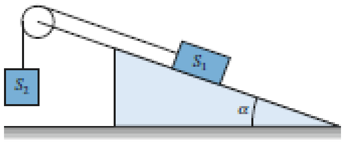
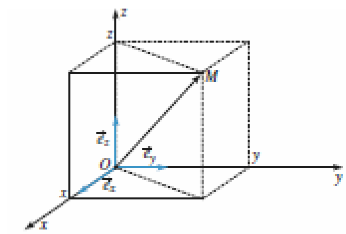
الجمهوريـــة الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة

وزارة التعليـــم العالـــــي والبحـــــث العـمي

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي بسكيكدة





مطبوعة

التخصص : فيزياء

المستوى : السنة الأولى تعليم ثانوي و متوسط

أسس الميكانيك
دروس وتمارين

الأستاذة : بدبودي حياة

الرتبة: أستاذ محاضر قسم ب

في: 2016/12/01

الفهرس

المحور III : حركيات نقطة مادية

الفصل IV: الحركة النسبية (المركبة)

الفصلV : تحريك النقطة مادية

الفصل VI: العمل و الطاقة

الفصل VII : تحريك جملة نقاط مادية

الفصل VIII : التصادم

الفصلIX : الجسم الصلب

المراجع (BIBLIOGRAPHIE)

1- ع. قرزيز، س- غميض، ح. مراجي : مسائل محلولة في الفيزياء _ميكانيك (الجزء الأول و الثاني)_مطبوعات جامعة باجي مختار -عنابة

2- ع. عماري، م.ص. فراح، ر.العلمي، م.ط. مفتاح: مسائل محلولة في ميكانيك النقطة المادية_ ديوان المطبوعات الجامعية

3- ع. بن لعلي : مجموعة امتحانات في الفيزياء (ميكانيك، كهرباء، مغناطسية) _ منشورات جامعة باجي مختار –عنابة

4- أ. فزازي :ميكانيك النقطة المادية (دروس مبسطة + 100 تمرين محلول) جامعة بشار.

5- هواري، قنديل : دروس سنة أولى جامعي _المدرسة العليا للأساتذة القبة.

6- L. BENALLEGUE, M. DEBIANE, A. GOURARI, A. MAHAMDIA: PHYSIQUE I, MECANIQUE DU POINT MATERIEL_ Faculté de physique U.S.T.H.B.

7- J.M. BREBEC, T. CHABOUD, T. DESMARAIS, A. FAVIER, M. MENETRIER, R. NOEL : Exercices et Problèmes Physique_ Hachette Livre Paris.

8- A. PERRENOUD : Physique I, Mécanique_ Haute Ecole Spécialisée de Suisse Occidentale.

9- A. GIBAUD, M. HENRY : COURS DE PHYSIQUE, MECANIQUE DU POINT_DUNOD Paris.

10- Examens : Introduction à la mécanique du point, Université de Cergy Pontoise.

المحور I: مذكرة رياضية

Rappels Mathématiques (معادلات الأبعاد، حساب الإرتيابات).

I- معادلات الأبعاد (Equations aux dimensions):

1- المقادير الأساسية والمقادير المشتقة:

المقدار الفيزيائي هو كل خاصية تعبر عن وصف ظاهرة فيزيائية، المقادير الفيزيائية مرتبطة ببعضها البعض بواسطة علاقات تسمى القوانين الفيزيائية، ولوجود هذه العلاقات اختار الفيزيائيون مقادير أساسية مستقلة هي: الطول (Longueur)، الكتلة (Masse)، الزمن (Temps) و شدة التيار (Intensité électrique).

أما المقادير المشتقة: فيمكن التعبير عنها بدلالة المقادير الأساسية مثل: الحجم يعبر عنه بدلالة الطول المقادير الأسياسية:

- في الهندسة: مقدار أساسي واحد الطول (L) مثلا المقادير الأخرى (الحجم- المساحات.....) نستطيع التعبير عنها بدلالة الطول.
- في علم الحركة: مقدران أساسيان: الطول (L) والزمن (T).
- في الميكانيكا: ثلاث مقادير أساسية الطول (L) والزمن (T) والكتلة (M) (القوة).
- في الكهرباء: زيادة على المقادير الأساسية المذكورة أعلاه هناك مقدار أساسي رابع هو شدة التيار الكهربائي (I).

2- الوحدات (Les Unites):

القياس عملية تقنية بواسطتها نسند عددا ما بخاصية فيزيائية بعد مقارنته بكمية تعتبر مرجعا، من نفس الطبيعة أختيرت كوحدة. إذا لكل مقدار وحدة تناسبه وأيضا معيار لتعريف هذه الوحدة، للمقادير الأساسية وحدات أساسية وللمقادير المشتقة وحدات مشتقة.

- هناك عدة أنظمة للتعبير عن وحدات المقادير الفيزيائية أهمها وأبسطها النظام العالمي MKSA (هناك نظام CGS).

الجدول التالي يلخص لنا المقادير الأساسية في النظام MKSA

الجدول I-1: المقادير الأساسية في النظام MKSA

المقادير الأساسية	الرمز	الوحدة	الرمز
الطول (Longueur)	L	المتر (Mètre)	1m
الكتلة (Masse)	M	الكيلوغرام (Kilogramme)	1Kg
الزمن (Temps)	T	الثانية (Seconde)	1s
شدة التيار الكهربائي (Intensité du courant électrique)	I	أمبير(Ampère)	1A
الشدة الضوئية (Intensité Lumineuse)	J	كندلة (Candela)	1Cd
الحرارة الديناميكية (Température Thermodynamique)	Q	درجة كلفين (Degré de Kelvin)	1°k

➢ **الوحدات المشتقة في النظام MKSA:**

لوجود علاقات تربط المقادير الفيزيائية (القوانين الفيزيائية) نستطيع إنطلاقا من المقادير الأساسية معرفة وحدات كل المقادير الأخرى (المقادير المشتقة)

مثال :

الجدول I-2: الوحدات المشتقة في النظام MKSA

الكمية المشتقة	الرمز	العلاقة الفيزيائية	الوحدات المشتقة	
			الإسم	الرمز
القوة (Force)	F	$F = ma$	نيوتن (Newton)	1N
الطاقة (Energie)	W	$W = Fd$	جول (Joule)	1J
الاستطاعة (Puissance)	P	$P = \frac{W}{t}$	واط (Watt)	1W
الكمون الكهربائي (Tension Electrique)	V	$V = Ri$	فولط (Volt)	1V
السعة (Capacité)	C	$C = \frac{Q}{V}$	فاراد (Farad)	1F
المقاومة (Resistance)	R	$R = \frac{V}{i}$	اوم (Ohm)	1Ω

3- معادلات الأبعاد (Equations aux dimensions) :

نعبر عن المقادير المشتقة بدلالة المقادير الأساسية كالتالي:

كل مقدار x يكتب بدلالة المقادير الأساسية كمايلي:

$$[X] = M^{\alpha}.L^{\beta}.T^{\gamma}.I^{\delta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (I-1)$$

نسمي هذه المعادلة معادلة الأبعاد للمقدار x

مثال:

- السرعة الخطية (Vitesse linéaire)

$$[v] = LT^{-1} \quad , \quad v = \frac{dl}{dt} = \frac{l}{t} \quad \text{وحدتها } ms^{-1}$$

- التسارع الخطي (Accélération linéaire)

$$a = \gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2l}{dt^2} = \frac{l}{t^2} \Rightarrow [a] = LT^{-2} \quad \text{وحدته } ms^{-2}$$

- السرعة الزاوية (Vitesse Angulaire)

$$w = \frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow [w] = T^{-1} \quad \text{وحدتها } s^{-1}$$

- القوة (Force)

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow [F] = MLT^{-2} \quad \text{وحدتها } Kgms^{-1}$$

- كمية الحركة (Quantité du mouvement)

$$\vec{P} = m\vec{v} \Longrightarrow [P] = MLT^{-1} \quad \text{وحدته } Kgms^{-1}$$

- العزم (Moment)

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{f} \Longrightarrow [L] = ML^2T^{-2} \quad \text{وحدته } Kgm^2s^{-2}$$

- الضغط (Pression)

$$\vec{P} = \frac{\vec{F}}{S} \Longrightarrow [P] = M^{-2}LT^{-2} \text{ ، وحدته } Kgm^{-1}s^{-2}$$

بعض الكميات (المقادير) ليس لها أبعاد

مثال: معامل الانكسار للأشعة

$$h = \frac{c}{v} \quad [h] = 1$$

ثابت عددي ليس له بعد $[\pi] = 1 \quad \pi = 3,14$

4- تجانس الأبعاد:

المعادلات الفيزيائية متجانسة فيما يخص الأبعاد يعني أن طرفي معادلة فيزيائية لهما نفس معادلة الأبعاد. ولوجود التجانس بين المعادلات نستطيع إيجاد معادلة تفسر ظاهرة فيزيائية ما أي القانون الفيزيائي.

مثال: دور النواس البسيط

نعرف تجريبيا أن دور النواس البسيط

$$T = f(l, g)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots(*) T = kl^x g^y$$

$$[T] = KL^x(LT^{-2})^y = T^1$$

$$= KL^{x+y}T^{-2y} = T^1$$

بالمطابقة

$$\begin{cases} x + y = 0 \ \Rightarrow x = -y \\ -2y = 1 \ \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2} \\ \qquad \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

نعوض في العلاقة (∗) نجد:

$$T = K l^{\frac{1}{2}} g^{\frac{-1}{2}}$$

$$T = K\sqrt{l/g}$$

5- الإنتقال من النظام MKSA إلى النظام CGS:

للإنتقال من نظام MKSA إلى نظام CGS نستعمل عبارة معادلة الأبعاد $(I-1)$

$$1N = ???\,dyne$$

وحدة القوة في النظام MKSA هي نيوتن

وحدة القوة في نظام CGS هي dyne

نعلم أن :

$$[F] = MLT^{-2}$$

$$1\ Kg\ m\ s^{-2} = 10^3.10^2.g\ cm\ s^{-2}$$

$$1N = 10^5\ dyne$$

II- حساب الإرتياب والأخطاء:

1- حساب الإرتياب على قياس بصفة مباشرة:

عندما يقوم مجرب بعدة تجارب لنفس المقدار A فإنه يتحصل على عدة قيم مختلفة إختلافا بسيطا $(a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n)$، إن القيمة الأقرب إلى الحقيقة هي حسب نظرية الإحتمالات القيمة المتوسطة لهذه القيم.

$$a_{moy} = \frac{\sum_{i=n}^{n} a_i}{n}$$

الإرتياب المطلق المرتكب على القياس i هو:

$$\Delta a_i = a_i - a_{moy} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I-2)$$

يكون الإرتياب المطلق المتوسط:

$$\Delta a_{moy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta a_i}{n}$$

تكتب النتيجة على الشكل التالي:

$$a = a_{moy} \pm \Delta a_{moy} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I-3)$$

تكون قيمة a محصورة بين القيمتين

$$a_{moy} - \Delta a_{moy} < a < a_{moy} + \Delta a_{moy}$$

لتعيين دقة القياس والتي تعبر عن الإرتياب النسبي

$$\delta = \frac{\Delta a_{moy}}{a_{moy}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (I-4)$$

يعطى دائما %

2- حساب الإرتياب على القياس غير المباشر:

إن الإرتياب المرتكب على مقدار مقاس مباشر يؤثر على المقدار المقاس بصفة غير مباشرة.

مثلا: لقياس فرق الكمون بين طرفي مقاومة (V=RI) فاننا نرتكب أخطاء في قياس R وI وبالتالي إرتياب على قياس V، فكيف نحسب الارتياب على V؟؟؟؟.

توجد طريقتان:

1- طريقة تفاضل دالة.

2- طريقة تفاضل لوغاريتم دالة.

1)- طريقة تفاضل دالة:

لحساب الإرتياب النسبي إنطلاقا من تفاضل دالة نتبع الخطوات التالية:

1- أخذ تفاضل الدالة

2- تقسيم على الدالة

3- جمع الحدود المتشابهة إن وجدت

4- حساب الإرتياب بجمع كل الإرتيابات

مثال:

ليكن المقدار $g\ (x,y,z)$ حيث

$$g(x,y,z) = x^{\alpha}.y^{\beta}.z^{-\gamma}$$

α, β, γ ثوابت

نعرف تفاضل الدالة g بـ:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}.dx + \frac{\partial g}{\partial y}.dy + \frac{\partial g}{\partial z}.dz$$

$$dg = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}z^{-\gamma}dx + \beta x^{\alpha}y^{\beta-1}z^{-\gamma}dy - \gamma x^{\alpha}y^{\beta}z^{-\gamma-1}dz$$

التقسيم على الدالة:

$$\frac{dg}{g} = \frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}z^{-\gamma}}{n^{\alpha}y^{\beta}z^{-\gamma}}dx + \frac{\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}z^{-\gamma}}{x^{\alpha}y^{\beta}z^{-\gamma}}dy - \frac{\gamma x^{\alpha}y^{\beta}z^{-\gamma-1}}{x^{\alpha}y^{\beta}z^{-\gamma}}dz$$

بالاختزال:

$$\frac{dg}{g} = \alpha\frac{dx}{x} + \beta\frac{dy}{y} - \gamma\frac{dz}{z}$$

الانتقال الى الارتياب:

$$\Rightarrow \frac{\Delta g}{g} = |\alpha|\frac{\Delta x}{n} + |\beta|\frac{\Delta y}{y} + |-\gamma|\frac{\Delta z}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I-5)$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \alpha\frac{\Delta x}{n} + \beta\frac{\Delta y}{y} + \gamma\frac{\Delta z}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I-6)$$

2) طريقة تفاضل لوغاريتم الدالة:

نتبع الخطوات التالية

1- أخذ لوغاريتم الدالة

2- تفاضل لوغاريتم الدالة

نمر إلى حساب الإرتياب حيث نجمع كل الإرتيابات

- **مثال:**

ليكن المقدار $g\ (x,y,z)$ حيث

$$g(x, y, z) = x^{\alpha}.y^{\beta}.z^{-\gamma}$$

α, β, γ ثوابت

أخذ لوغاريتم الدالة:

$$Log\ (g) = \alpha \operatorname{Log} x + \beta \operatorname{Log} y - \gamma \operatorname{Log} z$$

تفاضل لوغاريتم الدالة:

$$\frac{dg}{g} = \alpha\frac{dx}{x} + \beta\frac{dy}{y} - \gamma\frac{dz}{z}$$

الانتقال الى الارتياب:

$$\Rightarrow \frac{\Delta g}{g} = |\alpha|\frac{\Delta x}{n} + |\beta|\frac{\Delta y}{y} + |-\gamma|\frac{\Delta z}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I\text{-}5)$$

منه

$$\frac{\Delta g}{g} = \alpha\frac{\Delta x}{n} + \beta\frac{\Delta y}{y} + \gamma\frac{\Delta z}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I\text{-}6)$$

مثال 1:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

$$\operatorname{Log} T = \operatorname{Log}\left[2\pi\sqrt{l/g}\right]$$

$$\operatorname{Log} T = \operatorname{Log} 2\pi + \frac{1}{2}\operatorname{Log} l - \frac{1}{2}\operatorname{Log} g$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l} - \frac{1}{2}\frac{dg}{g}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} + \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}$$

مثال 2:

$$V = RI$$

$$\text{Log}\, V = \text{Log}\, R + \text{Log}\, u$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dR}{R} + \frac{dI}{I}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta I}{I}$$

(Exercices) تمارين

التمرين الأول:

- ماهي وحدات المقادير التالية في النظامين MKSA (SI) و CGS: القوة (force)، العمل (Travail)، الضغط (Pression)، الطاقة (Energie)؟
- أعط قيم هذه المقادير في النظام CGS بالنسبة لوحدات MKSA ؟

التمرين الثاني:

أعط معادلات الأبعاد للمقادير التالية: الشحنة الكهربائية Q، الكثافة السطحية σ، الحقل الكهربائي $\vec{E}$، الكمون الكهربائي V، المقاومة الكهربائية R، السعة C ، الحث الذاتي L، الحقل المغناطيسي $\vec{H}$.

التمرين الثالث:

- تحقق من أن RC، L/R، $(LC)^{1/2}$، متجانسة مع بعد الزمن.
- استنتج أبعاد القوة $\vec{F}$ ، و الضغط P و الثابت K حيث F=Kx.
- تحقق من أن $\sigma^2/2\varepsilon_0$ متجانسة مع بعد الضغط.

التمرين الرابع:

- أعط معادلات الأبعاد للمقادير التالية: ثابت الجاذبية G، ثابت بلانك h $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$
- أعط أبعاد المقادير التالية:

$$\alpha = \frac{\rho v^2}{2} \text{ ، } \beta = \frac{mv}{qB} \text{ ، } \gamma = \frac{PV}{nT} \text{ ، } \chi = \frac{1}{\varepsilon_0 C^2}$$

حيث :

ρ : الكتلة الحجمية، v: السرعة، q: الشحنة الكهربائية، B: التحريض المغناطيسي، P: الضغط، V: الحجم، T: درجة الحرارة، ε_0 : سماحية الفراغ.

التمرين الخامس:

تعطى المقاومة R لسلك طوله l و مقطعه S بالعلاقة : $R = \rho l / S$

- أوجد معادلة الأبعاد الثابت ρ حيث هذا الأخير يمثل المقاومة النوعية للسلك.
- أوجد معادلة الأبعاد لثابت اللزوجة التحريكي لسائل انطلاقا من علاقة نيوتن

$$\tau = \mu dv / dy$$

τ: الاجهاد المماسي

v: السرعة

y:الاتجاه العمودي لحركة السائل

التمرين السادس:

تحقق من تجانس العبارات التالية:

$$mgZ\cos\theta \text{ ، } \frac{1}{2}QV \text{ ، } \frac{1}{2}mv^2 \text{ ، } h\nu \text{ ، } Ri^2t$$

h: ثابت بلانك، V: الكمون الكهربائي،R : المقاومة الكهربائية

التمرين السابع:

طالب لم يتذكر القانون الصحيح ابذي يسمح بقياس القدرة في مكثفة سعتها C خاضعة لفرق الكمون V، تردد بين العلاقتين $W = \frac{1}{2}CV$ و $W = \frac{1}{2}CV^2$ ، ساعده على الاختيار الصحيح.

التمرين الثامن:

دور الاهتزازات لنواس مرن عمودي (T) لايتعلق إلا بالكتلة المهملة للنابض m، ثابت مرونته K و تسارع الجاذبية g.

- باستخدام معادلات الأبعاد، أوجد عبارة T بدلالة المقادير المذكورة أعلاه؟

التمرين التاسع:

تبين التجربة أن القوة المؤثرة على كرة مغموسة في سائل متحرك تتعلق بمعامل اللزوجة μ، نصف قطر الكرة r و سرعة الكرة النسبية v.

أوجد عبارة هذه القوة اذا كانت من الشكل :

$$F=K\,\mu^{x}\,r^{y}\,v^{z}$$

حيث K ثابت بدون أبعاد.

التمرين العاشر:

يعطى ثابت الفتل C لسلك معدني بطريقة اهتزازات نواس الفتل بالعلاقة التالية:

$$C=8\pi^{2}m\frac{a_2^2-a_1^2}{T_2^2-T_1^2}$$

حيث m قيمة كل من الكتلتين المتماثلتين الموجودتين على مسافة (a) من محور الدوران. T_1 و T_2 هما الدورا المتعلقين بالقيم a_1 و a_2 لـ a

- أوجد الارتياب في C علما أن القياسات تعطى بالنسبة لسلك من الفولاذ

$$m=(354.0\pm 0.5)g$$
$$a_1=(17.3\pm 0.2)cm$$
$$a_2=(37.3\pm 0.2)cm$$
$$T_1=(14.3\pm 0.1)s$$
$$T_2=(17.6\pm 0.1)s$$

التمرين الحادي عشر:

عند قياس المقاومة بطريقة تفريغ المكثفة وجد أن المقاومة R تعطى بالعلاقة التالية :

$$R=-\frac{t}{C}\log\left(\frac{Q_0}{Q}\right)$$

حيث Q_0 : الشحنة عند اللحظة t=0s Q : الشحنة عند اللحظة t C : سعة مكثفة t : الزمن

- أحسب الارتياب النسبي لـ R (نأخذ $\Delta Q=\Delta Q_0$)

التمرين الثاني عشر:

نريد تحويل مقيس جهد الى مقياس للمكثفات، و عند معايرة هذا الجهاز وجد أن السعة تعطى بالعلاقة:

$$C = \frac{U}{wR_V(E^2 - U^2)^{\frac{1}{2}}}$$

R_V : المقاومة الداخلية لمقياس الجهد

E : عيار مقياس الجهد

U : الجهد بين طرفي المكثفة

w : تواتر المنبع

نفرض أن الارتياب حاصل في المقدارين U و E فقط؛ أوجد الارتياب النسبي في قياس C.

التمرين الثالث عشر:

أحسب المشتقات الجزئية للدوال التالية:

$f_1(x,y) = x^2 + y^2$ ، $f_2(x,y) = xy^2 + \sin y$ ، $f_3(x,y,z) = x^2 \log yz$ ، $f_1(x,y,z) = \dfrac{x-y}{z}$ ،

$f_1(x,y) = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$

حلول التمارين

التمرين الأول:

في النظام MKSA: القوة (نيوتن Newton N) العمل (الجول Joule) الضغط (باسكال Pascal) الطاقة (الجول Joule)

في النظام CGS: القوة (Dyne) العمل (erg) الضغط (barye) الطاقة (erg)

قيم النظام CGS بالنسبة لـ MKSA

$$1dyne = ?..N = MLT^{-2}(m\gamma)$$
$$g.cm.s^{-2} = 10^{-3}.10^{-2}(1)^{-2}kg.m.s^{-2} = 10^{-5}$$
$$1dyne = 10^{-5}N$$

$1erg = ?..J$ الطاقة $w = F.L = M^2LT^{-2}$

$$g.cm^2.s^{-2} = 10^{-2}(10^{-2})^2(1)^{-2} = 10^{-7}kgm^2s^{-2}$$
$$1erg = 10^{-7}J$$

$$1boye = ?...Pa / P = \frac{F}{S} = ML^{-1}.T^{-2}$$
$$g.cm^{-1}.5^{-1} = 10^{-3}(10^{-2})^{-1}(1)^{-2} = 10^{-2}kgm^{-2}s^{-1}$$

$$1boye = 10^{-1}Pa$$

التمرين الثاني:

معادلات الأبعاد للمقادير:

الشحنة الكهربائية Q: $Q = I.t \Rightarrow [Q] = [I].[t]$

$$Q = I.T$$

الكثافة السطحية σ: $\sigma = Q/S \Rightarrow [\sigma] = I.T.L^{-2}$

الحقل الكهربائي $\vec{E}$: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \Rightarrow [E] = MLT^{-3}I^{-1} \Rightarrow [E] = \frac{[F]}{[Q]}$

الكمون الكهربائي V: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow E_x = \frac{\partial V}{\partial x}$

$$[V] = [E][\alpha] \Rightarrow [V] = ML^{-2}T^{-3}I^{-1}$$

السعة C : $C = Q/V$ $[C] = M^{-1}L^{-2}T^4I^2$

الحث الذاتي L : $\Rightarrow e=-L\frac{di}{dt}$ $[L]=\frac{[e].[t]}{[j]}$

$$[L]=ML^2T^{-2}I^{-2}$$

الحقل المغناطيسي $\vec{H}$: $i=\int \vec{H}.d\vec{\ell}$

$$[H]=\frac{[i]}{[\ell]}\Rightarrow [H]=IL^{-1}$$

التمرين الثالث:

$$[R].[C]=ML^2T^{-3}I^{-2}M^{-1}L^{-2}T^4I^2=T$$
$$[L]/[R]=(ML^2T^{-2}I^{-2})(ML^2T^{-3}I^{-2})=T$$
$$[L]^{\frac{1}{2}}[C]^{\frac{1}{2}}=(ML^2T^{-2}I^{-2})^{\frac{1}{2}}(M^{-1}.L^{-2}T^4I^2)^{\frac{1}{2}}=T$$

نلاحظ أن الكميات: $R.C$ ، L/R ، $(LC)^{\frac{1}{2}}$ متجانسة مع بعد الزمن

القوة F : $F=m\gamma\Rightarrow$ $[F]=[m].[\gamma]=MLT^{-2}$

الضغط P : $P=F/S$ $[P]=ML^{-1}T^{-2}\Rightarrow$

ثابت الصلابة النابض K : $F=K.x\Rightarrow$ $[K]=[F]/[x]$

$$[K]=MT^{-2}$$

$$[\sigma^2]/[\varepsilon_0]=[L^{-2}IT]^2/[M^{-1}L^{-3}T^4I^2]=ML^{-1}T^{-2}\ //\ \sigma^2/2\varepsilon_0$$

النتيجة متجانسة مع بعد الضغط

ملاحظة من قانون كولوم $\varepsilon_0 \Leftarrow$ $\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{qq'}{r^2}\vec{U}$

التمرين الثامن:

بما أن الدور T لا يتعلق إلا (m وK) والحادثة g

إذن $T.\alpha.m^x.K^y.g^z$ الدور

$$(F=Kx)$$
$$\Rightarrow K=\frac{F}{x}$$
$$[K]=MT^{-2}$$

$$[T] = M^{x}(MT^{-2})^{y}.(LT^{-2})^{z}$$

$$T^{-1} = M^{x+y}.T^{-2(y+z)}.L^{z}$$

بالتطابق نجد

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -2(y+z)=1 \Rightarrow \\ z=0 \end{cases} \begin{cases} z=0 \\ -2y=1 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$T.\alpha.m^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow T\alpha\sqrt{\frac{m}{K}}$$

ومنه من التجارب نعرف أن ثابت التناسب $(w = 2\dfrac{\pi}{T})$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

التمرين التاسع:

$F = k\mu^{x}r^{y}V^{z}$ مع K ثابت

$$F/S = \mu\frac{\Delta V}{\Delta L} \Leftrightarrow [F] = [\mu]^{x}[r]^{y}[V]^{z}$$

$$MLT^{-2} = (ML^{-1}T^{-1})^{x}L^{(y)}(LT^{-1})^{3}$$
$$MLT^{2} = M^{x}L^{-x+y+z}T^{-x-z}$$

بالتطابق نحصل على ما يلي:

$$\begin{cases} x=1 \\ -x+y+z=1 \\ -x-z=-2 \end{cases}$$

حلها يعطي $x=1$ ، $y=1$ ، $z=1$

فالقانون يكتب $F = K\mu r.V$

التمرين العاشر:

يعطى ثابت الفتل لسلك معدني بالعلاقة

$$C = 8\pi^2 m \frac{a_2^2 - a_1^2}{T_2^2 - T_1^2}$$

لحساب الارتياب نلجأ إلى استعمال التفاضل اللوغارتمي

$$\log C = \log 8 + 2\log \pi + \log m + \log(a_2^2 - a_1^2) - \log(T_2^2 - T_1^2)$$

$$\frac{dC}{C} = 2\frac{d\pi}{\pi} + \frac{dm}{m} + \frac{2a_2 da_2 - 2a_1 da_1}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{2T_2 dT_2 - 2T_1 dT_1}{T_2^2 - T_1^2}$$

عندما ينتقل الارتياب نحصل على ما يلي

$$\frac{\Delta C}{C} = 2\frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{a_2\Delta a_2 + a_1\Delta a_1}{\left|a_2^2 - a_1^2\right|} + 2\frac{T_2\Delta T_2 + T_1\Delta T_1}{\left|T_2^2 - T_1^2\right|}$$

لدينا $\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a, \Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$

إذن

$$\frac{\Delta C}{C} = 2\frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta a}{\left|a_2 - a_1\right|} + 2\frac{\Delta T}{\left|T_2 - T_1\right|}$$

إذا كان الارتياب في π مهملا فالتطبيق العددي يعطي

$$\Delta C / C = (1{,}5 + 20 + 60).10^{-3} \approx 10\%$$

نحسب قيمة ثابت الفتل C

$$C = \frac{8x9{,}86x0{,}354x1092.10^{-4}}{105{,}3} = 2{,}89.10^{-2}\, Nm/rd$$

$$\Delta C = 0{,}3.10^{-2}\, Nm/rd$$

$$C = (2{,}9 \pm 0{,}3)10^{-2}\, Nm/rd$$

التمرين الثالث عشر:

المشتقات الجزئية للدوال

1) $f_1(x,y) = x^2 + y^2$

$f_1(x) = 2x\,,\quad f_1(y) - 2y$

$f\,'_1(x, y) = 2xdx + 2ydy$

* $f_2(x, y) = xy^2 + \sin y$

$f_2^{'}(x) = y^2\,,\quad f_2(y) = 2xy + \cos y$

* $f_3(x, y, z) = x^2 + \log y.z$

$f_3^{'}(x) = 2x \log y.z\,,\quad f_3(y) = \frac{x^2 z}{y.z} = \frac{x^2}{y}$

$f_3^{'}(z) = \frac{x^2 z}{y.z} = \frac{x^2}{z}$

* $f_4(x, y, z) = \frac{x - y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$

$f_4^{'}(x) = \frac{z}{z^2} = \frac{1}{z}\,,\quad f_4(y) = \frac{-z}{z^2} = -\frac{1}{z}$

$f_4^{'}(z) = \frac{0 - x}{z^2} = \frac{-y}{z^2} = \frac{-x + y}{z^2}$

* $f_5(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 - y^2}$

$f\,'_5(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

$f\,'_5(y) = \frac{1(-2y)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-1y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

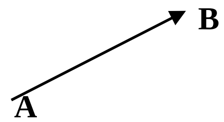
المحورII: الحساب الشعاعي
Le Calcul Vectoriel

1- المقدار السلمي (Grandeur Scalaire): *كل كمية تعرف بمقدارها ويكون التعريف كامل تسمى سلمي مثل: الكتلة، الطاقة، العمل، ...*

2- المقدار الشعاعي (Grandeur Vectorielle): كل كمية لا تعرف تماما بمعرفة مقدارها وإنما يتطلب معرفة إتجاهما تسمى بالمقادير الشعاعية مثل: السرعة، الإنتقال، الحقل الكهربائي، ......

إذن:

- الشعاع قطع مستقيم موجة (أنظر الشكل I-1).



الشكل II-1: تمثيل شعاع

نمثل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بقطع مستقيم AB مبدؤه A ونهايته B ويعرف بـــ:

- المنحنى: المستقيم الذي ينتمي إليه القطع المستقيم ABالحاوي له أو حامله.
- الإتجاه: الذي ينتقل فيه المتحرك من A إلى B.
- الطويلة: طول القطع المستقيم AB (الشدة أو المعيار) ونرمز له ب AB أو $|\overrightarrow{AB}|$ أو $\|\overrightarrow{AB}\|$.

كما يمكن كتابة شعاع على شكل $\vec{V}$

3- شعاع الوحدة (Vecteur Unitaire): هو شعاع طويلته تساوي الواحد يمكن التعبير عن شعاع $\vec{V}$ موازٍ لشعاع الوحدة $\vec{u}$ بــ

$$\vec{V} = |\vec{V}|\,\vec{u} = V\,\vec{u} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II-1)$$

ليكن الشعاعان $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ الموازيان لشعاع الوحدة $\vec{u}$

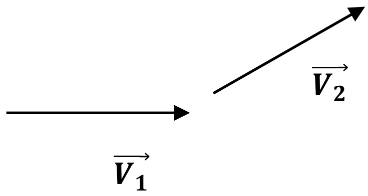
$$\vec{V_1} = V_1\vec{u}$$
$$\vec{V_2} = V_2\vec{u}$$
$$\frac{\vec{V_1}}{\vec{V2}} = \frac{V_1}{V_2} = K$$
$$\Rightarrow \vec{V_1} = K.\vec{V_2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II-2)$$

وهو شرط التوازي.

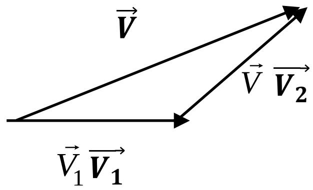
4- الجمع الهندسي للأشعة (Somme Vectorielle) : يمكن جمع الأشعة بيانيا ولذا حق تسمية العملية بالجمع الهندسي.

♦جمع شعاعين:

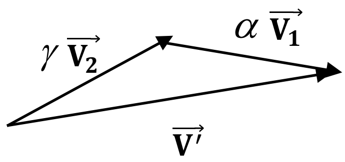
$$\vec{V_1} + \vec{V_2}$$



$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$$



$$\vec{V'} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$$



الشكل II-2: جمع شعاع

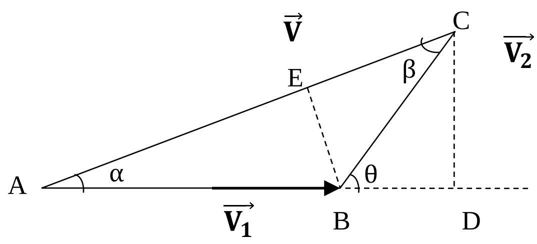
نلاحظ أن :

$$\vec{V} = \vec{V'}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II-3)$$

أي أن الجمع الشعاعي تبديلي.

♦طويلة $\vec{V}$ (Module de $\vec{V}$):



الشكل II -3: طويلة شعاع

– قاعدة التجب:

لدينا في المثلث: ABC (الشكل I-3) حيث $BC=V_1$, $AB=V_1$, $AC=V$

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$$
$$AB = V_1 + BD = V_1 + V_2\cos\theta$$
$$DC = V_2\sin\theta$$
$$(AC)^2 = (V)^2 = (V_1 + V_2\cos\theta)^2 + (V_2\sin\theta)^2$$
$$V^2 = {V_1}^2 + {V_2}^2\cos\theta^2 + 2V_1V_2\cos\theta + {V_2}^2\sin\theta^2$$
$$V^2 \quad = {V_1}^2 + {V_2}^2(\cos\theta^2 + \sin\theta^2) + 2V_1V_2\cos\theta$$
$$V^2 \quad = {V_1}^2 + {V_2}^2(\cos\theta^2 + \sin\theta^2) + 2V_1V_2\cos\theta$$

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II-4)$$

هناك طريقة أخرى

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$$
$$V^2 = \left(\vec{V_1} + \vec{V_2}\right)^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2\vec{V_1}.\vec{V_2}$$
$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2\vec{V_1}.\vec{V_2}\cos\theta}$$

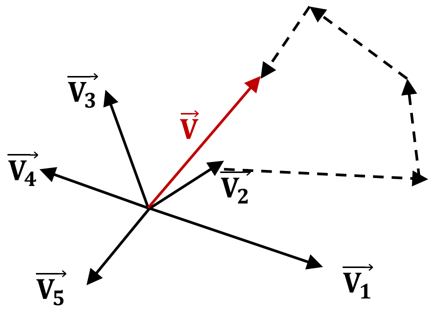
حيث $\vec{V_1}.\vec{V_2}$ (جداء سلمي) ستبرهن لاحقا

– قاعدة الجب:

$$CD = V_2\sin\theta = V\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{\sin\alpha} = \frac{V}{\sin\theta}$$
$$BE = V_1\sin\alpha = V_2\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{\sin\alpha} = \frac{V_1}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_2}{\sin\alpha} = \frac{V_1}{\sin\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II-5)$$

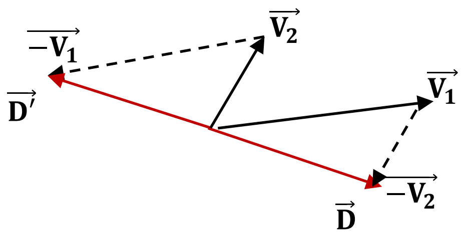
♦ **الجمع الهندسي لعدة أشعة:** لاحظ الشكل II-4:

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} + \vec{V_4} + \vec{V_5}$$



الشكل II-4: الجمع الهندسي لعدة أشعة

♦ **الفرق بين الأشعة:**



الشكل II -5: الفرق بين شعاعين

$$\vec{D} = \vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V_1} + (-\vec{V}_2)$$
$$\vec{D}' = \vec{V_2} - \vec{V_1} = \vec{V_2} + (-\vec{V}_1)$$

عملية طرح الأشعة ليست تبديلية

$$\vec{D} \neq \vec{D}'$$

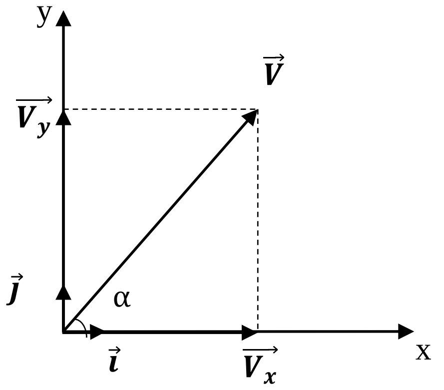
طويلة الشعاع

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}-6)$$

5- مركبات شعاع (Composante d'un vecteur):

كل شعاع $\vec{V}$ يمكن أن يكتب على شكل جمع شعاعين أو أكثر حيث كل مجموعة الأشعة التي إذا جمعت تعطي الشعاع $\vec{V}$ تسمى مركبات هذا الشعاع.

