ &= 2\sqrt{b}\end{aligned}$$

و بالتالي يوجد تحويل لابلاس

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\}(s) &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt\\ &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{-1}{2}}e^{-st}dt\end{aligned}$$

لحساب هذا التكامل نضع

$$st=y \Rightarrow t=\frac{y}{s}, dt=\frac{dy}{s}$$

إذن فإن

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\}(s) &= s^{-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty} y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}dy\\ &= \frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma(\frac{1}{2})\end{aligned}$$

و من تعريف الدالة قاما($Gamma$) نجد

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

إذن

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\}(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}, s>0$$

1.3 خواص تحويل لابلاس

1.3.1 الخطية

نظرية 1.3.1

ليكن α و β عددين حقيقين ثابتين و f و g دالتين للمتغير x و $\mathcal{L}$ تحويل لابلاس،فإن

$$\mathcal{L}\{\beta f(t)+\alpha g(t)\}=\beta\mathcal{L}\{f(t)\}+\alpha\mathcal{L}\{g(t)\}$$

مثال 1.3.1

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{4t^2-3cos2t+5e^{-t}\} &= \mathcal{L}\{4t^2\}+\mathcal{L}\{-3cos2t\}+\mathcal{L}\{5e^{-t}\}\\
&= 4\mathcal{L}\{t^2\}-3\mathcal{L}\{cos2t\}+5\mathcal{L}\{e^{-t}\}\\
&= 4\left[\frac{2!}{s^{2+1}}\right]-3\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]+5\left[\frac{1}{s+1}\right]\\
&= \frac{8}{s^3}-\frac{3s}{s^2+4}+\frac{5}{s+1}
\end{aligned}$$

1.3.2 الخاصية الاولى للانسحاب

من أجل $a\in\mathbb{R}$ لدينا

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s-a).$$

مثال 2.3.1

لدينا

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{cos2t\} &= \frac{s}{s^2+4}\\
\mathcal{L}\{e^{-t}cos2t\} &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4}=\frac{s+1}{s^2+2s+5}
\end{aligned}$$

1.3.3 الخاصية الثانية للانسحاب

إذا كان

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$$

و

$$G(t)=\begin{cases} f(t-a) & , \quad t>0\\ 0 & , \quad t<0\end{cases}$$

فإن

$$\mathcal{L}\{G(t)\}=e^{-as}F(s)$$

مثال 3.3.1

لدينا

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^3\} &= \frac{3!}{s^4}=\frac{6}{s^4}\\
\mathcal{L}\{G(t)\} &= \mathcal{L}(t-a)^3=\frac{6e^{-as}}{s^4}
\end{aligned}$$

1.3.4 خاصية تغيير السلم

إذا كان

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

فإن

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

مثال 4.3.1
لدينا

$$\mathcal{L}\{sint\} = \frac{1}{s^2+1}$$

و منه

$$\mathcal{L}\{sin3t\} = \frac{1}{3}\frac{1}{(s/3)^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$$

1.3.5 تحويل لابلاس للمشتقات

نظرية 2.3.1
إذا كانت $f'(t)$ مستمرة بالقطعة على المجال $]0,+\infty[$ و تملك تحويل لابلاس و كانت النهاية $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$ موجودة فإن

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+)$$

مثال 5.3.1
إيجاد $\mathcal{L}\{cos(at)\}$ انطلاقا من $\mathcal{L}\{sin(at)\}$ لدينا

$$a\mathcal{L}\{cos(at)\}(s) = \mathcal{L}\{sin(at)'\}(s) = s\mathcal{L}\{sin(at)\}(s) = s\frac{a}{s^2+a^2} = a\frac{s}{s^2+a^2}.$$

نظرية 3.3.1
يمكن أن نكتب بصفة عامة

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1}f^{(n-k)}(0^+)$$

البرهان

لإثبات النظرية 2.2.1 نطبق تعريف تحويل لابلاس و التكامل بالتجزئة فنجد

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)dt \\
&= \lim_{A\to\ +\infty} \int_0^{A} e^{-st} f'(t)dt \\
&= \lim_{A\to\ +\infty} e^{-st} f(t)\big|_0^A + \int_0^{+\infty} se^{-st} f(t)dt \\
&= -f(0) + s\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \\
&= sF(s) - f(0)
\end{aligned}$$

حيث إستعملنا $\lim_{A\to\ +\infty} e^{-sA}f(A) = 0$ مع $s > 0$ و لإثبات النظرية 3.2.1 نستعمل البرهان بالتراجع

1-في حالة $n = 1$ نتحصل على $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+)$

2-نفرض صحة الخاصية من أجل $n = 1$ أي بالنسبة للمشتقة $f^{(n)}$ فإنه يمكن كتابة $f^{(n+1)}$ التي تمثل المشتقة الأولى للدالة $f^{(n)}$ حيث

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f^{n+1}(t)\} &= s\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} - f^{(n)}(0) \\
&= [s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - ... - sf^{n-1}(0)] - f^n(0) \\
&= s^{n+1}F(s) - s^nf(0) - ... - sf^{n-1}(0) - f^n(0)
\end{aligned}$$

و منه حسب البرهان بالتراجع

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1}f^{(n-k)}(0^+)$$

1.3.6 تحويل لابلاس للتكامل

إذا كان

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

فإن

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

مثال 6.3.1

لدينا

$$\mathcal{L}\{sin2t\} = \frac{2}{s^2+4}$$

و منه

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t sin2sds\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

1.3.7 الضرب في t^n

نظرية 4.3.1
إذا كان

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

فإن

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$$

مثال 7.3.1
لدينا

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$$

و منه

$$\mathcal{L}\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$
$$\mathcal{L}\{t^2e^{2t}\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

1.3.8 القسمة على t

نظرية 5.3.1
إذا كان

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

فإن

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{+\infty} F(u)du$$

علما أن $\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{t}$ موجودة.

مثال 8.3.1
لدينا

$$\mathcal{L}\{sint\} = \frac{1}{s^2+1}$$

و

$$\lim_{t\to\ 0} \frac{sint}{t} = 1$$

و منه

$$\mathcal{L}\left\{\frac{sint}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

1.3.9 تحويل لابلاس لدالة دورية

نظرية 6.3.1

لتكن $f(t)$ دالة دورية و دورها T من أجل $0 < t$ أي يمكن القول $f(t+T) = f(t)$ من أجل $t > 0$ ومنه

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-sT} f(t)dt$$

1.3.10 النهاية عندما $s \longrightarrow +\infty$

نظرية 7.3.1

إذا كان

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

فإن

$$\lim_{s\to\ +\infty} F(s) = 0$$

1.3.11 نظرية القيمة الابتدائية

نظرية 8.3.1

لدينا

$$f(0+) = \lim_{s\to\ +\infty} sF(s)$$

1.3.12 نظرية القيمة النهائية

نظرية 9.3.1

إذا كانت $\lim_{t\to\ +\infty} f(t) \in \mathbb{R}$ فإن

$$\lim_{t\to\ +\infty} f(t) = \lim_{s\to\ 0} sF(s)$$

1.3.13 وحدانية دالة المنبع

إذا كان $F = \mathcal{L}\{f(t)\}$ و $F = \mathcal{L}\{g(t)\}$ فإن $f = g$ عند النقاط التي تكون فيها f و g مستمرتان .