♦ **في المستوى:** في المعلم $R(\vec{o},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ المتعامد و المتجانس



الشكل II-6: مركبات شعاع في المستوي

حيث:

$$\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y}$$

$$\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath}$$

$$V_x = V\cos\alpha$$

$$V_y = V\sin\alpha$$

$$\vec{V} = V\cos\alpha\,\vec{\imath} + V\sin\alpha\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{V} = V(\cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath})$$

بما أن $\vec{V} = V\,\vec{u}$ $\quad \vec{u} = (\cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath}) \quad \Rightarrow$

أما طويلة الشعاع $\vec{V}$ فهي: $\quad V^2 = V_x^2 + V_y^2$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II-7)$$

يمكن إستعمال رموز أخرى (رموز ديكارتية) $V = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال: في المعلم $R(\vec{o},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ المتعامد و المتجانس أوجد محصلة الشعاعين $\vec{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$، $\vec{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath}$$

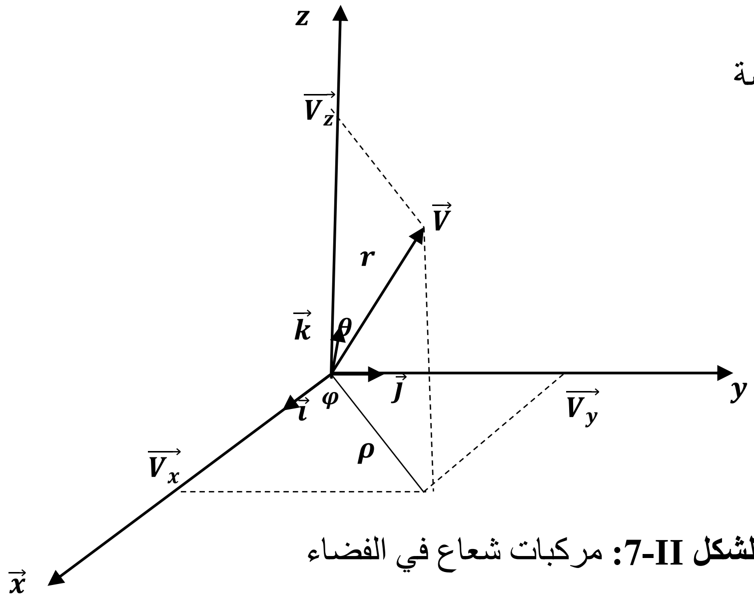
$$|\vec{V}| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$$

♦في الفضاء :

في معلم $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ذو قاعدة متعامدة ومتجانسة

$$\vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$$



الشكل 7-II: مركبات شعاع في الفضاء

يمكن التحقق هندسي (الشكل 7-II) من أن:

$$\cos\theta = \frac{V_z}{r} \quad \Rightarrow V_z = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\rho}{r} \quad \Rightarrow \rho = r\sin\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{\rho} \quad \Rightarrow V_x = \rho\cos\alpha \Rightarrow \; V_x = r\sin\theta\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{V_y}{\rho} \quad \Rightarrow V_y = \rho\sin\alpha \Rightarrow \; V_y = r\sin\theta\cos\alpha$$

إذن:

$$V_x = V\sin\theta\cos\alpha$$
$$V_y = V\sin\theta\cos\alpha$$
$$V_z = V\cos\theta$$

أما طويلة الشعاع: $V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2 + {V_z}^2}$

أو بالإحداثيات الديكارتية: $V = \sqrt{X^2 + y^2 + z^2}$

♦ جيوب تمام الإتجاهية:

لتكن الزوايا التي يصنعها الشعاع $\vec{V}$ مع المحاور Ox, Oy, Oz على التوالي هي β ،α و γ

$$V_x = V\cos\alpha$$
$$V_y = V\cos\beta$$
$$V_z = V\cos\gamma$$

لدينا: $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$

$$V = \sqrt{V^2(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2)}$$
$$V = V\sqrt{\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2}$$
$$\Rightarrow \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II-7)$$

$\cos\alpha$، $\cos\beta$، $\cos\gamma$ تسمى جيوب تمام الإتجاهية للشعاع $\vec{V}$

حيث لدينا: $\vec{V} = V\,\vec{u}$

$$\vec{V} = V\,(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k})$$
$$\Rightarrow \qquad \vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II-8)$$

إذن جيوب تمام التوجيهية (الاتجاهية) ما هي إلا مركبات شعاع الوحدة $\vec{u}$

6- الجداء السلمي (Produit Scolaire):

*** تعريف:** الجداء السلمي للشعاعين $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ ويرمز له $\vec{V_1}.\vec{V_2}$ ($\vec{V_1}$ سلمي $\vec{V_2}$) يعرف كعدد سلمي ناتج عن جداء طويلات الشعاعين في تجب الزاوية المحصورة بينهما.

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = V_1.V_2\,.\cos(\vec{V_1},\vec{V_2}) = V_1.V_2\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II-9)$$
$$|\theta| < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_1.\vec{V}_2 > 0$$
$$\frac{\pi}{2} < |\theta| < \pi \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_1.\vec{V}_2 > 0$$
$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = V_1 \mathrm{proj}\,\vec{V_2}/\vec{V_1} = V_2\,\mathrm{proj}\,\vec{V_1}/\vec{V_2}$$

*** حالات خاصة**

$$(\vec{V_1},\vec{V_2}) = 0 \Longrightarrow \vec{V}.\vec{V} = V^2$$

($\vec{V_1}$ على عمودي $\vec{V_2}$) $(\vec{V_1},\vec{V_2}) = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \vec{V_1}.\vec{V_2} = 0$

*** خصائص الجداء السلمي (Propriétés du produit scalaire):**

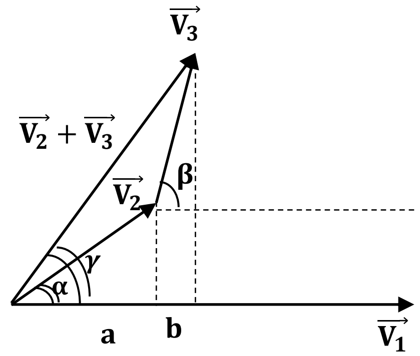
أ)

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = V_1.V_2\cos\left(\vec{V_1},\vec{V_2}\right)$$
$$\vec{V_2}.\vec{V_1} = V_2.V_1\cos\left(\vec{V_2},\vec{V_1}\right)$$
$$\cos\left(\vec{V_1},\vec{V_2}\right) = \cos\left(\vec{V_2},\vec{V_1}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{V_1}.\vec{V_2} = \vec{V_2}.\vec{V_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II-9)$$

إذن الجداء السلمي تبديلي:

ب) $\vec{V_1}.\left(\vec{V_2}+\vec{V_3}\right) = \vec{V_1}.\vec{V_2} + \vec{V_1}.\vec{V_3}$

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = V_1.V_2\cos\alpha = V_1.a$$
$$\vec{V_1}.\vec{V_3} = V_1.V_3\cos\beta = V_1.b$$
$$\vec{V_1}.\left(\vec{V_2}+\vec{V_3}\right) = \vec{V_1}.\left(\vec{V_2}+\vec{V_3}\right)\cos\gamma$$



الشكلII-8: خصائص الجداء السلمي

$$\vec{V_1}.\left(\vec{V_2}+\vec{V_3}\right) = V_1.(a+b) \ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$
$$\Rightarrow \vec{V_1}.\vec{V_2} + \vec{V_1}.\vec{V_3} = V_1.(a+b)\ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) فإن

$$\vec{V_1}.\left(\vec{V_2}+\vec{V_3}\right) = \vec{V_1}.\vec{V_2} + \vec{V_1}.\vec{V_3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II-10)$$

إذن الجداء السلمي توزيعي بالنسبة للجمع

*** أشعة الوحدة: $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:**

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$
$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$

*** الجداء السلمي بدلالة المركبات:**

$$\vec{V_1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{V_2}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = \left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right).\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)$$
$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II-11)$$

$$\vec{V}.\vec{V} = V^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow \quad V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{V}.\vec{i} = x$$

$$\vec{V}.\vec{j} = y$$

$$V.\vec{k} = z$$

- جيوب تمام الإتجاهية:

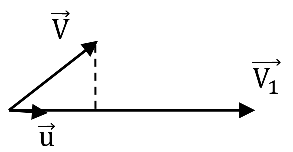
$$\cos\alpha = \frac{\vec{V}.\vec{i}}{|\vec{V}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{V}.\vec{j}}{|\vec{V}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{V}.\vec{k}}{|\vec{V}|}$$

*** مسقط شعاع (Projection d'un vecteur):**

* مسقط $\vec{V_1}$ على $\vec{V}$ (الشكل 9-II) يرمز له ب $\overline{\text{proj}}\frac{\vec{V_1}}{V}$



الشكل 9-II: مسقط شعاع

$$\overline{\text{proj}}\frac{\vec{V_1}}{V} = \vec{V_1}.\vec{u} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II-12)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{V}$$

* مسقط $\vec{V}_1$ على المحور (Δ) الذي يحمل $\vec{V}$ هو شعاع حيث

$$\overrightarrow{\text{proj}}\frac{\vec{V}_1}{(\Delta)} = (\vec{V}_1.\vec{u})\vec{u} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II-13)$$

$\vec{u}$ شعاع وحدة المحور (Δ)

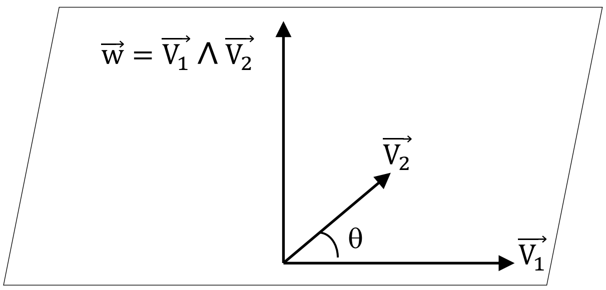
7- الجداء الشعاعي (Produit Vectoriel):

تعريف: الجداء الشعاعي لــ $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ والذي يرمز له بــ $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ هو شعاع يكون عمودي على المستوي المعين بـ $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ وإتجاهه يكون في إتجاه تنقل برغي يميني من $\vec{V}_1$ نحو $\vec{V}_2$ (الشكل 10-I)

$$|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = V_1.V_2 \sin(\vec{V}_1.\vec{V}_2) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II-14)$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$$

الجداء الشعاعي غير تبديلي



الشكل 10-II: الجداء الشعاعي

$$\vec{V}_1 /\!/ \vec{V}_2 \quad \text{أي} \quad (\vec{V}_1.\vec{V}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$$

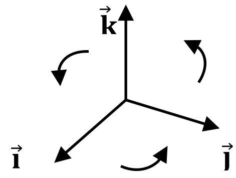
إذا كان الشعاعان متوازيان فالجداء الشعاعي بينهما يكون معدوم.

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$$

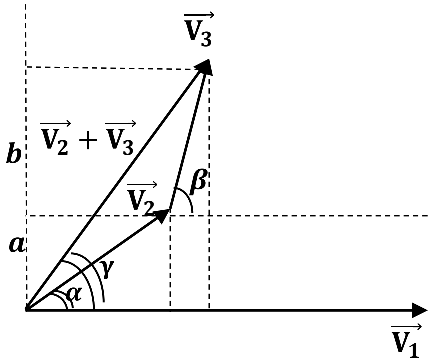
$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$



سنبرهن أن :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$$

- نفرض أن الأشعة موجودة في نفس المستوي (الشكل I -11) إذن تحقق العلاقة فيما يخص المقادير أو الطويلات



الشكل II-11: الجداء الشعاعي توزيعي

$$\left|\vec{V_1}\wedge\left(\vec{V_2}+\vec{V_3}\right)\right| = \left|\vec{V_1}\right| . \left|\vec{V_2}+\vec{V_3}\right| \sin\gamma = V_1(a+b)$$

$$\left|\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}\right| = V_1 . V_2 \sin\alpha = V_1 . a$$

$$\left|\vec{V_1}\wedge\vec{V_3}\right| = V_1 . V_3 \sin\beta = V_1 . b$$

$$\left|\vec{V_1}\wedge\left(\vec{V_2}+\vec{V_3}\right)\right| = V_1(a+b) \dots\dots\dots\dots\dots . ①$$

$$\left|\vec{V_1}\wedge V_2\right| + \left|\vec{V_1}\wedge V_3\right| = V_1(a+b) \dots\dots\dots\dots\dots . ②$$

نلاحظ أن ② = ①

أي

$$\vec{V_1}\wedge\left(\vec{V_2}+\vec{V_3}\right) = \vec{V_1}\wedge\vec{V_2} + \vec{V_1}\wedge\vec{V_3} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II-15)$$

الجداء الشعاعي توزيعي بالنسبة للجمع

*** الجداء الشعاعي بدلالة المركبات:**

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (V_1x\vec{i} + V_1y\vec{j} + V_1z\vec{k}) \wedge (V_2x\vec{i} + V_2y\vec{j} + V_2z\vec{k})$$

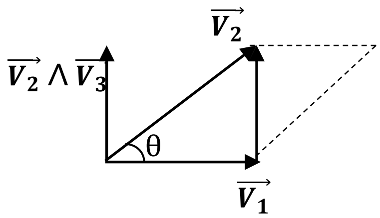
$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_1x & V_1y & V_1z \\ V_2x & V_2y & V_2z \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (V_1yV_2z - V_2yV_1z)\vec{i} + (V_2xV_1z - V_1xV_2z)\vec{j}$$
$$+ (V_1xV_1y - V_2xV_1y)\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II-16)$$

- من الشكل 12-II لدينا

$$\left|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right| = V_1 . V_2 \sin\theta$$
$$\left|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right| = V_1 . h \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II-16)$$

طويلة الجداء الشعاعي تمثل مساحة متوازي الأضلاع المشكل من الشعاع



الشكل 12-II: مساحة متوازي الأضلاع

-8 الجداء المختلط (Produit mixte):

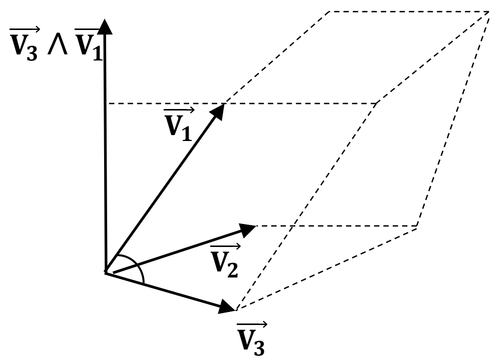
يعرف الجداء المختلط لثلاث أشعة $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ بالمقدار السلمي $\vec{V}_1(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$

مساحة متوازي الأضلاع: $|\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1|$ المتكون من $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_3$

$$\vec{V}_2.(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) = |\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1| \text{ proj } \vec{V}_1/\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1$$

$$\vec{V}_2.(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \quad = S.h \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II-17)$$

$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ هو حجم متوازي السطوح المتكون من الأشعة $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ (الشكل 13-II)



الشكل 13-II: حجم متوازي السطوح

—الجداء المختلط لا يتغير إذا قمنا بتبديل دائري

$$\vec{V}_2.(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) = \vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_3.(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II-18)$$

<u>بدلالة المركبات:</u>

$$\vec{V}_3\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}\vec{V}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\vec{V}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} V_1x & V_1y & V_1z \\ V_2x & V_2y & V_2z \\ V_3x & V_3y & V_3z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \\ = V_1x(V_2yV_3z - V_3yV_2z) - V_1y(V_2xV_3z - V_3xV_1z) \\ + V_1z(V_2xV_3y - V_3xV_2y) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (II-19)\end{aligned}$$

9- عزم شعاع: (Moment d'un vecteur):

*** بالنسبة لنقطة من الفضاء:** عزم شعاع $\overrightarrow{AB}$ بالنسبة لنقطة من الفضاء هو الشعاع المعرف بـ:

$$\mathcal{M}\,\overrightarrow{AB}/O = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}-21)$$

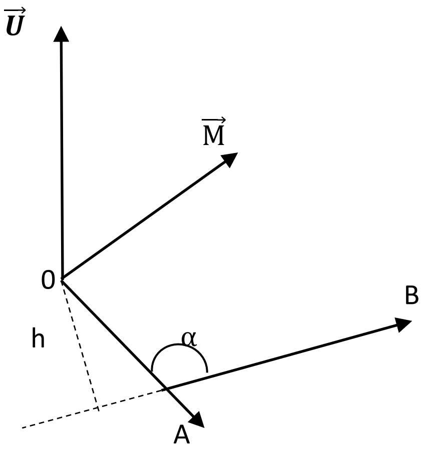
*** بالنسبة لمحور:** عزم شعاع بالنسبة لمحور:

أ) هو مسقط عزم هذا الشعاع بالنسبة لنقطة من المحور مهما كانت.

ب) عزم شعاع بالنسبة لمحور (Δ)مبدؤه O وشعاع وحدته $\vec{u}$ يساوي الجداء المختلط:

$$\vec{\mathcal{M}}\,\overrightarrow{AB}/(\Delta) = \left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}\right).\vec{u} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}-22)$$

$$\vec{\mathcal{M}}\,\overrightarrow{AB}/(\Delta) = \vec{\mathcal{M}}\,\overrightarrow{AB}/O.\vec{u}$$



الشكل 14-II: عزم شعاع

10- إشتقاق الأشعة (La dérivée des vecteurs):

إذا كان لكل متغير t يطابق الشعاع $\vec{V}$(دالة شعاعية)

$$V = \vec{V}_x.(t)\vec{\imath} + \vec{V}_y.(t)\vec{\jmath} + \vec{V}_z.(t)\vec{k}$$

مشتق الشعاع $\vec{V}$ بالنسبة للزمن يعرف كالتالي:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{V}(t+\Delta t)-\vec{V}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{dV_x}{dt}\vec{i}+\frac{dV_y}{dt}\vec{j}+\frac{dV_z}{dt}\vec{k}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II-20)$$

مشتق الشعاع يساوي مشتق المركبات

$$\frac{d\vec{V}}{dt}\begin{cases}\frac{dV_x}{dt}\\ \frac{dV_y}{dt}\\ \frac{dV_z}{dt}\end{cases}$$

- **بعض الدوال الشعاعية**

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda\,\vec{A}\right)=\frac{d\lambda}{dt}\vec{A}+\lambda\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dt}=\vec{A}\frac{d\vec{B}}{dt}+\vec{B}\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\frac{d\vec{B}}{dt}$$

مثال: أحسب المشتق الأولى والثانية ل:

$$\vec{V}(t)=2\cos\omega t\,\vec{i}+3\sin\omega t\,\vec{j}$$

الحل: المشتق الأول:

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=-2\omega\sin\omega t\,\vec{i}+3\,\omega\,\cos\omega t\,\vec{j}$$

المشتق الثاني

$$\frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2}=-2\omega^2\sin\omega t\,\vec{i}+3\,\omega^{\,2}\cos\omega t\,\vec{j}=-\omega^{\,2}\vec{V}$$

تمارين (Exercices)

التمرين الأول:

في معلم متعامد و متجانس $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تعطى الأشعة

$\vec{r}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{s}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ ، $\vec{t}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ ، $\vec{u}=3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$

1- مثل هذه الأشعة في المعلم (OXYZ).

2- أوجد:

1- طوية كل من $2\vec{r}-3\vec{s}-5\vec{t}$ ، $\vec{r}+\vec{s}+\vec{t}$ ، $\vec{t}$

2- شعاع وحدة يوازي مجموع الأشعة $\vec{r}$ و $\vec{s}$.

3- القيم السلمية a, b, c حيث $\vec{u}=a\vec{r}+b\vec{s}+c\vec{t}$.

التمرين الثاني:

لتكن الأشعة:

$$\vec{r}_1=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

$$\vec{r}_2=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\vec{r}_3=4\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$$

1) أحسب طويلة كل شعاع

2) أحسب مركبات و طويلة الأشعة التالية: $\vec{V}_1=\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3$ ، $\vec{V}_2=\vec{r}_1+\vec{r}_2-\vec{r}_3$

3) أوجد شعاع الوحدة المحمول على الشعاع $\vec{V}_3=\vec{r}_1+2\vec{r}_2$ و استنتج جيوب تمام اتجاهية هذا الشعاع؟

4) أحسب الجداء السلمي $\vec{r}_1.\vec{r}_2$، الجداء الشعاعي $\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2$ و الجداء المختلط "بطريقتين" ($(\vec{r}_1;\vec{r}_2;\vec{r}_3)$)

التمرين الثالث:

ليكن في المستوي (Oxyz) الشعاعان $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ حيث طويلاتهما على التوالي تساوي 4 و 5 وحدة. يصنع $\vec{V}_1$ مع Ox زاوية قدرها $\alpha=30°$، أما الشعاع $\vec{V}_2$ فمحمول على Ox و لكن في الاتجاه المعاكس له.

أحسب:

1)- المجموع الهندسي للشعاع $\vec{V}_1$ و الشعاع $\vec{V}_2$ أي $\vec{S}=\vec{V}_1+\vec{V}_2$ بدلالة المركبات.

2)- فرق الشعاعين $\vec{D}$: $\vec{D}=\vec{V}_1-\vec{V}_2$ بدلالة المركبات.

3)- الجداء السلمي ل $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$.

4)- الجداء الشعاعي لنفس الشعاعين.

التمرين الرابع:

في المعلم $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقاط الأربعة التالية:

$$A_1(2\sqrt{2},1,0)\ ,\quad A_2(4\sqrt{2},5,5)\ ,\ A_3\left(-\sqrt{2},0,\frac{2\lambda}{\sqrt{41}}\right)\ ,\quad A_4\left(-\sqrt{2},\frac{-5}{\sqrt{41}},\frac{3\lambda}{\sqrt{41}}\right)$$

1) أحسب مركبات $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$

2) عين شعاع الاسقاط ل $\overrightarrow{A_1A_2}$ على المستقيم الموجه و المعرف ب $\overrightarrow{A_3A_4}$

3) إذا اعتبرنا أن الشعاعين متعامدين

أ) أوجد λ حتى يتحقق هذا الشرط

ب) أحسب $|\overrightarrow{A_1A_2}|$, $|\overrightarrow{A_3A_4}|$

ج) أوجد مركبات $\vec{C}=\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_3A_4}$

د) أوجد $|\vec{C}|$ بطريقتين

4) نعتبر الأن λ كيفي، و نعتبر الشعاع $\vec{D}\begin{pmatrix}4\sqrt{2}\\0\\\mu\end{pmatrix}$ حيث μ سلمي غير معدوم.

أ) عين العلاقة بين λ و μ حتى تكون الأشعة $\overrightarrow{A_1A_2}$ ، $\overrightarrow{A_3A_4}$ ، $\vec{D}$ في نفس المستوي.

ب) إذا فرضنا بالإضافة إلى ما ورد في السؤال السابق أن الشعاع $\vec{D}$ عمودي على الشعاع $\overrightarrow{A_3A_4}$ استنتج قيم كل من λ و μ.

التمرين الخامس:

1) برهن أن مساحة متوازي الأضلاع هي $|\vec{A}\wedge\vec{B}|$ حيث $|\vec{A}|$ و $|\vec{B}|$ ضلعي متوازي الأضلاع المشكل من الشعاعين.

برهن أن الشعاع $\vec{A}$ يكون عموديا على الشعاع $\vec{B}$ إذا تحققت العلاقة $|\vec{A}+\vec{B}|=|\vec{A}-\vec{B}|$

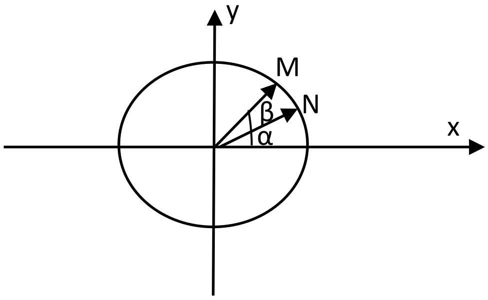
2) أوجد عبارة المساحة لمثلث مرتكز على شعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ لهما نفس المبدأ. استعمل هذه النتيجة لحساب مساحة مثلث رؤوسه: $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$.

3) محصلة شعاعين طولها 30 وحدة و تصنع معهما زاويتين 25° و 50°.

- أوجد طويلة الشعاعين.

التمرين السادس:

لتكن النقطتان M و N على الدائرة المثلثية (R=1) حيث الزوايا $\alpha = (\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OM})$ و $\beta = (\overrightarrow{OX},\overrightarrow{ON})$ (أنظر الشكل) باستعمال الجداء السلمي و الجداء الشعاعي، أحسب :



$\cos(\alpha-\beta)$ و $\sin(\alpha-\beta)$

التمرين السابع:

نعتبر الأشعة $\vec{a},\vec{b},\vec{C}$ المعطاة في الفضاء

1- بين أن $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

2- استنتج علاقة جاكوبي: $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})+\vec{b}\wedge(\vec{c}\wedge\vec{a})+\vec{c}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})=\vec{O}$

3- باستعمال علاقة السؤال الأول بين أن مسقط $\vec{a}$ على المستوي هو الشعاع $\vec{w}=\vec{n}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{n})$ حيث $\vec{n}$ هو شعاع الوحدة المحمول على الناظم للمستوي

التمرين الثامن:

في جملة محاور متعامدة نعتبر النقاط التالية $A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1), D(2,1,3)$

1- أحسب مسقط $\overrightarrow{AB}$ على حامل $\overrightarrow{AC}$

2- بين أن النقاط A, B, C, D تنتمي إلى نفس المستوي، أوجد معادلة هذا المستوي

التمرين التاسع:

لدينا: $\vec{B}=\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{C}=2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ $\vec{A}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

1- أوجد:

أ)- الزاوية المحصورة بين الأشعة $\vec{A}$ و $\vec{C}$

ب)- مسقط الشعاع $\vec{A}$ على الشعاع $\vec{B}$

ج)- $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$, $(\vec{A}+\vec{B})\wedge(\vec{A}-\vec{B})$, $\vec{B}\wedge\vec{A}$, $\vec{A}\wedge\vec{B}$,

2- أوجد شعاع الوحدة العمودي على المستوي المشكل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

3- بين أن الأشعة $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ تشكل مثلث قائم.

التمرين العشر:

تعطى إحداثيات النقاط A، B و C في المعلم Oxyz كمايلي:

A(2,3,1)، B(1,-1,2)، C(-1,1,-1)

1- أحسب مساحة المثلث ABC.

2- أحسب حجم متوازي السطوح المتكون من الأشعة $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$

أحسب اتجاهات المستقيمات المارة ب $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$

التمرين الحادي عشر:

معلم متعامد و متجانس (OXYZ)، يحوي الأشعة التالية:

$$\vec{V_1} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{V_2} = 8\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$$

1- أحسب طويلة الأشعة $\vec{V_1},\vec{V_2}$ و الجداء السلمي $\vec{V_1}.\vec{V_2}$ و الجداء الشعاعي $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$.

2- أحسب شعاع الوحدة $\vec{u_1}$ يوازي الشعاع $\vec{V_1}$ و شعاع الوحدة $\vec{u_2}$ يوازي الشعاع $\vec{V_2}$ و أوجد شعاع الوحدة العمودي على $\vec{V_1},\vec{V_2}$.

3- أحسب الزاوية $(\vec{V_1},\vec{V_2})$

4- أحسب مسقط $\vec{V_1}$ على $\vec{V_2}$

5- أحسب مساحة المثلث المشكل من الشعاعين $\vec{V_1},\vec{V_2}$

6- أحسب طويلة مسقط $\vec{V_1}$ على المستويات (OXZ) ,(OXY) و (OYZ).

التمرين الثاني عشر:

ليكن الشعاعين $\vec{U} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\ ,\ \vec{V} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$

1- أحسب $\vec{U}.\vec{V}$ ، $\|\vec{U}\|$ ، $\|\vec{V}\|$ ، $\varphi = (\vec{U},\vec{V})$

2- حدد شعاع عمودي على $\vec{U}$ و $\vec{V}$

3- عين شعاع الوحدة العمودي على $\vec{U}$ و $\vec{V}$

4- أوجد طويلة مسقط الأشعة $\vec{U}$ و $\vec{V}$ على محور الفواصل

التمرين الثالث عشر:

أوجد عبارة حجم متوازي سطوح مرتكز على ثلاث أشعة $\vec{U},\vec{V},\vec{W}$ لها نفس المبدأ(المطلوب برهان)

- استعمل النتيجة لحساب حجم متوازي سطوح مرتكز على الأشعة

$\vec{U} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ، $\vec{V} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{W} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

التمرين الرابع عشر:

في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن الأشعة التالية:

$$\vec{U}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix},\quad \vec{V}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

1- أحسب $\vec{U}.\vec{V}$ ، $\|\vec{U}\|$ ، $\|\vec{V}\|$ ، $\varphi = (\vec{U},\vec{V})$

2- أحسب مسقط الشعاع $\vec{U}$ على الشعاع $\vec{V}$

3- أوجد جيوب تمام الاتجاهية للشعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$

4- أحسب مركبات الشعاع $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ ، و $\|\vec{W}\|$ بطريقتين مختلفتين

5- أحسب الجداء المختلط $(\vec{U}\ ,\ \vec{V}\ ,\ \vec{W})$.

التمرين الخامس عشر:

في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن الأشعة التالية:

$\vec{a} + \vec{b} = 11\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{a} - \vec{b} = -5\vec{i} + 11\vec{j} + 9\vec{k}$

1- أوجد الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و طويلتيهما.

2- أوجد الزاوية المشكلة بين $\vec{a}$ و $(\vec{a}+\vec{b})$.

3- ما هو مسقط الشعاع $\vec{a}$ على الشعاع $\vec{b}$

4- أحسب طول مسقط الشعاع $\vec{a}$ على المستوي (OXY) و مسقط الشعاع $\vec{b}$ على المستوي (OYZ).

5- أحسب الجداء المختلط $\vec{a}.\left[\vec{b}\wedge\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right]$ و اشرح النتيجة

6- أحسب مساحة متوازي الأضلاع المتشكل من الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{a}+\vec{b}$

التمرين السادس عشر:

معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$، نعتبر الأشعة الثلاثة المرتبطة:

$(A, \overrightarrow{u}), (B, \overrightarrow{v}), (C, \overrightarrow{w})$ ، حيث $A(2,0,1)$ ، $B(-1,1,2)$ ، $C(3,0,2)$ و

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{V}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

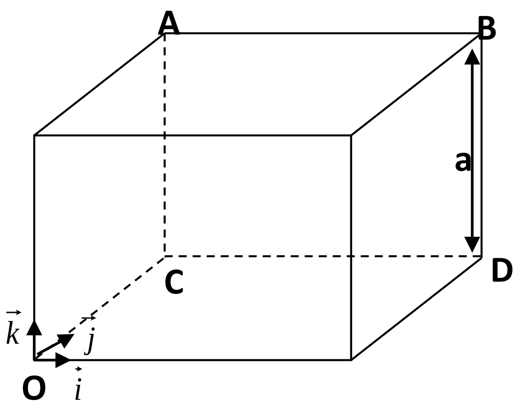
1- أحسب عزم الأشعة الثلاثة المرتبطة بالنسبة للمبدأ 0

2- أحسب محصلة الأشعة الثلاثة و محصلة العزم بالنسبة للمبدأ 0

3- نعتبر محور Δ يمر من النقطتين $P(2,1,2)$ و $Q(5,-3,2)$ و موجه بالشعاع $\overrightarrow{PQ}$ ، أحسب عزم الأشعة الثلاثة بالنسبة للمحور Δ

التمرين العشرون:

يعطى مكعب ضلعه a ومعلم متعامد و متجانس $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ (الشكل)



ليكن الشعاعان $\overrightarrow{V_1}=\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{OB}$,

1- أوجد عبارة الشعاع الناتج عن إسقاط الشعاع $\overrightarrow{V_1}$ على حامل $\overrightarrow{V_2}$

2- أحسب الزاوية $\left(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}\right)$

3-أوجد شعاع الوحدة الناظمي على المستوى المتشكل من $\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}$

4- أحسب عزم الشعاع $\overrightarrow{V_1}$ بالنسبة للمحور (Δ) المار بالنقطتين C, D

التمرين الواحد وعشرون:

تعطى الأشعة الآتية:

$$\overrightarrow{OA} = 5\vec{j} + 2\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$$
$$\vec{V} = -\vec{i} + 2\vec{j}$$

1) أحسب عزم الشعاع $\vec{V}$ بالنسبة للنقطة B علما أن نقطة تأثير $\vec{V}$ هي النقطة A.
2) أوجد عزم الشعاع بالنسبة للمحور (Δ) الذي يمر بالنقطة B وموازي للشعاع : $\vec{C} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$
3) أوجد معادلة المحور (Δ).

التمرين الثاني و العشرون:

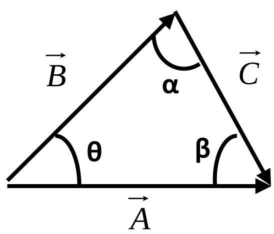
تعطى إحداثيات النقاط A, B, C, D في المعلم المتعامد و المتجانس R(O, X, Y, Z) كمايلي:

A(1, -2, 0), B(2, 2, -2), C(-2, 0, 1), D(-3, -3, 2)

1- أوجد الأشعة $\vec{V_1} = \overrightarrow{AB}$ ، $\vec{V_2} = \overrightarrow{CD}$
2- أوجد الشعاع $\vec{V}$، حيث $\vec{V}$ عمودي على المستوي $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$
3- أوجد عزم الشعاع $\vec{V_1}$ بالنسبة للمحور (Δ) الذي يمر بالمبدأ O و موازي للشعاع :
$\vec{V_3} = \vec{j} - \vec{k}$
4- برهن أن $\vec{V_3}$ ينتمي إلى المستوي $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$
5- إذا كان $\vec{V_3} = X\vec{V_1} + Y\vec{V_2}$، أوجد (X, Y)

التمرين الثالث و عشرون:

1- إذا كان $\vec{A} \wedge \vec{B} = O$ و الشعاعين $\vec{A}$ و$\vec{B}$ لا يساوى الشعاع المعدوم، بين أن الشعاع$\vec{A}$يوازي $\vec{B}$.



2- بين أن $\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right|^2 + \left|\vec{A}.\vec{B}\right|^2 = \left|\vec{A}\right|^2 \left|\vec{B}\right|^2$.
3- برهن علاقة التجب للمثلث المستوي.
حيث:

$$\begin{cases} A^2 = B^2 + C^2 - 2bc\cos\alpha \\ B^2 = C^2 + A^2 - 2ca\cos\beta \\ C^2 = A^2 + B^2 - 2ab\cos\theta \end{cases}$$

4- لتكن الأشعة $\vec{c'} = \dfrac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\vec{a}.\vec{b} \wedge \vec{c}}$ ، $\vec{b'} = \dfrac{\vec{c} \wedge \vec{a}}{\vec{a}.\vec{b} \wedge \vec{c}}$ ، $\vec{a'} = \dfrac{\vec{b} \wedge \vec{c}}{\vec{a}.\vec{b} \wedge \vec{c}}$

بين إذا كان $\vec{a}.\vec{b}\wedge\vec{c}\neq 0$

أ)- $\vec{a}'.\vec{a}=\vec{b}'.\vec{b}=\vec{c}'.\vec{c}=1$

ب)- $\vec{c}'.\vec{a}=\vec{c}'.\vec{b}=0$ ، $\vec{b}'.\vec{a}=\vec{b}'.\vec{c}=0$ ، $\vec{a}'.\vec{b}=\vec{a}'.\vec{c}=0$

التمرين الرابع و العشرون:

يعطى شعاعان $\vec{W}$ و $\vec{A}$ في القاعدة $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ بالعلاقة: $\vec{A}=3\vec{i}+4\vec{j}-12\vec{k}$ $\vec{W}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

1- أحسب طويلة الشعاع $\vec{A}$ و الشعاع $\vec{u}$ حيث:
$\vec{A}=|\vec{A}|\vec{u}$. ماذا يمثل الشعاع $\vec{u}$؟

2- أعطي شعاع مسقط $\vec{W}$ على المستقيم الموجه المعرف بالشعاع $\vec{A}$؟

3- بين أن الشعاع $\vec{W}$ يمكن كتابته على الشكل:
$\vec{W}=(\vec{u}.\vec{W}).\vec{u}+\vec{X}$

بحيث: $\vec{X}=(\vec{u}\Lambda\vec{W})\Lambda\vec{u}$. * ماذا يمثل $\vec{X}$؟

التمرين الخامس وعشرون:

في جملة المحاور المتعامدة Oxyz، ليكن الشعاع $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ذو اتجاه يمر بالنقطة A(3,4,2)

1) أحسب عزم الشعاع $\vec{V}$ بالنسبة للمبدأ O ثم بالنسبة للمحاور Ox, Oy, Oz

2) أحسب عزم الشعاع $\vec{V}$ بالنسبة للمحور (Δ) المار بالنقطة O حيث جيوب تمام الاتجاهية هي $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

3) أحسب عزمه بالنسبة للنقطة B(3,6,0)

4) أحسب عزم $\vec{V}$ بالنسبة للمحور (Δ') المار بالنقطة B و الموازي للمحور (Δ)

التمرين السادس و العشرون:

ليكن الشعاع $\vec{V}=\vec{A}\cos\theta+\vec{B}\sin\theta$ حيث $\vec{A},\vec{B}$ شعاعان ثابتا θ=wt (w ثابت) بين أن الشعاع $\vec{V}\wedge\frac{d\vec{V}}{dt}=w\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)$ و $\frac{d^2V}{dt^2}+w^2\vec{V}=\vec{O}$

التمرين السابع و العشرون:

ليكن في الفضاء الشعاع $\vec{V}=\left|\vec{V}\right|.\vec{u}$

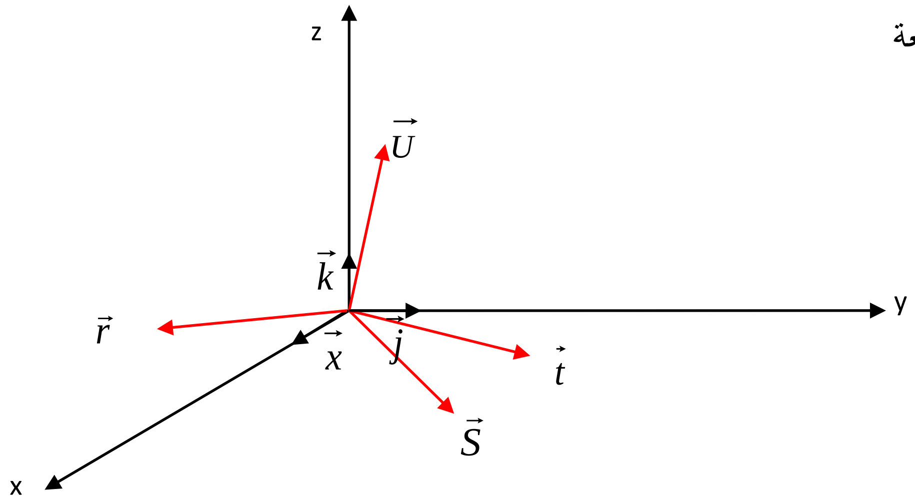
1- إذا كانت طويلة الشعاع $\vec{V}$ ثابتة بين أن الشعاع $\frac{d\vec{V}}{dt}$ عمودي على $\vec{V}$

2- بين أن بصفة عامة : $\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}=\left|\vec{V}\right|.\frac{d\vec{V}}{dt}$

حلول التمارين

التمرين الأول:

1) تمثيل الأشعة



2) طويلة كل الأشعة

$$|\vec{t}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$2\vec{r} - 3\vec{S} - 5\vec{t} = 11\vec{i} - 16\vec{j} + 23\vec{k}$$

$$\left|2\vec{r} - 3\vec{S} - 5\vec{t}\right| = \sqrt{906}$$

$$\vec{r} + \vec{S} + \vec{t} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} \Rightarrow \left|\vec{r} + \vec{S} + \vec{t}\right| = \sqrt{26}$$

2) شعاع وحدة يوازي مجموع الأشعة $\vec{r}$ و $\vec{S}$

$$\vec{r} + \vec{S} - \vec{R} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}. \qquad |\mathrm{R}| = \sqrt{14}$$

$$\vec{R} = |\vec{R}|.\vec{U} \Rightarrow \vec{U} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

3) $\vec{U} = a\vec{r} + b\vec{S} + c\vec{t}$

$$3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k} = a(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) + b(\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) + c(-2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k})$$
$$= (2a + b - 2c)\vec{i} + (-a + 3b + c)\vec{j} + (a - 3b - 3c)\vec{k}$$

بالمطابقة

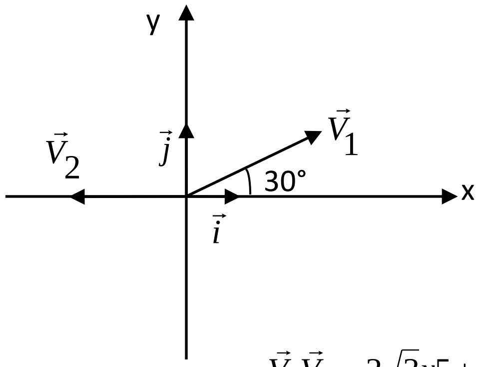
$$\begin{cases} 2a + b - 2c = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \\ -a + 3b + c = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ a - 3b - 3c = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

$$(2) + (3) \Rightarrow b = 7 - 2c$$

نعوض في (1) فنجد $a=2$

نعوض b في (2) فنجد $c=3$ و $b=1$

التمرين الثالث :



$$\vec{V}_2=\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}\ \vec{V}_1=\begin{pmatrix}\cos 30=2\sqrt{3}\\4\sin 30=2\end{pmatrix},$$

1) $\vec{S}=\vec{V}_1+\vec{V}_2=(2\sqrt{3}-5)\vec{i}+2\vec{j}$

2) $\vec{D}=\vec{V}_1-\vec{V}_2=(2\sqrt{3}+5)\vec{i}+2\vec{j}$

3) الجداء السلمي للشعاعين يأخذ القيمة $\vec{V}_1.\vec{V}_2=2\sqrt{3}x5+2x0=-10\sqrt{3}unité$

التمرين الرابع:

1) حساب مركبات $\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_3A_4}$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\4\\5\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{A_3A_4}\begin{pmatrix}0\\-5\\\frac{\sqrt{41}}{3}\\\sqrt{42}\end{pmatrix}$$

2) شعاع الاسقاط $\overrightarrow{A_1A_2}$ على المستقيم الموجه والمعرف $\overrightarrow{A_3A_4}$

لدينا w هو شعاع الاسقاط

$$\vec{w}=\left(\overrightarrow{A_1A_2},\frac{\overrightarrow{A_3A_4}}{\left|\overrightarrow{A_3A_4}\right|}\right).\frac{\overrightarrow{A_3A_4}}{\left|\overrightarrow{A_3A_4}\right|}=(\overrightarrow{A_1A_2}.\overrightarrow{A_3A_4})\frac{\overrightarrow{A_3A_4}}{\left|\overrightarrow{A_3A_4}\right|^2}$$

$$w=\frac{5(\lambda-4)}{\lambda^2+25}\begin{pmatrix}0\\-5\\\lambda\end{pmatrix}$$

3) الشعاعين متعامدين

أ- إيجاد λ $\quad\overrightarrow{A_1A_2}.\overrightarrow{A_3A_4}=0\Rightarrow\lambda=4$

ب- طويلة $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|$. $\quad\left|\overrightarrow{A_3A_4}\right|$,.

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{49} = 7$$

$$\left|\overrightarrow{A_3A_4}\right| = \sqrt{\frac{25+16}{41}} = 1$$

ج- مركبات $\vec{C} = \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_3A_4}$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-5}{\sqrt{41}} \\ \frac{4}{\sqrt{41}} \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ = - \\ + \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{\sqrt{41}} + \frac{25}{\sqrt{41}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{41}} - 0 \\ \frac{-10\sqrt{2}}{\sqrt{41}} - 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{C} = \frac{41}{\sqrt{41}}\vec{i} - \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{41}}\vec{j} - \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{41}}\vec{k}$$

د- طويلة $\vec{C}$ بطريقتين

طريقة 1 $\left|\vec{C}\right| = \sqrt{11 + \frac{128}{41} + \frac{200}{41}} = \sqrt{49} = 7$

طريقة 2 $\left|\vec{C}\right| = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| . \left|\overrightarrow{A_3A_4}\right| . \sin\theta = 7 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 7$

4) أ- حتى تكون $\overrightarrow{A_1A_2}$ ، $\overrightarrow{A_3A_4}$ ، $\vec{D}$ في نفس المستوي

$$\overrightarrow{A_1A_2}.(\overrightarrow{A_3A_4} \wedge \vec{D}) = \vec{D}.(\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_3A_4}) = \overrightarrow{A_3A_4}.(\vec{D} \wedge \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$$

$$-5\mu + 8\lambda + 50 = 0$$

ب- $\vec{D} \perp \overrightarrow{A_3A_4}$ استنتاج λ ، μ

$$\vec{D}.\overrightarrow{A_3A_4} = 0 \Rightarrow \mu\lambda = 0$$

بما أن $\mu \neq 0$ إذن $\mu = 10 \Leftarrow \lambda = 0$

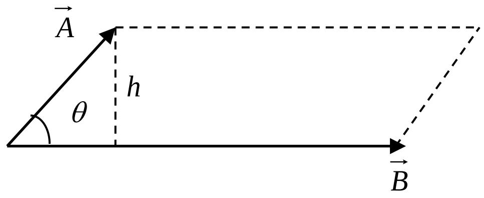
) الجداء الشعاعي $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\sqrt{3} & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10\vec{k}$$

التمرين الخامس:

أ- مساحة متوازي الأضلاع $S = h|\vec{B}|$

نلاحظ من الشكل



$$\sin\theta = \frac{h}{|\vec{A}|} \Rightarrow h = |\vec{A}|\sin\theta$$

ونعلم $|\vec{A} \wedge \vec{B}| = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\sin\theta$

$$= |\vec{B}|.h = S$$

ب- ليكن $\vec{B}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

$$|\vec{A}+\vec{B}| = \left[(A_x+B_x)^2 + (A_y+B_y)^2 + (A_z+B_z)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|\vec{A}-\vec{B}| = \left[(A_x-B_x)^2 + (A_y-B_y)^2 + (A_z-B_z)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

نساوي بين العبارتين وبعد النشر نصل في النهاية على

$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$ وهذا يعني $\vec{A} \perp \vec{B} \Leftarrow (\vec{A}.\vec{B}) = 0$

التمرين السادس:

من الشكل لدينا مركبات $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ في المعلم (x, y)

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{vmatrix}, \qquad \overrightarrow{ON}\begin{vmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{vmatrix}$$

لنحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = |\overrightarrow{OM}|.|\overrightarrow{ON}|.\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 1x1\cos(\alpha-\beta)$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

دالة $\cos(-\alpha+\beta) = \cos(-\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta)$

$$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

لحساب $\sin(\alpha(-\beta))$ نستعمل طويلة الجداء الشعاعي للشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$

$$\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ \cos\beta & \sin\beta & 0\end{vmatrix}=(\cos\alpha\,\sin\beta-\sin\alpha\,\sin\beta)\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}\right|=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$$

$$=\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|.\sin(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON})=1x1\sin(-\alpha+\beta)$$

$$\sin(-\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$$

وعليه فإن

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

التمرين الخامس عشر:

-(1

$$\vec{a}-\vec{b}=11\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}.....(1)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=-5\vec{i}+11\vec{j}+9\vec{k}.....(2)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{83}\ (1)+(2)\Rightarrow\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}\Rightarrow$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{104}\ (1)-(2)\Rightarrow\vec{b}=8\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}\Rightarrow$$

-(2

$$\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|.|\vec{a}+\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{a}+\vec{b})$$

$$\cos(\vec{a},\vec{a}+\vec{b})=\frac{\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}|.|\vec{a}+\vec{b}|}$$

$$\cos(\vec{a},\vec{a}+\vec{b})=\frac{63}{\sqrt{83.142}}=0{,}57\Rightarrow\theta=55{,}22°$$

-(3

$$proj\ \vec{a}/_{\vec{b}}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{b}=\frac{-20}{\sqrt{104}}$$

-(4

$$\overrightarrow{proj}\ \vec{a}/_{(xoy)}=3\vec{i}+5\vec{j}$$

طويلته

$$\overrightarrow{proj}\ \vec{a}/_{(xoy)}=\sqrt{34}$$

$$\overrightarrow{proj}\ \vec{b}/_{(yoz)}=-6\vec{j}-2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{proj}\ \vec{b}/_{(yoz)}=\sqrt{40}$$

5) الجداء المختلط

$$\vec{a}.\left(\vec{b}\wedge\vec{a}+\vec{b}\right)=0$$

$\Leftarrow$ الأشعة تنتمي إلى نفس المستوي

6) مساحة متوازي الأضلاع:

$$S=\left|\vec{a}\wedge\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right|$$

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}11\\-1\\5\end{pmatrix}=32\vec{i}+62\vec{j}-58\vec{k}$$

$$S=\sqrt{8232}m^2=14\sqrt{42}m^2$$

التمرين الواحد و العشرون:

1) عزم الشعاع $\vec{V}$بالنسبة للنقطة B

$$\overrightarrow{M}_{\frac{\vec{V}}{B}}=\overrightarrow{BA}\wedge\vec{V}$$

$$\overrightarrow{BA}=-3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$$
$$\overrightarrow{BA}\wedge\vec{V}=4\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}=\overrightarrow{M}_{\frac{\vec{V}}{B}}$$

2) عزم $\vec{V}$ بالنسبة لـ (Δ)

$$\overrightarrow{M}_{\frac{\vec{V}}{(\Delta)}}=\overrightarrow{M}_{\frac{\vec{V}}{B}}\vec{U}$$

$$\vec{U}=\frac{\vec{C}}{C}=\frac{-1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}\qquad\qquad\left|\vec{C}\right|=3$$

$$\overrightarrow{M}_{\frac{\vec{V}}{(\Delta)}}=\frac{-4}{3}$$

3) تعيين معادلة المحور (Δ)

لتكن النقطة M وتشكل مع B الشعاع $\overrightarrow{BM}$ حيث B و M ينتميان إلى المحور (Δ) $M(x,y,z)$

$$\overrightarrow{BM}=(x-3)\vec{i}+(y-1)\vec{j}+(z-4)\vec{k}$$

$$\vec{C}//\overrightarrow{BM}\Rightarrow\vec{C}\wedge\overrightarrow{BM}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ x-3 & y-1 & z-4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z-y=3 \\ 2x+z=10 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

التمرين الثاني و العشرون:

1) الأشعة $\vec{V_1}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{V_2}=\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\vec{V}\perp(\vec{V_1},\vec{V_2}) \Leftarrow$ $\quad \vec{V}=\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$ $\quad \vec{V}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

$$\vec{V}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $\overrightarrow{M}_{\frac{\vec{V_1}}{(\Delta)}}=\overrightarrow{M}_{\frac{\vec{V_1}}{o}}.\vec{U}$ / $\quad |\vec{V_3}|=\sqrt{2}$ $\quad (\Delta)\rightarrow\vec{U}=\frac{\vec{V_3}}{|\vec{V_3}|}$

$$\vec{U}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{M}_{\frac{\vec{V_1}}{o}}=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M}_{\frac{\vec{V_1}}{(\Delta)}}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{6}{\sqrt{2}}=-\frac{4}{\sqrt{2}}$$

(1 $\quad \vec{V_3}\in(\vec{V_1},\vec{V_2}) \Leftarrow \quad \vec{V_3}\perp\vec{V}$

$$\vec{V_3}.\vec{V}=0$$

$$\vec{V_3}.\vec{V}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=1-1=0\Rightarrow\vec{V_3}\in(\vec{V_1},\vec{V_2})$$

(2

$$\vec{V_3}=X\vec{V_1}+Y\vec{V_2}$$

$$\vec{V_3}=X(\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k})+Y(-\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})$$

$$\vec{V_3}=(x-y)\vec{i}+(4x-3y)\vec{j}+(-2+y)\vec{k}=\vec{j}-\vec{k}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-y=0\\4x-3y=1\\-2x+y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=y\\4x-3x=1\Rightarrow x=1\\y=1\end{matrix}$$

التمرين الرابع و العشرون:

1) طويلة الشعاع $\vec{A}$

$$\left|\vec{A}\right|=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$$

$$\vec{U}=\frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}=\frac{3}{13}\vec{i}+\frac{4}{13}\vec{j}-\frac{12}{13}\vec{k}$$

$\vec{U}$: هو شعاع الوحدة (المجمول) و المعرفة بالشعاع $\vec{A}$

2) شعاع مسقط $\vec{w}$ على المستقيم الموجه و المعرف بـ $\vec{A}$

$$\vec{V}\,\mathrm{Proj}\frac{\vec{w}}{\vec{A}}=(\vec{w}.\vec{U}).\vec{U}=\frac{-10}{3}\vec{U}$$

$$\vec{V}\,\mathrm{Proj}\frac{\vec{w}}{\vec{A}}=\frac{-300}{169}\vec{i}-\frac{40}{169}\vec{j}+\frac{120}{169}\vec{k}$$

3) كتابة $\vec{w}=(\vec{U}.\vec{w}).\vec{U}+\vec{X}$..........(1) حيث $\vec{X}=(\vec{U}\wedge\vec{w})\wedge\vec{U}$

لدينا مهما يكن ثلاثة أشعة في الفضاء $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ فإن

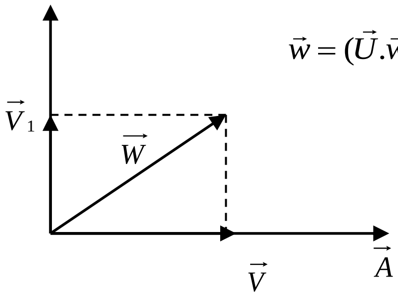
(تبرهن) $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c}).\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$

$$\vec{X}=(\vec{U}\wedge\vec{w})\wedge\vec{U}=(\vec{U}.\vec{U}).\vec{w}-(\vec{U}.\vec{w}).\vec{U}$$

$$\vec{X}=\vec{w}-(\vec{U}.\vec{w}).\vec{U}$$

ندخل قيمة $\vec{X}$ في عبارة $\vec{w}$ لنحصل على

$$\vec{w}=(\vec{U}.\vec{w}).\vec{U}+\vec{w}-(\vec{U}.\vec{w})\vec{U}=\vec{w}$$



1) ماذا يمثل $\vec{X}$

لدينا على الرسم المقابل $\vec{V}$ يمثل

شعاع مسقط $\vec{w}$ على $\vec{A}$

و $\vec{V}_1$ هو شعاع مسقط $\vec{w}$ على الاتجاه العمودي على $\vec{A}$

إذن: $\vec{w}=\vec{V}+\vec{V}_1$

بالمطابقة مع العلاقة (1) نصل إلى $\vec{X}=\vec{V}_1$

ومنه $\vec{X}$ يمثل شعاع مسقط $\vec{w}$ على الاتجاه العمودي على $\vec{A}$ و $\vec{V}$ يمثل شعاع مسقط $\vec{w}$ على الاتجاه الموازي لـ $\vec{A}$

التمرين الخامس و عشرون:

$$\vec{M}_{\vec{V}/0}=\vec{OA}\wedge\vec{V}=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=8\vec{i}-7\vec{j}+2\vec{k}$$

بالنسبة للمحاور (ox,oy,oz)

$$\vec{M}_{\vec{V}/ox}=\vec{M}_{\vec{V}/o}\vec{i}=8,\quad ,\vec{M}_{\vec{V}/oz}=\vec{M}_{\vec{V}/o}\vec{k}=2,\ \vec{M}_{\vec{V}/oy}=\vec{M}_{\vec{V}/o}\vec{j}=-7$$

2) $\vec{M}_{\vec{V}/(A)}$ حيث

$$\vec{U}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\vec{V}/(A)} = \vec{M}_{\vec{V}/o}.\vec{U} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{-8}{\sqrt{2}} - \frac{7}{2} + 1 = -\frac{(8\sqrt{2}+5)}{2}$$

-(3

$$\vec{M}_{\vec{V}/(B)} = \vec{BA} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 10\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

(4 $\vec{U}$ شعاع وحدة (Δ') الموازي لـ (Δ)

$$\vec{M}_{\vec{V}/(A)} = \vec{M}_{\vec{V}/B}.\vec{U} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -(5\sqrt{2}+2)$$

التمرين السابع و العشرون:

(1

$$\left|\vec{V}\right| = cte$$

$$\vec{V} = \left|\vec{V}\right|.\vec{U}$$

$$\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} \overset{?}{=} 0$$

$$(\vec{V})^2 = V^2 = cte$$

$$2V.\frac{dV}{dt} = 0.................(1)$$

$$\vec{V}.\vec{V} = 0 \quad \vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V}\frac{d\vec{V}}{dt} = 2\vec{V}\frac{d\vec{V}}{dt} = 0..........(1)$$

$$\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{V} \perp \frac{d\vec{V}}{dt}$$

(2

$$\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} \overset{?}{=} \left|\vec{V}\right|.\frac{d\left|\vec{V}\right|}{dt}$$

$$\vec{V} = \left|\vec{V}\right|.\vec{U}$$

$$\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dr}t=\left|\vec{V}\right|\vec{U}.\frac{d}{dt}\left[\left|\vec{V}\right|\vec{U}\right]$$

$$=\left|\vec{V}\right|\vec{U}.\left[\frac{d\left|\vec{V}\right|}{dt}.\vec{U}+\left|\vec{V}\right|.\frac{d\vec{V}}{dt}\right]$$

$$=\left|\vec{V}\right|.\frac{d\left|\vec{V}\right|}{dt}.\overrightarrow{U^2}+\left|\vec{V}.\overrightarrow{U^2}\right|\vec{U}.\frac{d\vec{U}}{dt}$$

لأنه $\left|\vec{U}\right|=$ ثابت $\vec{U}.\frac{d\vec{U}}{dr}=0$

$$\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}\Rightarrow\left|\vec{V}\right|.\frac{d\left|\vec{V}\right|}{dt}$$

المحور III : حركيات نقطة مادية

Cinématique d'un Point Matériel

I مقدمة:

أ- تمهيد:

الحركة والسكون مفهومان نسبيان فالجبل ساكن بالنسبة للأرض ولكنه متحرك بالنسبة لمراقب بعيد عن الأرض والذي يرى الكرة الأرضية وكل ما عليها متحرك.

يجب على الدارس لأي حركة تعيين نظام مرجعي (معلم) والذي تحلل الحركة بالنسبة له، تتم هذه الدراسة على أحد الشكلين شعاعي

- شعاعي : باستخدام أشعة الموضع $\overrightarrow{O\mathcal{M}}$ السرعة $\vec{v}$ والتسارع $\vec{a}$
- جبري : بتحديد معادلة الحركة وفق مسار معين.

ب- تعاريف:

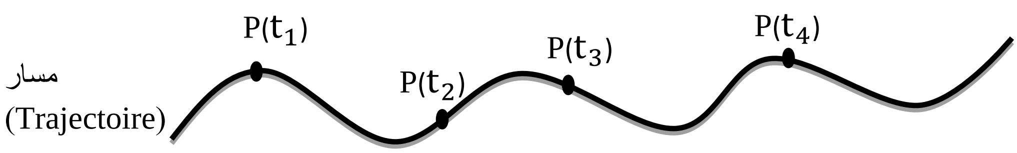
*علم الحركة أو حركيات نقطة مادية هي دراسة الحركة دون التعرض إلى المسببات (كالقوى مثلا....إلخ).

*النقطة المادية هي كل جسم مادي يمكن إعتبار أبعاده معدومة نظريا مهملة عمليا مقارنة بالمسافة المقطوعة (المسار).

*مسار متحرك هو مجموعة النقاط (الأوضاع) المتتالية التي يستغلها المتحرك خلال زمن.

$$t_1 < t_2 < t_3 < t_4$$

* يكون المسار ماديا (الطريق) وهميا (مسار القمر)

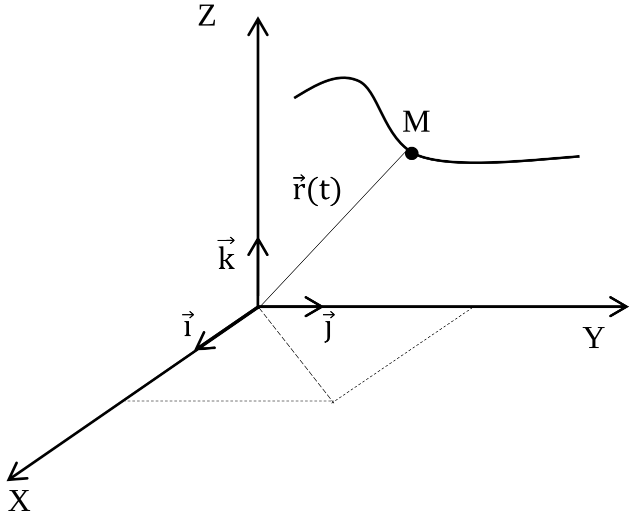


الشكل III-1: مسار متحرك

II–المقادير الفيزيائية للحركة:

1- شعاع الموضع (Vecteur Position):

يعرف موضع نقطة مادية $\mathcal{M}$ في اللحظة t في معلم فضائي كارتيزي $R(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ (الشكل 2-II) بشعاع الموضع $\overrightarrow{0\mathcal{M}}$.



الشكل 2-III: شعاع الموضع

$$\overrightarrow{0\mathcal{M}} = \vec{r}(t)$$
$$\overrightarrow{0\mathcal{M}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$
$$\|\overrightarrow{0\mathcal{M}}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-1)$$

- **المعادلة الزمنية (Equations Horaires):**

تكون النقطة المادية $\mathcal{M}$ في سكون إذا كانت الإحداثيات x,y,z مستقلة عن الزمن وتكون في حالة حركة (mouvement) إذا أصبحت هذه الإحداثيات توابع للزمن ونرمز لها بـــ x(t), y(t),z(t). تسمى هذه الدوال المعادلات الزمنية للحركة.

- **الحركة المستوية:** دارسة الحركة المستوية تتم بالإحداثيات المستطلة $R(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ حيث يصبح الموضع معرف بإحداثياتين هما y(t), x(t) الدالة y(t) →x تسمى المعادلة الكارتيزية للمسار Equation (cartésienne de la trajectoire).

نحصل على معادلة المسار بحذف الزمن ما بين المعادلتين الزمنيين.

2- شعاع السرعة (Vecteur Vitesse):

السرعة هي المسافة المقطوعة خلال وحدة زمن

***شعاع السرعة المتوسطة (Vecteur Vitesse moyenne)**

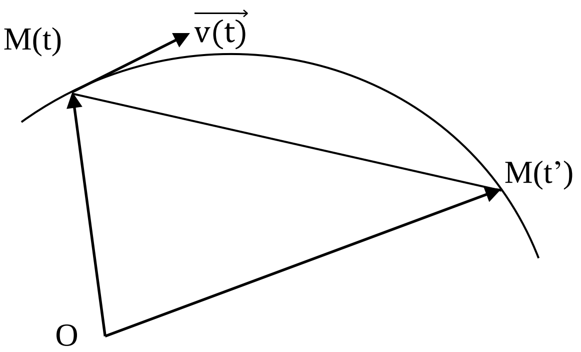
لاحظ الشكل III-3

بين اللحظة t التي يشغل فيها المتحرك الموضع $\mathcal{M}$ واللحظة 't التي يشغل فيها المتحرك الموضع `$\mathcal{M}$

فإن شعاع السرعة المتوسطة معرف بالعبارة التالية

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}\mathcal{M}'}}{t' - t'},$$

$$V_{moy} = \frac{|\overrightarrow{\mathcal{M}\mathcal{M}'}|}{\Delta t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{III}-2)$$



الشكل III-3: شعاع السرعة المتوسطة

*** شعاع السرعة اللحظية (Vecteur Vitesse Instantanée):**

يعرف شعاع السرعة اللحظية لنقطة مادية أي شعاع السرعة في اللحظة t أنه مشتقة (Dérivée) شعاع الموضع بالنسبة للزمن:

$$\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{t}} = \lim_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}`} \frac{\overrightarrow{\mathrm{O}\mathcal{M}}` - \overrightarrow{\mathrm{O}\mathcal{M}}}{\mathrm{t} - \mathrm{t}`} = \lim_{\Delta\mathrm{t}\to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{\mathrm{O}\mathcal{M}}}{\Delta\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{O}\mathcal{M}}}{\mathrm{dt}}$$

$$\vec{V}_t = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{III}-3)$$

Δt يكون صغيرا جدا.

ملاحظة:

* شعاع السرعة $\vec{V}_t$ يحمله المماس للمسار في النقطة $\mathcal{M}$ وموجه دائما نحو إتجاه الحركة.

* في المعلم الكارتيري نستنتج العبارة الشعاعية للسرعة من العبارة الشعاعية للموضع وذلك بعملية إشنقاق

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad \Rightarrow \vec{V} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

* شدة شعاع السرعة اللحظية

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{III} - 4)$$

3- شعاع التسارع (Vecteur Accélération):

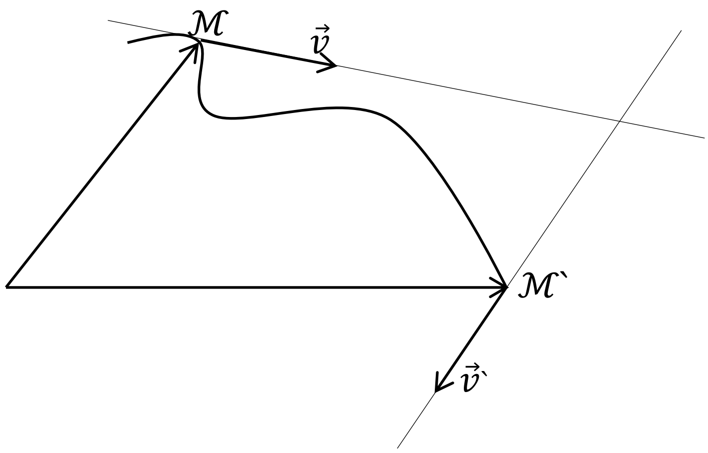
نعتبر التسارع مقدار تغيير السرعة خلال وحدة زمن.

* شعاع التسارع المتوسط (Vecteur accélération moyenne):

إذا إعتبرنا لحظتين مختلفتين t و t\` المناسبتين لشعاعي الموضع $\overrightarrow{O\mathcal{M}}$ و $\overrightarrow{O\mathcal{M}`}$ وشعاعي السرعة اللحظية $\vec{V}$ و $\vec{V}`$ (الشكل III-4) فإن شعاع التسارع المتوسط معرف بالعبارة:

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{V}` - \vec{V}}{t` - t} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

$$a_{moy} = \frac{|\Delta\vec{V}|}{\Delta t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{III} - 5)$$



الشكل III-4: شعاع التسارع المتوسط

* شعاع التسارع اللحظي (Vecteur accélération instantané):

شعاع التسارع اللحظي لحركة ما يعرف أنه مشتقة شعاع السرعة اللحظية بالنسبة للزمن.

$$\vec{a}=\lim_{t`\to t}\frac{\vec{V}`-\vec{V}}{t`-t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt^2}$$

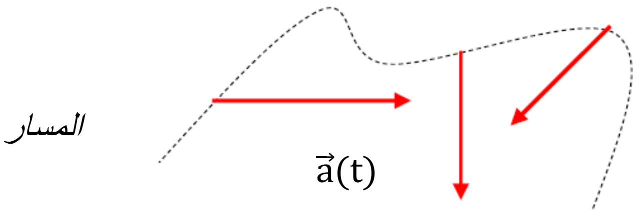
$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(III-6)$$

في الإحداثيات الديكارتية

$$\vec{a}=\frac{d^2X}{dt^2}\vec{\imath}+\frac{d^2Y}{dt^2}\vec{\jmath}+\frac{d^2Z}{dt^2}\vec{k}$$

♦ يكون شعاع التسارع موجها دائما نحو تقعر المسار

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(III-7)$$



الشكل III-5: شعاع التسارع اللحظي

ملاحظة: تكون الحركة متسارعة إذا كان $\vec{a}.\vec{v}>0$ و متباطئة إذا كان $\vec{a}.\vec{v}<0$، أما اتجاه الحركة فيدل عليه إتجاه شعاع السرعة $\vec{v}$

مثال: إذا كان شعاع الموضع هو $\overrightarrow{O\mathcal{M}}\begin{cases}x=2t^2\\y=4t-5\\z=t^3\end{cases}$.

♦ استنتج شعاع السرعة و التسارع اللحظتين ثم أحسب شدة كل منهما.

الجواب: تقوم بعملتي الإشتقاق فنحصل على:

$$\vec{v}=4t\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+3t^2\vec{k}\quad\longrightarrow\quad\vec{a}=4\vec{\imath}+6t\vec{k}$$

$$v=\sqrt{16t^2+16+9t^4}\quad\longrightarrow\quad a=\sqrt{16+36t^2}$$

II- أنواع الحركة:

إذا إعتبرنا المسار كمعيار لتصنيف الحركة فإنه لدينا نوعين من الحركة:

حركة مستقيمة وأخرى منحنية (دائرية جيبية)

1) الحركة المستقيمة (Mouvement rectiligne):

نقول عن حركة مستقيمة إذا كانت تتغير وفق خط مستقيم.

أ- الحركة المستقيمة المنتظمة (*Mouvement Rectiligne Uniforme*):

تكون نقطة مادية في حالة حركة مستقيمة منتظمة إذا كان مسارها مستقيما وشعاع سرعتها ثابتا وبالتالي فإن شعاع تسارعها معدوم.

*** المعادلة الزمنية :** نختار المحور Ox كمعلم، ونحدد الشروط الإبتدائية $x = x_0 \quad t = t_0 ,$

لدينا

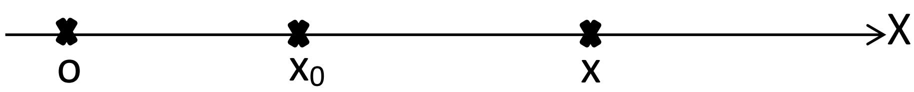
$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow dx = vdt = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt$$

$$x|_{x_0}^{x} = vt|_{t_0}^{t} \quad \Rightarrow x - x_0 = v(t - t_0)$$

$$x = v(t - t_0) + x_0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III - 8)$$

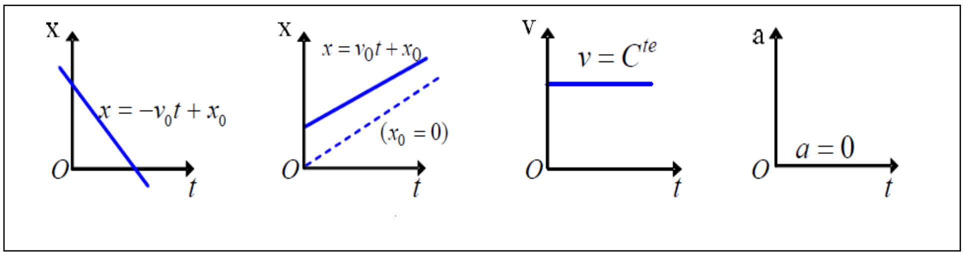
من أجل $t = 0s$

$$x = vt + x_0$$



- **مخططات الحركة (Diagramme du Mouvement):**

مخططات الحركة هي التمثيل البياني لكل من والإنتقال، السرعة و التسارع بدلالة الزمن (الشكل II-6).



الشكل III-6: مخططات الحركة المستقيمة المنتظمة

ب- الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام (Mouvement Rectiligne Uniformément Varié):

تكون حركة نقطة مادية مستقيمة متغيرة بإنتظام إذا كان المسار مستقيما و التسارع ثابتا.

*** السرعة الجبرية:** بإعتبار الشروط الإبتدائية $v=v_0$ و $t=t_0$ وإنطلاقا من التعاريف السابقة

$$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=adt\Rightarrow\int_{v_0}^{v}dv=\int_{t_0}^{t}adt\Rightarrow v|_{v_0}^{v}=at|_{t_0}^{t}$$

$$v-v_0=a(t-t_0)\quad\Rightarrow v=a(t-t_0)+v_0$$

$$v=at+v_0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (III-9)$$

*** المعادلة الزمنية للحركة :** إذا أخذنا في $x=x_0$ ، $t=t_0$ وإنطلاقا مماسبق.

$$v=\frac{dx}{dt}=a(t-t_0)+v_0\Rightarrow dx=(a(t-t_0)+v_0)dt\ \Rightarrow\int_{x_0}^{x}dx$$

$$=\int_{t_0}^{t}(a(t-t_0)+v_0)dt$$

$$x-x_0=\int_{t_0}^{t}a(t-t_0)dt+\int_{t_0}^{t}v_0dt=\frac{1}{2}a(t-t_0)^2+v(t-t_0)$$

$$=\frac{1}{2}a(t-t_0)(t-t_0)+v(t-t_0)$$

$$=\frac{a(t-t_0)^2}{2}+v(t-t_0)+x_0$$

لما $x=x_0$ و $t=0s$

$$x=\frac{1}{2}at^2+vt+x_0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (III-10)$$

*** العلاقة المستقلة عن الزمن :**

$$a=\frac{dv}{dt}\ldots\ldots..\ 1$$

$$v=\frac{dx}{dt}\ \Rightarrow dt=\frac{1}{v}dx$$

بالتعويض في 1 نجد:

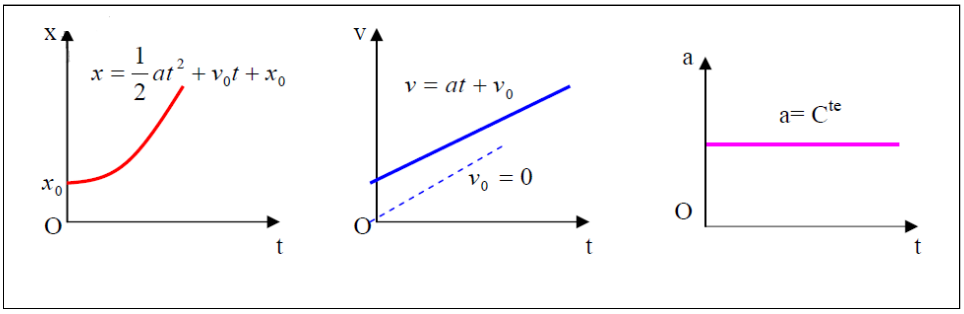
$$a = \frac{dv}{\frac{dx}{v}} = \frac{dv}{dx}.v \Rightarrow adx = v.dv$$

$$\int_{x_0}^{x} adx = \int_{v_0}^{v} vdv \Rightarrow a(x - x_0) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III - 11)$$

- **مخططات الحركة**

نلاحظ في الشكل الموالي مخططات الحركة لكل من الانتقال، السرعة و التسارع



الشكل III-7: مخططات الحركة

ج- الحركة المستقيمة متغيرة التسارع (Mouvement rectiligne à accélération variable):

تكون حركة نقطة مادية مستقيمة ومتغيرة التسارع إذا كان المسار مستقيما والتسارع تابع للزمن، $a = f(t)$

مثال:

ينتقل جسم نقطي وفق مستقيم بتسارع $a = 4 - t^2$

♦ أوجد عبارتي السرعة والإنتقال بدلالة الزمن وبأخذ الشروط الابتدائية:

$$t = 3s \quad , \quad v = 2ms^{-1}, \quad x = 9$$

الجواب:

1- حساب v

$$v=\int_0^t a dt+v_0 \Rightarrow v=v_0+\int_0^t (4-t^2)dt$$

$$v=v_0+4t-\frac{1}{3}t^3 \quad \Rightarrow \quad v=4t-\frac{1}{3}t^3+v_0$$

نكامل من جديد للحصول على العبارة: الحرفية للإنتقال

$$x=\int_0^t vdt+x_0 \Rightarrow x=\int_0^t (4t-\frac{1}{3}t^3+v_0)+x_0$$

$$x=2t^2-\frac{1}{12}t^4+v_0t+x_0$$

$$x=-\frac{1}{12}t^4+2t^2+v_0t+x_0$$

يبقى لنا الآن تحديد كل من الفاصلة الإبتدائية x_0 والسرعة v_0 للجسم

حسب المعطيات لدينا

$$t=3s \quad , \quad v=2m/s, \qquad n=9m$$

نعوض في العبارة الأولى فنجد

$$2=4(3)-\frac{1}{3}(3)^3+v_0 \Rightarrow 2=12-9-v_0$$

$$v_0=-1ms^{-1}$$

$$9=-\frac{1}{12}(3)^4+2(3)^2+(-1)(3)+x_0$$

$$9=-\frac{1}{12}(81)+2\times 9-3+x_0 \quad \Rightarrow \quad 9+\frac{27}{4}-18+3=x_0$$

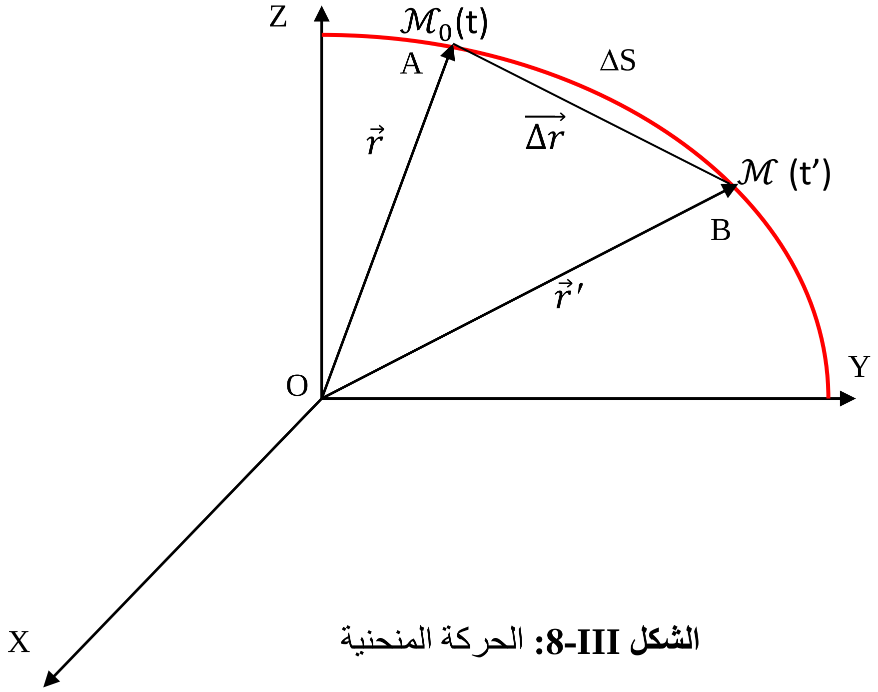
$$-6+\frac{27}{4}=x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-24+27}{4}=x_0 \quad \Rightarrow x_0=\frac{3}{4}m$$

في الأخير نكتب عبارتي السرعة والإنتقال:

$$x=2t^3-\frac{1}{12}t^4-t+\frac{3}{4}$$

$$v=4t-\frac{1}{3}t^3-1$$

2- الحركة المنحنية (Mouvement curviligne):