1.4 تحويل لابلاس و الإلتفاف

1.4.1 تعريف جداء اللف

تعريف 1.4.1
لتكن f و g دالتين نسمي إلتفاف f و g الدالة التي نعبر عنها بـ $f*g$ و تعرف بـ :

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du.$$

1.4.2 تحويل لابلاس لإلتفاف دالتين

من أجل f و g دالتين معرفتين من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بحيث $f(t)=g(t)=0$ لما $t<0$ لدينا :

$$h(t)=(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du=\int_{0}^{t} f(u)g(t-u)du$$

فإن

$$\mathcal{L}\{h\}(s)=\int_{0}^{+\infty} e^{-st}h(t)dt=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{t} e^{-st}f(u)g(t-u)dudt$$
$$\mathcal{L}\{h\}(s)=\int_{0}^{+\infty}\int_{u}^{+\infty} e^{-st}f(u)g(t-u)dtdu$$

بوضع $v=t-u$

$$\mathcal{L}\{h\}(s)=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} f(u)\int_{0}^{+\infty} e^{-s(v+u)}g(v)dvdu=\int_{0}^{+\infty} e^{-su}f(u)du\int_{0}^{+\infty} e^{-sv}g(v)dv$$

إذن

$$\mathcal{L}\{f*g\}=\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$$

مثال 1.4.1 حل المعادلة التالية باستعمال تحويل لابلاس

$$xe^{x}=\int_{0}^{x} e^{x-t}y(t)dt. \qquad (1.1)$$

بوضع $f_1(x)=e^x$ و $f_2(x)=y(x)$.
فإننا نلاحظ أن الطرف الثاني من المعادلة هو عبارة عن جداء إلتفاف $(f_1*f_2)(x)$ هذا يعني أنه إذا طبقنا تحويل لابلاس على الطرفين نجد

$$\mathcal{L}\{xe^x\}=\mathcal{L}\left\{\int_{0}^{x} e^{x-t}y(t)dt\right\}=\mathcal{L}\{e^x\}\mathcal{L}\{y(t)\} \qquad (1.2)$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد

$$\frac{1}{(s-1)^2} = \frac{1}{s-1}Y(s) \tag{1.3}$$

ومنه

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} \tag{1.4}$$

باب 2

تطبيقات تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية العادية

من بين تطبيقات تحويل لابلاس استعماله في حل المعادلات التفاضلية الخطية العادية وجمل المعادلات التفاضلية الخطية العادية، والذي اعتمدنا فيه على المراجع [4]و [5].

2.1 المعادلات التفاضلية العادية

تعريف 1.1.2

هي علاقة تربط بين متغير مستقل و ليكن x و متغير تابع $y(x)$ و واحد أو أكثر من مشتقاته $y', y'', ..., y^n$، أي أنها على الصورة العامة

$$F(x, y, y', ..., y^n) = 0$$

وهذه المعادلة تسمى المعادلة التفاضلية العادية.

أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن x و y مستقلان وكان $z(x, y)$ متغير تابع قابل للإشتقاق بالنسبة لكل من x , y جزئيا، سميت المعادلة المشتملة على المتغيرات المستقلة والمتغير التابع ومشتقاته الجزئية معادلة تفاضلية جزئية وهي على الصورة:

$$G(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, ...) = 0$$

مثال 1.1.2

1. $y' + y = 3x^2$
2. $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$

هي معادلات تفاضلية عادية.

3. $\frac{\partial z}{\partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial x} = 0$
4. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = x$

هي معادلات تفاضلية جزئية.

2.1.1 رتبة المعادلة التفاضلية

إذا كانت المشتقة النونية $y^{(n)}$ هي أعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية فإن هذه المعادلة من الرتبة n (تحدد رتبة المعادلة التفاضلية بأعلى مشتقة فيها).

2.1.2 درجة المعادلة التفاضلية

درجة المعادلة التفاضلية هي أس أكبر مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية بشرط قبل تحديد درجة المعادلة التفاضلية يجب أن تكون جميع المشتقات خالية من الأسس الكسرية أو السالبة.

مثال 2.1.2
(ا) المعادلة

$$y' + y = 0$$

هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة 1 و الدرجة 1 .
(ب) المعادلة

$$y'' + 6x = 0$$

هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة 2 و الدرجة 1 .
(ج) المعادلة

$$[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}} = ky''$$

قبل تحديد درجة هذه المعادلة يجب وضعها على صورة خالية من الكسر اي :

$$[1 + (y')^2]^3 = k^2(y'')^2$$

2.1.3 الحل العام و الحل الخاص

الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الإختيارية و يحقق المعادلة التفاضلية.
أما الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو حل نحصل عليه من الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت قيم معينة.

مثال 3.1.2
العبارة التالية

$$y(x) = c_1 cos(2x) + c_2 sin(2x)$$

تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

مثال 4.1.2
حل المعادلة

$$y' = 2x$$

حيث $x = 0$ و $y = 1$.
الحل
الحل العام هو

$$y = x^2 + c$$

ولكن عند $x = 0$ و $y = 1$ فإن $c = 1$ وعليه الحل

$$y = x^2 + 1$$

هو حل يحقق المعادلة التفاضلية وفي نفس الوقت يحقق الشرط الموضوع على الحل وبالتالي فإن هذا الحل يكون حلا خاصا.

2.1.4 المعادلات التفاضلية التامة

لتكن الدالة $u = f(x, y)$ دالة مستمرة وقابلة للإشتقاق في مجال ما I نقول بأن التفاضل الكلي للدالة u هو du حيث

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

ومن نظريات التحليل الرياضي في المشتقات الجزئية نعلم أن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

نقول عن المقدار

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

بأنه تفاضل تام إذا وجدت دالة u بحيث أن تفاضلها الكلي هو

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

وبعبارة أخرى نقول عن المقدار

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

أنه تفاضل تام إذا كانت هناك دالة بحيث يكون

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

إذا كان المقدار

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

تفاضلا تاما نسمي المعادلة التفاضلية

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

بمعادلة تفاضلية تامة.

2.1.5 الشروط الإبتدائية و الشروط الحدية

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية تعطى بعض الشروط التي يجب أن تحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية و هذه الشروط هي التي تمكننا من تحديد الثوابت الإختيارية التي تظهر في الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة للإيجاد الحل العام.
المعادلة التفاضلية المقرونة بشروط تشتمل على قيم الحل و مشتقاته عند نفس النقطة تسمى هذه الشروط بالشروط الإبتدائية.
المعادلة التفاضلية المقرونة بشروط تشتمل على قيم الحل و مشتقاته عند نقطتين أو أكثر تسمى هذه الشروط بالشروط الحدية.

مثال 5.1.2

لتكن المعادلة التفاضلية $y'' = 3x + y$ حيث $y(0) = 1$ و $y'(0) = 2$ تسمى هذه الشروط بالشروط الإبتدائية .
أما إذا كانت المعادلة $y'' = 3x + y$ حيث $y(0) = 1$ و $y(1) = 2$ تسمى هذه الشروط بالشروط الحدية.

2.1.6 وجود ووحدانية حل المعادلة التفاضلية العادية

نظرية 1.1.2

نفرض المعادلة التفاضلية

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

نفرض الشرط الابتدائي

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.2}$$

وإذا كانت الدالة $f(x, y)$ المعرفة في المنطقة المغلقة المحددة R

$$R : |x - x_0| \leq a, \qquad |y - y_0| \leq b$$

حيث a و b ثابتان.
تحقق :
1-الدالة $f(x.y)$ مستمرة و من ثم محدودة أي إذا وجد عدد موجب M فإن $|f(x, y)| \leq M$
2-الدالة $f(x, y)$ لها مشتقة جزئية بالنسبة إلى y و محدودة أي أن $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial}\right| \leq K$
حيث K عدد موجب.
فإن المعادلة 2.1 تملك حل وحيد $y = y(x)$ يحقق الشرط الابتدائي 2.2 في المنطقة $|x - x_0| \leq h$
حيث $h = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$

مثال 6،1،2
لتكن مسألة كوشي التالية

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

حيث أن $f(x,y) = x^2 + y^2$
دالة كثير حدود، اذن الحل بأي شروط ابتدائية يكون وحيدا، نكون المستطيل R الذي مركزه $(0,0)$ أي

$$R : |x| \leq a, \qquad |y| \leq b$$

حيث $a, b > 0$

$$|f(x,y)| = |x^2 + y^2| \leq |x^2| + |y^2| = x^2 + y^2 = M, h = min\left(a, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

أي أن h تعتمد على a و b فإذا كانت مثلا $a = b = 1$ نجد أن $h = min\left(1, \frac{1}{2}\right)$ أي أن $h = \frac{1}{2}$
و بالتالي فإن المعادلة $y' = x^2 + y^2$ لها حل وحيد في الفترة $|x| \leq \frac{1}{2}$ يحقق الشرط $y(0) = 0$،

مثال 7،1،2
لتكن مسألة كوشي التالية

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + x\sin(xy), & x \in [0,1] \\ y(0) = 0, & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$f(x,y) = 1 + x\sin(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(xy)$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq x^2 \leq 1 = K$$

ومنه

$$\exists K = 1, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq 1$$

إذن مسألة كوشي تمتع بحل وحيد،

ملاحظة 1،1،2
الجدير بالذكر أن "وجود الحل" لا يعني إمكانية الحصول عليه في صورة مضبوطة في جميع الأحوال بل قد يمكن الحصول على الحل بإحدى الطرق التحليلية أو العددية،

2.2 المعادلات التفاضلية الخطية

تعريف 1.2.2
المعادلة التفاضلية $f(x,y,y',...,y^n)=0$ تسمى خطية إذا كانت f دالة خطية في المتغيرات $y,y',...,y^n$ وبالتالي تكون الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n على النحو التالي

$$a_0(x)y+a_1(x)y'+...+a_{n-1}y^{n-1}+a_ny^n=Q(x) \tag{2.3}$$

والصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة الأولى هي

$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{2.4}$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ دوال تتعلق بـ x ومعامل y' يساوي 1.

مثال 1.2.2
المعادلة $y''+2e^xy''+yy''=x^4$ غير خطية لوجود yy' أما $y''+y=0$ فهي معادلة خطية وأي معادلة لا تكون على هذه الصورة فإنها تكون غير خطية.

2.2.1 المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

إذا إنعدمت الدالة $Q(x)$ من المعادلة التفاضلية 2.3 لجميع قيم x قيل أنها معادلة تفاضلية خطية متجانسة.

مثال 2.2.2
المعادلة

$$xy'+(x^2-1)y=0$$

هي معادلة تفاضلية عادية خطية متجانسة من الرتبة الأولى.

2.2.2 المعادلة التفاضلية الخطية بمعاملات ثابتة

إذا كانت المعاملات $a_i(x)$ في المعادلة 2.3 ثابتة لا تتعلق بالمتغير x فاننا نقول عن المعادلة التفاضلية الخطية أنها ذات معاملات ثابتة. وإلا فإنه يقال عنها أنها ذات معاملات متغيرة.

مثال 3.2.2
المعادلة

$$-3y'+2y=e^x$$

هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى ذات معاملات ثابتة.
المعادلة

$$x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$$

هي معادلة تفاضلية ذات معاملات متغيرة.

2.2.3 طريقة حل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

لإيجاد حل المعادلة

$$\frac{dy}{dx} + P'(x)y = Q(x) \qquad (I)$$

إذا كانت المعادلة الخطية متجانسة فإنه من السهل إيجاد الحل حيث نقوم بمكاملة المعادلة الخطية وذلك بفصل المتغيرات كالآتي

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

و بتكامل الطرفين نجد

$$\ln(y) = -\int P(x)dx + \ln c$$

و بإدخال الأسية على الطرفين نجد

$$y = ce^{\int P(x)dx}$$

و لحل المعادلة الخطية غير المتجانسة فإننا نقوم بإيجاد معامل التكامل لذلك نضعها على الشكل

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$$

و نحاول أن نجعلها تامة فنفرض

$$M = P(x)y - Q(x), N = 1$$

$$M_y = P(x), N_x = 0$$

$$M_y - N_x = P(x) = 0$$

أي أن المعادلة غير تامة ونجد أن

$$I = I(x) = e^{\int \dfrac{M_y - N_x}{N}dx} = e^{\int P(x)dx}$$

وهو معامل التكميل.
بضرب طرفي المعادلة في $I(x)$ تصبح تامة.

$$e^{P(x)dx}P(x)ydx - e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + e^{P(x)dx}dy$$

أي أن:

$$d[e^{P(x)dx}y] = e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$$

وبتكامل الطرفين نحصل على حل المعادلة على الصورة

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x) + C$$

حيث C ثابت التكامل.

مثال1

أوجد حل المعادلة

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$$

الحل

المعادلة خطية لـ y.

نضع المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

أي أن

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2 \qquad (2)$$

نجد أن

$$P(x) = \frac{2}{x}, Q(x) = x^2$$

إذا

$$\int P(x)dx = \int \frac{2}{x} = \ln(x^2)$$

$$I(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\ln(x^2)} = x^2$$

ومنه

$$\int x^2x^2dx = \int x^4dx = \frac{1}{5}x^5$$

ويكون حل المعادلة

$$I_y = \int IQ(x)dx + c$$

أي أن

$$x^2y = \frac{1}{5}x^5 + c$$

منه

$$y=\frac{1}{5}x^3+\frac{c}{x^2}$$

مثال2 :

أوجد حل المعادلة

$$(y+y^2)dx-(y^2+2xy+x)dy=0$$

ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق $y=1$ عندما $x=3$.

الحل

$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2+2xy+x}{y+y^2}=0$$

$$\frac{dx}{dy}-\frac{y^2}{y+y^2}-\frac{2xy+x}{y+y^2}=0$$

$$\frac{dx}{dy}-\frac{x(2y+1)}{y+y^2}=\frac{y^2}{y+y^2}$$

$$P(y)=-\frac{2y+1}{y+y^2},Q(y)=\frac{y^2}{y+y^2}=\frac{y}{y+1}$$

$$I(y)=e^{-\int\frac{2y+1}{y+y^2}dy}=e^{-\ln(y+y^2)}=e^{\ln\frac{1}{y+y^2}}=\frac{1}{y+y^2}$$

حل المعادلة هو

$$I(y)x=\int I(y).Q(y)dy$$

$$\int I(y).Q(y)dy=\int\frac{y}{y+y^2}.\frac{1}{y+1}=\int\frac{1}{(y+1)(y+1)}=\int\frac{1}{(y+1)^2}$$

نفرض أن

$$y+1=t$$

$$dy=t$$

$$\int\frac{dt}{t^2}=\int t^{-2}dt=t{-1}+c=\frac{-1}{y+1}+c$$

$$I(y)x=\int I(y)Q(y)dy$$

$$\frac{x}{y+y^2}=\frac{-1}{y+1}+c$$

$$x=\frac{-(y+y^2)}{y+1}+c(y+y^2)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

ولحساب الحل الخاص نضع $x=3$ و $y=1$ فنتحصل على

$$3=\frac{-(1+1^2)}{1+1}+c(1+1^2)\Rightarrow 3=-\frac{2}{2}+c(2)\Rightarrow 3+1=2c\Rightarrow c=2$$

ويكون الحل الخاص هو

$$x = \frac{-(y+y^2)}{y+1} + 2(y+y^2)$$

ملاحظات

- كل معادلة تفاضلية خطية يمكن ارجاعها إلى معادلة تامة ويكون معامل التكميل:

$$g(x) = e^{\int P(x)dx}$$

- كل معادلة تقبل حلا وحيدا يحقق الشرط الإبتدائي.

2.3 جمل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

نعتبر جمل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى من الشكل

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x) \end{cases}$$

حيث g_i,a_{ij} توابع مستمرة على مجال I معطاة حيث $i, j = 1, ..., n$ نلاحظ أن هذه الجملة يمكن كتابتها على الشكل المصفوفي $y' = A(x)y + g(x)$ حيث

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}, \qquad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

مثال 1.3.2

لنعتبر الجملة التالية

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + xy_2 + e^x \\ y_2' = x^3y_1 + y_2 + xy_3 \\ y_3' = 2y_2 + 6xy_3 + e^{-2x} \end{cases} \tag{2.5}$$

نلاحظ أن

$$g(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ e^{-2x} \end{pmatrix}, \qquad A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ x^3 & 1 & x \\ 0 & 3 & 6x \end{pmatrix}$$

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

و بالتالي الجملة 2.5تكتب من الشكل

$$y' = A(x)y + g(x)$$

تعريف 1.3.2
نقول أن

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

أنه حل شعاعي للجملة التفاضلية إذا تحقق الشرطان الآتيان
1- لكل مركبة $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ مشتق مستمر.
2- الشعاع Y يحقق الجملة التفاضلية.