الشكل III-8: الحركة المنحنية

ليكن الجسم في اللحظة t في النقطة $\mathcal{M}_0$ موضعه يتعين بالشعاع $\vec{\mathrm{r}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\mathcal{M}_0} = \vec{\mathrm{r}}$$

♦ في اللحظة 't يكون الجسم في الموضع $\mathcal{M}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathrm{r}`}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathrm{r}`} = \mathrm{x}`.\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{y}`.\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{z}`.\vec{\mathrm{k}}$$

الإنتقال من $\mathcal{M}_0$ إلى $\mathcal{M}$ يعين بالشعاع $\overrightarrow{\mathcal{M}_0\mathcal{M}}$ حيث $\overrightarrow{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} = \Delta\vec{\mathrm{r}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{r}`} = \vec{\mathrm{r}} + \Delta\vec{\mathrm{r}}$$

في المثلث OAB لدينا:

$$\Delta\vec{\mathrm{r}} = \overrightarrow{\mathrm{r}`} - \vec{\mathrm{r}}$$

$$\Delta\vec{\mathrm{r}} = (\mathrm{x}` - \mathrm{x})\vec{\mathrm{i}} + (\mathrm{y}` - \mathrm{y})\vec{\mathrm{j}} + (\mathrm{z}` - \mathrm{z})\vec{\mathrm{k}}$$

خلال تغيير الزمن من $\mathrm{t} \to \mathrm{t}_0$ تنتقل النقطة من $\mathcal{M}_0$ إلى $\mathcal{M}$ (تقطع المسافة ΔS)

ΔS: هو طول القوس $\widehat{\mathcal{M}_0\mathcal{M}}$ وهي **الفاصلة المنحنية**

$$\Delta\overrightarrow{\mathrm{O}\mathcal{M}} = \widehat{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathrm{r}`} - \vec{\mathrm{r}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}-12)$$

نعرف السرعة المتوسطة:

$$\vec{v}_{moy}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(III-13)$$

و السرعة اللحظية:

$$\vec{v}_{ins}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_{moy}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

لما $\Delta t\to 0$ النقطة $\mathcal{M}$ قريبة جدا من $\mathcal{M}_0$

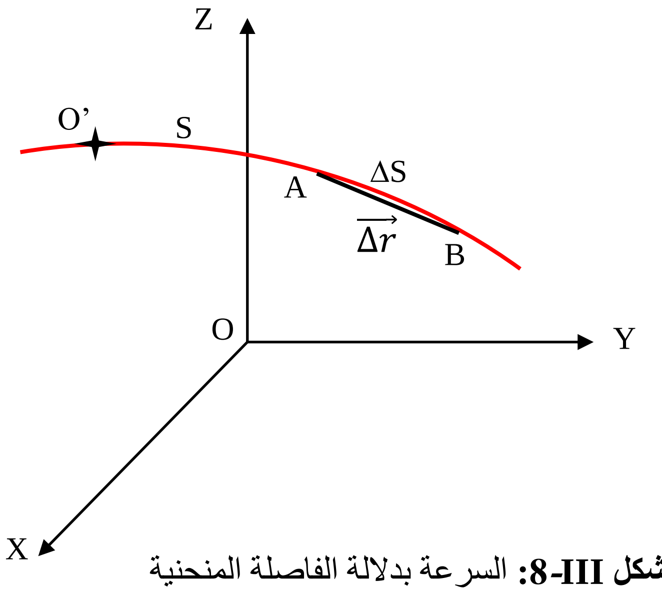
السرعة اللحظية هي شعاع مماسي للمسار.

$$\vec{v}_{ins}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}_{ins}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(III-14)$$

$$\|\vec{v}_{ins}\|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

*** السرعة بدلالة الفاصلة المنحنية:**



الشكل III-8: السرعة بدلالة الفاصلة المنحنية

* "O" هو مبدأ المعلم و"O`" هو مبدأ المسار الحركة

القوس $S = \widehat{O`A}$

في اللحظة t : $S = \widehat{O`A}$

في اللحظة t` : $S` = \widehat{O`B}$

الإنتقال من A إلى B يعطى بطول القوس $\widehat{AB}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} . \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) . \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{ds}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dr}{ds} . \vec{u}_T$$

حيث $\vec{u}_T$ هو شعاع وحده مماسي للمسار

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) = \vec{u}_T$$

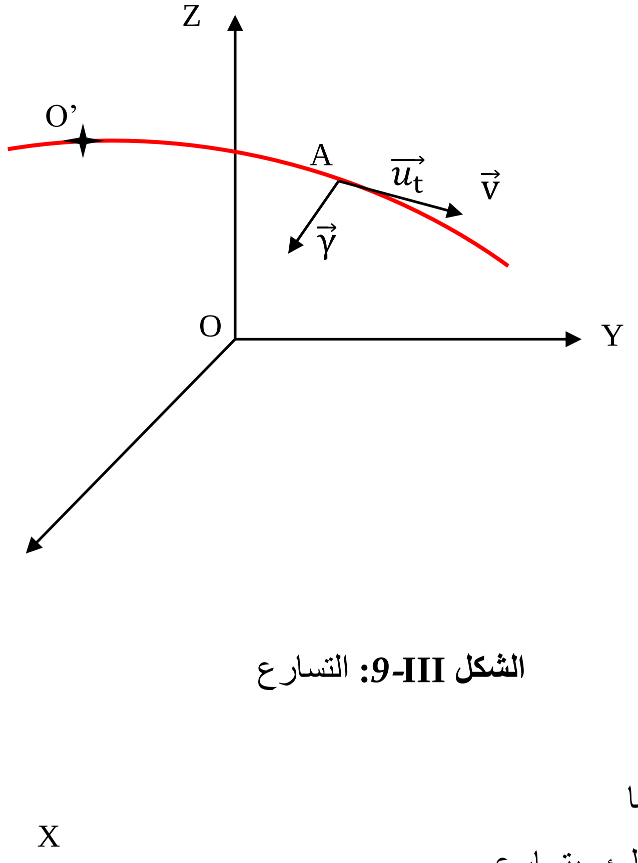
عندما $\Delta s \to 0$ فإن المستقيم $AB = \Delta s = \Delta r$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} . \vec{u}_T \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (III - 14)$$

$$\vec{v} = v . \vec{u}_T$$

ومن هنا نستنتج أن v تكون وفق $\vec{u}_T$ أي أن السرعة $\vec{v}$ تكون مماسية للمسار

*** التسارع:**



الشكل III-9: التسارع

التسارع: $\vec{\gamma} = \vec{v}(t)$

$\vec{v}$: يتغير مقدارا وإتجاها

مقدارا: لأن الجسم يتباطئ ويتسارع

إتجاها: لأن $\vec{v}$ مماسي للمسار وينحني بإستمرار ومنه تغير السرعة ← التسارع

*** التسارع المتوسط:**

$$\vec{\gamma}_{mo} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta V_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta V_z}{\Delta t}\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-15)$$

*** التسارع اللحظي:**

$$\vec{\gamma}_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{\gamma}_{ins} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-16)$$

$$\overrightarrow{\|\gamma\|} = \sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_z}{dt}\right)^2}$$

III- المقادير الحركية في مختلف الإحداثيات:

1- الإحداثيات الكارتيزية: (Les coordonnées Cartésiennes) :

ليكن المعلم R(o,x,y,z) المزود بالأساس $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ المتعامد والمتجانس

*** شعاع الموضع:**

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = x\vec{\mathrm{i}} + y\vec{\mathrm{j}} + z\vec{\mathrm{k}}$$

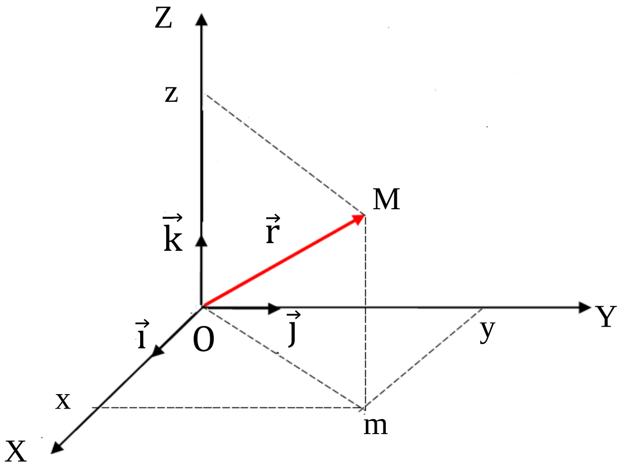
حيث x,y,z إحداثيات النقطة $\mathcal{M}$

x: الفاصلة (Abscisse)

y: الترتيب (Ordonnée)

z: الإرتفاع (Altitude)

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \vec{r} = x\vec{\mathrm{i}} + y\vec{\mathrm{j}} + z\vec{\mathrm{k}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{III}-17)$$



الشكل 10-III: الاحداثيات الكارتيزية

*** شعاع السرعة:**

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\mathrm{i}} + \frac{dy}{dt}\vec{\mathrm{j}} + \frac{dz}{dt}\vec{\mathrm{k}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\mathrm{III}-18)$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{\mathrm{i}} + \dot{y}\vec{\mathrm{j}} + \dot{z}\vec{\mathrm{k}}$$

*** شعاع التسارع:**

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-19)$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

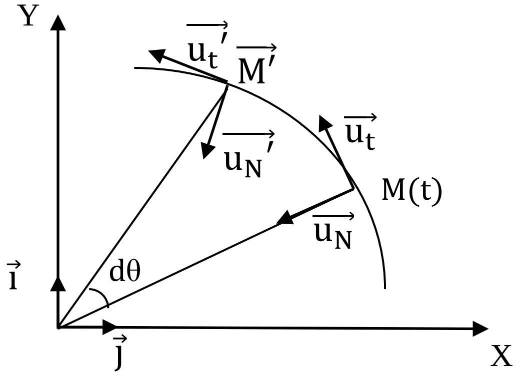
2- الإحداثيات الذاتية :(Les Cordonnées de Frenet):

عندما تكون الحركة غير خطية أي مسار غير مستقيم يمكننا إستعمال شعاعين $\vec{u}_T$ و $\vec{u}_N$ طويلة كل منهما تساوي الواحد يكون:

$\vec{u}_T$: شعاع مماسي للمسار إتجاهه نفس إتجاه الحركة.

$\vec{u}_N$. شعاع وحده ناظمي عمودي على المسار ويتجه نحو تقعر المسار.

- **الفاصلة المنحنية s(t)** : تمثل طولا معينا على المسار في فترة معينة من الزمن (تعرضنا إليها سابقا).



الشكل III-12: الاحداثيات الذاتية

- **شعاع السرعة:** لقد وجدنا أن السرعة طويلتها

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

وبما أن شعاع السرعة يكون دائما مماسيا على مسار الحركة فإن:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}.\vec{u}_T \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-20)$$

- **شعاع التسارع:**

لدينا:

$$\vec{\gamma}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}[v.\vec{u}_T]$$

$$\vec{\gamma}=\frac{dv}{dt}\vec{u}_T+v\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

نستطيع كتابة $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ هي $\left[\frac{d\vec{U}_T}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right]$ حيث سرعة زاوية $\frac{d\theta}{dt}=w=\frac{v}{R}$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt}=\frac{d\vec{u}_T}{ds}\frac{ds}{dt}=v\frac{d\vec{u}_T}{ds}$$

لنبحث عن $\frac{d\vec{u}_T}{ds}$ ، حسب الشكل III-12

خلال الفترة dt من الحركة ينتقل المتحرك من $\mathcal{M}$ إلى $\mathcal{M}$\` من مساره حيث: $ds=\widehat{\mathcal{M}\mathcal{M}}$\` يكون مقدارا صغيرا (أي أن $\mathcal{M}$ قريبة من $\mathcal{M}$\`).

نلاحظ أن العمودين على المسار يلتقيان في النقطة O تسمى مركز إتحاد المسار والمسافة $R=O\mathcal{M}=O\mathcal{M}$\` تسمى نصف قطر إنحناء المسار في النقطة $\mathcal{M}$.

الطول ds والذي يمثل الإنتقال الجزئي للمسار يكتب كمايلي:

$$ds=\widehat{\mathcal{M}\mathcal{M}}` = R.d\theta$$

نعوض ds بقيمتها فنجد: $\frac{d\vec{u}_T}{ds}=\frac{d\vec{u}_T}{R.d\theta}$

حيث

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta}=\vec{u}_N$$

لدينا

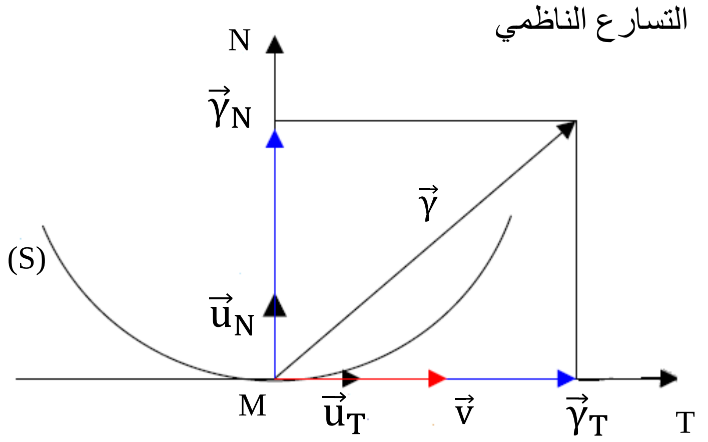
$$\vec{\gamma}=\frac{dv}{dt}\vec{u}_T+\frac{v.v}{R}\vec{u}_N$$

$$\vec{\gamma}=\dot{v}\vec{u}_T+\frac{v^2}{R}\vec{u}_N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-21)$$

$$\vec{\gamma}=\gamma_T\vec{u}_T+\gamma_N\vec{u}_N$$

حيث: $\gamma_T=\frac{dv}{dt}$ التسارع المماسي

$$\gamma_N = \frac{v^2}{R}$$ التسارع الناظمي



الشكل III-13: السرعة و التسارع في معلم فريني

ملاحظة: يمكن البرهان أن:

$$\vec{\gamma}_t = \frac{\vec{\gamma}.\vec{v}}{v} \quad ، \quad \gamma_N = \frac{|\vec{\gamma} \wedge \vec{v}|}{v}$$

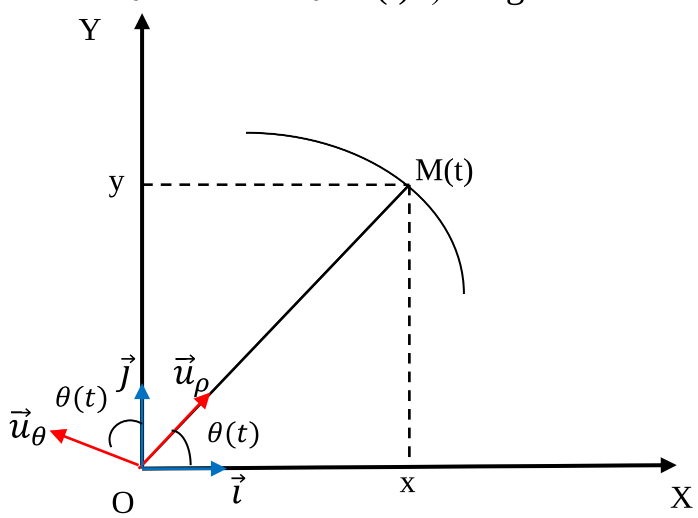
بإستعمال الجداء السلمي و الجداء الشعاعي (للبرهان).

3- الإحداثيات القطبية: (Les Coordonnées Polaires)

حين ينتمي المسار إلى مستوي، هنا كذلك يمكن تعيين الموضع اللحظي أو تعيين الحركة لهذا الجسم بإستعمال الإحداثيات القطبية (r, θ) حيث:

r: نصف القطر القطبي rayon polaire (r(t) يمثل طويلة شعاع الموضع $|\overrightarrow{OM}|$

θ: الزاوية القطبية Angle Polaire (θ(t) الزاوية المحصورة بين المحور القطبي Ox وشعاع الموضع.



الشكل III-14: الاحداثيات القطبية

*** في المعلم الديكارتي:**

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = \rho\cos\theta.\vec{\imath} + \rho\sin\theta.\vec{\jmath} = \rho\,(\cos\theta.\vec{\imath} + \sin\theta.\vec{\jmath})$$

حيث $\vec{u}_\rho = (\cos\theta.\vec{\imath} + \sin\theta.\vec{\jmath})$

*** شعاع الموضع :** في المعلم القطبي

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \rho\vec{u}_\rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-22)$$

$\vec{u}_\rho$. شعاع وحدة محمول على شعاع الموضع

$$\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{|\overrightarrow{O\mathcal{M}}|} = \frac{\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{\rho}$$

* لنحسب المشتق الأول لـ $\vec{u}_\rho$

من الشكل III-14

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta.\vec{\imath} + \rho\sin\theta.\vec{\jmath})$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta.\vec{\imath} + \cos\theta.\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta.\vec{\imath} + \cos\theta.\vec{\jmath}$$

$\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ شعاعان متعامدان ويمثلان القاعدة القطبية.

*** شعاع السرعة:**

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} = \frac{d}{dt}[\rho\vec{u}_\rho] = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta \Rightarrow \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}\vec{u}_\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-23)$$

*** شعاع التسارع:**

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}\vec{u}_\theta]$$

$$= \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}.\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}.\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\left(\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right) + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{d\theta}[-\sin\theta\,\vec{\imath}+\cos\theta\,\vec{\jmath}]\dot{\theta}=[-\cos\theta\,\vec{\imath}-\sin\theta\,\vec{\jmath}]\dot{\theta}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=-[\cos\theta\,\vec{\imath}+\sin\theta\,\vec{\jmath}]\dot{\theta}=-\dot{\theta}\vec{u}_\rho$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}=-\dot{\theta}\vec{u}_\rho$$

$$\vec{\gamma}=\ddot{\rho}\vec{u}_\rho+\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta+\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta+\rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta+\rho\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{u}_\rho)$$

$$\vec{\gamma}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho+(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-24)$$

♦ السرعة الزاوية:

$$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$$

♦ و التسارع الزاوي

$$\ddot{\theta}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ملاحظة: في حالة ما إذا كانت السرعة الزاوية ثابتة فإن $\ddot{\theta}$ التسارع الزاوي معدوم.

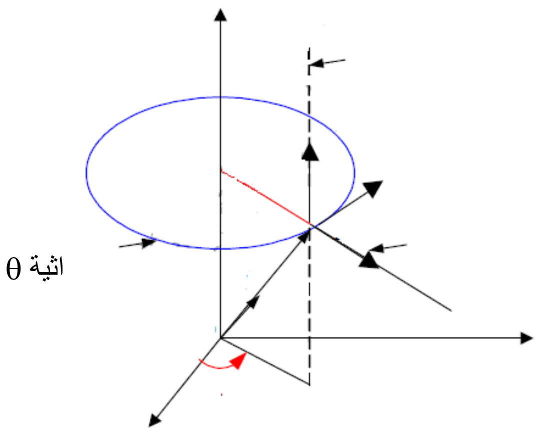
4- الإحداثيات الإسطوانية:(Coordonnées Cylindriques):

إذا كان المسار فضائيا حيث ρ و (oz) تلعبان دورا مميزا في تحديد موضع المتحرك (ذات قاعدة دائرية أو غير دائرية أو على سطح قطع مخروطي) من المستحسن إستعمال الإحداثيات الأسطوانية (ρ,θ,z) حيث

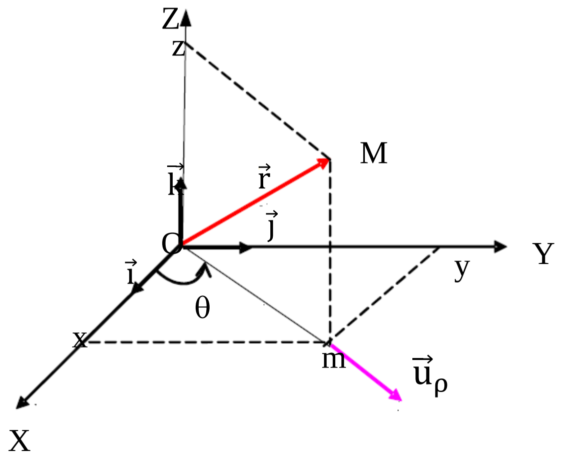
(ρ,θ): يمثلان الإحداثيات القطبية

θ: الزاوية القطبية (Angle Polaire)، ρ نصف قطر القطبي (Rayon Polaire)

z: هو الإحداثية الديكارتية على المحور (Oz) (العلو Altitude)



الشكل III-16: قاعدة الإحداثيات الاسطوانية



الشكل III-15: الإحداثيات الأسطوانية

معادلات الحركة في الإحداثيات الأسطوانية

$$\rho = \rho(t)$$
$$\theta = \theta(t) = (OX, Om)$$
$$z = z(t)$$

*** شعاع الموضع:**

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{m\mathcal{M}}$$
$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-25)$$

*** شعاع السرعة:**

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-26)$$

$(\vec{k}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\rho)$ هي القاعدة الأسطوانية

ملاحظة:

$$\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta = \vec{k}$$
$$\vec{k} \wedge \vec{u}_\rho = \vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_\theta \wedge \vec{k} = \vec{u}_\rho$$

*** شعاع التسارع:**

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-27)$$

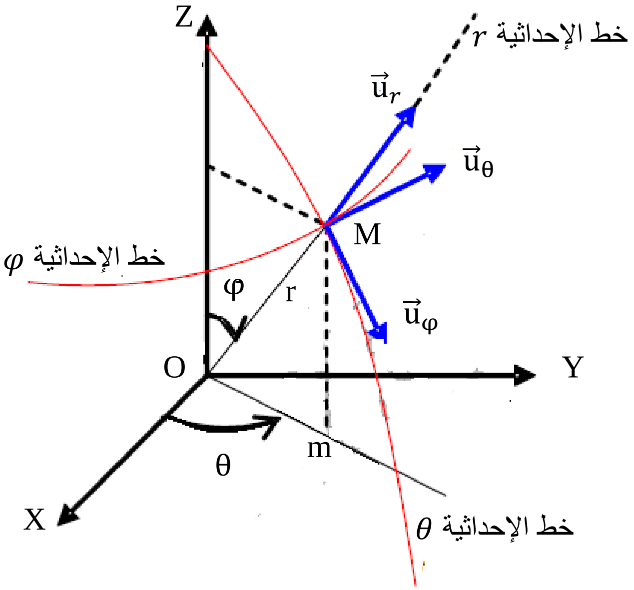
5- الإحداثيات الكروية (Coordonnées Sphériques):

الإحداثيات الكروية(r, θ, φ)

$[\infty, 0]\ r$

$[2\pi, 0]\ \theta$

$[\pi, 0]\ \varphi$



الشكل III-17: قاعدة الإحداثيات الكروية

$$r = \|\overrightarrow{O\mathcal{M}}\|$$
$$\theta = (OX, Om)$$
$$\varphi = (OZ, O\mathcal{M})$$

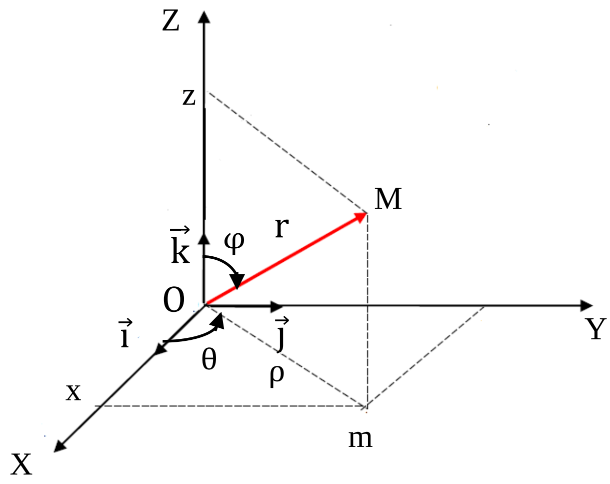
حيث m هومسقط $\mathcal{M}$ على المستوي (Oxy)

شعاع الوحدة $\vec{u}_r \mathbin{//} \overrightarrow{O\mathcal{M}}$

$\vec{u}_\theta$: مماسي لخط العرض (أي الدائرة الموازية للمستوي (Oxy) في النقطة $\mathcal{M}$)

$\vec{u}_\varphi$: مماسي لخط الطول المار بالنقطة $\mathcal{M}$ وفي إتجاه تزايد الزاوية φ

* شعاع الموضع:



الشكل III-18: الإحداثيات الكروية

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \|\overrightarrow{OM}\|\cos\varphi \end{cases}$$

$$\rho = f(r)$$

$$\rho = \|\overrightarrow{OM}\|\sin\varphi = r\sin\varphi$$

$$\overrightarrow{OM} = r\sin\varphi\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + r\cos\varphi\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = r(\underbrace{\sin\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{k}}_{\vec{u}_r})$$

نعلم أن $\vec{u}_r$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-28)$$

$$\vec{u}_r = \sin\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \sin\varphi\sin\vartheta\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r$$

$$\vec{u}_\varphi = [-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}] \wedge [\sin\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{k}]$$

$$\vec{U}_\varphi = \sin\theta^2\sin\varphi\,\vec{k} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{j} - \sin\varphi\cos\theta^2\,\vec{k} + \cos\theta\cos\varphi\vec{i}$$

$$\vec{U}_\varphi = \cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{j} - \sin\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_r = \sin\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\vartheta\,\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}$$
$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{u}_\varphi = \cos\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}$$

$\vec{u}_r$ شعاع وحدة قطري

$\vec{u}_\theta$ شعاع وحدة عرضي

$\vec{u}_\varphi$ شعاع وحدة طولي

*** شعاع السرعة:**

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} = \frac{d}{dt}[r.\vec{u}_r] = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$
$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\cos\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}\right]$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} - \dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\imath} + \dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta\vec{\jmath} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u}_\theta$$
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + r\dot{\theta}\sin\varphi\vec{u}_\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-29)$$

*** شعاع التسارع:**

$$\vec{\gamma} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\sin\varphi\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\sin\varphi\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\sin\varphi\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} - \dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta\,\vec{\imath} - \dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta\vec{\jmath} - \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{k}$$
$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{u}_r + \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{u}_r \wedge \overrightarrow{uU}_\varphi \Rightarrow \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{dt}\wedge\vec{u}_\varphi + \vec{u}_r \wedge \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = (\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u}_\theta) \wedge \vec{u}_\varphi + \vec{u}_r \wedge (-\dot{\varphi}\vec{u}_r + \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{u}_\theta)$$

$$= -\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u}_r - \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

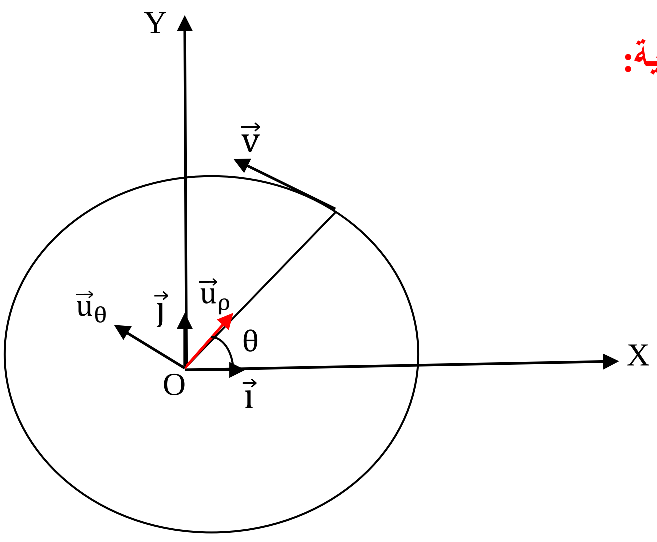
$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}(\sin\varphi\,\vec{u}_r + \cos\varphi\,\vec{u}_\varphi)$$

منه نجد التسارع

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2\sin\varphi^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} - r\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi)\vec{U}_\varphi$$
$$+ (2\dot{r}\dot{\theta}\sin\varphi + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi + r\ddot{\theta}\sin\varphi)\vec{U}_\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-30)$$

- **حالات خاصة:**

♦ **الحركة الدائرية:**



الشكل III-19: الحركة الدائرية

نفرض أن جسما $\mathcal{M}$ يتحرك على خط دائري نصف قطره "R" ومركزه "O"

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \rho\vec{u}_\rho \qquad (\rho = R)$$

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = R\vec{u}_\rho$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-31)$$

- **شعاع السرعة:**

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\vec{u}_\rho)$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-32)$$

حيث

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

السرعة الزاوية للحركة ووحدتها rad/s

ملاحظة:

نستطيع إختيار شعاع السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ عمودي على مسار الحركة أي في إتجاه المحور (oz) $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O\mathcal{M}}$$

- **شعاع التسارع:**

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[R\dot{\theta}\vec{u}_\theta] = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + R\dot{\theta}\frac{d}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-33)$$

وفق الإحداثيات الذاتية $\vec{u}_N = -\vec{u}_\rho$ $\vec{u}_N = \vec{u}_\theta$

$$\vec{\gamma} = R\dot{\theta}^2\vec{u}_N - R\ddot{\theta}\vec{u}_\rho$$

$\gamma_N = R\dot{\theta}^2 = R\left(\frac{V^2}{R^2}\right) = \frac{V^2}{R}$ التسارع الناظمي في الحركة الدائرية

$\gamma_t = R\ddot{\theta} = R\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{dv}{dt}$ التسارع المماسي في الحركة الدائرية

$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt}$ التسارع الزاوي

ملاحظة:

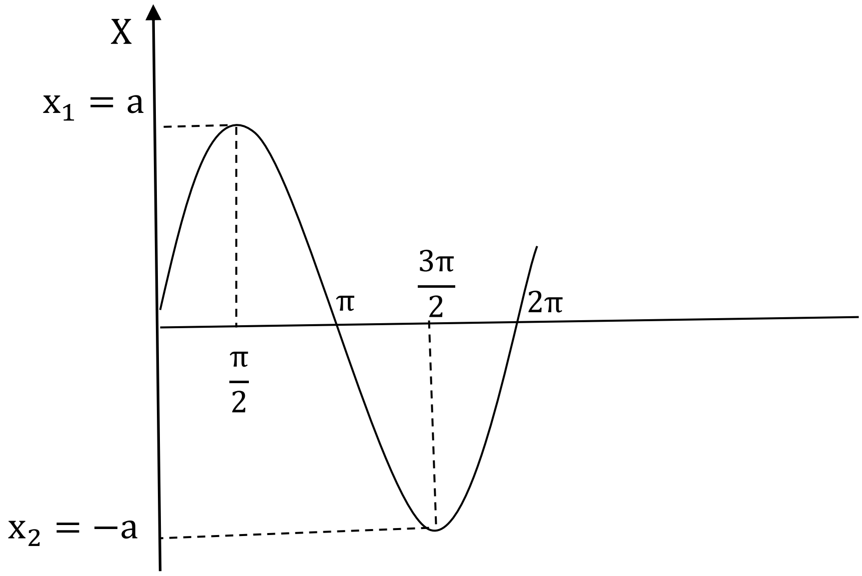
عندما تكون السرعة الزاوية $\omega = \dot{\theta} = cte$ تسمى الحركة حركة دائرية منتظمة وفي هذه الحالة التسارع الزاوي يكون معدوم.

- الحركة الجيبية:

أ)- تعريف: نقول عن جسم أنه في حالة حركة جيبية إذا تغيرت وضعيته دوريا حول وضعية معينة تسمى وضعية التوازن.

ب)-دراسة الحركة:

نأخذ حالة حركة جيبية لجسم على المستقيم (ox)



الشكل III-20: الحركة الجيبية

معادلة الحركة تعطى بـــ: $x = a\sin(\omega t + \alpha)$

وضعية الجسم تتغير بين $x_1 = 1$ و $x_2 = -1$ وهذا مرورا بوضع التوازن

$x_m = a$ المطال الأعظمي (السعة الأعظمية)

$(\omega t + \alpha)$ طور الحركة (الصفحة)

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ نبض الحركة

$T = \frac{1}{f}$ دور الحركة

f: تواتر الحركة (عدد الإهتزازات)

السرعة: $v = \frac{dx}{dt} = a\omega\cos(\omega t + \alpha)$

التسارع:

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = -a\omega^2\sin(\omega t + \alpha)$$

$$\gamma = -\omega^2 \underbrace{a\sin(\omega t + \alpha)}_{x}$$

$$\gamma = -\omega^2 x$$

بالتعويض نجد: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega x = 0$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية وبدون طرف حلها مع الشروط الإبتدائية تعطينا معادلة الحركة الجيبية السابقة.

*** الحركة الجيبية على قطعة دائرية:**

النواس البسيط في حالة حركة إهتزازية توافقية (جيبية) على قطعة دائرية مثلا النواس تعطى معادلة الحركة على الشكل:

$$\begin{matrix} \theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi) \\ S = S_m \sin(\omega t + \varphi) \end{matrix} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-34)$$

حيث:

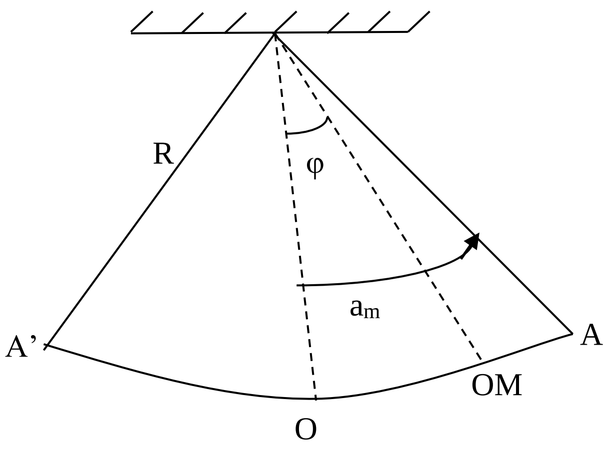
θ: سعة السرعة الزاوية

S: سعة القوس الدائري اللحظي

θ_m: السعة العظمى للزاوية

$$\begin{aligned} v &= \frac{dS}{dt} = \omega S_m \sin(\omega t + \varphi) \\ \gamma_T &= \frac{dv}{dt} = -\omega^2 S_m \sin(\omega t + \varphi) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-35) \\ \gamma_N &= \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 S_m}{R} \cos^2(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

مع R نصف قطر الدائرة



الشكل III-20: الحركة الجيبية على قطعة دائرية

تمارين (Exercices)

التمرين الأول:

تنطلق سيارة بتسارع ثابت على مسافة 200m. تتدحرج بسرعة ثابتة على مسافة 160m ثم تتناقص سرعتها على 50m قبل أن تتوقف. المدة الزمنية الكلية للمسار هي 33s.

1- أرسم منحنى تغير السرعة بدلالة الزمن t.
2- ماهو الزمن الذي استغرقته السيارة و هي تتدحرج بسرعة ثابتة.

التمرين الثاني:

ينتقل جسم نقطي وفق مستقيم بتسارع $a = 4 - t^2$

- أوجد عبارتي السرعة و الانتقال بدلالة الزمن و متخذا الشروط الابتدائية $t = 3s; v = 2m/s; x = 9m$

التمرين الثالث:

يدخل متحرك بسرعة ثابتة v_0 في وسط مقاوم، فيخضع لتسارع $\gamma = -kv^2$ حيث k ثابت موجب، و v السرعة اللحظية

1)- أكتب عبارة السرعة اللحظية v(t) اذا كان في اللحظة t = 0s فان $V=V_0$

2)- بأخذ مبدأ الأزمنة و الفواصل لحظة و موقع المتحرك عند دخوله للوسط، و باعتبار أن الحركة مستقيمة، أكتب المعادلة الزمنية للحركة X(t)

3)- بين أنه بعد قطع المسافة X فان السرعة V_0 تكتب على الشكل $V=V_0e^{-Kx}$

التمرين الرابع:

تعطى الإحداثيات الديكارتية لنقطة مادية M في الفضاء كما يلي:

$$a)\ \begin{cases} x(t) = t+1 \\ y(t) = 3t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad ; \quad b)\ \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad ; \quad c)\ \begin{cases} x(t) = R(\omega t - \sin\omega t) \\ y(t) = R(1-\cos\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1- أوجد معادلة مسار النقطة M و مثل منحاها؟

2- حدد السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$ للنقطة M؟

التمرين الخامس:

يعطى تسارع نقطة مادية في الفضاء بالعلاقة: $\vec{a} = e^{-t}\,\vec{i} + 5\sin(t)\,\vec{j} - 3\cos(t)\,\vec{k}$. في اللحظة t=0s، تكون النقطة المادية في الموضع $(1;0;3)$، وسرعتها تقدر ب $(1;2;-1)$.

- حدد سرعة و موضع النقطة المادية في أي لحظة t؟

التمرين السادس:

مركبات شعاع السرعة بدلالة الزمن لنقطة مادية M معطاة بالعلاقة التالية

$$\begin{cases} V_x = 4t \\ V_y = 4t^3 + 4t \end{cases}$$

في اللحظة t=0s ، المتحرك موجود في النقطة $M_0\,(2,1)$

1) أوجد معادلة المسار y=f(x) ، ماهي طبيعة الحركة؟ مثلها بيانيا؟
2) أحسب مركبات التسارع؟
3) مثل على المسار أشعة السرعة و التسارع في اللحظة t = 1s ؟

التمرين السابع:

احداثيات جزيئة M في اللحظة t هي:

$$x = 2A(1+\cos wt)$$
$$y = A\sin wt$$
$$Z = 0$$

Aو w ثابتان موجبان.

1- أوجد معادلة المسار في الإحداثيات الديكارتية حدد طبيعة الحركة
2- أعطي العبارة الشعاعية للسرعة اللحظية ثم طويلتها، استنتج سرعة M في النقطة الخاصة O(0,0)
3- أحسب المركبات المماسية و الناظمية للتسارع و كذلك نصف قطر انحناء المسار في اللحظة t.

التمرين الثامن:

تعطى مركبات سرعة متحرك بدلالة الزمن بالعلاقات التالية:

$$v_x = \frac{t}{t^2+1}$$
$$v_y = 2t$$

عند اللحظة t=0 يكون المتحرك عند النقطة (0,1)، أوجد معادلة الحركة $y = f(x)$ و مركبات التسارع $\gamma_x(t)$ و $\gamma_y(t)$.

التمرين التاسع:

ينسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس XOY مبدأه O و قاعدته $(\vec{i},\vec{j})$. تتغير الإحداثيتان x وy لنقطة M متحركة في المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$ مع الزمن حسب القانون:

$$\begin{cases} x(t) = ct \\ y(t) = bt(t-\tau) \end{cases}$$

حيث: c = 2 S.I, b = 4 S.I, τ = 1 S.I.