مثال 2.3.2
نعتبر الجملة التفاضلية التالية

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y$$

إن $Y_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$ و $Y_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ يعتبران حلان شعاعيان لها.

خاصية 1.3.2
نعتبر الجملة المتجانسة

$$Y' = A(x)Y \qquad (2.6)$$

إذا كانت $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ حلولا لها فإن العبارة $c_1Y_1 + c_2Y_2 + ... + c_nY_n$ حلا لها.

خاصية 2.3.2
نعتبر الجملة التفاضلية غير المتجانسة

$$Y' = A(x)Y + g(x) \qquad (2.7)$$

إذا كان Y_h حلا خاصا للجملة المتجانسة و Y_p حلا خاصا لها فإن الحل العام لها يكون $Y = Y_h + Y_p$.

تعريف 2.3.2
نقول أن المصفوفة $A(x)$ (الشعاع $g(x)$) مستمرة (مستمر) على المجال I إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصرها (عناصره) دالة مستمرة عند كل نقطة من I.

تعريف 3.3.2
نقول أن المصفوفة $A(x)$، الشعاع $g(x)$ المعرفان على I قابلان للإشتقاق إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصرها قابلا للإشتقاق على هذا المجال.

تعريف 4.3.2
لتكن A مصفوفة $n \times n$ مستمرة على المجال I وليكن $g(x)$ شعاع ذو n مركبة مستمرة على I. حل الجملة $y' = A(x)y + g(x)$ على مجال $J \subset I$ هو عبارة عن شعاع $u(x)$ مشتقه مستمر ويحقق الجملة من أجل كل x من I.
بمعنى

$$u'(x) = A(x)u(x) + g(x)$$

حيث $u'(x)$ مشتقة $u(x)$ من أجل كل x من I.

2.3.1 الرونسكيان للجملة التفاضلية

تعريف 5.3.2
الرونسكيان للجملة 2.6 للحلول $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ هو

$$W(Y_1, Y_2, ..., Y_n)(x) = det(Y_1(x), Y_2(x), ..., Y_n(x))$$

مبرهنة 1.3.2
تكون الحلول $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ للجملة المتجانسة 2.6 مستقلة خطيا إذا وفقط إذا كان

$$W(Y_1, Y_2, ..., Y_n)(x) \neq 0$$

مثال 3.3.2
في المثال السابق الحلان $Y_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$ و $Y_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ مستقلان خطيا وذلك لإن

$$W(Y_1, Y_2)(x) = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

2.3.2 المصفوفة الأساسية لحلول الجملة التفاضلية

تعريف 6.3.2
نسمي مصفوفة أساسية لحلول الجملة 2.6 كل مصفوفة أعمدتها حلول مستقلة خطيا لها، و نرمز لها بالرمز $\phi(x)$.

مثال 4.3.2
في المثال السابق المصفوفة

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

تعتبر مصفوفة أساسية للجملة السابقة.

نظرية 1.3.2
تكون مصفوفة الحلول ϕ مصفوفة أساسية للجملة المتجانسة 2.6 إذا وفقط إذا كان

$$x \in I, det\phi(x) \neq 0$$

نظرية وجود ووحدانية الحل
إدا كانت $A(x)$ مصفوفة مستمرة على المجال I و $g(x)$ شعاع ذو n مركبة مستمرة على نفس المجال I فإنه من أجل كل نقطة x_0 من I ومن أجل شعاع ثابت $y(x_0)$، فإن المسألة ذات الشرط الإبتدائي

$$\begin{cases} y' = A(x)y + g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

تقبل حلا وحيدا فقط على المجال I.

2.4 حل الجمل الخطية المتجانسة و غير المتجانسة

2.4.1 الجمل الخطية المتجانسة

مبرهنة 1.4.2
إذا كانت $\phi(x)$ مصفوفة أساسية للجملة المتجانسة 2.6 فإن الحل العام لها يعطى بالعلاقة التالية:

$$Q_h(x) = \phi(x)C$$

حيث C ثابت اختياري أي على الشكل $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ و $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت اختيارية.

2.4.2 الجمل الخطية غيرالمتجانسة

مبرهنة 2.4.2
لتكن الجملة التفاضلية 2.7 إن الحل العام لهذه الجملة هو

$$\phi(x) = Q_h(x) + \psi(x)$$

حيث $Q_h(x)$ هو الحل للجملة المتجانسة و $\psi(x) = \phi(x)\int_{x_0}^{x}\phi^{-1}(s)g(s)ds$ هو الحل الخاص للجملة غير المتجانسة.

مثال 1.4.2
لتكن الجملة التالية

$$\begin{cases} y_1' = 8y_1 - 3y_2 \\ y_2' = 16y_1 - 8y_2 - 2e^{2x} \end{cases} \quad , \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

1- كتابة الجملة على الشكل المصفوفي

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^{2x} \end{pmatrix}$$

2- لدينا $u_1(x) = \begin{pmatrix} e^{-4x} \\ 4e^{-4x} \end{pmatrix}$ و $u_2(x) = \begin{pmatrix} 3e^{4x} \\ 4e^{4x} \end{pmatrix}$ يشكلان حلا للجملة المتجانسة.
حيث لدينا

$$A(x)u_1(x) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-4x} \\ 4e^{-4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4e^{-4x} \\ -16e^{-4x} \end{pmatrix}$$

و

$$u_1'(x) = \begin{pmatrix} -4e^{-4x} \\ -16e^{-4x} \end{pmatrix}$$

وبالتالي $A(x)u_1(x) = u_1'(x)$ ومنه $u_1(x)$ حلا للجملة المتجانسة المرفقة بالجملة 2.8.

ولدينا

$$A(x)u_2(x) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 16 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{4x} \\ 4e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12e^{4x} \\ 16e^{4x} \end{pmatrix}$$

و

$$u_2'(x) = \begin{pmatrix} 12e^{4x} \\ 16e^{4x} \end{pmatrix}$$

وبالتالي $A(x)u_2(x) = u_2'(x)$ ومنه $u_2(x)$ حلا للجملة المتجانسة المرفقة بالجملة 2.8.

3-دراسة استقلالية $u_1(x)$ و $u_2(x)$

لدينا

$$\begin{vmatrix} -4e^{-4x} & 3e^{4x} \\ 4e^{-4x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8 \neq 0$$

ومنه u_1 و u_2 مستقلين خطيا. وبالتالي المصفوفة الأساسية من الشكل

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} e^{-4x} & 3e^{4x} \\ 4e^{-4x} & 4e^{4x} \end{pmatrix}$$

الحل العام للجملة غير المتجانسة من الشكل

$$\phi(x) = \phi_h(x) + \psi(x)$$

حيث حل الجملة المتجانسة المرفقة هو

$$\phi_h(x) = \phi(x).c$$

لدينا:

$$\phi_h(0) = y(0) = \phi(0)c$$

أي:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

وبعد الحساب نجد: $c_1 = \frac{-7}{8}$ و $c_2 = \frac{5}{8}$ ومنه

$$\phi_h(x) = \begin{pmatrix} e^{-4x} & 3e^{4x} \\ 4e^{-4x} & 4e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-7}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -7e^{-4x} + 15e^{4x} \\ -28e^{-4x} + 20e^{4x} \end{pmatrix}$$

إذن

$$\psi(x) = \phi(x) \int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(s) g(s) ds$$

حيث

$$\phi^{-1}(s) = \frac{1}{\det \phi(s)} (com\phi)^t$$

ومنه

$$\int_{x_0}^{x} \phi^{-1}(s) g(s) ds = -\frac{1}{8} \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} 4e^{-4x} & -3e^{4x} \\ -4e^{-4x} & e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^{2x} \end{pmatrix} ds$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 - e^{6x} \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix}$$

إذن

$$\psi(x) = \frac{1}{8} \phi(x). \begin{pmatrix} 1 - e^{6x} \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{-4x} - e^{2x} + 3e^{4x} - 3e^{2x} \\ 4e^{-4x} - 4e^{2x} + 4e^{4x} - 4e^{2x} \end{pmatrix}$$