1- حدد طبيعة المسار، ومثله في المعلم الديكارتي؟
2- حدد مركبتي شعاع السرعة $\vec{v}$في لحظة t ؟
3- أكتب عبارة الفاصلة المنحنية ds لعنصر متناهي الصغر بدلالة t و dt. أكتب المسافة المقطوعة بين اللحظتين t=os و t=2s على شكل دالة تكاملية؟
4- بين أن تسارع المتحرك ثابت، أحسب المركبات المماسية $\overrightarrow{a_T}$ و الناظمية $\overrightarrow{a_N}$. استنتج نصف قطر انحناء المسار في اللحظة t=0 .5s؟

التمرين العاشر:

نقطة مادية تتحرك وفق المحور (Ox)، حسب العلاقة التالية

$x(t) = \frac{g}{b^2}(bt + e^{-bt})$ ، مع العلم أن g و b ثوابت.

1- أعط عبارة سرعة المتحرك و حدد سرعته الابتدائية v_0.
2- أرسم منحنى المسار v=f(t) من أجل قيم موجبة ل b.
3- أوجد عبارة التسارع a(t) بدلالة السرعة v(t).

التمرين الحادي عشر:

ليكن في المستوي (P)، معلم متعامد و متجانس xOy و متحرك M ينتقل في هذا المستوي. في اللحظة t، احداثياتاه معرفتان ب: $x = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}, y = 2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$

1- ماهو مساره؟
2- أحسب احداثيات شعاع السرعة $\vec{v}$ و شعاع التسارع $\vec{a}$ لهذا المتحرك في اللحظة t. ماهي العلاقة الموجودة بين $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{a}$؟ ماهي المدة اللازمة حتى يمر المتحرك من نفس الموضع من المنحنى؟
3- بين اللحظتين $t_1 = 0$ و $t_2 = 4\pi$، حدد مواقع المتحرك و كذا إحداثيتي $\vec{v}$ حتى تكون طويلة التسارع $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

التمرين الثاني عشر:

تتحرك نقطة مادية في المستوي XOY حيث مركبات تسارعها هي كالأتي:

$$\gamma_x = 0.8ms^{-2}$$
$$\gamma_y = 0.0ms^{-2}$$

عند اللحظة t=0s، تكون النقطة M في مبدأ المعلم و مركبات سرعتها هي $V_x = 0ms$ و $V_y = 0.8ms$، أوجد:

1- مسار النقطة M
2- سرعتها في اللحظة t=1s
3- تسارعها و نصف قطر انحناء المسار عند النقطة المطابقة للحظة t=1s

التمرين الثالث عشر:

تتحرك نقطة مادية M في السطح كمايلي

$$x = \frac{t}{3} + 1 \qquad \text{و} \qquad y = \frac{t^2}{3}$$

1- أوجد و أرسم مسار حركة M
2- أوجد مركبات و طويلة كل من شعاعي السرعة و التسارع
3- أحسب نصف قطر انحناء المسار في اللحظة t. ماهي قيمته عند اللحظة t=0s

التمرين الرابع عشر:

حركة نقطة مادية M في المستوي xOy معرفة بالقانون:

$$\begin{cases} x = 2\cos(0,5t) \\ y = 2\sin(0,5t) \end{cases}$$

عين

1) طبيعة المسار؟
2) مركبات شعاع السرعة؟
3) عبارة السرعة $\frac{ds}{dt}$ وكذلك الفاصلة المنحنية s للنقطة M؟
(في اللحظة t=0s ، s=0)
4) المركبات الناظمية و المماسية للتسارع في معلم Frenet؟
5) استنتج نصف قطر الانحناء للمسار؟

التمرين الخامس عشر:

نقطة مادية تتحرك على دائرة, تعطى الفاصلة المنحنية s(t) لهذه النقطة ب $s(t)=t^3+2t^2$ حيث s(t) مقاسة بالمتر و t بالثانية. لما t=2s تسارع النقطة المادية يساوي $16\sqrt{2}m/s^2$

- أحسب نصف قطر انحناء الدائرة.

التمرين السادس عشر:

ينسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس XOY مبدأه O و قاعدته $(\vec{i},\vec{j})$. تتغير الإحداثيتان x وy لنقطة M متحركة في المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$ مع الزمن حسب القانون: $x=2\cos\frac{t}{2}$ و $y=2\sin\frac{t}{2}$.

1- حدد طبيعة المسار.
2- حدد مركبتي شعاع السرعة $\vec{v}$.
3- حدد عبارة السرعة $\frac{ds}{dt}$ و كذا عبارة الإحداثية s المنحنية لنقطة M في اللحظة t، بأخذ الشرط الابتدائي s=0 لما t=0.
4- حدد المركبتين المماسية و الناظمية للتسارع في المعلم الذاتي (Frenet).
5- استنتج نصف قطر الانحناء.
6- المسار باقي على حاله في حين تتأثر النقطة M بتسارع زاوي $\frac{d^2\theta}{dt^2}=\ddot{\theta}=0,2t$. في أي لحظة تبلغ النقطة M سرعة $10ms^{-1}$، علما أنها انطلقت من السكون، ماهي المسافة التي قطعتها.

التمرين السابع عشر:

يدور قضيب OA بسرعة ثابتة w في مستوي ثابت، اذا كان OA=AB= l وطول القطعة AM=d (d<l)

1)- أوجد معادلة مسار النقطة M

2)- أحسب السرعة $\vec{V}$ و *التسارع* $\vec{\gamma}$ للنقطة M

3)- أحسب التسارع المماسي و العمودي و نصف قطر الانحناء

التمرين الثامن عشر:

تعطى حركة نقطة مادية M في الإحداثيات القطبية بالمعادلات التالية

$\overrightarrow{OM}\begin{cases} r(t) = a(1+\cos\theta) \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$ حيث a عدد ثابت و موجب

1- أحسب السرعة و التسارع للنقطة M في الإحداثيات القطبية

2- ليكن $\vec{T}$ شعاع وحدة مماسي لمسار المتحرك في الموضع M و الموجه في اتجاه الحركة.

أ- ماذا يمثل الشعاع $(\vec{\gamma}.\vec{T}).\vec{T}$

ب- ماذا يمثل المقدار $\dfrac{|\vec{\gamma}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|}$

التمرين التاسع عشر:

لتكن معادلات حركة نقطة مادية M في المرجع القطبي كالتالي:

$$\begin{cases} \rho = [1 + Sin\theta] \\ \theta = wt \end{cases}$$

حيث $\rho = \overline{OM}$ طويلة شعاع الموضع، والنبض w ثابت موجب

1) أرسم مسار النقطة M.

2) أوجد شعاعي السرعة و التسارع في المرجع القطبي، و أحسب طويلتهما.

3) وضح نوعية الحركة عند اللحظة t=π/2.

4) أوجد عبارة نصف قطر انحناء المسار R. ماهي قيمته عند اللحظة t=0s.

التمرين العشرون:

في الإحداثيات القطبية، المعادلات الزمنية لحركة نقطة مادية M معرفة كمايلي:

$$\begin{cases} r(t) = r_0 \sin(\frac{\pi}{4}t) \\ \theta(r) = \left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{cases}$$

حيث r_0 ثابت موجب $0 \leq t \leq \pi$

(r بالمتر، و t بالثانية و θ بالراديان)

1) مثل مسار النقطة M؟

2) أ) عين شعاع السرعة و التسارع للنقطة M؟

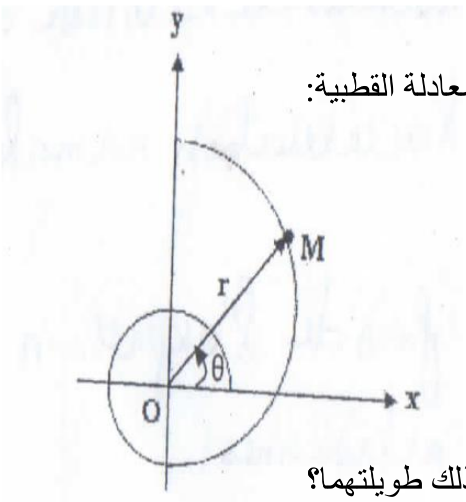
ب) أوجد الزاوية بين شعاع السرعة و شعاع التسارع؟

ج) أحسب نصف قطر انحناء المسار؟.

3) أكتب معادلات المرور من الإحداثيات القطبية (r, θ) إلى الإحداثيات الديكارتية (x, y)؟

4) أوجد معادلة المسار في الإحداثيات الديكارتية؟

التمرين الواحد و العشرون:



لتكن M نقطة مادية ترسم منحنى ممثل في الشكل المقابل و المعرفة بالمعادلة القطبية:

$$\begin{cases} r = r_0 e^{\theta} \\ \theta = wt \end{cases}$$

حيث (w, r_0) ثوابت موجبة

1- مثل على الشكل أشعة القاعدة القطبية $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ لنقطة مادية M ؟

2- أوجد شعاعي السرعة $\vec{v}$ *و التسارع* $\vec{a}$ للنقطة M بدلالة w و r وكذلك طويلتهما؟

3- أحسب الفاصلة المنحنية S مع العلم أن S=0 عند اللحظة t=0 ؟

4- كم هي الزاوية α التي تصنعها السرعة $\vec{v}$ *مع المركبة القطبية* $\vec{v}_r$؟

5- مثل على نفس الشكل (س 1) أشعة المعلم الذاتي $(\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N})$ للنقطة المادية M ؟

6- أوجد المركبات الذاتية للتسارع و استنتج ρ نصف قطر انحناء المسار؟

التمرين الثاني و عشرون:

لتكن في المستوي XOY النقطة P (انطلقت من المبدأ O) حيث المركبات القطبية لشعاع سرعتها $\vec{v}$ في جملة الإحداثيات القطبية هي على التوالي : $2K_1t$ و K_2t^2 ، K_1 و K_2 ثابتان.

1)- ماهي عبارة r(t) و θ(t) بدلالة الزمن.

2)- أوجد المعادلة القطبية للمسار $r=f(\theta)$.

3)- أحسب بدلالة الزمن المركبات القطبية لشعاع التسارع.

التمرين الثالث والعشرون:

لتكن النقطة المتحركة M المعرفة بالإحداثيات القطبية (r,θ)، فإذا كان $r=K\theta^2$:

1- أعط مسارا تقريبيا للحركة من أجل K=3 و $0\leq\theta\leq\pi$.

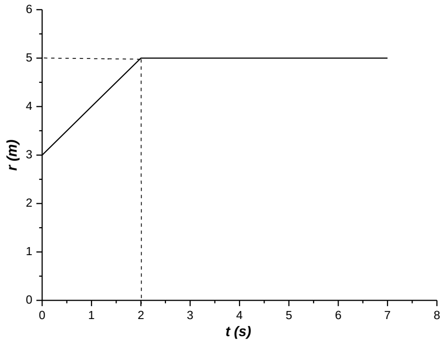
2- أحسب شعاع السرعة $\vec{V}$؟

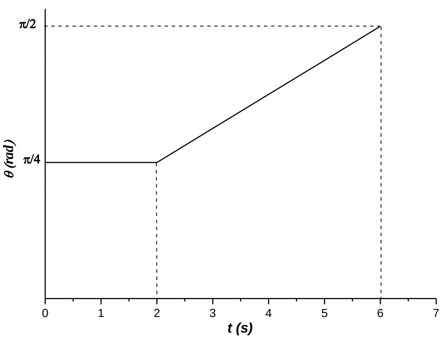
3- عين شعاعي السرعة و التسارع للنقطة M عند $\theta=\pi/2$ مع العلم أن $w=\dfrac{d\theta}{dt}=cte$.

4- ماهو الموضع الذي يكون فيه شعاع التسارع ناظمي.

التمرين الرابع و العشرون:

الإحداثيات القطبية لمتحرك معطاة بالبيانات التالية





1)- ماهي مراحل الحركة، و ماطبيعة الحركة في كل مرحلة بين t= 0s و t=6s

2)- أرسم مسار المتحرك؟

3)- مثل على المسار أشعة السرعة و التسارع في اللحظة t=1s و t=4s

التمرين الخامس و العشرون:

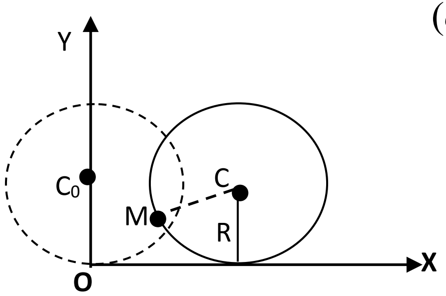
كرة نصف قطرها R تدور بسرعة زاوية w حول المحور (Δ) المار من مركزها O.

1- حدد السرعة الخطية v لنقطة مادية M تتحرك على الخط العرضي للكرة λ (الزاوية بين $\overrightarrow{OM}$ و المستوي العرضي للكرة)
2- استنتج طول التسارع a للنقطة M.
3- أحسب v و a في حالة النقطة M تتحرك على سطح الأرض (الأرض كروية مركزها O و نصف قطرها R).

يعطى: R=638 Km ، λ =45° و مدة دوران الأرض T=24h.

التمرين السادس و العشرون:

تتدحرج عجلة نصف قطرها R بدون احتكاك على محور أفقي (OX) (الشكل)



1)- أوجد بدلالة R و θ إحداثيات نقطة M موجودة على إطار العجلة

(عند بداية الحركة كانت M منطبقة على المبدأ O)

2)- أحسب سرعة و تسارع النقطة M

3)- أعط قيم $\vec{v}$ و $\vec{a}$ في اللحظة التي تلمس فيها M الأرض

4)- باعتبار أن حركة مركز العجلة حركة مستقيمة منتظمة بسرعة $\overrightarrow{v_0}$

* بين أن التسارع $\vec{a}$ نابذ نحو المركز O و احسب طويلته بدلالة R و v_0

* أحسب عدديا هذا التسارع في حالة نقطة من دولاب عجلة سيارة في طريق سريع ذات سرعة 130Km/h (R=35cm)

التمرين السابع و العشرون:

ينتقل متحرك في الفضاء وفق القانون :

$$\begin{cases} X(t) = RSinwt \\ Y(t) = R(1-Coswt) \\ Z(t) = bt \end{cases}$$

حيث R, b, w ثوابت موجبة.

أحسب:

1- سرعة المتحرك.
2- التسارع.
3- حدد مسار المتحرك ثم ارسمه.

التمرين الثامن و العشرون:

ينتقل متحرك M في الفضاء وفق القانون:

$$x = a\cos\omega t\,,\ y = a\sin\omega t\ ,\ z = h\,\omega t$$

a, w ثوابت موجبة

1- نفرض أن H هي مسقط النقطة M في المستوي (XOY) .

أ) بين أن حركة H هي حركة دائرية منتظمة.

ب) على أي سطح من المسار تكون حركة النقطة M؟ مثله.

2- أوجد مركبات السرعة $\vec{v}(M/R)$ في جملة الإحداثيات الاسطوانية، أحسب طويلتها. ماذا تلاحظ؟ أوجد الزاوية بين شعاع السرعة $\vec{v}(M/R)$ و المحور Oz (α). ماذا تلاحظ؟

3- أوجد مركبات التسارع $\vec{a}(M/R)$ في جملة الإحداثيات الاسطوانية.

4- حدد مركبات شعاعي السرعة و التسارع في المعلم الديكارتي.

5- في القاعدة $(\vec{i}\,,\ \vec{j}\,,\ \vec{k}\,)$، عبر عن أشعة وحدة المعلم الذاتي $\vec{u}_N\ ,\ \vec{u}_T$.

6- أحسب نصف قطر انحناء المسار.

التمرين التاسع و العشرون:

في جملة الإحداثيات الكروية $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$ تتحرك نقطة مادية M على سطح كرة نصف قطرها R.

إحداثيتها الكرويتان هما: $\theta = \left(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}\right) = \dfrac{\pi}{6} rad$ $\qquad \varphi = wt^2$

مع w ثابت موجب

1) انطلاقا من شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية :

أ/ أوجد السرعة و التسارع لهذه النقطة في القاعدة $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$

ب/ أحسب طويلتي السرعة و التسارع؟ ج/ استنتج التسارع الناظمي

2) انطلاقا هذه المرة من عبارة شعاع الموضع في الإحداثيات الديكارتية

3) أ/ أوجد السرعة و التسارع في القاعدة $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$، ثم أحسب من جديد طويلتهما و تأكد من تطابقهما مع نتائج السؤال 1/ب

حلول التمارين

التمرين الأول:

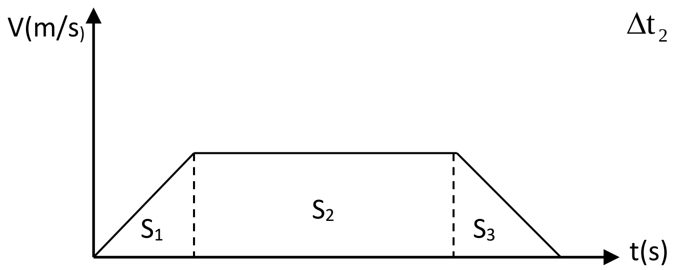
1- منحنى تغير السرعة بدلالة الزمن t

الطور I $\begin{pmatrix} t=0 \rightarrow V(o)=V_o=0 \\ \delta_1>0 \\ \Delta_{x1}=200 \text{ m} \end{pmatrix}$ الطور II $\begin{pmatrix} V_2=Cte \\ \delta_2=0 \\ \Delta_{x2}=160 \text{ m} \end{pmatrix}$

الطور III $\begin{pmatrix} \delta_3<0 \\ \Delta_{x3}=50 \text{ m} \\ V_g=0 \text{ m/s} \end{pmatrix}$

$\Delta t_{tot}=335$

الزمن الكلي للسرعة الثابتة Δt_2



$V=f(t)$ تعطي لنا تغير السرعة بدلالة الزمن، نستطيع نجد المسافة $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ من حساب مساحة S_1, S_2, S_3.

$$V=\frac{dx}{dt} \Rightarrow \quad dx=v\,dt \qquad \Delta_x=\int v\,dt \qquad (x_2=V_{nx}\,t)$$

2) حيث $(S_{i=1 à 3})$ مساحة Δ_x

$$\begin{cases} \Delta x_1=\frac{1}{2}(V_{max}-o)\,\Delta t_1 & (S1)..............(1) \\ \Delta x_2=(V_{max}-o)\,\Delta t_2 & (S2)..............(2) \\ \Delta x_3=\frac{1}{2}(V_{max}-o)\,\Delta t_3 & (S3)..............(3) \end{cases}$$

بالجمع $(1)+(2)+(3)$

$$2\Delta_{x1}+\Delta_{x2}+2\Delta_{x3}=V_{max}(\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3)$$

$$400+160+100=V_{max}(\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3)=V_{max}\,\Delta t_{tot}$$

$$V_{max}=\frac{660}{33}=20m/s$$

$$\Delta t_2=\frac{\Delta x_2}{V_{max}}=\frac{160}{20}=8s$$

$$\Delta t_2=8s$$

التمرين الثانى:

$$a = 4 - t^2$$

لما $t = 3s, \quad V = 2 m/s, \quad x = 9m$

لدينا

$$a = \frac{dV}{dt} \Rightarrow dV = a\ dt \Rightarrow \int_{v_0}^{V} V = \int_0^t a\, dt$$

$$V = \int a\ dt + V_0 \quad \Rightarrow V = \int_0^t (4 - t^2)\, dt + V_0 = V + \left[4t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^t$$

$$V = 4t - \frac{1}{3} t^3 + V_0$$

نكامل من جديد للحصول على العبارة الحرفية للإنتقال

$$x = \int_0^t v\, dt + x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \int_0^t (4t - \frac{1}{3} t^3 + V_0)\, dt + x_0$$

$$x = 2t^2 - \frac{1}{12} t^4 + V_0\ t + x_0$$

$$x = -\frac{1}{12} t^4 + 2t^2 + V_0\ t + x_0$$

بقي لنا الآن تحديد كل من الفاصلة الإبتدائية x_0 و السرعة V_0 للجسم، حسب المعطيات

$$à \quad t = 3s, \qquad V = 2m/s, \qquad x = 9m$$

$$2 = 4(3) - \frac{1}{3}(3)^3 + V_0 \qquad \Rightarrow \quad V_0 = -1\, m/s$$

$$9 = -\frac{1}{12}(3)^4 + 2(3)^2 + (-1)(3) + x_0$$

$$9 = -\frac{1}{12}(81) + 2(9) - 3 + x_0 \qquad \Rightarrow \ x_0 = \frac{3}{4} m$$

في الأخيرنـكتب عبارتي السرعة والإنتقال

$$x = 2\, t^3 - \frac{1}{12}(t)^4 - t + \frac{3}{4}$$

$$V = 4t - \frac{1}{3} t^3 - 1$$

التمرين الثالث:

$$\gamma = -K V^2$$

1) إيجاد عبارة السرعة اللحظية $V(t)$ حيث $à\ t = 0, V = V_0$

$$\gamma = \frac{dV}{dt} \Rightarrow -KV^2 = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dV}{V^2} = \int_0^t -Kdt$$

$$\left[-\frac{1}{V}\right]_{v_0}^{v} = -Kt \Rightarrow -\frac{1}{V} + \frac{1}{V_0} = -Kt$$

$$-\frac{1}{V} = -Kt - \frac{1}{V_0} \Rightarrow \frac{1}{V} = \frac{K\,V\,t + 1}{V_0}$$

$$V = \frac{V_0}{K\,V_0 t + 1}$$

2) المعادلة الزمنية للحركة:

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{V_0}{K\,V_0 t + 1}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{V_0}{K\,V_0 t + 1}dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \frac{V_0}{K\,V_0 t + 1}dt$$

$$= \frac{1}{K}\int \frac{K\,V_0}{V_0\,t + 1}dt$$

$$x = \frac{1}{K}\left[\ln(1 + KV_0 t)\right]$$

$$x = \frac{1}{K}\ln(1 + KV_0 t)$$

$$xK = \ln(1 + KV_0 t)$$

$$e^{Kx} = 1 + KV_0 t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$V = \frac{V_0}{K\,V_0 t + 1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض (1) في (2)

$$V = \frac{V_0}{e^{Kx}} \Rightarrow V = V_0\, e^{-Kx}$$

التمرين الرابع:

a) $t = x - 1 \Rightarrow y = 3x - 3$ طبيعة المسار: خط مستقيم

حركة مستقيمة $y = 3(x-1)$

b)

$$t = \frac{x}{2} \Rightarrow y = 4\frac{x^2}{4} \Rightarrow y = x^2$$

Mouvement Parabolique

c)

$$y = R - R\cos\omega t \Rightarrow \cos\omega t = 1 - \frac{y}{R}$$

$$x = R\arccos\left(\frac{R-4}{R}y\right) - \sqrt{2Ry - y^2}$$

حركة نقطة مادية على دائرة والتي تدور (Sans glissant) على مستقيم

(2

a)

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 3t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = 1 \\ V_y = 3 \\ V_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = 2 \\ V_y = 8t \\ V_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 8 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

C)

$$\begin{cases} x = R(wt - \sin wt) \\ y = R(1-\cos wt) \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = Rw(1-\cos wt) \\ V_y = Rw\sin wt \\ V_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = Rw^2 \sin wt \\ a_y = Rw\cos wt \\ a_z = 0 \end{cases}$$

التمرين الخامس:

$$\vec{a} = e^{-t}\vec{i} + 5\sin(t)\vec{j} - 3\cos\vec{k}$$

$$\vec{V} = \int \vec{a}dt \Rightarrow \vec{V} = (-e^{-t} + V_{x_0})\vec{i} + (-5\cos(t) + V_{y_0})\vec{j} + (-3\sin(t) + V_{z_0})\vec{k}$$

$$\vec{V}(1,2,-1) \qquad t = 0$$

$$\vec{V}_{x_0} = e^0 + = 2$$

$$V_{x_0} = -5\cos + 2 = -3$$

$$V_{z_0} = -3\sin 0 - 1 = -1$$

$$\vec{V} = (2 - e^{-t})\vec{i} + (-3 - 5\cos t)\vec{j} - (1 + 3\sin t)\vec{k}$$

$$\vec{V} = (2 - e^{-t})\vec{i} - (3 + 5\cos t)\vec{j} - (1 + 3\sin t)\vec{k}$$

$$O\vec{M} = \int \vec{V}.dt$$

$$O\vec{M} = (2t + e^{-t} + x_0)\vec{i} - (3t + 5\sin t y_0)\vec{j} - (t - 3\cos t + z_0)\vec{k}$$

التمرين العاشر:

$$x\,(t)=\frac{g}{b^2}(b\,t+e^{-bt})$$

1- عبارة سرعة المتحرك

$$V=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{g}{b^2}(b\,t+e^{-bt})\right]$$

$$=\frac{g}{b^2}(b+b\,e^{-bt})$$

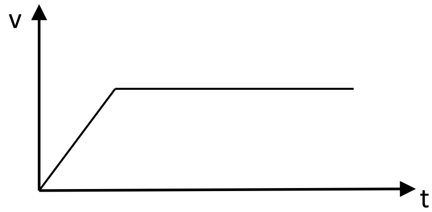
$$\text{Donc}\ \ V(t)=\frac{g}{b^2}(b+b\,e^{-bt})=\frac{g}{b}(1+e^{-bt})$$

* تحديد السرعة الإبتدائية $\grave{a}\quad t=0,\quad V=\frac{g}{b}(1\text{-}1)=0$

2- منحنى المسار $V=f(t)$ من أجل قيم موجبة bb>0

$V(0)=0$

$t\to\infty$ $\qquad V(t)=\frac{g}{b}$



3- عبارة التسارع a(t) بدلالة السرعة v(t)

$$a\,(t)=\frac{dV(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left\|\frac{g}{b}(1-b\,e^{-bt})\right\|=\frac{d}{dt}\frac{g}{b}-\frac{d}{dt}\left(\frac{g}{b}e^{-bt}\right)$$

$$=1+g\,e^{-bt}=g\,e^{-bt}$$

نعلم أن

$$V(t)=\frac{g}{b}-\frac{g}{b}\,e^{-bt}=\frac{g}{b}-\frac{a\,(t)}{b}$$

$$V(t)=\frac{g-a\,(t)}{b}\ \Rightarrow\ b\,V(t)=g-a\,(t)$$

$$\text{Donc}\quad a\,(t)=g-b\,V\,(t)$$

التمرين السادس عشر:

1) صيغة المسار

$$\begin{cases} x=2\cos\frac{t}{2}\text{..........................(1)} \\ y=2\sin\frac{t}{2}\text{..........................(2)} \end{cases}$$

بالتربيع و الجمع (1) و(2) نجد:

$x^2+y^2=4$ معادلة دائرة مركزها $O\,(0{,}0)$ ونصف قطرها 2

-(2

$$Vx = \frac{dx}{dt} = -\sin\frac{t}{2}$$
$$Vy = \frac{dy}{dt} = \cos\frac{t}{2} \qquad \Rightarrow \quad \vec{V} = -\sin\frac{t}{2}\,\vec{i} + \cos\frac{t}{2}\,\vec{j}$$

3) عبارة السرعة $V = \frac{ds}{dt}$

$$V = \sqrt{\left(-\sin\frac{t}{2}\right)^2 + \cos^2\frac{t}{2}} \qquad V = 1\,\mathrm{m/s}$$

$$V = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \int ds = \int V\,dt \qquad S = V\,t + Cte$$

$$\grave{a}\ \ t = 0,\ S = 0 \quad \Rightarrow c = 0$$

$$S = t$$

4)-

$a_N = ?$ $\qquad a_T = ?$

$$a_x = \frac{dVx}{dt} = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\ \ j\ \ ay = -\frac{1}{1}\sin\frac{t}{2}$$

$$a^2 = ax^2 + ay^2 = 0{,}25\ \ \mathrm{m/s}$$

$$a_T = \frac{dV}{dt} = 0\ \ ,\ a_N = \sqrt{a^2 - a_T{}^2} \quad \Rightarrow a_N = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$$

التسارع الناظمي

5) نصف قطر الإنحناء

$$\rho = \frac{V^2}{a_N} = \frac{1}{0{,}5} \quad \Rightarrow R = 2\mathrm{m}$$

6)-

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \ddot{\theta} = 0{,}2t$$

$$\omega = \frac{0{,}2\,t^2}{2} + C \qquad \Leftarrow \int d\omega = \int \ddot{\theta}\,dt$$

$$\omega = 0{,}1\,t^2 + C \quad \grave{a}\ t = 0 \quad S = 0, \qquad \omega = 0$$

$$\omega = 0{,}1\,t^2$$

إستنتاج السرعة الخطية $V = \omega R = 0{,}1\,t^2\ R = 0{,}2\,t^2$

تبلغ السرعة القيمة $10\,\mathrm{m/s}$ في اللحظة $10 = 0{,}2\,t^2$

$$\Rightarrow \quad t = 7{,}1\mathrm{S}$$

تكامل السرعة الزاوية فنحصل على الزاوية الممسوحة لنحسب المسافة

$$\theta = \omega\,dt = \frac{0{,}1}{3}t^3 \Rightarrow \quad S = R\,\theta = 2\,\frac{0{,}1}{3}(7{,}1)^3$$

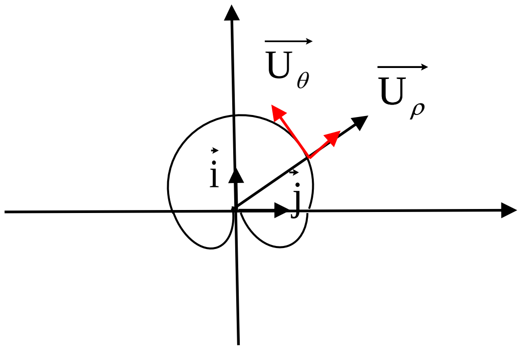
$$S = 23{,}9\,\mathrm{m}$$

التمرين التاسع عشر:

$$\begin{cases} \rho = 1 + \sin\theta \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

1) رسم مسار النقطة

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{4}$	π	$5\frac{\pi}{4}$	$6\frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{2}$	$7\frac{\pi}{4}$	2π
ρ	1	1,70	2	1,70	1	0,29	0	0,29	1



2) شعاعي السرعة في المعلم القطبي

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\rho} = \rho.\overrightarrow{U}_\rho$$

$$\vec{V} = \dot{\rho}\,\overrightarrow{U_\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\vec{V} \begin{cases} \dot{\rho} = w\cos\theta \\ \rho\,\dot{\theta} = w(1-\sin\theta) \end{cases} \qquad \vec{V} = w\cos\theta\,\overrightarrow{U}_\rho + w(1-\sin\theta)\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{w^2\cos\theta^2 + w^2(1-\sin^2\theta)}$$

$$\left|\vec{V}\right| = \left[w^2\cos\theta^2 + w^2 + w^2\sin^2\theta - 2w^2\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}} = w\sqrt{2}\sqrt{1+\sin\theta}$$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{2}\,w\sqrt{\rho}$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\overrightarrow{U}_\rho + (2\dot{\rho}\ddot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{U}_\theta$$

$$\vec{\gamma} \begin{cases} -w^2\sin\theta + w^2(1+\cos\theta) = -2w^2\sin\theta - w^2 \\ 2w^2\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{\gamma} = -w^2(2\sin\theta + 1)\,\overrightarrow{U_\rho} + 2w^2\cos\theta\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\vec{\gamma} = \left[w^4(2\sin\theta+1)^2 + 4w^4\cos\theta^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[4w^4\sin^2\theta + w^4 + 4w^4\sin\theta + 4w^4\cos\theta^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{\gamma} = \left[5w^4 + 4w^4\sin\theta\right]^{\frac{1}{2}} = w\sqrt{5+4\sin\theta}$$

3) عند $t = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{V} = 2w\,\overrightarrow{U}_\theta \qquad , \gamma = -3w^2\,\overrightarrow{U_\rho}$$

حركة دائرية منتظمة $\Rightarrow \vec{V} \perp \vec{\gamma}$ $\quad à\ t = \dfrac{\pi}{2}$

4) عبارة نصف قطر إنحناء المسار: R

$$R = \frac{V^2}{\gamma_N} \qquad \gamma^2 = \gamma_N{}^2 + \gamma_T{}^2 \qquad \Rightarrow \gamma_N{}^2 = \gamma^2 - \gamma_T{}^2$$

$$\gamma_T = \frac{dv}{dt} = w\sqrt{2}\,\frac{1}{2}(1+\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\ (w\cos\theta)$$

$$\gamma_N{}^2 = w^4\,(5+4\sin\theta) - \frac{w^4\cos^2\theta}{2\,(1+\sin\theta)} = \frac{10\,w^4 + 10\,w^4\sin\theta + 8\,w^4\sin\theta + 8\,w^4\sin^2\theta - w^4 + w^4\sin^2\theta}{2\,(1+\sin\vartheta)}$$

$$\gamma_N{}^2 = \frac{9\,w^4 + 18\,w^4\sin\theta + 9\,w^4\sin^2\theta}{2\,(1+\sin\theta)} = \frac{9\,w^4(1+2\sin\theta+\sin^2\theta)}{2\,(1+\sin\theta)} = \frac{9\,w^4(1+\sin\theta)}{2\,(1+\sin\theta)} = \frac{9\,w^4(1+\sin\theta)}{2}$$

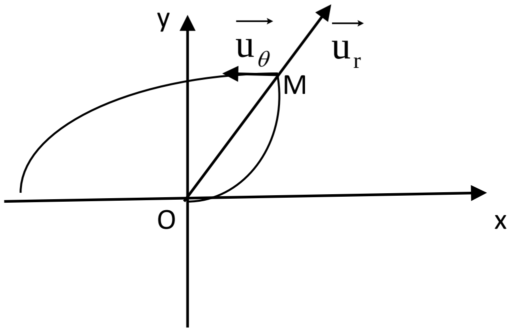
$$R = \frac{2w^2\,(1 = Sin\theta)}{\dfrac{3w^2}{\sqrt{2}}(1+\sin)^{\frac{1}{2}}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2\sqrt{2}}{3}(1+\sin\theta)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\rho}$$

$$à\ t = 0 \qquad R = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

التمرين الثالث و العشرون:

-1 $r = K\,\theta^2$ ، $r = 3\,\theta^2$ من أجل $K = 3$ $\quad 0 \le \vartheta < \pi$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{4}$	π
r	0	1,84	7,39	5,29	29,57



-2 شعاع السرعة $\vec{V}$

$$\vec{V}=\frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r}+r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta}=\frac{dr}{dv}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_r}+r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_r}$$

$$V=6\,\theta\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_r}+3\,\theta^2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U\theta}$$

3- شعاعي السرعة والتسارع للنقطة M عند

$$\theta=\frac{\pi}{2} \qquad \frac{d\theta}{dt}=w=Cte,$$

$$\vec{V}(\theta=\frac{\pi}{2})=3\pi\,w\overrightarrow{U_r}+\frac{3\pi^2}{4}w\overrightarrow{U_\theta}$$

أما شعاع التسارع في جملة الإحداثيات القطبية:

$$\vec{\gamma}=\left[\ddot{r}+r\,\dot{\theta}^2\right]\overrightarrow{U_r}+\left[2\,\dot{r}\,\dot{\theta}+r\,\ddot{\theta}\right]\overrightarrow{U_\theta}$$

$$=(6-3\,\theta^2)\,w^2\,\overrightarrow{U_r}+120\,w^2\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\vec{\gamma}(\theta=\frac{\pi}{2})=(6-\frac{3\pi^2}{4})\,w^2\,\overrightarrow{U_r}+6\,\pi\,w^2\,\overrightarrow{U_\theta}$$

4- يكون التسارع ناظمي إذا كانت المركبة المماسية معدومة $\gamma_T=0 \quad \gamma=\gamma_N$

$$\gamma_T=\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\left[36\,\theta^2\,w^2+9\,\theta^4\,w^2\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

$$=w^2\frac{d}{d\theta}\left[36\,\theta^2+9\,\theta^4\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

$$=w^2\frac{\left[36\,\theta+18\,\theta^3\right]}{\sqrt{\left[36\,\theta^2+9\,\theta^4\right]}}=0$$

$$\Rightarrow\ 36\,\theta+18\,\theta^3=0$$

$$\theta\,(36+18\,\theta^3)=0$$

لهذه المعادلة حل وحيد وهو يقابل $\theta=0$ ، ما عدا مبدأ الإحداثيات لا يوجد موضعا يكون فيه التسارع مساويا لتسارع الناظمي.

التمرين الرابع و العشرون:

1) مراحل الحركة:

لدينا المجال - $t\leftarrow[0,2]$ المعادلة الزمنية $r\ =\ a\,t+b$

$$\theta=\frac{\pi}{4} \qquad r=t+3 \qquad a=\frac{5-3}{2-0}=1 \qquad b=3$$

$$\vec{V}=\dot{r}\,\overrightarrow{U_r}+r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{V}=\vec{U}_r \qquad \left|\vec{V}\right|=1\,m/s$$

حركة مستقيمة منتظمة

$\theta = a\,t + b \qquad r = 5m \qquad t\,[2,6]$

$\grave{a}\ \ t = 2 \qquad \vartheta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow b = \frac{\pi}{8} \qquad a = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{\delta - 2} = \frac{\pi}{16}$

$\theta = \frac{\pi}{16}\,t + \frac{\pi}{8}$

حركة دائرية منتظمة من $[0,2]$

$\grave{a}\ \ t = 0 \qquad r = 3$

$t = 1 \qquad r = 4$

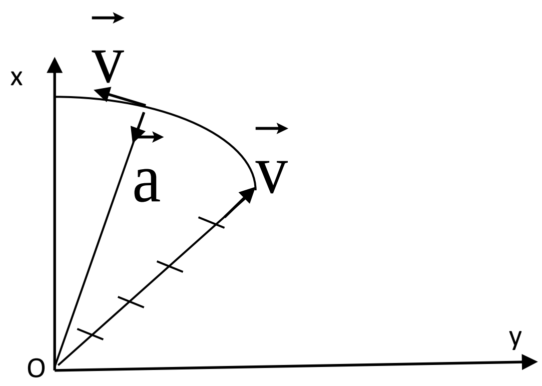
$t = 2 \qquad r = 5$

- المجال $[2,6]$

$\grave{a}\ \ t = 2 \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

$t = 4 \qquad \theta = \frac{3\pi}{2}$

$t = 6 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$



3) في اللحظة t = 1 s

$V = 1\,\text{m/s} \qquad r = 4\,\text{m}$

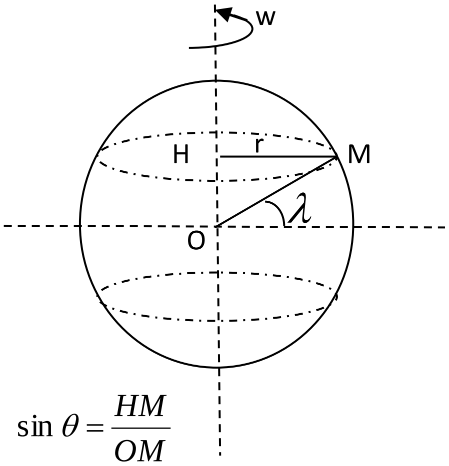
$\grave{a}\ V = \dot{\theta}\,r = \frac{\pi}{16}5 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\pi}{16} \quad \Leftarrow \grave{a}\ t = 4\,s \quad \theta = \frac{3\pi}{8}$

$V = 0{,}99\ \text{m/s} \qquad \vec{a} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}\vec{U}_r + \frac{V^2}{r}\vec{U}_N$

$\vec{a} = \frac{1}{5}\overrightarrow{U_N} = 0{,}2\,\overrightarrow{U_N}$

$a = 0{,}2\ \text{m/s}^2$

التمرين الخامس و العشرون:



$$V = wr$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{HM}$$

في مثلث OHM $\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda) = \frac{HM}{OM}$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM}$$

$$HM = r = \mathrm{OM}\sin\theta = \mathrm{OM}\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)$$

$$\mathrm{r} = \mathrm{R}\cos\lambda = \mathrm{Cte}$$

$$V = w\,\mathrm{R}\cos\lambda$$

$$w = \mathrm{Cte}$$

$$\theta = \omega$$

بما أن الحركة دائرية نستعمل الإحداثيات ت القطبية

$$\begin{cases} \vec{r} = r\,\vec{\mathrm{U}}_{\mathrm{r}} \\ \vec{V} = \dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U\theta} \\ \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{\mathrm{U}}_{\mathrm{r}} + (\mathrm{r}\ddot{\theta} + 2\dot{\mathrm{r}}\dot{\theta})\,\overrightarrow{\mathrm{U}_\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{U}_r = \frac{\vec{r}}{r} \\ w = \frac{d\theta}{dt} = w \end{cases}$$

$Comme\, \mathrm{r} = \mathrm{Cte}$

$$\mathrm{V} = \omega\,\mathrm{r}$$

مركزية $\vec{a} = -\mathrm{r}\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{\mathrm{U}_{\mathrm{r}}}$ c'est-à-dire $\vec{a}$ est centripète

$$a = \mathrm{r}\,\dot{\theta}^2 = rw^2$$

3) حالة M على سطح الأرض $R = 638\ \mathrm{Km}$ $\lambda = 45°$ $T = 24\mathrm{h}$

$$\mathrm{V} = \mathrm{R}\cos\lambda$$

$$a = \omega^2\,\mathrm{R}\cos\lambda$$

$$T = 24h = 86400\ \mathrm{s}$$

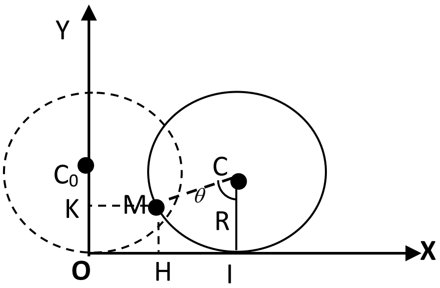
$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 7{,}3\,10^{-5}\ \mathrm{rod/s}$$

$$\omega = 7{,}3\,10^{-5}\ 638\,10^{3}\cos 45 = 32{,}8\ \mathrm{ms}^{-1}$$

$$a = \left(7{,}3\,10^{-5}\right)^2\ 638\,10^{3}\cos 45 = 2{,}4\,10^{-3}\ \mathrm{m/s}$$

التمرين السادس و العشرون:

إحداثيات نقطة M



$x = OH = OI - HI$

$HI = R\sin\theta$

$\theta = \dfrac{v}{R}t$ $OI = C_0C = vt$

$y = OK = OC_0 - KC_0$ $OI = R\theta$

$= R - R\cos\theta$ $x = R\theta - R\sin\theta$

$y = R(1 - \cos\theta)$ $x = R(\theta - \sin\theta)$

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

2) سرعة و تسارع النقطة M

$OI = C_0C = vt$

$$v = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{V} = R(\dot\theta - \dot\theta\cos\theta)\vec{i} + R\dot\theta\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\theta = \omega t = \frac{v}{R}t$$

$$\vec{V} = R\dot\theta(1 - \cos\theta)\vec{i} + R\dot\theta\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{V} = V(1 - \cos\theta)\vec{i} + V\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{V^2}{R}\sin\theta\,\vec{i} + \frac{V^2}{R}\cos\theta\,\vec{j}$$

3) قيم $\vec{a}$ و $\vec{V}$ لما M يلمس الأرض $\theta = 2\pi$

$$V = 2V\sin\frac{\theta}{2} = \frac{V}{2R}t$$

4) $\vec{a}$ نابذ نحو المركز (مركزي)

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\left(\frac{V^2}{R}\right)^2 \sin^2\theta - \left(\frac{V^2}{R}\right)^2 \cos^2\theta}$$

$$\gamma = \frac{V^2}{R}$$

التسارع ثابت الطويلة ومتجه نحو مركز العجلة

- حسابه

$$\gamma = \frac{\left(130\,10^3/3600\right)^2}{35\;10^2} = 0.138\ \ \text{m/s}^2$$

التمرين الثامن و العشرون:

$$\begin{cases} x = a\cos wt \\ y = a\sin wt \\ z = hwt \end{cases}$$

أ- الحركة في المستوي (oxy) $z = 0$ $x^2 + y^2 = a^2$

إذن هي معادلة دائرة مركزها (o) ونصف قطرها a

سرعة H

$$V_H{}^2 = x_H{}^2 + y_H{}^2 \Rightarrow V_H{}^2 = a^2w^2\sin^2 wt + a^2w^2\cos^2 wt$$

$$V_H = aw \qquad V_H{}^2 = a^2w^2$$ ثابتة

H لها حركة دائرية منتظمة

-(b

$$V_z(H) = \dot{Z} = wh$$

حركة M على المستوي (oxy) هي حركة النقطة H بحركة دائرية منتظمة وكذلك وفق المركبة z ب $h\omega$ حركة مستقيمة منتظمة منه الحركة لولبية اسطوانية

-(2

$$\overline{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{OH}} + \overline{\mathrm{HM}} \qquad \vec{V}(M) = \frac{d\overline{OM}}{dt}$$

$$\overline{OM} = a\vec{U}_r + Z\vec{U}_z$$

$$\vec{V} = a\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{Z}\vec{U}_z = aw\vec{U}_\theta + hw\vec{U}_z$$

$$|\vec{V}| = w\sqrt{a^2+h^2}$$

نلاحظ أن سرعة OM المعلم R ثابتة

- الزاوية بين لشعاع

السرعة $\vec{V}(M)$ والمحور (oz)

$$\vec{V}\,\vec{\mathrm{U}}_z = \left(aw\vec{U}_o + hw\vec{U}_z\right)\vec{U}_z = hw \quad , \vec{V}\,\vec{\mathrm{U}}_z = V\,\mathrm{U}_z\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{hw}{\omega\sqrt{\mathrm{a}^2+h^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{\mathrm{a}^2+h^2}}$$

α : ثابتة

3)- مركبات التسارع

$$\vec{\mathrm{a}}(M) = \frac{d\vec{V}}{dt} = aw\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} + hw\frac{d\vec{U}_z}{dt}$$

$$= aw^2\vec{U}_r$$

4)-مركبات شعاعي السرعة والتسارع في المعلم الديكارتي

$$\begin{cases} x = a\cos wt \\ y = a\sin wt \\ z = hwt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = aw\sin wt \\ V_y = aw\cos wt \\ V_z = hw \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = aw^2\cos wt \\ a_y = aw^2\sin wt \\ a_z = 0 \end{cases}$$

$$|\vec{V}| = w\sqrt{a^2+h^2} \qquad |\vec{\mathrm{a}}| = aw^2$$

5)- أشعة معلم Frenet

المركبة المماسية $\vec{U}_t$

$$\vec{U}_t = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{-aw\sin wt\,\vec{i} + aw\cos wt\,\vec{j} + hw\,\vec{k}}{\omega\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$\vec{U}_t = \frac{-a}{\sqrt{a^2+h^2}}\sin wt\,\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\cos wt\,\vec{j} + \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\,\vec{k}$$

المركبة الناظمية $\vec{U}_N$

$$\vec{U}_N = ? \qquad \vec{K} = \vec{U}_t \wedge \vec{U}_N \Rightarrow \vec{U}_N = \vec{K} \wedge \vec{U}_t$$

$$\vec{U}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{-a}{\sqrt{a^2+h^2}}\sin wt\,\vec{i} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\cos wt\,\vec{j} \\ \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\,\vec{k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\cos wt \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+h^2}}\sin wt \end{pmatrix} \text{ alors } \vec{U}_N = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}(\cos wt\,\vec{i} + \cos wt\,\vec{j})$$

الفصل IV: الحركة النسبية (المركبة)
Mouvement Relatif (Composée)

I- مقدمة:

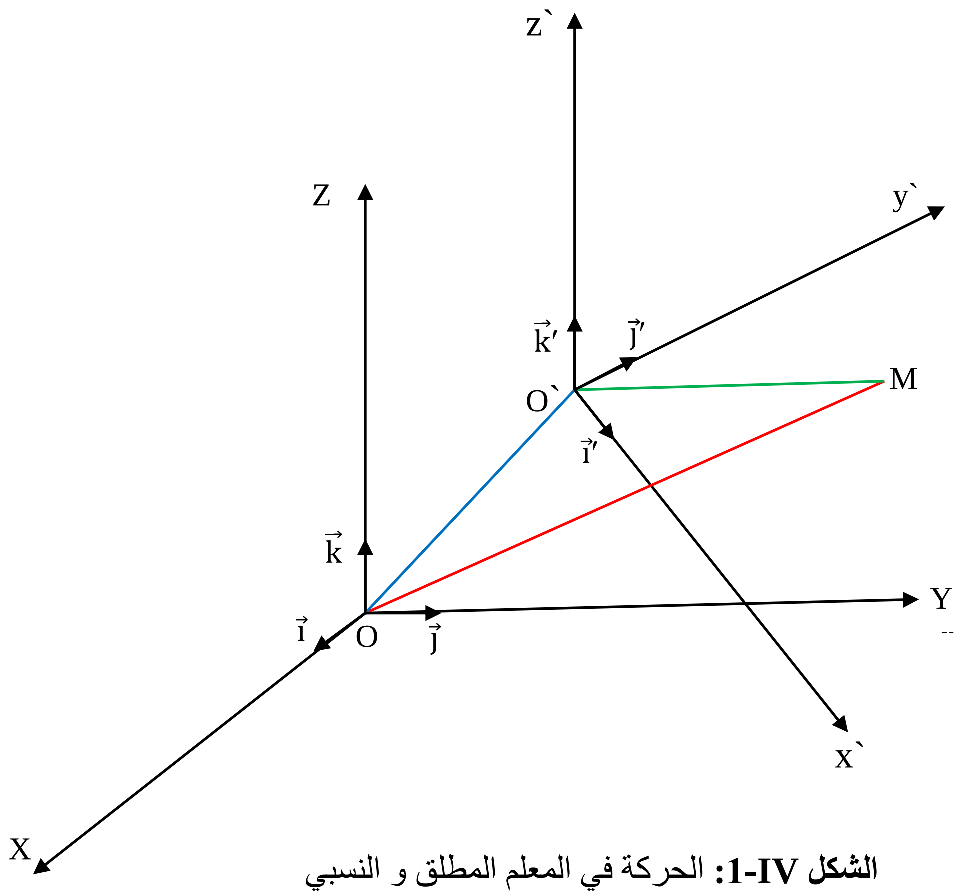
ننسب حركة جسم دائما إلى جسم آخر أو معلم قد يكون ثابت ويسمى معلم مطلق أو متحرك.

- إذا حركة الجسم بإمكانها أن تنقسم إلى حركتين الأولى بالنسبة لمعلم ثابت وتسمى هذه الحركة مطلقة والثانية بالنسبة لمعلم متحرك وتسمى الحركة نسبية.

- في الحالة الأولى تسمى المقادير (شعاع الموضع- السرعة والتسارع) بالمقادير المطلقة.

وفي الحالة الثانية تسمى المقادير النسبية.

مثال: مسافر $\mathcal{M}$ في قطار، مراقب خارج القطار يعتبر كمعلم R ثابت (مطلق) والقطار أو آخر داخل القطار متحرك مع القطار معلم متحرك R`.



الشكل 1-IV: الحركة في المعلم المطلق و النسبي

R(o,x,y,z) معلم مطلق

R`(o`,x`,y`,z`) معلم نسبي

1- المقادير الحركية المطلقة:

أ) شعاع الموضع (Vecteur Position Absolue):

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IV-1)$$

حيث x,y,z إحداثيات النقطة $\mathcal{M}$ أو مركبات شعاع الموضع المطلق في المعلم الثابت (R).

ب) شعاع السرعة المطلقة (Vecteur Vitesse Absolue):

هي سرعة الجسم بالنسبة للمعلم الثابت R

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} / R = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IV-2)$$

ج) شعاع التسارع المطلق (Vecteur Accélération Absolue):

هو تسارع الجسم المتحرك بالنسبة للمعلم الثابت R

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} / R = \frac{d^2\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} / R = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IV-3)$$

2- المقادير الحركية النسبية:

أ) شعاع الموضع النسبي (Vecteur Position Relative):

يمثل موضع الجسم المتحرك بالنسبة للمعلم المتحرك R`

$$\overrightarrow{O`\mathcal{M}} = x`\vec{\imath}` + y`\vec{\jmath}` + z`\vec{k}` \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IV-4)$$

ب) شعاع السرعة النسبية (Vecteur Vitesse Relative):

سرعة الجسم المتحرك بالنسبة للمعلم R`

$$\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{O`\mathcal{M}}}{dt} / R` = \frac{dx`}{dt}\vec{\imath}` + \frac{dy`}{dt}\vec{\jmath}` + \frac{dz`}{dt}\vec{k}` \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IV-5)$$

ج) شعاع التسارع النسبي (Vecteur Accélérateur Relative):

هو تسارع الجسم بالنسبة للمعلم المتحرك R`

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} / R` = \frac{d^2\overrightarrow{O`\mathcal{M}}}{dt} / R`$$

$$= \frac{d^2x`}{dt^2}\vec{\imath}` + \frac{d^2y`}{dt^2}\vec{\jmath}` + \frac{d^2z`}{dt^2}\vec{k}` \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IV-6)$$

II- تركيب السرعات:

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{O`\mathcal{M}} = x`\vec{\imath}` + y`\vec{\jmath}` + z`\vec{k}`$$

بتطبيق علاقة شال:

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \overrightarrow{OO`} + \overrightarrow{O`\mathcal{M}}$$

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} / R = \frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt} / R + \frac{d\overrightarrow{O`\mathcal{M}}}{dt} / R \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IV-7)$$

$$\frac{d\overrightarrow{O`\mathcal{M}}}{dt}=\frac{d\left[x`\vec{\imath}`+y`\vec{\jmath}`+z`\vec{k}`\right]}{dt}/\,R$$

$$\frac{d\overrightarrow{O`\mathcal{M}}}{dt}=\underbrace{\frac{dx`}{dt}\vec{\imath}`+\frac{dy`}{dt}\vec{\jmath}`+\frac{dz`}{dt}\vec{k}`}_{\vec{v}_r}+x`\frac{d\vec{\imath}`}{dt}/\,R+y`\frac{d\vec{\jmath}`}{dt}/\,R+z`\frac{d\vec{k}`}{dt}/\,R$$

(لأن أشعة الوحدة للمعلم النسبي تتغير وضعيتها مع الزمن بالنسبة للمعلم المطلق بالتعويض في $IV-7$ نجد:

$$\vec{v}_a=\frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt}/\,R+\vec{v}_r+x`\frac{d\vec{\imath}`}{dt}/\,R+y`\frac{d\vec{\jmath}`}{dt}/\,R+z`\frac{d\vec{k}`}{dt}/\,R$$

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt}/\,R+x`\frac{d\vec{\imath}`}{dt}/\,R+y`\frac{d\vec{\jmath}`}{dt}/\,R+z`\frac{d\vec{k}`}{dt}/\,R}_{\vec{v}_e}$$

تسمى السرعة المكتسبة أو سرعة الجر (Vitesse d'entrainement).

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (IV-8)$$

تسمى علاقة تركيب السرعات

- **أشعة الدوران اللحظية**

أشعة الدوران اللحظية لـ $R`$ بالنسبة لـ R (حركة دائرية) تعطى :

$$\frac{d\vec{\imath}`}{dt}=\frac{d\vec{\imath}`}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\omega\vec{\jmath}`=\vec{\omega}\wedge\vec{\imath}`$$

$$\frac{d\vec{\jmath}`}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath}`$$

$$\frac{d\vec{k}`}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{k}`$$

$$\vec{v}_a=\frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt}/\,R=\vec{v}_r+\frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt}/\,R+\ x`(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath}`)+y`(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath}`)+z`(\vec{\omega}\wedge\vec{k}`)$$

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt}/\,R+\vec{\omega}\wedge\Big(\underbrace{x`\vec{\imath}`+y`\vec{\jmath}`+z`\vec{k}`}_{\overrightarrow{O`\mathcal{M}}}\Big)$$

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt}/\,R+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O`\mathcal{M}}}_{\vec{v}_e}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (IV-9)$$

$$\vec{v}_e=\frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O`\mathcal{M}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (IV-10)$$

حيث $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ سرعة زاوية

- **ملاحظات:**

1- إذا كانت θ ثابتة، فإن $\dot{\theta} = 0$ ، المعلم `R في حالة إنسحاب بالنسبة للمعلم المطلق R.

2- مهما يكون تغيير $\overrightarrow{OO`}$، أشعة الوحدة $(\vec{\imath},\vec{\imath}`)$ ،$(\vec{\jmath},\vec{\jmath}`)$،$(\vec{k},\vec{k}`)$ ، تكون دائما بينهم نفس الزاوية.

3- إذا كان $\overrightarrow{OO`}$، ثابت فإن $\frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt} = 0$ و θ متغيرة بالنسبة للزمن هذا يعني أن المعلم `R في حالة دوران بالنسبة لـ R.

4- في الحالة العامة $\overrightarrow{OO`}$ و $\theta$ متغيران بالنسبة للزمن هذا يعني أن المعلم `R في حالة انسحاب ودوران بالنسبة للمعلم R.

III- تركيب التسارعات:

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} / R = \frac{d\vec{v}_r}{dt} / R + \frac{d\vec{v}_e}{dt} / R$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt}/R = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx`}{dt}\vec{\imath}` + \frac{dy`}{dt}\vec{\jmath}` + \frac{dz`}{dt}\vec{k}`\right]/R$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} / R = \underbrace{\frac{d^2x`}{dt^2}\vec{\imath}` + \frac{d^2y`}{dt^2}\vec{\jmath}` + \frac{d^2z`}{dt^2}\vec{k}`}_{\vec{\gamma}_r} + \frac{dx`}{dt}\frac{d\vec{\imath}`}{dt} + \frac{dy`}{dt}\frac{d\vec{\jmath}`}{dt} + \frac{dz`}{dt}\frac{d\vec{k}`}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} / R = \vec{\gamma}_r + \vec{\omega} \wedge \left[\underbrace{\frac{dx`}{dt}\vec{\imath}` + \frac{dy`}{dt}\vec{\jmath}` + \frac{dz`}{dt}\vec{k}`}_{\vec{v}_r}\right]$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} / R = \vec{\gamma}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IV-11)$$

$$\frac{d\vec{v}_e}{dt} / R = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt} / R + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O`\mathcal{M}}\right]$$

$$\frac{d\vec{v}_e}{dt}/R = \frac{d^2\overrightarrow{OO`}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O`\mathcal{M}} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O`\mathcal{M}}}{dt}/R$$

حيث

$$\frac{d\overrightarrow{O`\mathcal{M}}}{dt}/R = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O`\mathcal{M}}$$

$$\frac{d\vec{v}_e}{dt} / R = \frac{d^2\overrightarrow{OO`}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O`\mathcal{M}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O`\mathcal{M}})$$

$$\frac{d\vec{v}_e}{dt}/R=\frac{d^2\overrightarrow{OO`}}{dt^2}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O`\mathcal{M}}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O`\mathcal{M}})$$

$$\vec{\gamma}_a=\vec{\gamma}_r+\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r+\frac{d^2\overrightarrow{OO`}}{dt^2}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O`\mathcal{M}}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r+\vec{\omega}$$

$$\vec{\gamma}_a=\vec{\gamma}_r+\underbrace{2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r}_{\vec{\delta}_c}+\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO`}}{dt^2}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O`\mathcal{M}}+\vec{\omega}}_{\vec{\gamma}_e}$$

$$\vec{\gamma}_a=\vec{\gamma}_r+\vec{\gamma}_c+\vec{\gamma}_e\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(IV-12)$$

$:\vec{\gamma}_c$ تسارع كريوليس (Accélération de Coriolis)

$$\vec{\gamma}_c=2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(IV-13)$$

$:\vec{\gamma}_r$ تسارع نسبي

$$\vec{\gamma}_r=\frac{d\vec{v}_r}{dt}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(IV-14)$$

$.\vec{\gamma}_e$ تسارع الجر

$$\vec{\gamma}_e=\frac{d^2\overrightarrow{OO`}}{dt^2}+\dot{\vec{\omega}}_{\frac{R}{R`}}\wedge\overrightarrow{O`\mathcal{M}}+\vec{\omega}_{\frac{R}{R`}}\wedge(\vec{\omega}_{\frac{R}{R`}}\wedge\overrightarrow{O`\mathcal{M}})\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(IV-15)$$

$\vec{\omega}=\vec{\omega}_{\frac{R}{R`}}$ هي سرعة دوران المعلم النسبي `R بالنسبة للمعلم المطلق R شعاع الدوران اللحظي

تمارين (Exercices)

التمرين الأول:

يسير سائق سيارة على طريق مستو بسرعة 100 km/h ، لاحظ أن لقطرات المطر، حسب ما يراه عبر الزجاج العرضي لسيارته، مسارات تصنع الزاوية 80° مع الشاقول. لما أوقف سيارته رأى أن المطر يسقط شاقوليا.

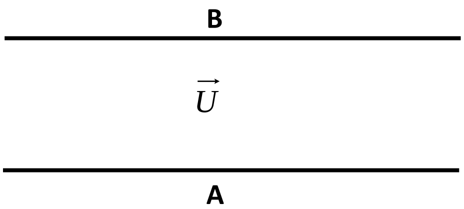
أحسب سرعة المطر بالنسبة للسيارة متوقفة و بالنسبة للسيارة و هي تسير ب 100 km/h؟

التمرين الثاني:

حافتي نهر متوازيتان، تفصلهما مسافة l. سرعة الماء ثابتة و تساوي $\vec{U}$. تنطلق سفينة من نقطة A من حافة النهر لتصل الى نقطة B التي تقع على الجهة المقابلة للنقطة A. لكي تصل السفينة، تنطلق من A بسرعة نسبية ثابتة $\vec{V}$ و التي تصنع زاوية φ مع حافة النهر. تصل إلى النقطةB خلال زمن معين t.

- حدد السرعة النسبية و الزاوية φ؟

يعطى: t=25 min, U = 2m/s, l = 400 m



التمرين الثالث:

تطير طائرة في اتجاه الشمال. حيث تكون سرعتها بالنسبة للرياح 1000 Km \h.

يلاحظ إنسان على الأرض حركة الرياح في اتجاه الشمال الغربي بسرعة 150 Km \h، و بزاوية انحراف 30° بالنسبة للشمال.

1- في أي اتجاه يوجه الطيار الطائرة لكي يتجه حقيقة نحو الشمال؟
2- كم هي إذا سرعة الطائرة بالنسبة للأرض؟

التمرين الرابع:

في اللحظة صفر يبدأ مصعد في النزول من أعلى عمارة ارتفاعها h. و في نفس اللحظة صفر تمر سيارة أمام العمارة بالتوازي لها بسرعة v

1- إذا كان المصعد ينزل بانتظام بسرعة v، أوجد مسار المصعد بالنسبة الى راكب السيارة؟
2- أجب عن نفس السؤال إذا كان المصعد ينزل بتسارع ثابت γ و بسرعة ابتدائية v؟

التمرين الخامس:

إحداثيات متحرك M في معلم ثابت (R) ذو قاعدة $\left(o,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$ معطاة بدلالة الزمن:

$x(t)=t^2-4t+1, y(t)=-2t^4, z(t)=3t^2$.و في معلم متحرك (R') ذو قاعدة $\left(o',\overrightarrow{u_{x'}},\overrightarrow{u_{y'}},\overrightarrow{u_{z'}}\right)$ ،
الإحداثيات معطاة ب: $x'(t)=t^2+t+2, y'(t)=-2t^4+5, z'(t)=3t^2-7$

- أوجد شعاع السرعة $\vec{v}$ للمتحرك M في المعلم (R) بدلالة سرعته $\vec{v}'$ في المعلم (R')، استنتج سرعة الجر.
- أوجد شعاعي التسارع $\vec{\gamma}$ و $\vec{\gamma}'$ في المعلمين (R) و (R') على التوالي، استنتج تسارع الجر.
- استنتج حركة المعلم (R) بالنسبة للمعلم (R')

التمرين السادس:

ليكن قضيب (BC) طوله (l) تنتقل نهايته B وفق المحور (ox) لمرجع R(Oxyz) و نهايته C وفق محور (Δ) موازي للمحور (oy)، المسافة التي تفصل (Δ) عن (oy) هي : OH=D. أنظر الشكل (أقلب الصفحة).

يحدد موضع نقطة ما A من القضيب بالزاوية θ=(-oy , BC)، و بالمسافة d=BA.

1)- عبر بدلالة θ عن إحداثيات النقطتين A و C في أساس R.

2)- ماهي مركبات $\vec{V}(A)_{/R}$ و $\vec{V}(A)_{/R1}$ في أساس R. حيث R_1 هو مرجع مبدأه B، وفي حالة انسحاب بالنسبة إلى R.

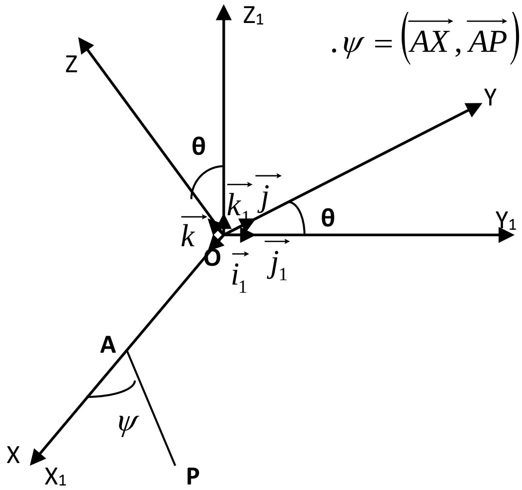
3)- أوجد السرعة الجرية ل R_1 بالنسبة الى R.

4)- بين أن مسار النقطة A هو عبارة عن قطع ناقص.

- أسقط المعادلة الشعاعية للقانون الأساسي على المحاور و استنتج المعادلة التفاضلية التي تحدد قانون الحركة r(t)

التمرين السابع:

نعتبر المعلم المطلق $R_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ و المعلم النسبي R(OXYZ)، حيث $O_1=O$ و المحورين OX و O_1X_1 متطابقين. موضع المعلم R(OXYZ) بالنسبة للمعلم $R_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ معرف بالزاوية $\theta(t)=(\overrightarrow{O_1Y_1},\overrightarrow{OY})$. نعتبر قضيب طوله l في حركة في المستوي XOY حيث $\overrightarrow{OA}=b\vec{i}$ .b ثابت و موجب و الزاوية التي يصنعها القضيب مع المحور OX هي $\psi=(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AP})$.



أحسب:

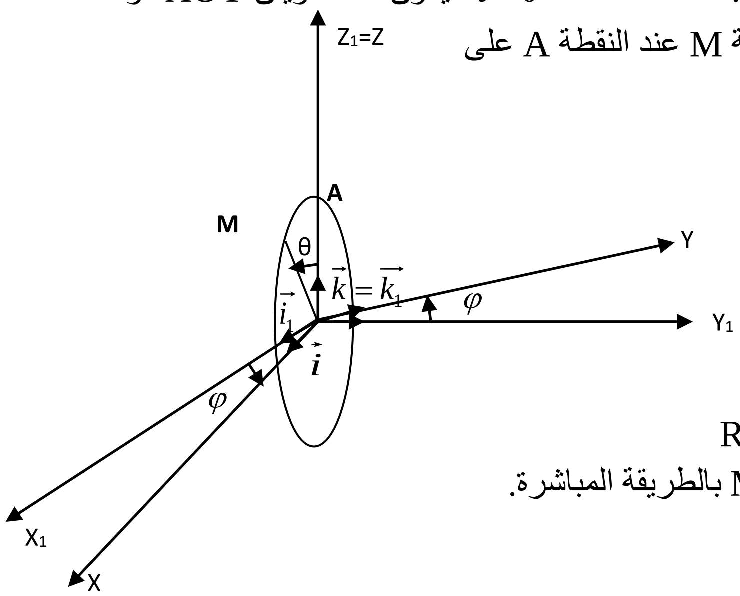
1- شعاع الموضع $\overrightarrow{OP}$
2- شعاع السرعة النسبية $\overrightarrow{V_r}(P)$
3- شعاع السرعة المكتسبة $\overrightarrow{V_e}(P)$
4- شعاع السرعة المطلقة $\overrightarrow{V_a}(P)$
5- أشعة التسارع النسبي $\overrightarrow{a_r}(P)$، المكتسب $\overrightarrow{a_e}(P)$ و كوريوليس $\overrightarrow{a_c}(P)$ و المطلق $\overrightarrow{a_a}(P)$

التمرين الثامن:

نعتبر المعلم المطلق $R_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ و المعلم النسبي R(OXYZ) بحيث مبدأيهما و المحورين O_1Z_1 و OZ يكونا متطابقين في كل لحظة. لتكن الزاوية φ المحصورة بين المحورين O_1X_1 و OX.

أي $(\vec{i_1},\vec{i})=\varphi(t)=\alpha t$ حيث α ثابت.

تتحرك نقطة مادية M في المستوي XOZ على مسار دائري معادلته: $x^2+z^2=1$ و يتحدد موضعها بالزاوية $(\overrightarrow{O_1Z_1},\overrightarrow{O_1M})=\theta(t)=\beta t$ حيث β ثابت. عند اللحظة $t=0$ يكون المستويان XOY و $X_1O_1Y_1$ متطابقين $(\varphi(t=0)=0)$. و تكون النقطة M عند النقطة A على المحور O_1Z_1 $(\theta(t=0)=0)$



1- ماهو شعاع الدوران الآني ل R بالنسبة ل R_1
2- أحسب السرعة و التسارع المطلق للنقطة M بالطريقة المباشرة.

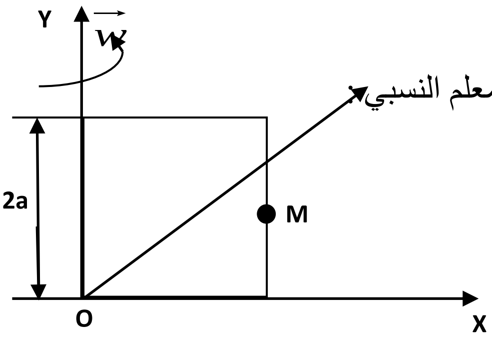
التمرين التاسع:

مربع طول ضلعه 2a يدور حول إحدى أضلاعه بسرعة زاوية ثابتة w. نقطة M تتحرك على الضلع المقابل وفق القانون: $z = a\sin\Omega t$

أحسب باستعمال قانون تركيب السرعات و التسارعات في المعلم النسبي

1) السرعة المطلقة

2) التسارع المطلق



التمرين العاشر:

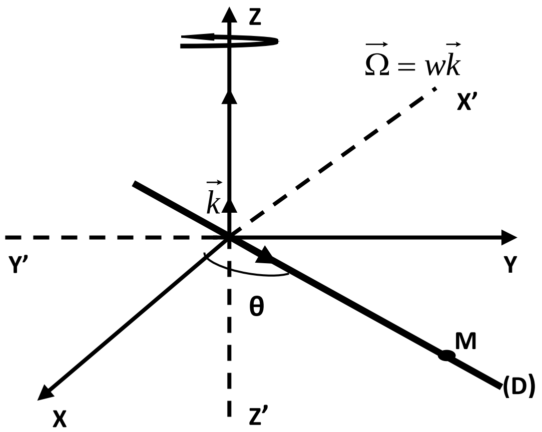
حلقة ذات أبعاد صغيرة جدا تعتبر كنقطة مادية M كتلتها m، تنزلق دون احتكاك على ساق (D). الساق (D) تدور في مستوي أفقي (XOY) حوا المحور العمودي (OZ) بسرعة زاوية $w = \dfrac{d\theta}{dt}$

حيث θ: زاوية الدوران $(\vec{i},\vec{u}_r)$، و $\vec{u}_r$ شعاع وحدة محمول على (D) (أنظر الشكل).

حركة النقطة المادية M على (D) تعطى بالعلاقة الزمنية : $r = r_0(1+\sin wt)$

حيث r_0 ثابت موجب و $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$.

نسمي الحركة النسبية لـM حركتها على المحور (D)، و الحركة المطلقة حركتها بالنسبة المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



حدد بالنسبة للحلقة، في القاعدة $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$

1- السرعة و التسارع النسبي؟

2- سرعة و تسارع الجر، و كذلك تسارع كوريوليس؟

التمرين الحادي عشر:

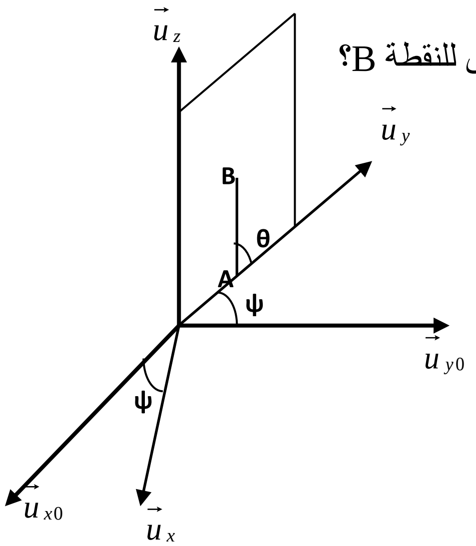
في المستوي $P(O,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ نضع قضيب AB طوله a،تقع النقطة A على المحور $(O,\vec{u}_y)$،

حيث $\overrightarrow{OA} = \mu\vec{u}_y$، و $(\vec{u}_y,\overrightarrow{AB}) = \theta$ (الشكل).

1- حدد في المستوي P سرعة و تسارع النقطة B؟

2- المستوي السابق P يدور حول المحور $(O,\vec{u}_z)$ بالنسبة للمعلم الثابت $R_0(O,\vec{u}_{x0},\vec{u}_{y0},\vec{u}_{z0})$

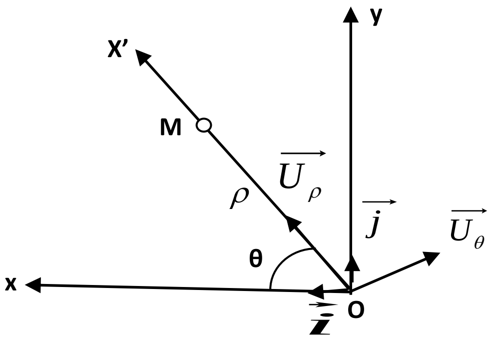
نضع $(\vec{u}_{y0},\vec{u}_{y})=\psi\vec{u}_{z}$



- حدد سرعة و تسارع الجر ، و كذلك تسارع كوريوليس للنقطة B؟

التمرين الثاني عشر:

تنتقل نقطة مادية M على رقاص الثواني لساعة مثبتة على جدار عمودي بتسارع ثابت a_0 (الشكل). في اللحظة t=0 النقطة المادية موجودة في مركز الساعة O (v_0=0) الذي يشير (0 ثانية). نعتبر R معلم الساعة على الجدار و المعرف ب R(Oxyz) معلم ثابت. $R'(O,\vec{u}_{\rho},\vec{u}_{\theta})$ معلم رقاص الثواني OX'. عند t=0, OX' يتطابق مع Oy. لتعريف مختلف الأشعة نستعمل الإحداثيات القطبية ل $M(\rho,\theta)$.



I- الدراسة في المعلم R'

1- ماهي طبيعة حركة M في المعلم R'.

2- أوجد اتجاه و طويلة شعاع الدوران اللحظي $\vec{w}_{R'/R}$.

3- حدد شعاع سرعة M : $\vec{V}_{M/R'}$

4- حدد المعادلة الزمنية لحركة M $\rho(t)$

5- بعد دقيقة تصل النقطة المادية إلى نهاية الرقاص الذي طوله 20cm. ماهي قيمة التسارع a_0؟

II- دراسة M في المعلم R

1- حدد حركة R'/R

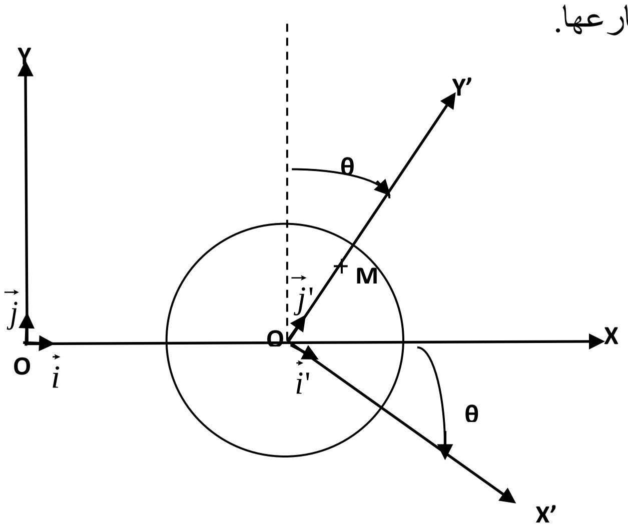
2- أعط معادلة الحركة $\theta(t)$.

3- باستعمال قانون تركيب السرعات و التسارعات. أعط عبارة شعاع السرعة $\vec{V}_{M/R}$ و شعاع التسارع $\vec{a}_{M/R}$ بدلالة a_0, w و t.

التمرين الثالث عشر:

تبدأ نقطة في الحركة بانتظام بسرعة $\vec{V}'$ على شعاع عجلة دراجة نصف قطرها R تتدحرج بسرعة ثابتة $\vec{V}$. إذا علمت أن النقطة انطلقت من محيط العجلة اتجاه مركزها و ذلك عندما كانت النقطة في أعلى وضع لها على اطار العجلة (الشكل)

عين حركة النقطة بحساب سرعتها و تسارعها.