التحقق

$$\psi(x) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 + 3 - 4 \\ 4 + 4 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}$$

2.5 حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات معاملات ثابتة باستخدام تحويل لابلاس

مثال 1.5.2

لنبدأ بالمسألة البسيطة التالية

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

نرمز لتحويل لابلاس بـ

$$Y(s) = \mathcal{L}(y)$$

بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة، يكون لدينا

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = 0$$

وبما أن $y(0) = y'(0) = 1$ فإننا نحصل على

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)y(0) + y'(0) = s + 4$$

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+2} = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$$

ومنه بتفكيك $Y(s)$ نحصل على تحويل لابلاس العكسي له

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

وبالحساب البسيط نجد

$$A = 3, B = -2$$

عندئذ

$$Y(s) = \frac{3}{s+1} + \frac{-2}{s+2}$$

وبإستخدام تحويل لابلاس العكسي نجد

$$y(x) = 3e^{-x} - 2e^{-2x}$$

ملاحظة 1.5.2

توصلنا إلى الحل مباشرة، دون استخدام صيغة الحل العام لحساب الثوابت باستخدام الشروط الإبتدائية.

مثال 2.5.2

أحسب مستعملا تحويل لابلاس، حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

الحل

لدينا باستخدام تحويل لابلاس

$$s^2Y(s) - s - 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{1}{s-3}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} + \frac{s-3}{(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s-2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد

$$A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}, D = 2, E = -1$$

ومنه

$$Y(s) = \frac{5}{2} \times \frac{5}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{s-3}$$

أي

$$Y(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{5}{2}e^{x} - 2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}\right\}$$

وهذا يعطي

$$y(x) = \frac{5}{2}e^{x} - 2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$$

2.6 حل المعادلات التفاضلية العادية بمعاملات غير ثابتة

مثال 1.6.2

أوجد حل المعادلة التفاضلية باستعمال تحويل لابلاس

$$xy''(x) + (1-2x)y'(x) - 2y(x) = 0$$

مع الشروط الإبتدائية $y(0) = 1, y'(0) = 2$ نطبق تحويل لابلاس

$$\mathcal{L}\{xy''(x)\}(s) + \mathcal{L}\{(1-2x)y'(x)\}(s) - 2\mathcal{L}\{y(x)\}(s) = 0$$

مع

$$\mathcal{L}\{y(x)\}(s) = Y(s)$$

لدينا

$$-\frac{d}{ds}(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + sY(s) - y(0) + 2\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = 0$$

نكتب المعادلة السابقة على الشكل التالي:

$$(s-2)Y'(s) + Y(s) = 0$$

ومنه

$$Y'(s) + \frac{Y(s)}{s-2} = 0$$

بالتكامل نجد

$$\ln(Y(s)) + \ln(s-2) = c$$

حيث c ثابت.
وبالتالي

$$Y(s) = \frac{c}{s-2}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = c\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = 2x$$

بتعويض الشروط الإبتدائية نجد

$$y(0) = 1 = c$$

وأخيرا

$$y(x) = e^{2x}$$

2.7 حل جمل المعادلات التفاضلية الخطية بمعاملات ثابتة

مثال 1.7.2
لنحسب الحل (y_1, y_2) للجملة التالية

$$\begin{cases} y_1' + 3y_2' = 0 \\ y_1' + y_1 + 2y_2' = 0 \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = -1 \end{cases}$$

بتطبيق تحويل لابلاس على المعادلتين فنجد

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_1') + 3\mathcal{L}(y_2') = 0 \\ \mathcal{L}(y_1') - \mathcal{L}(y_1) + 2\mathcal{L}(y_2') = 0 \end{cases}$$

أي أن

$$\begin{cases} s\mathcal{L}(y_1) - y_1(0) + 3s\mathcal{L}(y_2) - 3y_2(0) = 0 \\ s\mathcal{L}(y_1) - y_1(0) - \mathcal{L}(y_1) + 2s\mathcal{L}(y_2) - 2y_2(0) = 0 \end{cases}$$

بأخذ الشروط الإبتدائية

$$\begin{cases} s\mathcal{L}(y_1) - 3s\mathcal{L}(y_2) + 2 = 0 \\ s\mathcal{L}(y_1) + 2s\mathcal{L}(y_2) - \mathcal{L}(y_1) = 0 \end{cases}$$

و بوضع $\mathcal{L}(y_1) = Y_1, \mathcal{L}(y_2) = Y_2$ نجد

$$\begin{cases} sY_1 - 3sY_2 = -2 \\ (s-1)Y_1 + 2sY_2 - 1 \end{cases}$$

و بوضع الجملة على الشكل المصفوفي نجد

$$\begin{pmatrix} s & -3s \\ s-1 & 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

فإن محدد المصفوفة هو

$$\Delta = 2s^2 + 3s(s-1) = 5s^2 - 3s$$

إذن

$$\Delta Y_1 = -7s, \Delta Y_2 = s - 1$$

ومنه

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\Delta Y_1}{\Delta} = \frac{-7s}{5s^2 - 3s} = \frac{-7}{5s-3} \\ Y_2 &= \frac{\Delta Y_2}{\Delta} = \frac{s-1}{5s^2 - 3s} = \frac{1}{3s} - \frac{2}{3(5s-3)} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -\frac{7}{5} e^{\frac{3}{5}x} \\ y_2(x) &= \frac{1}{3} - \frac{2}{15} e^{\frac{9}{15}x} \end{aligned}$$

باب 3

تطبيقات تحويل لابلاس في حل المعادلات التكاملية

في هذا الفصل سنحاول حل بعض أنواع المعادلات التكاملية باستعمال تحويل لابلاس.والذي اعتمدنا فيه على المرجع [3] .

3.1 المعادلات التكاملية

تعريف 1.1.3
المعادلة التكاملية هي أي معادلة تظهر فيها الدالة المجهولة $u(s)$ تحت رمز التكامل في المعادلة، و تعتبر المعادلة التالية أحد نماذج المعادلات التكاملية:

$$u(s) = f(s) + \lambda \int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} K(s,t)u(t)dt$$

حيث $\alpha(s)$ و $\beta(s)$ هما حدي التكامل، λ هو وسيط ثابت، و $K(s,t)$ هي دالة لمتغيرين s و t تسمى نواة معادلة التكامل. الدالة u التي سيتم تحديدها تظهر تحت رمز التكامل، و أحيانا خارج رمز التكامل. الدالتين $f(s)$ و $k(s,t)$ معطاة. حدي التكامل $\alpha(s)$ و $\beta(s)$ قد يكونان متغيرين، ثابتين، أو مختلطين، و قد يكونان في بعد واحد أو أكثر.

3.1.1 تصنيف المعادلات التكاملية

المعادلات التكاملية الخطية

تكون على الشكل التالي

$$u(s) = f(s) + \lambda \int_{a}^{b} K(s,t)u(t)dt \tag{3.1}$$

حيث تكون خطية إذا و فقط إذا ظهرت الدالة المجهولة u تحت رمز التكامل بشكل خطي.

مثال 1.1.3
المعادلة

$$u(s) = \frac{3}{2}s - \frac{1}{3} + \int_{0}^{1} (s-t)u(t)dt \tag{3.2}$$

سميت المعادلة التكاملية بالخطية لأن الدالة المجهولة u ظهرت تحت رمز التكامل بشكل خطي .

1-معادلات فريدهوم التكاملية :
الشكل النموذجي لمعادلات فريدهولم التكاملية هو:

$$h(s)u(s) = f(s) + \lambda \int_{a}^{b} K(s,t)u(t)dt \tag{3.3}$$

- إذا كانت الدالة $h(s)=1$ فإن المعادلة 3.3 تصبح بسيطة على الشكل

$$u(s)=f(s)+\lambda\int_D K(s,t)u(t)dt$$

و هذه المعادلة تسمى معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني.

- إذا كانت الدالة $h(s)=0$ فإن المعادلة 3.3 تكافئ:

$$f(s)+\lambda\int_D K(s,t)u(t)dt=0$$

و تسمى معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الأول.

- إذا كانت الدالة $h(s)\neq 0,1$ فإن المعادلة 3.3 تسمى معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثالث.

3.1.1 ملاحظات

1-إذا كانت $f(s)=0$ نقول أن المعادلة 3.3متجانسة.
2- إذا كانت $f(s)\neq 0$ نقول أن المعادلة 3.3غير متجانسة.

2-معادلات فولتيرا التكاملية

الشكل النموذجي لمعادلة فولتيرا التكاملية هو

$$h(s)u(s)=f(s)+\lambda\int_\alpha^s K(s,t)u(t) \qquad (3.4)$$

حيث الحد الأعلى للتكامل متغير و الدالة المجهولة تحت رمز التكامل خطية أو غير خطية.

- إذا كانت الدالة $h(s)=1$ فإن المعادلة 3.4 تصبح من الشكل:

$$u(s)=f(s)+\lambda\int_\alpha^s K(s,t)u(t)dt$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

- إذا كانت الدالة $h(s)=0$ فإن المعادلة 3.4تصبح من الشكل :

$$f(s)+\lambda\int_\alpha^s K(s,t)u(t)dt=0$$

و هذه المعادلة تسمى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول.

- إذا كانت الدالة $h(s)\neq 0,1$ فإن المعادلة 3.4 تسمى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثالث.

ملاحظات 3،1،2

1-إذا كانت $f(s)=0$ نقول أن المعادلة 3،4متجانسة.

2- إذا كانت $f(s)\neq 0$ نقول أن المعادلة 3،4غير متجانسة.

ملاحظة 1،1،3

المعادلة التكاملية لفولثيرا هي حالة خاصة من المعادلة التكاملية لفريدهولم حيث تكون فيها النواة تحقق

$$k(s,t)=0; \quad s<t$$

3-المعادلات التكاملية لآبل

الشكل النموذجي لمعادلة آبل هو

$$f(s)=\int_0^s \frac{1}{\sqrt{s-t}}u(t)dt \tag{3،5}$$

ملاحظة 2،1،3

1- توجد معادلة تكاملية لآبل عامة تكتب بالشكل

$$f(s)=\int_0^s \frac{1}{(s-t)^\alpha}u(t)dt; \quad 0<\alpha<1 \tag{3،6}$$

المعادلات التكاملية غير الخطية

تكون على الشكل التالي

$$u(s)=f(s)+\lambda\int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} K(s,t)F(u(t))dt \tag{3،7}$$

سميت المعادلة التكاملية 3،7بغير الخطية لأن الدالة المجهولة u مركبة مع دالة غير خطية F .

مثال 2،1،3

$$u(s)=1+\int_0^s (1+s-t)u^4(t)dt \tag{3،8}$$

1-معادلات فريدلهوم التكاملية

المعادلة التكاملية الغير الخطية لفريدهولم من النوع الأول تكتب بالشكل

$$f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t,u(t))dt=0 \tag{3،9}$$

• النوع الثاني لهذه المعادلة يكتب بالشكل

$$u(t) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t,u(t))dt \qquad (3.10)$$

• النوع الثالث لهذه المعادلة يكتب بالشكل

$$h(s)u(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t,u(t))dt \qquad (3.11)$$

1-معادلات فولثيرا التكاملية

المعادلة التكاملية الغير الخطية لفولثيرا من النوع الأول تكتب بالشكل

$$f(s) + \lambda \int_a^s K(s,t,u(t))dt = 0 \qquad (3.12)$$

• النوع الثاني لهذه المعادلة يكتب بالشكل

$$u(t) = f(s) + \lambda \int_a K(s,t,u(t))dt \qquad (3.13)$$

• النوع الثالث يكتب بالشكل

$$h(s)u(s) = f(s) + \lambda \int_a^s K(s,t,u(t))dt \qquad (3.14)$$

3.1.3 ملاحظات

1-إذا كانت $f(s) = 0$ نقول أن 3.12 المعادلةمتجانسة.

2- إذا كانت $f(s) \neq 0$ نقول أن المعادلة 3.12غير متجانسة.

1-معادلات آبل التكاملية

المعادلة التكاملية الغير خطية لآبل تكتب بالشكل

$$u(s) = \int_{-\infty}^s (s-t)^{\alpha-1} g(u(t))dt \qquad (3.15)$$

حيث $0 < \alpha < 1$ و $g : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ و $g(0) = 0$ ، $g(s) > 0$ من أجل كل $s > 0$.

2-المعادلات التكاملية الشاذة

نقول عن معادلة تكاملية أنها شاذة إذا كان أحد حدي التكامل أو كليهما مالانهاية، أو كانت النواة غير محدودة عند نقطة أو أكثر على مجال التكامل. تنقسم المعادلات التكاملية الشاذة بدورها إلى ثلاثة أنواع و هي:

• المعادلة التكاملية ضعيفة الشذوذ : كل معادلة نواتها تكون على الشكل

$$K(s,t)=\frac{H(s,t)}{|s-t|^{\alpha}}$$

أو

$$K(s,t)=H(s,t)ln|s-t|$$

حيث $H(s,t)$ محدودة (قابلة للمفاضلة عدة مرات) على $a\leq s\leq b$ و $a\leq t\leq b$ مع $H(s,t)\neq 0$ و α ثابت يحقق $0<\alpha<1$.

مثال 3.1.3 المعادلة

$$f(s)=\lambda\int_{0}^{s}\frac{1}{(s-t)^{\alpha}}u(t)dt,\quad 0<\alpha<1 \tag{3.16}$$

هي معادلة تكاملية شاذة ذات نواة ضعيفة الشذوذ.

- المعادلة التكاملية الشاذة : كل معادلة نواتها تكون على الشكل

$$K(s,t)=\frac{H(s,t)}{s-t}$$

حيث $H(s,t)$ دالة قابلة للمفاضلة بالنسبة لـ (s,t) مع $H(s,t)\neq 0$ ،حينئذ نقول عن المعادلة التكاملية أنها معادلة شاذة مع نواة كوشي.

- المعادلة التكاملية قوية الشذوذ: إذا كانت النواة $K(s,t)$ على الشكل

$$K(s,t)=\frac{H(s,t)}{(s-t)^{2}}$$

حيث $H(s,t)$ دالة قابة للمفاضلة بالنسبة لـ (s,t) مع $H(s,t)\neq 0$.

4-المعادلات التكاملية التفاضلية

في هذا النوع من المعادلات ، الدالة المجهولة u تظهر على شكل مشتقة في الطرف الأيمن من المعادلة ، كما تظهر تحت رمز التكامل في الطرف الآخر . و يمكن لهذا النوع من المعادلات التكاملية أن تكون من نوع معادلات فريدهولم أو معادلات فولتيرا .

و تنذمج بالشكل :

$$u'(s)=f(s)+\lambda\int_{a}^{b}K(s,t)u(t)dt$$

5-معادلات فولتيرا-فريدهوم التكاملية

الشكل النموذجي لهذه المعادلات هو :

$$u(s)=f(s)+\int_{a}^{s}K_{1}(s,t)u(t)dt+\int_{a}^{b}K_{2}(s,t)u(t)dt$$

6-معادلات فولتيرا-فريدهوم التكاملية التفاضلية

الشكل النموذجي لهذه المعادلات هو :

$$u^{(n)}(s)=f(s)+\int_{a}^{s}K_{1}(s,t)u(t)dt+\int_{a}^{b}K_{2}(s,t)u(t)dt$$

3.2 تطبيقات على المعادلات التكاملية

3.2.1 تطبيقات على المعادلات التكاملية لفولتيرا

تطبيقات على المعادلات التكاملية الخطية لفولتيرامن النوع الأول

- لتكن المعادلة التكاملية لفولثيرا من النوع الأول :

$$f(s) = \int_0^s K(s-t)u(t)dt \tag{3.17}$$

حيث $K(s-t)$ تسمى نواة معادلة فولثيرا التكاملية من النوع الأول، $f(s)$ دالة حقيقية و $u(s)$ هي حلها.
نأخذ تحويل لابلاس لجداء الإلتفاف كالتالي