التمرين الرابع عشر:

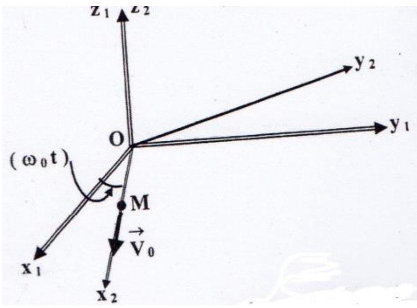
نعتبر المعلمين:

$R_1(O,x_1,y_1,z_1)$ و $R_2(O,x_2,y_2,z_2)$ المحوران (Oz_1) و (Oz_2) متطابقان في كل لحظة. المعلم R_2 يدور حول المحور (Oz_1) بسرعة زاوية w_0 ثابتة و موجبة $(w_0\rangle 0)$. تتحرك جزيئه M على المحور (Ox_2) بسرعة ثابتة $\vec{v}_0$ حيث $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}_2$.

في اللحظة الابتدائية عندما $(t=0s)$ لدينا: $OM=r_0=0$ و المحور (Ox_2) يكون متطابق مع المحور (Ox_1).

في اللحظة t عين:

1- شعاع سرعة الجزيئه M بالنسبة للمعلم الثابت R_1 باستعمال طريقتين مختلفتين؟
2- أشعة التسارعات النسبية، الجرية و الضافية (كوريوليس)، ثم استنتج تسارع الجزيئه M بالنسبة ل R_1.



التمرين الخامس عشر:

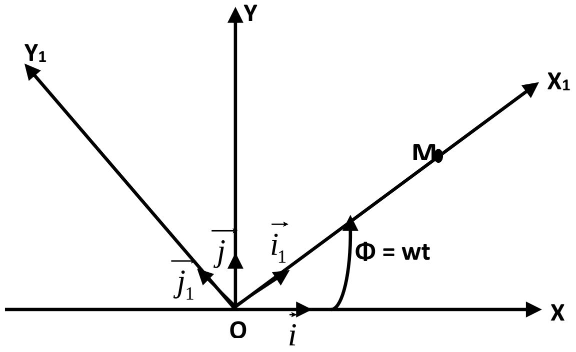
ليكن $R(O,X,Y)$ معلما مطلقا و المعلم $R_1(O, X_1,Y_1)$ في حركة دورانية منتظمة بسرعة زاوية w ثابتة حول المحور المشترك للمعلمين و العمودي عليهما (OZ) .

نقطة M تتحرك على المحور (OX_1) وفق العلاقة : $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{i_1}$

بحيث: $r(t) = be^{\frac{-t}{\tau}}$

b و τ ثابتان

1- أحسب سرعة النقطة M بالنسبة للمعلم R_1 أي : السرعة النسبية $\vec{V}_r$ أو $\vec{V}(M/R_1)$ و السرعة الجرية $\vec{V}_e$ أو $\vec{V}(M_{R_1/R})$.

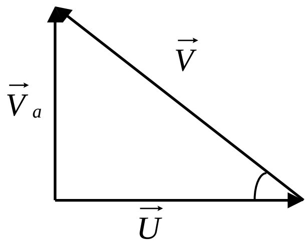


2- استنتج طويلة السرعة المطلقة $\left|\vec{V}_{M/R}\right| = \left|\vec{V}_a\right|$

3- أحسب الزوايا المحصورة بين $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{V}(M/R)$

حلول التمارين

التمرين الثاني:



- السرعة النسبية:

$$\vec{V}_a = \vec{U} + \vec{V}$$
$$V^2 = V_a^{\ 2} + U^2$$
$$V_a = \frac{l}{t}$$

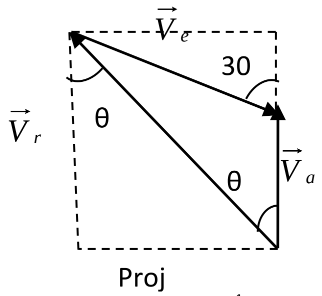
$V^2 = V_a^{\ 2} + U^2$ (théories de Fytharoth)

$$\Rightarrow V^2 = \frac{\ell^2}{t^2} + U^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{\ell^2}{t^2} + U^2}$$
$$V = 2{,}01 m/s$$

- الزاوية φ

$$tg\varphi = \frac{V_a}{u} \Rightarrow tg\varphi = \frac{\ell}{u.t}$$
$$tg\varphi = 0{,}13 \Rightarrow \varphi = 7{,}5°$$

التمرين الثالث:



$\vec{V_a}$ سرعة الطائرة بالنسبة للأرض موجهة نحو الشمال (السرعة المطلقة).

$\vec{V_e}$ سرعة الرياح في إتجاه الشمال الغربي بالنسبة للأرض بالنسبة للأرض.

$$\vec{V_e} = 150 km/h$$

$\vec{V_r}$ سرعة الطائرة بالنسبة للرياح $\vec{V_1} = 1000 km/h$

لدينا $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$ ....(1)

Projection de (1) sur l'axe $O.E$

$$\sin\theta = \frac{\left|\overrightarrow{projV_r}\right|}{\left|V_r\right|} \Rightarrow \left|\overrightarrow{projV_r}\right| = \left|\vec{V_r}\right|\sin\theta$$

$$\sin 30 = \frac{\left|\overrightarrow{projV_e}\right|}{\left|V_e\right|} \Rightarrow \left|\overrightarrow{projV_e}\right| = \left|\vec{V_e}\right|\sin 30$$

$$\sin\theta\left|\vec{V}_r\right| = \left|\vec{V_e}\right|\sin 30$$

$$\sin\theta = \frac{\left|\vec{V_e}\right|}{\left|\vec{V_r}\right|}\sin 30 \Rightarrow \sin\theta = \frac{150x0,5}{1000} = 0,07$$

$$\theta = 4,30°$$

التمرين السابع:

1- حساب شعاع الموضع $\overrightarrow{OP}$.

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = b\vec{i} + \ell\cos\psi\vec{i} + \ell\sin\psi\vec{j}$$

$$\vec{OP} = (b + \ell\cos\psi)\vec{i} + \ell\sin\psi\vec{j}$$

2- شعاع السرعة النسبية $\vec{V_r}(P)$:

$$\vec{V_r}(P) = \frac{d(\overrightarrow{OP})}{dt/R} = -\ell\dot{\psi}\sin\psi\vec{i} + \ell\dot{\psi}\cos\psi\vec{j} = \vec{V_r}$$

3- حساب شعاع السرعة المكتسبة $\vec{V_e}(P)$.

$$\vec{V_e} = \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt/R} + w \wedge \vec{OP}$$

$$= \vec{O} + \dot{\theta}\vec{i} \wedge \left[(b + \ell\cos\psi)\vec{i} + \ell\sin\psi\vec{j}\right]$$

$$\vec{V_e} = \ell\dot{\theta}\sin\psi\vec{k}$$

4- حساب السرعة المطلقة $\vec{V_a}$

$$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}$$

$$\vec{V_a} = -\ell\dot{\psi}\sin\varphi\vec{i} + \ell\dot{\psi}\cos\psi\vec{j} + \ell\dot{\theta}\sin\psi\vec{k}$$

5- حساب شعاع التسارع النسبي $\vec{a_r}$

$$\vec{a}_r=\frac{d\vec{V}_r}{dt/R}=(-\ell\,\ddot{\psi}\sin\varphi-\ell\,\dot{\psi}^2\cos\varphi)\vec{i}+(\ell\,\ddot{\psi}^2\cos\varphi+\ell\,\dot{\psi}^2\sin\psi)\vec{j}$$

6- حساب التسارع المكتسب $\vec{a}_e$

$$\begin{aligned}\vec{a}_e&=\frac{d^2\overrightarrow{O_1O}}{dt2/R}+\frac{d\vec{w}}{dt}\wedge\overrightarrow{OP}+\vec{w}\wedge(\vec{w}\wedge\overrightarrow{OP})\\&=\vec{O}+\ddot{\theta}\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP}+\dot{\theta}\vec{i}\wedge(\dot{\theta}\vec{i}\wedge\overrightarrow{OP})\\&=\ell\,\theta\sin\psi\vec{k}+\vec{\theta}\vec{i}\wedge(\ell\,\theta\sin\psi\vec{k})\\&=\ell\,\ddot{\theta}\sin\psi\vec{k}-\dot{\theta}^2\ell\sin\psi\vec{j}\\\vec{a}_e&=-\ell\,\dot{\theta}^2\sin\psi\vec{j}+\ell\,\ddot{\theta}\sin\psi\vec{k}\end{aligned}$$

حساب تسارع كوريوليس:

$$\begin{aligned}\vec{a}_c&=2\vec{w}\wedge\vec{V}_r=2\dot{\theta}\vec{i}\wedge(-\ell\,\dot{\psi}\sin\psi\vec{i}+\ell\,\dot{\psi}\cos\psi\vec{j})\\\vec{a}_c&=2\ell\,\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c=\begin{cases}-\ell\,\ddot{\psi}\sin\psi-\ell\,\dot{\psi}^2\cos\psi\\\ell\,\ddot{\psi}\cos\psi-\ell\,\dot{\psi}^2\sin\psi-\ell\,\dot{\theta}^2\sin\psi\\\ell\,\ddot{\theta}\sin\psi+2\ell\,\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi\end{cases}$$

التمرين الثامن:

1- شعاع الدوران الآتي لـ R بالنسبة لـ R_1

$$\vec{w}=\frac{d\varphi}{dt}\vec{k}=\frac{d}{dt}(\alpha t)\vec{k}=\alpha\vec{k}$$

2- السرعة $\vec{V}_a$

$$\overrightarrow{O_1M}=OM=\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{k}=\sin(\beta t)\vec{i}+\cos(\beta t)\vec{k}$$

$$\vec{V}_a=\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/R_1}=\frac{d}{dt}\left[\sin(\beta t)\vec{i}+\cos(\beta t)\vec{k}\right]/R_1$$

$$\vec{V}_a=\beta\cos\beta t\vec{i}+\sin(\beta t)\frac{d\vec{i}}{dt}-\beta\sin\beta t\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt}=\vec{w}\wedge\vec{i}=\alpha\vec{k}\wedge\vec{i}=\alpha.\vec{j}$$

$$\vec{V}_a=\beta\cos\beta t\vec{i}+\alpha\sin\beta t\vec{j}-\beta\sin\beta t\vec{k}$$

- التسارع γ_a

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d\overrightarrow{Va}}{dt/R_1} = -\beta^2 \sin\beta t\vec{i} + \beta\cos(\beta t)\frac{d\vec{i}}{dt} + \alpha\beta\sin\beta t\vec{j} + \alpha\sin(\beta t)\frac{d\vec{j}}{dt} - \beta^2\sin\beta t\vec{k}$$
$$\vec{\gamma}_a = -\beta^2 \sin\beta t\vec{i} + \alpha\beta\cos(\beta t)\vec{j} + \alpha\beta\cos\beta t\vec{j} - \alpha^2\sin\beta t\vec{i} - \beta^2\cos\beta t\vec{k}$$
$$\vec{\gamma}_a = -(\alpha^2+\beta^2)\sin\beta t\vec{i} + 2\alpha\beta\cos\beta t\vec{j} + \beta^2\cos\beta t\vec{k}$$

التمرين العاشر:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r_0(1+\sin wt).\vec{u}_r$$

1- السرعة النسبية $\vec{V}_r$ تعطى كما يلي:

$$\vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\vec{U}_r = cte} = \frac{dr}{dt}.\vec{U}_r = r_0 w\cos(wt)\vec{U}_r$$

التسارع النسبي

$$\vec{a}_r = (\frac{d\vec{V}_r}{dt})_{\vec{U}r=cte} = -r_0 w^2\sin(wt)\vec{U}_r$$

2- سرعة الجر

$$\overrightarrow{V_e} = (\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt})_{r=cte} = r.\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} = r_0 w(1+\sin wt)\overrightarrow{U_\theta}$$

تسارع الجر

$$\vec{ae} = \frac{d\vec{V}_e}{dt})_{r=cte} = r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{U_r} = -rw^2(1+\sin wt)\overrightarrow{U_r}$$

- تسارع كوريوليس:

$$\gamma_c = 2\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{V_r}$$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2r_0 w^2\cos(wt)\vec{k}\wedge\overrightarrow{U_r}$$
$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2r_0 w^2\cos(wt)\overrightarrow{U_\theta}$$

التمرين الحادي عشر:

1- في المستوى P : سرعة B

شعاع الموضوع:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}=\mu\overrightarrow{U_y}\\ \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l}a\cos\theta\overrightarrow{U_y}\\ a\sin\theta\overrightarrow{U_z}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\overrightarrow{OB}=(\mu+a\cos\theta)\overrightarrow{U_y}+a\sin\theta\overrightarrow{U_z}$$

- سرعة B في النقطة P هي:

$$\overrightarrow{V}_{r\,(\frac{B}{P})}=\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}=(\mu^{'}-a\dot{\theta}\sin\theta)\overrightarrow{U_y}+a\dot{\theta}\sin\theta\overrightarrow{U_z}$$

$$\vec{\gamma}_{(\frac{B}{P})}=\frac{d\vec{V}}{dt}=(\mu^{''}-a\dot{\theta}^2\cos\theta-a\ddot{\theta}\sin\theta)\overrightarrow{U_y}+a\ddot{\theta}\cos\theta-a\dot{\theta}^2\sin\theta)\overrightarrow{U_z}$$

2- سرعة الجر:

المستوى P في حركة دورانية حول المحور $(\overrightarrow{OU_z})$ للمعلم الثابت R_0 :

$$\vec{w}=\vec{w}_{(\frac{P}{R_0})}=\frac{d\psi}{dt}\overrightarrow{U_z}=\dot{\psi}\overrightarrow{U_z}$$

$$\overrightarrow{V_e}(B)=\vec{w}\wedge\overrightarrow{OB}=\dot{\psi}\overrightarrow{U_z}\wedge\left[(\mu+a\cos\theta)\overrightarrow{U_z}+a\sin\theta\overrightarrow{U_z})\right]$$
$$\overrightarrow{V_e}(B)=-(\mu+a\cos\theta)\dot{\psi}\overrightarrow{U_x}$$

$$\overrightarrow{a_e}(B)=\frac{d\overrightarrow{V_e}}{dt}\text{ avec (}\mu\text{ et }\theta\text{ constantes)}$$

$$=-(\mu+a\cos\theta)(\ddot{\psi}\overrightarrow{U_x}+\dot{\psi}^2\ \vec{U}_y)$$

- تسارع كوريوليس

$$\overrightarrow{\gamma_c}(B)=2\vec{r}\wedge\vec{V}r$$
$$=2\dot{\psi}\overrightarrow{U_z}\wedge\left[(\mu^{'}-a\dot{\theta}\sin\theta)\overrightarrow{U_y}+a\dot{\theta}\cos\theta\overrightarrow{U_z}\right]$$

$$\overrightarrow{\gamma_c}(B)=-2\dot{\psi}(\dot{\mu}-a\dot{\theta}\sin\theta)\vec{U}_x$$

الفصلV : تحريك النقطة مادية

Dynamique du Point Matériel

I- مقدمة:

إذا كان علم الحركيات يدرس (يصف) حركة جسم ما (نقطة مادية) بدلالة الزمن، دون التطرق لمسببات الحركة، فإن علم التحريك يدرس (يعرف) حركة الجسم ومسببات تلك الحركة أي تحليل العلاقة بين القوة وتغيرات حركة الجسم.

II- القوانين الثلاثة لنيوتن:

1- القانون الأول لنيوتن: (1ère Lois de Newton) مبدأ العطالة (Principe d'inertie):

إذا كان جسم مادي غير خاضع لأي قوة فإنه:

- إما في حالة حركة مستقيمة منتظمة (سرعة ثابتة).
- إما في حالة سكون إذا كان من البداية ساكنا.

نص المبدأ: - الجملة المعزولة (الحرة) تتحرك وفق مسار مستقيم بسرعة ثابتة.

- الجسيمات المتسارعة ليست حرة ولا معزولة إنما خاضعة بدون شك لقوة.

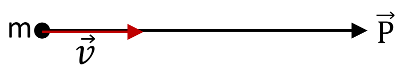
بما أن الحركة مفهوم نسبي، فلا بد من تحديد المعلم الذي تنسب له حركة الجسيمة الحرة: هذا المعلم بدوره ينبغي أن يكون حرا (لذا يسمى بمعلم غاليلي أو عطالي وفيه تنتقل الجسيمة بسرعة ثابتة).

2- القانون الثاني لنيوتن: (2éme Lois de Newton):

أ)- كمية الحركة (Quantité de Mouvement): كمية الحركة لجسم ما كتلته m وسرعته v هي:

$$\vec{P} = m.\vec{v} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (V-1)$$

(حيث $\vec{P}$ له نفس إتجاه $\vec{v}$)



الشكل V-1: كمية الحركة

يصاغ مبدأ العطالة بإدخال مفهوم كمية الحركة كمايلي:

- الجسم الحر يتنقل في معلم غاليلي بكمية حركة ثابتة.
- كمية حركة الجسم المعزول أو الحر تكون ثابتة أو محفوظة خلال حركته

$$\vec{P} = m.\vec{v} = Cte \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V-2)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{o}$$

ب)- المبدأ الأساسي للتحريك (Principe Fondamental de la Dynamique P.F.D):

التغير النسبي (بالنسبة للزمن) في كمية الحركة لجسم ما يساوي محصلة القوى المؤثرة على هذا الجسم المتحرك.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

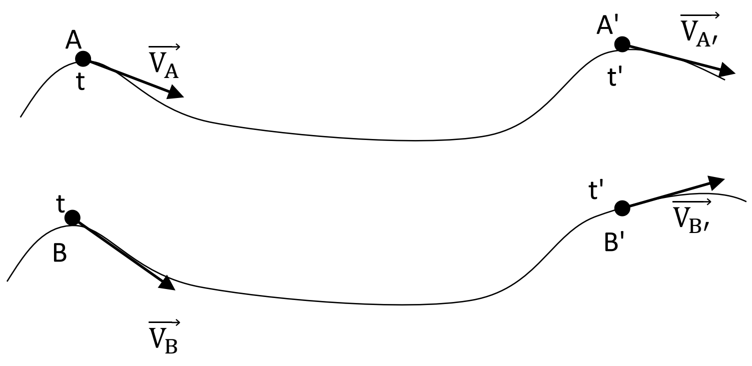
- إذا كانت كتلة الجسم ثابتة فإن المبدأ الأساسي للتحريك يصبح:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \vec{F} = m\vec{\gamma} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V-3)$$

- إذا كانت محصلة القوى معدومة $\vec{F} = \vec{o}$ فإن التسارع $\vec{\gamma} = \vec{o}$ وبالتالي حركة الجسم تكون عطالية $(\vec{v} = Cte)$ (القانون الأول حالة لنيوتن هو حالة خاصة من القانون الثاني).

جـ مبدأ إنحفاظ كمية الحركة:

نفترض وجود جسيمتين m_2, m_1 حرتين غير خاضعتين إلا للتأثيرات المتبادلة بينهما



الشكل 2-V: مبدأ انحفاظ كمية الحركة

بما أن الجملة معزولة أي كمية الحركة ثابتة

$$\vec{P}_1(t) + \vec{P}_2(t) = \vec{o}$$

أي أن كمية الحركة في t تساوي كمية الحركة في اللحظة `t (يمكن التحقق منها تجريبيا)

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{P}_A + \vec{P}_B = \vec{P}_{A`} + \vec{P}_{B`} \Rightarrow \vec{P}_{A`} - \vec{P}_A = -(\vec{P}_{B`} - P_B)$$

$$\Delta\vec{P}_A = -\Delta\vec{P}_B \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (V-4)$$

* أثناء تفاعل جسمين (كتلتين) تكون كمية الحركة التي يفقدها الجسم A خلال مجال زمني Δt مساوية لكمية الحركة التي يكتسبها الجسم الثاني خلال نفس المجال الزمني (تبادل في كمية الحركة).

- إذا كان عدد n من الجسمات في حالة تأثير متبادل في جملة معزولة

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots \dots\dots\dots + \vec{P}_n = Cte \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (V-5)$$

3- القانون الثالث لنيوتن (3éme Loi de Newton) (مبدأ الفعل ورد الفعل):

حسب مبدأ انحفاظ كمية الحركة لجملة معزولة متكونة من جسمين m_1،m_2 فإن

$$\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt} \begin{cases} \frac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{F}_1 \\ \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (V-6)$$

$\vec{F}_1$: القوة المؤثرة على m_1 والناتجة عن التفاعل مع m_2

$\vec{F}_2$: لقوة المؤثرة على m_2 والناتجة عن التفاعل مع m_1

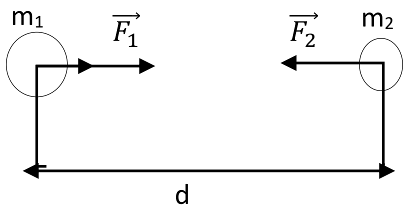
تسمى إحدى القوتين بالفعل والأخرى برد الفعل.

III- قوانين القوى (Les Lois de Force):

1- قوانين القوى *المتبادلة* (Force d’interaction à distance):

أ) قانون الجذب العام (La Force de gravitation Universelle) :

قانون الجذب العام لنيوتن الذي يفسر قوى التجاذب بين جسمين ذي كتلتين m_1 و m_2 تفصل بينهما مسافة d حيث *تنشأ بينهما قوتي تجاذب* $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$



الشكل V-3: قانون الجذب العام لنيوتن

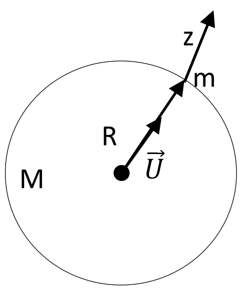
$$\vec{F}_1 = \vec{F} = G\,\frac{m_1 m_2}{d^2}.\vec{u}$$

$$\vec{F} = G\,\frac{m_1 m_2}{d^2}.\vec{u} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V-7)$$

حيث G ثابت $G = 6{,}67.10^{-11}\mathrm{m^3Kg^{-1}s^{-2}}$

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

*** قوى الثقل (Champ de pesanteur):** هي قوة الجذب من جسم موجود على سطح الأرض والأرض



الشكل IV-4: قوة الجذب

$$\vec{F}_{Mm} = \vec{F}_m = -G\,\frac{m\,M}{R^2}.\vec{u} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V-8)$$

نصف قطر الأرض R= 6400Km

كتلة الأرض M

كتلة الجسم m

قوة الثقل $\vec{F} = m.\vec{g}_0$

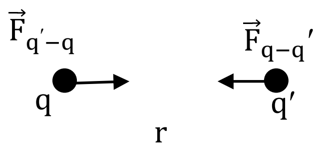
$$\vec{F} = \vec{P} \Longrightarrow G\,\frac{M}{R^2}.\vec{u} =.\vec{g}_0$$

- إذا كان جسم موجود على مسافة Z من سطح الأرض

$$\vec{g} = \vec{g}_0\,\frac{R^2}{(R+Z)^2}$$

ب- القوى الكهربائية (Champ Electrique):

* قانون كولون



الشكل V-5: قانون كولون

هي القوى المتبادلة بين شحنتين q و `q تفصلهما مسافة r

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9(\text{ثابت})$$

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q\,q`}{M^2}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (V-9)$$

$$|\vec{F}| = q\,\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{q`}{r^2}\vec{u}$$

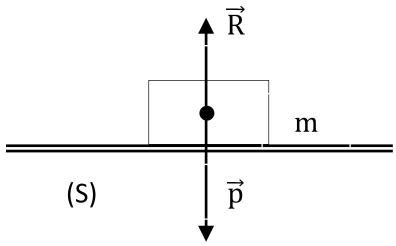
ج- القوى المغناطيسية (Champ Magnétique) :

تنشأ عن تفاعل تيارين كهربائيين أو أجسام ممغنطة طبيعيا.

IV- قوى التلامس (Les Forces de Contacte):

أ) رد فعل سطح (Réaction du support):

عند التوازن $\sum \vec{F} = \vec{0}$



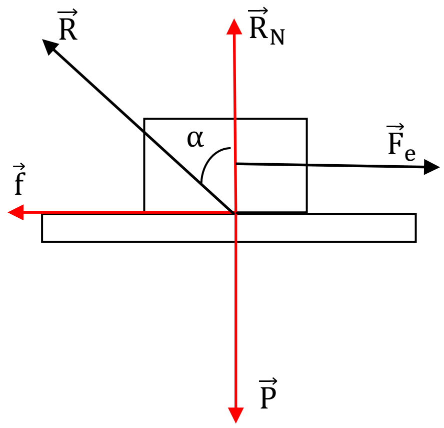
الشكل V-6: رد فعل سطح

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{R} = -\vec{P} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V-10)$$

القوة$\vec{R}$ الناجمة عن جسم mموضوع فوق سطح أفقي تسمى رد فعل السطح

ب) قوى الإحتكاك (Les Forces de frottement):

*** قوة إحتكاك جسم صلب:**



الشكل V-7: قوى الاحتكاك

القوى المطبقة:

$\vec{R}_N$: قوة السطح (رد فعل السطح).

$\vec{F}_e$: قوة الجر

$\vec{f}$: قوة الإحتكاك (رد الفعل المماس)

α : زاوية الإحتاك

$\vec{P}$: قوة الثقل $\quad \vec{R} = \vec{R}_N + \vec{f}$

$$\vec{f} = \mu . \vec{R}_N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V-11)$$

$$f = \mu . R_N$$

$$\vec{f} = \vec{R}_T$$

μ : معامل الإحتكاك يتعلق بطبيعة السطح (Coefficient de Frottement)

حيث :

$$tg\alpha = \frac{f}{R_N} = \mu \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (V-12)$$

*** قوى الإحتكاك الموانع *(Frottement Fluide)*:**

تعطى قوى الإحتكاك في الموانع (غازات أو سوائل) لجسم ينتقل فيها سرعة ضعيفة نسبيا بالعلاقة

$$\vec{F} = -K\,\mu . \vec{v} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (V-13)$$

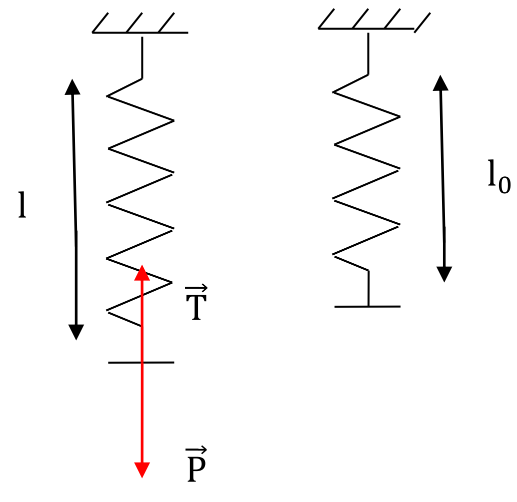
قوة Stocks

K: معامل مرتبط بالشكل الهندسي للجسم (في حالة جسم كروي $K = 6\pi R$.

μ : معامل اللزوجة (خاص بالموانع).

$\vec{v}$: سرعة الجسم داخل الموائع

ج) القوى المرنة (Les Forces Elastique) :



الشكل 8-IV: قوى المرونة

$$\vec{T} = -K(\ell - \ell_0)\vec{u} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (V-14)$$

K: ثابت مرونة النابض

T: قوة مرونة النابض

V- عزم قوة (Moment d'une Force):

1- عزم قوة بالنسبة لنقطة :

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{F})/O = \overrightarrow{O\mathcal{M}} \wedge \vec{F} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (V-15)$$

عزم قوة $\vec{F}$ المطبقة في نقطة M بالنسبة لنقطة O هو العزم بالنسبة لنقطة مقدار شعاعي $\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}) = \vec{F}.d$

2- عزم قوة بالنسبة لمحور:

عزم قوة $\vec{F}$ بالنسبة لمحور (Δ) يمر بالنقطة O هو المقدار الجبري لمسقط العزم بالنسبة لنقطة على المحور (Δ)

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{F})/(\Delta) = \vec{\mathcal{M}}(\vec{F})/O\,.\,\vec{u} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (V-16)$$

VI- العزم الحركي (Le moment Cinétique):

1- العزم الحركي بالنسبة لنقطة وبالنسبة لمحور:

- يعرف العزم الحركي بالنسبة لنقطة 0 لجسم كتلته m ويتحرك بسرعة v بالعلاقة

$$\vec{L}/O = \overrightarrow{O\mathcal{M}} \wedge \vec{P} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (V-17)$$

$\vec{P} = m\vec{v}$ كمية الحركة

- العزم الحركي بالنسبة لمحور

$$L/(\Delta) = \vec{L}/O\,.\,\vec{u} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (V-18)$$

في الحالة العامة حيث

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{P} = mv_x\vec{i} + mv_y\vec{j} + mv_z\vec{k}$$

نحصل على عبارة العزم الحركي التالية:

$$\vec{L}/O = \overrightarrow{O\mathcal{M}} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & -\vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{L}/O = \begin{vmatrix} yP_z - zP_y \\ zP_x - xP_z \\ xP_y - yP_x \end{vmatrix}$$

*** في حالة حركة مستوية (XOY) ($P_z = 0$):**

إتجاها $\vec{L}/O = Cte$ $\quad\quad\quad$ $\vec{L}/O \perp (XOY)$

$\vec{L}/O = (xP_y - yP_x)k$ له إتجاه ثابت

*** في حالة حركة دائرية:**

$$\vec{L}/O = \vec{r} \wedge \vec{P}$$

$$\vec{L}/O \quad = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$\vec{L}/O = r\vec{u}_r \wedge m(r\omega\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{L}/O = mr^2\omega(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) = mr^2\omega\vec{k} = mr^2\vec{\omega}$$

*** في حالة حركة منحنية:**

$$\vec{L}/O = \vec{r} \wedge \vec{P} = r\vec{u}_r \wedge m(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r.\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta)$$

$$\vec{L}/O = mr^2\omega\ (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{L}/O = mr^2\omega\vec{k}$$

2- نظرية العزم الحركي:

$$\vec{L}/O = \overrightarrow{O\mathcal{M}} \wedge \vec{P}$$

$$\frac{d\,\vec{L}/O}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{O\mathcal{M}} \wedge \vec{P}\right] = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{O\mathcal{M}} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\frac{d\,\vec{L}/O}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{O\mathcal{M}} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} + \overrightarrow{O\mathcal{M}} \wedge \vec{P}$$

$$\frac{d\,\vec{L}/O}{dt} = \overrightarrow{O\mathcal{M}} \wedge \vec{F}$$

$$\frac{d\,\vec{L}/O}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{F})/O \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V-19)$$

التغير الزمني للعزم الحركي بالنسبة لنقطة O هي عزم محصلة القوى الخارجية المؤثرة على هذا الجسم بالنسبة لنفس النقطة.

VII- القوة المركزية (Forces Centrales) :

عندما تكون

$$\frac{d\,\vec{L}/O}{dt} = 0 \qquad \Leftarrow \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{F})/O = \vec{0}$$

$$\vec{L}/O = Cte$$

عندما يكون العزم الحركي لنقطة مادية ثابت تكون عزم القوى المطبقة يساوي صفر أي:

- $\vec{v} = Cte \Rightarrow \quad \vec{P} = Cte \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{0}$ يعني النقطة المادية معزولة
- إذا كانت القوة $\vec{F}$ متجهة نحو النقطة O فإن $\vec{F} \parallel \overrightarrow{O\mathcal{M}}$ فإن هذه القوة تسمى قوة مركزية

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{F})/O = \overrightarrow{O\mathcal{M}} \wedge \vec{F} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \quad \vec{L}/O = \ Cte \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (V-20)$$

يعني أن الحركة تتم في المستوي.

تمارين (Exercices)

التمرين الأول:

تتحرك نقطة مادية M كتلتها m تحت تأثير القوة $\vec{F}$

- أحسب سرعة النقطة المادية و عبر عن معادلة حركتها في الحالات التالية:

1- $\vec{F} = \vec{F_0}\sin wt$ مع $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$ و $\vec{V}(0) = \vec{0}$

2- $\vec{F} = -K\vec{V}$ مع $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$ و $\vec{V}(0) = \vec{V_0}$

3- $\vec{F} = -K\overrightarrow{OM}$ مع $\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OM_0}$ و $\vec{V}(0) = \vec{V_0} // \overrightarrow{OM_0}$

حيث $\vec{F}_0$ شعاع ثابت، w و K ثوابت موجبة.

التمرين الثاني:

نقطة مادية M كتلتها m موجودة على المستوي الأفقي (OXY) هذه النقطة المادية توجد تحت تأثير قوة جاذبة $\vec{F} = -K\overrightarrow{OM}$. حيث K ثابت موجب، في اللحظة t=0s تكون النقطة M عند A(a,0) و لها سرعة ابتدائية $\vec{V}_0$ صانعة زاوية (α) مع المحور (OX). أين (0<α<π/2).

1) أ) أكتب المعادلات التفاضلية للحركة.

ب) برهن أن المعادلات التفاضلية السابقة تقبل الحلول الآتية:

$$x(t) = A\cos wt + B\sin wt$$
$$y(t) = C\cos wt + D\sin wt$$

حيث $w = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$

ج) عين الثوابت A, B, C و D

2) ماهي معادلة المسار في حالة (α=π/2) .

أعطي طبيعته.

3) عين قيمة الكتلة m حتى تكون الحركة دائرية. ت.ع: V_0=5m/s ; a=2m ; K=0,025

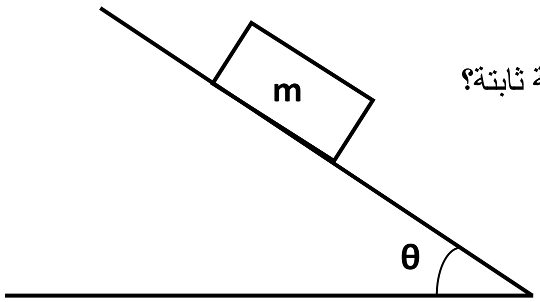
التمرين الثالث:

قذف جسم كتلته m بسرعة ابتدائية $\vec{V_0}$ و بزاوية ميل عن الأفق تساوي α. يتحرك الجسم تحت تأثير ثقله و مقاومة الهواء $\vec{R}=-Km g\vec{V}$.

- عين أعلى ارتفاع h للجسم ثم استنتج البعد الأفقي الذي يبلغ عنده الجسم أعلى وضع له.

التمرين الرابع:

يبين الشكل جسما ثقله 8N موضوعا على مستوي خشن مائل ب °35= θ. معامل الاحتكاك الحركي هو 0.40، نأخذ $g=10ms^{-2}$



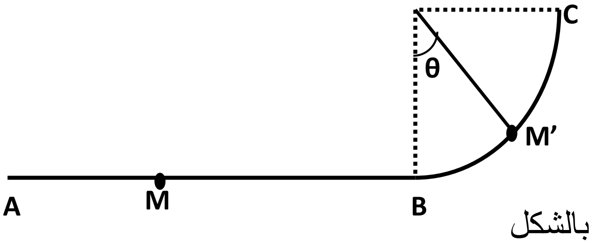
1- ماهي زاوية الميل اللازمة لكي ينتقل الجسم بسرعة ثابتة؟
2- ماهي القوة الناظمية عند ميل °35= θ ؟
3- ماهي قوة الاحتكاك الحركي عند °35= θ؟
4- ماهو التسارع عند ميل °35= θ؟

التمرين الخامس:

تتحرك نقطة مادية على المسلك ABC حيث أن: الطريق AB خشن معامل احتكاكه f=0.2 طوله l=11m ، أما الطريق BC أملس (عبارة عن ربع دائرة مركزها O و نصف قطرها r=5m)

1. أوجد قوة الاحتكاك و تسارع الحركة على AB .
2. أوجد السرعة عند B .
3. باستعمال المبدأ الأساسي للتحريك جد السرعة عند 'M، استنتج السرعة عند النقطة C.
4. أوجد رد الفعل عند النقطة 'M .

$(m=10\ Kg,\ v_A=12m/s)$



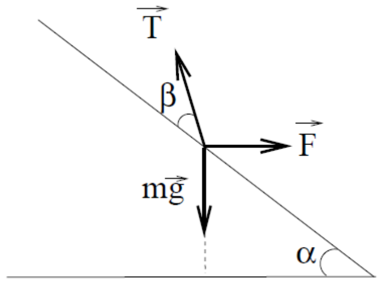
تنزلق نقطة مادية M بدون احتكاك على السطح الممثل بالشكل المقابل ابتداء من النقطة A بدون سرعة ابتدائية.

1- أحسب سرعة M بدلالة θ, h و R.
2- أحسب رد فعل السطح $\vec{N}$
3- ماهي أدنى قيمة للارتفاع h بحيث ترسم النقطة M مسارا مغلقا (من M إلى B).

التمرين السادس:

تخضع كتلة m لثلاث قوى ممثلة على الشكل، $\vec{F}$: قوة أفقية، تعطى $\alpha=\frac{\pi}{4}, \beta=\frac{\pi}{6}$

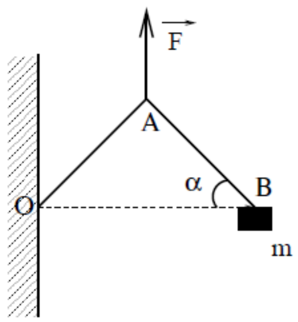
أحسب طويلة القوى $\vec{F}$ و $\vec{T}$ بدلالة m و g من أجل أن تكون محصلة القوى معدومة.



التمرين السابع:

ليكن حبل مهمل الكتلة و عديم الامتطاط معلق من النهاية الأولى بجدار في النقطة O و توجد بنهايته الحرة كتلة m على الأرض. يقوم شخص بشد الحبل في نقطة A الواقعة في الوسطOA=AB بقوة $\vec{F}$ عمودية على OB (انظر الشكل) , الحبل AB يصنع زاوية $\alpha=10^{\circ}$ مع المستقيم OB، قبل أن تتحرك الكتلة m تكون قيمة $\|\vec{F}\|=340N$، مع العلم أن الحبل و القوة $\vec{F}$ يوجدان معا في المستوي الشاقولي (تعطى $\cos 10=0{,}98; \sin 10=0{,}17$)

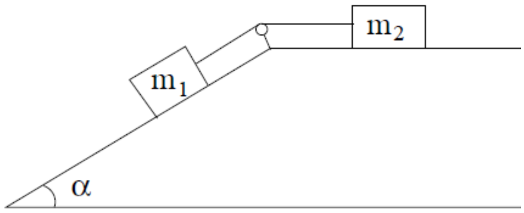
أحسب قيمة القوة المطبقة من طرف الحبل على الكتلة m , هل هذه القوة أقل أو تساوي أو أكبر من $\|\vec{F}\|$.