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^s K(s-t)u(t)dt\right\} = H(s)U(s)$$

ناخذ أيضا تحويل لابلاس للمعادلة 3.17 نجد

$$F(s) = H(s)U(s) \tag{3.18}$$

حيث

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(x)\}, F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}, H(x) = \mathcal{L}\{K(x)\}$$

حل المعادلة يعطينا

$$U(s) = \frac{F(s)}{H(s)}, (H(s) \neq 0) \tag{3.19}$$

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{H(s)}\right\} \tag{3.20}$$

مثال 1.2.3
حل المعادلة التكاملية لفولثيرا من النوع الأول التالية

$$1 - cos(x) = \int_0^x cos(x-t)u(t)dt \tag{3.21}$$

نطبق تحويل لابلاس على جداء الإلتفاف، نجد

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x cos(x-t)u(t)dt\right\} = \frac{s}{s^2+1}U(s)$$

نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة 3،21 نجد

$$\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1}U(s)$$

بمعنى

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1}U(s)$$

وبالتالي

$$U(s) = \frac{1}{s^2} \tag{3،22}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي في طرفي المعادلة 3،22 نجد

$$u(x) = x$$

تطبيقات على المعادلات التكاملية الخطية لفولتيرامن النوع الثاني

- لتكن المعادلة التكامليةلفولتيرا من النوع الثاني التالية :

$$\phi(x) - \lambda\int_0^x K(x-y)\phi(y)dy = f(x) \tag{3،23}$$

نعرف تحويلات لابلاس للتوابع $\phi(x)$ ، $f(x)$ و $K(x)$ كما يلي

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma x}\phi(x)dx$$
$$\mathcal{F}(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma x}f(x)dx$$
$$H(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma x}K(x)dx$$

بتطبيق تحويل لابلاس على جداء الإلتفاف نجد

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x K(x-y)\phi(y)dy\right\} = H(\sigma)\Phi(\sigma)$$

وبتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة 3،23 نجد

$$\Phi(\sigma) - \lambda H(\sigma)\Phi(\sigma) = \mathcal{F}(\sigma)$$

ومنه

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{1-\lambda H(\sigma)}\mathcal{F}(\sigma), (1-\lambda H(\sigma) \neq 0) \tag{3.24}$$

نحسب تحويل لابلاس العكسي للمعادلة السابقة نجد

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+p}^{+i\infty+p} e^{\sigma x}\frac{1}{1-\lambda H(\sigma)}\mathcal{F}(\sigma)d\sigma \tag{3.25}$$

العبارة 3.25 هي حل معادلة فولتيرا من النوع الثاني 3.23.

مثال 2.2.3

حل المعادلة التكاملية لفولتيرا من النوع الثاني التالية

$$\phi(x) - \int_0^x sin(x-y)\phi(y)dy = cos(x) \tag{3.26}$$

حيث $\lambda = 1, K(x-y) = sin(x-y)$ و $f(x) = cos(x)$, نستعمل تحويل لابلاس لجداء الإلتفاف ،نجد

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x sin(x-y)\phi(y)dy\right\} = \mathcal{L}\{sin(x)\}\mathcal{L}\{\phi(x)\} = \frac{1}{\sigma^2+1}\Phi(\sigma)$$

نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة 3.26 نجد

$$\Phi(\sigma) - \frac{1}{\sigma^2+1}\Phi(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma^2+1})$$

بمعنى

$$\Phi(\sigma)(1-\frac{1}{(\sigma^2+1)}) = \frac{\sigma}{\sigma^2+1}$$

وبالتالي

$$\Phi(\sigma)(\frac{\sigma^2}{(\sigma^2+1)}) = \frac{\sigma}{\sigma^2+1} \tag{3.27}$$

إذن

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \tag{3.28}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي في طرفي المعادلة 3.28 نجد

$$\phi(x) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{\sigma}) = 1$$

تطبيقات على المعادلات التكاملية غير الخطية لفولتيرامن النوع الأول

- لتكن المعادلة التكاملية غير الخطية لفولتيرا من النوع الأول التالية

$$\int_0^x K(x,t)F(u(t))dt = f(x) \tag{3.29}$$

حيث $K(x,t)$ و $f(x)$ هي توابع ذات قيم حقيقية و $F(u(t))$ هي دالة غير خطية لـ $u(x)$.
نستعمل التحويل التالي

$$v(x) = F(u(x)) \qquad (*)$$

و منه

$$u(x) = F^{-1}(v(x)) \qquad (**)$$

نعوض $(*)$ في 3.29 نجد:

$$\int_0^x K(x,t)v(t)dt = f(x) \tag{3.30}$$

نفرض أن النواة $K(x,t)$ هي نواة فرق. نطبق تحويل لابلاس على المعادلة 3.30 نجد

$$\mathcal{L}\{K(x-t)\} \times \mathcal{L}\{v(x)\}$$

و منه

$$label20V(s) = \frac{F(s)}{H(s)} \tag{3.31}$$

بحيث

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}, H(s) = \mathcal{L}\{K(x)\}, V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$$

نطبق الآن تحويل لابلاس العكسي على طرفي المعادلة ?? نجد $v(x)$ ثم نحصل على $u(x)$ باستعمال $(**)$.

مثال 3.2.3
حل المعادلة التكاملية الغير خطية لفولتيرا من النوع الأول التالية

$$\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \int_0^x (x-t)u^2(t)dt \tag{3.32}$$

نفترض

$$v(x) = u^2(x) \qquad (*)$$

و منه

$$u(x) = \pm\sqrt{v(x)} \qquad\qquad (**)$$

نعوض بالعبارة $(*)$ في المعادلة 3.32 نجد

$$\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \int_0^x (x-t)v(t)dt \tag{3.33}$$

نطبق الآن تحويل لابلاس على طرفي المعادلة 3.33 نجد

$$\frac{1}{4}\mathcal{L}\{e^{2x}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{x\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}\{1\} = \mathcal{L}\{x\}\mathcal{L}\{v(x)\}$$

ومنه

$$\frac{1}{4(s-2)} - \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} = \frac{1}{s^2}V(s)$$

إذن

$$V(s) = \frac{1}{(s-2)} \tag{3.34}$$

حيث

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي علي طرفي المعادلة 3.34 نجد

$$v(x) = e^{2x}$$

ومنه

$$u(x) = \pm e^{x}$$

نلاحظ أننا تحصلنا على حلين للمعادلة 3.32 وهذا لأنها غير خطية، و بالتالي فإن حلها غير وحيد.

3.2.2 تطبيقات على المعادلات التكاملية لآبل

تطبيقات على المعادلات التكاملية لآبل العامة

- لتكن المعادلة التكاملية الخطية لآبل العامة التالية :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}}u(t)dt \tag{3.35}$$

حيث α ثابت حقيقي و $0 < \alpha < 1$.
نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة 3.35 نجد

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{u(x)\}\mathcal{L}\{x^{-\alpha}\}$$

هذا يعني

$$F(s) = U(s)\frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}$$

ومنه

$$U(s) = \frac{s^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}F(s) \tag{3.36}$$

المعادلة 3.36 يمكن كتابتها على الشكل التالي

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\mathcal{L}\{y(x)\} \tag{3.37}$$

حيث

$$y(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} f(t)dt$$

باستعمال تحويل لابلاس للمشتقة التالي

$$\mathcal{L}\{y'(x)\} = s\mathcal{L}\{y(x)\} - y(0)$$

و

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{sin\alpha\pi}$$

نجد

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{sin\alpha\pi}{\pi}\mathcal{L}\{y'(x)\} \tag{3.38}$$

نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة 3.38 نجد

$$u(x) = \frac{sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \tag{3.39}$$

و بالتالي

$$u(x) = \frac{sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\right), 0 < \alpha < 1 \tag{3.40}$$

مثال 4.2.3

حل المعادلة التكاملية لآبل العامة التالية

$$\pi x = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} u(t)dt \tag{3.41}$$

علما أن $\alpha = \frac{2}{3}, f(x) = \pi x$, نستعمل المعادلة 3.39 نجد

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\pi t}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}x^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

تطبيقات على المعادلات التكاملية لآبل

• لتكن المعادلة التكاملية لآبل التالية :

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}}u(t)dt \tag{3.42}$$

نستعمل نفس الطريقة لحل المعادلات التكاملية لآبل و ذلك بوضع $\alpha=\frac{1}{2}$ فيكون الحل بالشكل التالي

$$U(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt \tag{3.43}$$

مثال 5.2.3

حل المعادلة التكاملية لآبل التالية

$$\frac{\pi}{2}x=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}u(t)dt \tag{3.44}$$

نعوض $f(x)=\frac{\pi}{2}x$, في المعادلة 3.44 نجد

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\frac{\pi}{2}t}{\sqrt{x-t}}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left(\frac{2\pi}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

تطبيقات على المعادلات التكاملية لفولتيرا ضعيفة الشذوذ

سوف نقوم بحل المعادلات التكاملية لفولتيرا ضعيفة الشذوذ من الشكل

$$u(x)=f(x)+\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}}u(t)dt, 0<\alpha<1 \tag{3.45}$$

و ذلك باستعمال تحويل لابلاس لجداء الإلتفاف كمايلي

$$\mathcal{L}\{\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}}u(t)dt\}=\mathcal{L}\{x^{-\alpha}\}\mathcal{L}\{u(x)\}=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}U(s)$$

نطبق تحويل لابلاس على المعادلة 3.45 نجد

$$\mathcal{L}\{u(x)\}=\mathcal{L}\{f(x)\}+\mathcal{L}\{x^{-\alpha}\}\mathcal{L}\{u(x)\}$$

يعني

$$U(s) = F(s) + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}} U(s)$$

ومنه

$$U(s) = \frac{s^{1-\alpha}F(s)}{s^{1-\alpha} - \Gamma(1-\alpha)} \qquad (3.46)$$

نطبق تحويل لابلاس العكسي على طرفي المعادلة 3.46 نجد

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{1-\alpha}F(s)}{s^{1-\alpha} - \Gamma(1-\alpha)}\right\} \qquad (3.47)$$

مثال 6.2.3

حل المعادلة التكاملية لفولتيرا ضعيفة الشذوذ التالية

$$u(x) = 4 - 8\sqrt{x} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt \qquad (3.48)$$

نلاحظ أنه يمكن وضع $\alpha = \frac{1}{2}$ و $f(x) = 4 - 8\sqrt{x}$, نطبق تحويل لابلاس على التابع $f(x)$ نجد

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{4\} - 8 \times \mathcal{L}\{x^{\frac{1}{2}}\} \\ &= \frac{4}{s} - 8 \times \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{4}{s} - 8 \times \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{4}{s} - \frac{4\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

وذلك باستعمال المساواة $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$ بتعويض عبارة $F(s)$ في المعادلة 3.47 نجد

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{s} - \frac{4\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}}\right)}{s^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\pi}}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{s^{\frac{1}{2}}} - \frac{4\sqrt{\pi}}{s}}{s^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\pi}}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{4s^{\frac{1}{2}} - 4\sqrt{\pi}}{s}}{s^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\pi}}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{4}{s}\} \\ &= 4 \end{aligned}$$

تطبيقات على المعادلات التكاملية لآبل الغير خطية

• لتكن المعادلة التكاملية الخطية لآبل غير الخطية التالية :

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}K(u(t))dt \tag{3.49}$$

حيث $f(x)$ هي دالة حقيقية غير خطية لـ $u(x)$.
لإيجاد حل للمعادلة غير الخطية لآبل 3.49 نحولها أولا إلى معادلة خطية لآبل من الشكل

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}v(t)dt \tag{3.50}$$

وذلك بوضع $v(x)=K(u(x))$ حيث $K(u(x))$ هي دالة قابلة للقلب بمعنى $u(x)=K^{-1}(v(x))$
بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة 3.50 نجد

$$\mathcal{L}\{f(x)\}=\mathcal{L}\{v(x)\}\mathcal{L}\{x^{-\frac{1}{2}}\}$$

هذا يعني

$$F(s)=V(s)\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}=V(s)\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}$$

ومنه

$$V(s)=\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}F(s) \tag{3.51}$$

المعادلة 3.51 يمكن كتابتها على الشكل التالي

$$V(s)=\frac{s}{\pi}(s^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}F(s)) \tag{3.52}$$

والتي تكتب بدورها على الشكل

$$\mathcal{L}\{v(x)\}=\frac{s}{\pi}\mathcal{L}\{y(x)\} \tag{3.53}$$

حيث

$$y(x)=\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}f(t)dt$$

باستعمال تحويل لابلاس للمشتقة التالي

$$\mathcal{L}\{y'(x)\}=s\mathcal{L}\{y(x)\}-y(0)$$

نجد

$$\mathcal{L}\{v(x)\}=\frac{1}{\pi}\mathcal{L}\{y'(x)\} \tag{3.54}$$

نطبق تحويل لابلاس العكسي على طرفي المعادلة 3.54 نجد

$$v(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt \tag{3.55}$$

باستعمال

$$u(x) = F^{-1}(v(x)) \tag{3.56}$$

نجد حل المعادلة التكاملية غير الخطية لآبل 3.49.

مثال 7.2.3

حل المعادلة التكاملية لآبل غير الخطية التالية

$$x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}u^2(t)dt \tag{3.57}$$

علما أن $F(u(x)) = u^2(x)$ قابلة للقلب.

نضع

$$v(x) = u^2(x) \qquad (*)$$

ومنه

$$u(x) = \mp\sqrt{v(x)} \qquad (**)$$

نعوض بـ $(*)$ في المعادلة 3.57 نجد

$$x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}v(t)dt$$

نعوض بـ $f(x) = x$ في المعادلة 3.55 نجد

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t}{\sqrt{x-t}}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

إذن

$$u(x) = \mp\sqrt{\frac{2}{\pi}x^{\frac{1}{2}}}$$

خاتمة

يعد تحويل لابلاس أداة قوية و فعالة في حل المعادلات التفاضلية والتكاملية حيث أنه يمكُن من تحويل هذه المعادلات المعقدة إلى معادلات جبرية أكثر بساطة. كذلك فهو يسهل عملية تحليل الأنظمة المختلفة، سواءا كانت في مجال الهندسة، الفيزياء أو حتى الإقتصاد. لذلك فإن استخدام تحويل لابلاس لا يسهم فقط في تبسيط الحسابات الرياضية بل يعزز أيضا من فهمنا العميق لسلوك الأنظمة الديناميكية المختلفة.

نأمل أن تكون هذه المذكرة قد ساهمت ولو بالقليل في إثراء هذا الموضوع، ونرجو أن يكون عملنا المتواضع هذا مرجعا لطلبة المستقبل وإفادة لمكتبة المدرسة العليا.

المصادر

[1] Spiegel, M. R. (1965). *Laplace transforms (p. 249). New York: McGraw-Hill.*

[2] Rondepierre, A., and Rouchon, A. (2012). *Introduction aux Équations aux dérivées partielles, Étude théorique. Département STPI, INSA Toulouse, 2013.*

[3] Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and nonlinear integral. equations (Vol. 639, pp. 35-36). Berlin: Springer.*

[4] عذراء نعمة كاظم و علي حسن محمد. (2009). في حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويلات لابلاس. مجلة الكلية الاسلامية الجامعة, 1(7), 55-43.

[5] د. علي حسن محمد.(2009). حل المعادلات التفاضلية الخطية الجزئية المتجانسة واللامتجانسة باستخدام تحويلات لابلاس. مجلة الكلية الاسلامية الجامعة, 1(7), 42-27.

الملخص:

قمنا في هذه المذكرة بدراسة تحويل لابلاس وتطبيقاته في حل المعادلات التفاضلية والتكاملية.

كلمات مفتاحية:

تحويل لابلاس، المعادلات التفاضلية الخطية، المعادلات التكاملة، معادلات فولتيرا التكاملية، معادلات فريدهولم التكاملية.