التمرين الثامن:

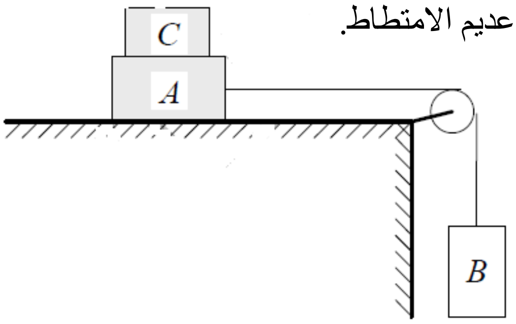
كتلتين m_1, m_2 مرتبطتين بحبل مهمل الكتلة و عديم الامتطاط و الذي يمر عبر بكرة مهملة الكتلة (كما هو موضح في الشكل)، الجملة موضوعة على مستويين، مستوي مائل يصنع زاوية α مع الأفق ومستوي أفقي، تترك الجملة حرة بدون سرعة ابتدائية.

1- باعتبار قوى الاحتكاك مهملة، أحسب: تسارع الجملة وتوتر الحبل؟
2- نفرض وجود احتكاك بين الكتلة m_1 و المستوي المائل، معامل الاحتكاك المحرك μ_d، نلاحظ أن الجملة تنزلق، أحسب: تسارع الجملة وتوتر الحبل؟



التمرين التاسع:

كتلتا الجسمين A و B على (الشكل) هما على التوالي 10Kg و 5Kg. معامل الاحتكاك لـ A مع الطاولة هو 0,20. نهمل كتلة البكرة كما نفترض الخيط مهمل الكتلة و عديم الامتطاط.



- أوجد الكتلة الأصغرية لـ C التي تمنع A من التحرك.
- أحسب تسارع الجملة إذا رفعنا C.

التمرين العاشر:

توضع كرة نصف قطرها R=2m و مركزها O على مستوى أفقي. تنزلق جسيمة كتلتها m من السكون تحت تأثير ثقلها من النقطة M_0 الواقعة في أعلى نصف الكرة.

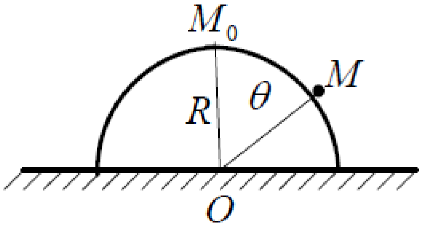
1- اكتب المعادلة التفاضلية لحركة هذه الجسيمة أثناء انزلاقها علما أن معامل الاحتكاك الانزلاقي على سطح الكرة هو α.

2- **بإهمال الاحتكاك:**

أ- بين أن السرعة المكتسبة عند النقطة M المعرفة بالزاوية $(MO,OM_0=\theta)$ تعطى بالعلاقة
$$v=\sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}$$

ب- استنتج عندئذ مقدار الزاوية θ_0 التي من أجلها تغادر الجسيمة سطح الكرة، ناقش النتيجة,

ج- أحسب السرعة v_0 الموافقة.



3- عند مغادرة الجسيمة النقطة M بالسرعة v_0 يطلب:

أ- ايجاد السرعة v اللحظية للحركة بدلالة g, R, v_0, θ_0, t.

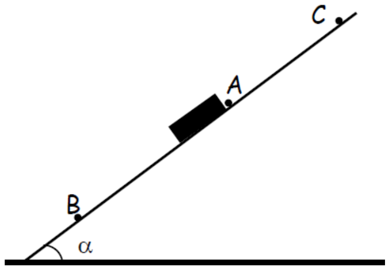
ب- شدتي القوة المماسية و القوة الناظمية.

التمرين الحادي عشر:

جسم صلب S نعتبره نقطة مادية، كتلته $m=0.1Kg$، ينزلق الجسم على مستوي مائل الذي يصنع زاوية $\alpha=20°$ مع السطح الأفقي

1) يطلق الجسم من النقطة A بدون سرعة ابتدائية. باعتبار قوى الاحتكاك مهملة، حدد طبيعة حركة الجسم S (برر إجابتك)
2) أحسب الزمن الذي يستغرقه الجسم ليصل الى النقطة B، حيث $AB=2m$.
3) نعتبر هذه المدة $t=1.3s$، و باعتبار وجود قوى الاحتكاك حيث معامل الاحتكاك الحركي μ_g :
   أ) عين القوى المؤثرة على الجسم S في هذه الحالة.
   ب) استنتج معامل الاحتكاك μ_g.
4) الجسم الان ينطلق من النقطة B الى النقطة A بسرعة $3m/s$
   -حدد موضع النقطة C أين تنعدم سرعة الجسم :
   أ) بإهمال قوى الاحتكاك.
   ب) بوجود قوة احتكاك بمعامل $\mu_g=0.11$.

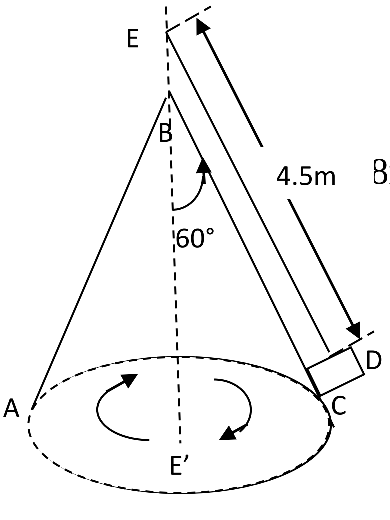
(بأخذ $g=9.81\ m/s^2$)



التمرين الثاني عشر:

ينتقل جسم D كتلته 5.5Kg بدون احتكاك على سطح مخروط ABC (الشكل أسفله), وذلك بدورانه حول المحور EE’ بسرعة زاوية 10tours /mn. أحسب :

أ- السرعة الخطية على السطح.
ب- رد فعل السطح على الجسم.
ج- توتر الخيط.
د- السرعة الزاوية اللازمة لكي ينعدم رد فعل المستوي. نأخذ $8ms^{-1}$



التمرين الثالث عشر:

يعطى شعاع الموضع لجسم كتلته 6Kg :

$$\vec{r} = (3t^2 - 6t)\vec{i} + (-4t^3)\vec{j} + (3t+2)\vec{k}(m)$$

أوجد:

1- القوة $\vec{F}$ المؤثرة على الجسم؟
2- عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للمبدأ؟
3- كمية الحركة $\vec{p}$ للجسم و عزمه الحركي بالنسبة للمبدأ؟
4- تأكد أن $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ و أن $\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt}$؟

التمرين الرابع عشر:

تتحرك نقطة مادية (كتلتها m) على مسار دائري أفقي نصف قطره R و مركزها « O »

الكتلة m متصلة بوضعية ثابتة A بواسطة خيط AM طوله l و غير قابل للامتداد. أثناء الحركة AM يشكل الزاوية α مع المحور العمودي OA

1- أوجد الزاوية α و توتر الخيط T بدلالة m, g, l, w حيث أنw تمثل السرعة الزاوية للكتلة المتحركة.
2- أحسب كمية الحركة
3- استنتج العزم الحركي بالنسبة للنقطة A
4- أحسب عزم محصلة القوى المؤثرة على الكتلة ثم تحقق من نظرية العزم الحركي.

التمرين الخامس عشر:

لتكن نقطة M كتلتها m تتحرك في وسط مائع، تجذب النقطة M نحو نقطة ثابتة O بقوة من الشكل:

$$\vec{F}=-K\overrightarrow{OM}$$

ومن جهة أخرى تخضع هذه النقطة إلى قوة مقاومة ناتجة عن الوسط من الشكل:

$$\vec{f}=-\alpha\vec{v}$$

حيث α و K ثابتان موجبان.

1- أحسب $\frac{d\vec{L}}{dt}$ ($\vec{L}$ يمثل العزم الحركي بالنسبة ل O)
2- بين أن طويلة العزم الحركي هي دالة متناقصة بالنسبة للزمن ($\vec{L}=L\vec{u}$ مع $\vec{u}=\overrightarrow{Cte}$).
3- بين أن الحركة مستوية.
4- أكتب المعادلات التفاضلية للحركة.
5- أعطي الحلول في حالة إهمال قوة مقاومة الوسط، استنتج معادلة المسار علما أن في اللحظة t=0s توجد النقطة M في الموضع A(a, 0) وسرعتها الابتدائية $\vec{v}_0$ موازية للمحور (OY).

حلول التمارين

التمرين الثاني:

1)- أ. كتابة المعادلات التفاضلية للحركة

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} = -k\,\overrightarrow{OM}$$

النقطة المادية موجودة على المستوى الأفقي (OXY) إذن:

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{O}$$

الإسقاط على المحور (ox)

$$m\ddot{x} = -kgx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (1)$$

بالإسقاط على المحور (oy)

$$m\ddot{y} = -ky \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0 \qquad (2)$$

ب) البرهان على أن المعادلة (1) تقبل الحل المشار إليه في التمرين إذا كان الحل هو:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

وتكون

$$\ddot{x}(t) = -Aw^2\cos wt - Bw^2\sin wt$$

$$= -w^2(xt) = -\frac{k}{m}x(t)$$

إذا ما أدخلنا $x(t)$ و $\ddot{x}(t)$ في المعادلة (1) نحصل على

$$-\frac{k}{m}x + \frac{k}{m}x = 0$$

إذن الحل المقترح في التمرين هو الحل المناسب للمعادلة (1)

بنفس الطريقة

$$y(t) = C\cos wt + D\sin wt$$

$$\ddot{y} = -Cw^2\cos wt - Dw^2\sin wt = -w^2y(t) = -\frac{k}{m}y(t)$$

بالتعويض في المعادلة (2)

$$-\frac{k}{m}y(t) + -\frac{k}{m}y(t) = 0$$

اذن الحل $y(t)$ يمثل الحل المناسب للمعادلة التفاضلية (2)

ج) حساب التوابت A و B و C و D

$$x(0) = a \Rightarrow A = a$$

$$\dot{x}(t) = -Aw\sin wt + Bw\cos wt$$

$$\dot{x}(o) = V_o \cos\alpha = B\omega \Rightarrow B = \frac{V_o \cos\alpha}{w}$$

$$Y(0) = 0, C = 0$$

$$\dot{y}(t) = -Cw\sin wt + Dw\cos wt = Dw\cos wt$$

$$\dot{y}(o) = V_o \sin\alpha + D\omega \Rightarrow D = \frac{V_o \sin\alpha}{w}$$

2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{2}$ معادلات الحركة تصبح

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos wt \\ y(t) &= \frac{V_o}{\omega}\sin wt \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos wt \\ \frac{y}{V_o / w} &= \sin wt \end{aligned}$$

وعليه فإن معادلة المسار تكون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(V_o / w)^2} = 1$$

هذه المعادلة تدل على أن المسار هو عبارة عن

قطع ناقصة: - مركزه o(0,0)

- نصف محور الكبير a

- نصف محور الصغير V_o/ω

3) القيمة التي يجب إعطاؤها للكتلة m حتى تكون الحركة دائرية هي:

$$a^2 = \left(\frac{V_0}{w}\right)^2 = V_0 \frac{m}{k} \Rightarrow m = \frac{ka^2}{V_o^{\,2}}$$

ت.ع:

$$m = \frac{0{,}025 \times 4}{25} = 0{,}004Kg = 4g$$

التمرين الثالث:

$$\vec{R} = -kmg\vec{V}$$

بتطبيق م.أ.ت:

$$\sum \vec{F} = -m\vec{\gamma}$$

بالإسقاط على المحاور:

$$\begin{cases} (ox) - kmgV_x = m\dfrac{dV_x}{dt} \\ (oy) - kmgV_y - P = m\gamma_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} + kgV_x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \dfrac{dV_y}{dt} + kgV_y = -g \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

1) معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى دون طرف حلها:

$$V_x = Ce^{-kgt}$$

$$t = 0 \quad V_x = V_o \cos\alpha \Rightarrow \quad C = V_o \cos\alpha$$

$$V_x = Ce^{-kgt} \Rightarrow \quad V_x = V_o \cos\alpha . e^{-kgt}$$

2) معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بطرف حلها

$$V_y = C_1 e^{-kgt} - \frac{1}{k}$$

$$\text{à } t = 0 \quad V_y = V_o \sin\alpha \Rightarrow \quad C_1 = V_o \sin\alpha - \frac{1}{k}$$

$$V_y = (V_o \sin\alpha + \frac{1}{k})e^{-kgt} - \frac{1}{k}$$

$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha e^{-kgt} \\ V_y = (V_0 \sin\alpha + \dfrac{1}{k})e^{-kgt} - \dfrac{1}{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{V_0 \cos\alpha}{kg} e^{-kgt} + C_1 \\ y = -\dfrac{1}{kg}(V_0 \sin\alpha + \dfrac{1}{k})e^{-kgt} - \dfrac{t}{k} + C_2 \end{cases}$$

à $t=0$ $x=0 \Rightarrow C_1 = \dfrac{V_0 \cos\alpha}{kg}$

$y=0 \Rightarrow C2 = \dfrac{1}{kg}(V_0 \sin\alpha + \dfrac{1}{k})$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{V_0 \cos\alpha}{kg} e^{-kgt} + \dfrac{V_0 \cos\alpha}{kg} = \dfrac{V_0 \cos\alpha}{kg}(1 - e^{-kgt}) \\ y = \dfrac{1}{kg}(V_0 \sin\alpha + \dfrac{1}{k})(1 - e^{-kgt}) - \dfrac{t}{k} \end{cases}$$

عند الذروة $y=h$ و $V_y = 0$ لنجد $t = t_h$

$$V_y = 0 \Rightarrow (V_0 \sin\alpha - \frac{1}{k})e^{-kgt} - \frac{1}{k} = 0$$

$$\Rightarrow t_h = \frac{1}{kg}\ln(1 + kV_0 \sin\alpha)$$

نعوض في y فنجد:

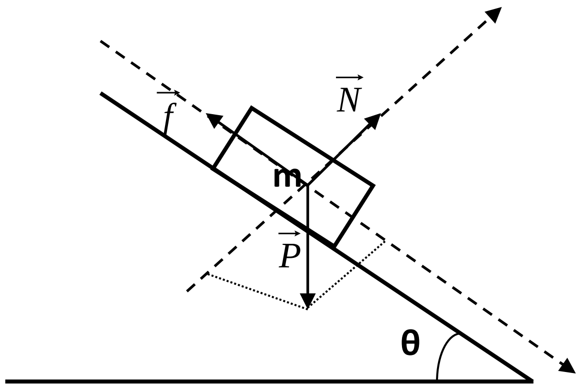
$$h = \frac{1}{K^2 g}\left[kV_0 \sin\alpha - \ln(kV_0 \sin\alpha + 1)\right]$$

لنجد البعد الأفقي نعوض t_h في

x فنجد:

$$x_h = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{(kV \sin\alpha + 1)}$$

التمرين الرابع:



1- زاوية الميل اللازمة لكي يقع الجسم لما تبلغ قوة الاحتكاك السكوني الأعظمية من أجل زاوية إقلاع والتي تسمى زاوية الاحتكاك وهي زاوية حدية فتتكافأ مع مركبة الثقل P_x حينما يقلع الجسم:

$$\left.\begin{aligned} f_{S\max} &= P_x = mg\sin\theta_0 \\ f_{S\max} &= \mu.N \\ N &= P_y = mg\cos\theta_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad tg\theta_0 = \mu \Rightarrow tg\theta_0 = 0{,}8 \Rightarrow \theta_0 = 38{,}66°$$

2- شدة قوة الاحتكاك الأعظمي

$$f_{S\max} = \mu.N \Rightarrow f_{S\max} = 3{,}13N$$

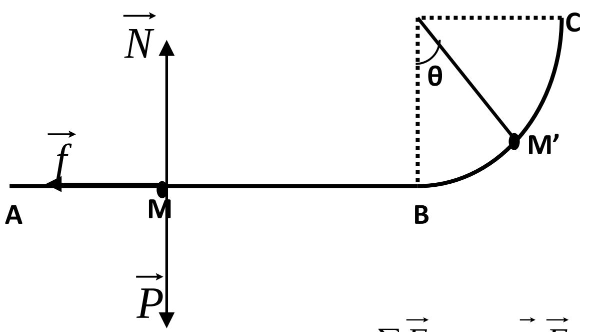
3- قوة التناظمية عند ميل 35°

$$N = P_y = mg\cos\theta \Rightarrow N = 4{,}1N$$

4- قوة الاحتكاك السكوني عند

$$f_S = P_x = mg\sin\theta \Rightarrow f_S = 2{,}87N$$

التمرين الخامس:



السطح AB الخشن $f = 0{,}2$

$\ell = 11m$

السطح BC أملس $r = 5m$

1- قوة الاحتكاك وتسارع الحركة على AB

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}\ \vec{F}_g + \vec{P} = \vec{N} = m\vec{\gamma}$$

$$(0x) : -F_g = m\gamma_x$$

$$P = N = mg \;\; \gamma_y = -P + N = 0$$

$$F_f = f.N = f.m.g = 0,2x10x10$$

$$F_f = 20N$$

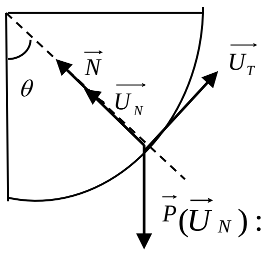
التسارع γ

$$\gamma_x = \frac{-F_f}{m} = \frac{-20}{10} \Rightarrow \gamma_x = -2m/S^2$$

2- السرعة عند B : $V_A = V_0 = 12m/S$

$$\begin{cases} (V_B^2 - V_A^2) = 2\gamma_x x \\ V_B^2 = 2\gamma(AB) + V_0^2 \\ V_A = \sqrt{2\gamma(AB) + V_A^2} \\ A \end{cases} N : V_B = 10m/S \quad \begin{cases} a = \dfrac{dV}{dt}, V = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{V}dV \\ a = \dfrac{dV}{dx} \Rightarrow \int a dx = \int V dV \\ a(x - x_0) = \dfrac{1}{2}(V^2 - V_0^2) \end{cases}$$

3- $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$



$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma}$$
$$\theta = 60°$$

$$(\vec{U}_N) : N - P\cos\theta = m\frac{V^2}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \quad \left(\begin{array}{l} \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dv}{d\theta}.\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{d\theta}{dt} = w = \dfrac{V}{r} \end{array} \right.$$
$$(\vec{U}_T) : -P\sin\theta = m\frac{dV}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$-P\sin\theta = m\frac{dV}{d\theta}.\frac{V}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{-mgr}{m}\sin\theta d\theta = VdV$$

$$\int_{V_{B'}}^{V_M'} V_M .dr = -\int_0^{\theta} gr\sin\theta d\theta$$

$$\frac{1}{2}(V_B^2 - V_{M'}^2) = -gr(1 - \cos\theta)$$

$$V_M^2 = -2rg - (1 - \cos\theta) + V_B^2 = -2(5)(10) + 2(10)\cos\theta + 160$$

$$=100\cos\theta=\sqrt{50}m/S$$

استنتاج السرعة عند C: $\theta=\frac{\pi}{2}$

$$V_C^2=-2rg+V_B^2\Rightarrow -2(10)(5)+100=0$$

$$V_C=0m/S$$

4- رد الفعل عند M': من (1):

$$N=m\frac{V^2}{r}+mg\cos\theta$$

$$N=\ldots N$$

التمرين الثاني عشر:

1)- حركة الجسم دائرية وعليه فإن السرعة الخطية للجسم هي $V=wr$

نحول السرعة الزاوية إلى جملة الوحدات الدولية

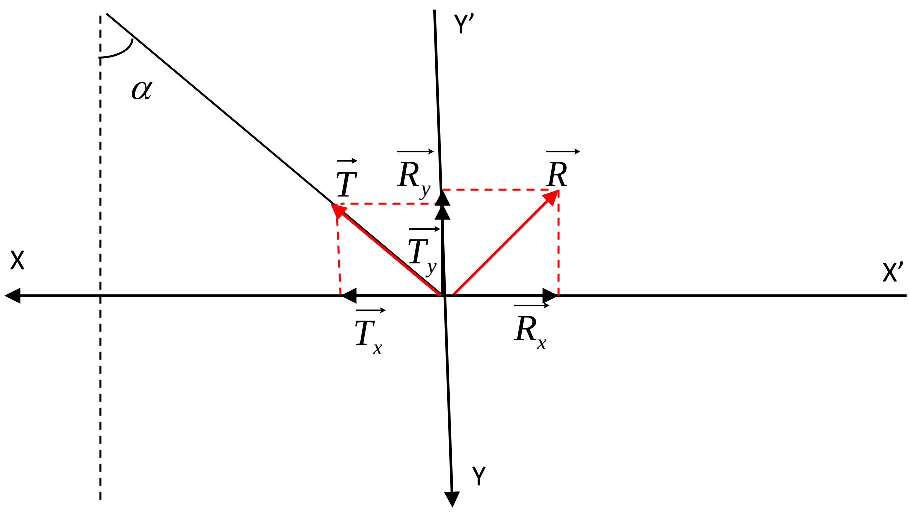
$$w=\frac{10x6,28}{60}=1,05rod/S$$

نحسب نصف قطر الحركة الدائرية التي يقوم بها الجسم حول المحور EE^1

$$r=\ell\sin 60°\Rightarrow r=4,5.0,87$$
$$\Rightarrow r=3,9m$$

ومنه $V=1,05x3,9\Rightarrow V=4,1m/S$

2)- حساب شدة قوة رد الفعل السطح على الجسم: الجسم يقوم بحركة دائرية منتظمة تحت تأثير قوى محصلتها قوة مركزية شدتها mw^2. نقطة القوى على المحورين (أنظر الشكل)



$$\sum \vec{P} = m\vec{\gamma}$$
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = mw^2 r\vec{i}$$

$$(0x): T\sin\alpha - R\cos\alpha = mw^2 r........(1)$$

$$(0y): P - R\sin\alpha - T\cos\alpha = 0...........(2)$$

نحذف التوتر ما بين المعادلتين (1) و(2):

$$\frac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{R\cos\alpha + mw^2 r}{P - R\sin\alpha} \Rightarrow tg\alpha = \frac{R\cos\alpha + mw^2 r}{P - R\sin\alpha}$$

$$R = m(g\sin\alpha - w^2 r\cos\alpha) \Rightarrow (3).......R = 37N$$

3- توتر الخيط نستنتجه من المعادلة (1) أو (2)

$$T = \frac{R\cos\alpha + mw^2 r}{\sin\alpha} \Rightarrow T \approx 46,4N$$

$$T = \frac{P - R\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow T = 43,42$$

الفرق بين القيمتين ناتج عن القيم التقريبية التي نأخذها على الجسم نستنتجه من المعادلة (3)

$$R = m(g\sin\alpha - w^2 r\cos\alpha) = 0$$

$$w^2 = \frac{g\sin\alpha}{r\cos\alpha} = \frac{g\sin\alpha}{\ell\sin\alpha\cos\alpha} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\alpha}}$$

$$w \approx 2,1 rod / S$$

التمرين الثالث عشر:

$$\vec{r} = (3t^2 - 6t)\vec{i} + (-4t^3)\vec{j} + (3t + 2)\vec{k}$$

1- القوة المؤثرة على الجسم

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \vec{F} = 36\vec{i} - 144t.\vec{j}$$

2- عزم القوة بالنسبة للمبدأ

$$\overrightarrow{M}_{/O} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 3t & -144t & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{M}_{/O} = (432t^2 + 288t)\vec{i} + (108t + 72)\vec{j} + (-288t^3 + 864t^2)\vec{k}$$

3- كمية الحركة الجسم

$$\vec{P} = m\vec{V} = (36t + 36)\vec{i} - 72t^2\vec{j} + 18\vec{k}$$

العزم الحركي بالنسبة للمبدأ

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 3t+2 \\ 36t+36 & -72t^2 & 18 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{L} = (144t^3 + 144t^2)\vec{i} + (54t^2 + 72t + 72)\vec{j} + (72t^4 + 288t^3)\vec{k}$$

$$\vec{P} = (36t + 36)\vec{i} - 72t^2\vec{j} + 18\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 36\vec{i} - 144t.\vec{j} = \vec{F}$$

التمرين الرابع عشر:

الحركة تكون وفق حركة دائرية مستوية

معلم اسطواني قاعدته $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{k})$

1)- الزاوية α

شعاع الموضع $\overrightarrow{OM} = R\vec{U}_r$

السرعة $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dr} = R\dfrac{d\vec{U}_r}{dr} = Rw\vec{U}_\theta$

التسارع $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{V}}{dr} = Rw\dfrac{d\vec{U}_\theta}{dr} = -Rw^2\vec{U}_r$

باستعمال المبدأ الأساسي للتحريك $\sum\vec{F} = m\vec{\gamma}$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$$

$$\vec{T}\begin{pmatrix} -T\sin\alpha \\ 0 \\ T\cos\alpha \end{pmatrix}, \vec{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \vec{\gamma}\begin{pmatrix} -Rw2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{U}_r = -T\sin\alpha = -mRw^2 \Rightarrow T = \frac{mRw^2}{\sin\alpha}$$

$$\vec{U}_\theta = 0$$

$$\vec{k} : T\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow mg = T\cos\alpha = 0$$

$$T = \frac{mRw^2}{R}.\ell \Rightarrow T = m\ell w^2$$

$$T\cos\alpha = mg \Rightarrow \cos\alpha = \frac{mg}{T} = \frac{mg}{m\ell w^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{g}{\ell w^2} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{g}{\ell w^2}$$

2) كمية الحركة $\vec{P} = m\vec{V}$

الحركة تتم وفق الشعاع $\vec{U}_\theta$ $\quad \vec{V} = Rw\vec{U}_\theta$

$\vec{P} = mRw\vec{U}_\theta$ حيث $\sin\alpha = \frac{R}{\ell} \Rightarrow R = \ell\sin\alpha$

$\vec{P} = mw\ell\sin\alpha\vec{U_\theta} \qquad P = mw\ell\sin\alpha$

3) العزم الحركي بالنسبة لنقطة A

$$\vec{L}_{/A} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{P}$$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} \ell\sin\alpha \\ -\ell\cos\alpha \end{pmatrix} \quad ,\vec{V}\begin{pmatrix} 0 \\ Rw \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_{/A} = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{U}_r & \vec{U}_\theta & \vec{k} \\ \ell\sin\alpha & 0 & -\ell\cos\alpha \\ 0 & mRw & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{L}_{/A} = m\ell Rw\cos\alpha\vec{U}_r + \ell mRw\sin\alpha\vec{k}$$

$$\left|\vec{L}_{/A}\right| = mRw\ell$$

-(4

$$\underset{/A}{\overrightarrow{M}}(F)=\underset{/A}{\overrightarrow{M}}(T)+\underset{/A}{\overrightarrow{M}}(P)$$

$$\underset{/A}{\overrightarrow{M}}\vec{P}=\overrightarrow{AM}\wedge\vec{P}$$

$$\underset{/A}{\overrightarrow{M}}\vec{P}=\begin{vmatrix}\vec{U}_r & \vec{U}_\theta & \vec{k}\\ \ell\sin\alpha & 0 & -\ell\cos\alpha\\ 0 & 0 & mg\end{vmatrix}=\ell mg\sin\alpha\vec{U}_\theta$$

$$\underset{/A}{\overrightarrow{M}}\vec{P}=mg\ell\sin\alpha\vec{U}_\theta=\underset{/A}{\overrightarrow{M}}\vec{F}$$

نظرية العزم الحركي $\dfrac{d\vec{L}_{/A}}{dt}\overset{?}{=}\underset{/A}{\overrightarrow{M}}\vec{F}$

$$\frac{d\vec{L}_{/A}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\ell Rw\cos\alpha\vec{U}_r+mRw\ell\sin\alpha\vec{k})$$

$$=mRw\cos\alpha\frac{d\vec{U}_r}{dr}=mR\ell w^2\cos\alpha\vec{U}_\theta$$

$$,\quad R=\ell\sin\alpha \qquad \cos\alpha=\frac{g}{lw^2}$$

$$\frac{d\vec{L}_{/A}}{dt}=m\ell Rw^2\frac{g}{\ell w^2}\vec{U}_\theta\Rightarrow\frac{d\vec{L}_{/A}}{dt}=mRg\vec{U}_\theta$$

$$\frac{d\vec{L}_{/A}}{dt}=m\ell g\sin\alpha\vec{U}_\theta$$

$$\overrightarrow{M}_{/O}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

نظرية العزم الحركي محققة

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=(432t^2+288t)\vec{i}+(108t+72)\vec{j}+(-288t^3+864t^2)\vec{k}=\overrightarrow{M}_{/O}$$

المحور III : حركيات نقطة مادية

Cinématique d’un Point Matériel

I مقدمة:

أ- تمهيد:

الحركة والسكون مفهومان نسيان فالجبل ساكن بالنسبة للأرض ولكنه متحرك بالنسبة لمراقب بعيد عن الأرض والذي يرى الكرة الأرضية وكل ما عليها متحرك.

يجب على الدارس لأي حركة تعيين نظام مرجعي (معلم) والذي تحلل الحركة بالنسبة له، تتم هذه الدراسة على أحد الشكلين شعاعي

- شعاعي : باستخدام أشعة الموضع $\overrightarrow{O\mathcal{M}}$ السرعة $\vec{v}$ والتسارع $\vec{a}$
- جبري : بتحديد معادلة الحركة وفق مسار معين.

ب- تعاريف:

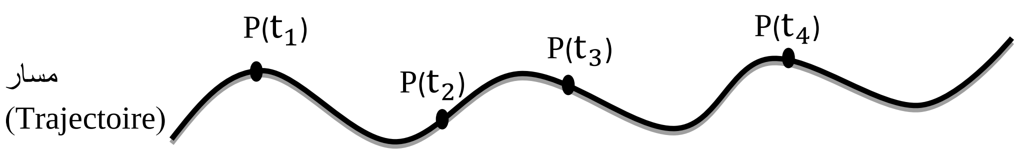
*علم الحركة أو حركيات نقطة مادية هي دراسة الحركة دون التعرض إلى المسببات (كالقوى مثلا....إلخ).

*النقطة المادية هي كل جسم مادي يمكن إعتبار أبعاده معدومة نظريا مهملة عمليا مقارنة بالمسافة المقطوعة (المسار).

*مسار متحرك هو مجموعة النقاط (الأوضاع) المتتالية التي يستغلها المتحرك خلال زمن.

$$t_1 < t_2 < t_3 < t_4$$

* يكون المسار ماديا (الطريق) وهميا (مسار القمر)

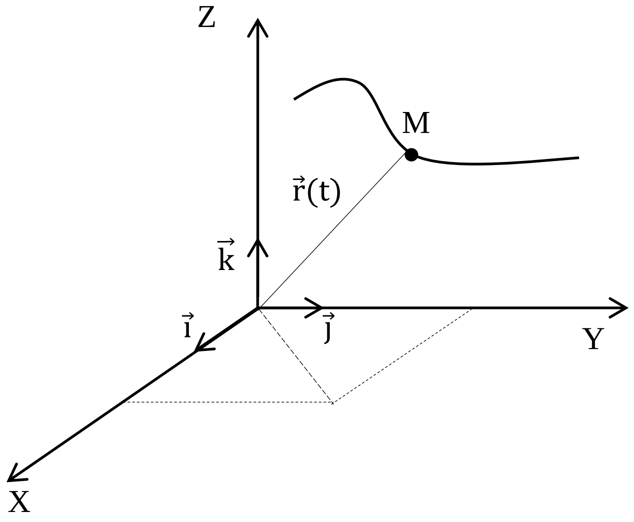


الشكل III-1: مسار متحرك

II–المقادير الفيزيائية للحركة:

1- شعاع الموضع (Vecteur Position):

يعرف موضع نقطة مادية $\mathcal{M}$ في اللحظة t في معلم فضائي كارتيزي $R(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ (الشكل II-2) بشعاع الموضع $\overrightarrow{0\mathcal{M}}$.



الشكل III-2: شعاع الموضع

$$\overrightarrow{0\mathcal{M}} = \vec{r}(t)$$
$$\overrightarrow{0\mathcal{M}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$
$$\|\overrightarrow{0\mathcal{M}}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-1)$$

- **المعادلة الزمنية (Equations Horaires):**

تكون النقطة المادية $\mathcal{M}$ في سكون إذا كانت الإحداثيات x,y,z مستقلة عن الزمن وتكون في حالة حركة (mouvement) إذا أصبحت هذه الإحداثيات توابع للزمن ونرمز لها بـــ x(t), y(t),z(t). تسمى هذه الدوال المعادلات الزمنية للحركة.

- **الحركة المستوية:** دارسة الحركة المستوية تتم بالإحداثيات المستطلة $R(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ حيث يصبح الموضع معرف بإحداثياتين هما y(t), x(t) الدالة y(t) →x تسمى المعادلة الكارتيزية للمسار Equation (cartésienne de la trajectoire).

نحصل على معادلة المسار بحذف الزمن ما بين المعادلتين الزمنيين.

2- شعاع السرعة (Vecteur Vitesse):

السرعة هي المسافة المقطوعة خلال وحدة زمن

***شعاع السرعة المتوسطة (Vecteur Vitesse moyenne)**

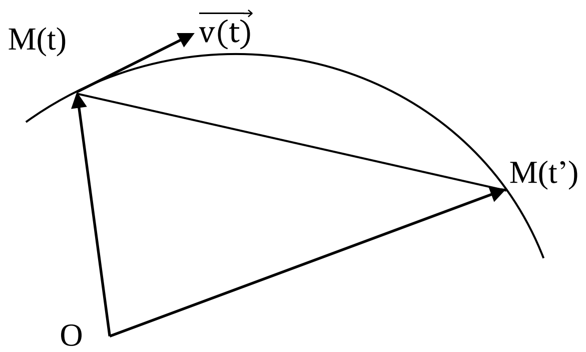
لاحظ الشكل III-3

بين اللحظة t التي يشغل فيها المتحرك الموضع $\mathcal{M}$ واللحظة t' التي يشغل فيها المتحرك الموضع $\mathcal{M}$\`

فإن شعاع السرعة المتوسطة معرف بالعبارة التالية

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{\mathcal{M}\mathcal{M}'}}{t' - t'},$$

$$V_{moy} = \frac{|\overrightarrow{\mathcal{M}\mathcal{M}'}|}{\Delta t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}-2)$$



الشكل III-3: شعاع السرعة المتوسطة

*** شعاع السرعة اللحظية (Vecteur Vitesse Instantanée):**

يعرف شعاع السرعة اللحظية لنقطة مادية أي شعاع السرعة في اللحظة t أنه مشتقة (Dérivée) شعاع الموضع بالنسبة للزمن:

$$\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{t}} = \lim_{\mathrm{t}\to\mathrm{t}`} \frac{\overrightarrow{0\mathcal{M}}` - \overrightarrow{0\mathcal{M}}}{\mathrm{t} - \mathrm{t}`} = \lim_{\Delta\mathrm{t}\to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{0\mathcal{M}}}{\Delta\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{0\mathcal{M}}}{\mathrm{dt}}$$

$$\vec{V}_t = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}-3)$$

Δt يكون صغيرا جدا.

ملاحظة:

* شعاع السرعة $\vec{V}_t$ يحمله المماس للمسار في النقطة $\mathcal{M}$ وموجه دائما نحو إتجاه الحركة.

* في المعلم الكارتيري نستنتج العبارة الشعاعية للسرعة من العبارة الشعاعية للموضع وذلك بعملية إشتقاق

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad \Rightarrow \vec{V} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

* شدة شعاع السرعة اللحظية

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\text{III} - 4)$$

3- شعاع التسارع (Vecteur Accélération):

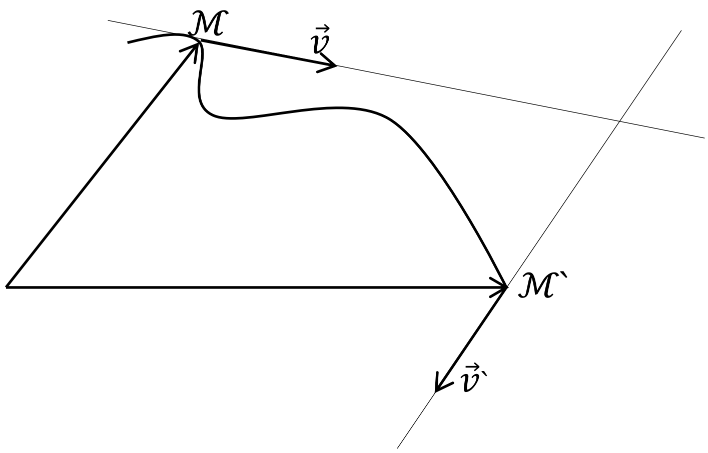
نعتبر التسارع مقدار تغيير السرعة خلال وحدة زمن.

* شعاع التسارع المتوسط (Vecteur accélération moyenne):

إذا إعتبرنا لحظتين مختلفتين t و t\` المناسبتين لشعاعي الموضع $\overrightarrow{O\mathcal{M}}$ و $\overrightarrow{O\mathcal{M}`}$ وشعاعي السرعة اللحظية $\vec{V}$ و $\vec{V}`$ (الشكل III-4) فإن شعاع التسارع المتوسط معرف بالعبارة:

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{V}` - \vec{V}}{t` - t} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

$$a_{moy} = \frac{|\Delta\vec{V}|}{\Delta t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\text{III} - 5)$$



الشكل III-4: شعاع التسارع المتوسط

* شعاع التسارع اللحظي (Vecteur accélération instantané):

شعاع التسارع اللحظي لحركة ما يعرف أنه مشتقة شعاع السرعة اللحظية بالنسبة للزمن.

$$\vec{a} = \lim_{t`\to t}\frac{\vec{V}` - \vec{V}}{t` - t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt^2}$$

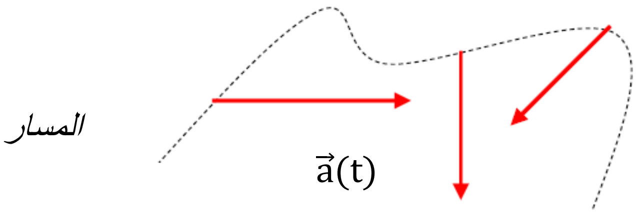
$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-6)$$

في الإحداثيات الديكارتية

$$\vec{a} = \frac{d^2X}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2Y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2Z}{dt^2}\vec{k}$$

♦ يكون شعاع التسارع موجها دائما نحو تقعر المسار

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-7)$$



الشكل III-5: شعاع التسارع اللحظي

ملاحظة: تكون الحركة متسارعة إذا كان $\vec{a}.\vec{v} > 0$ و متباطئة إذا كان $\vec{a}.\vec{v} < 0$، أما اتجاه الحركة فيدل عليه إتجاه شعاع السرعة $\vec{v}$

مثال: إذا كان شعاع الموضع هو $\overrightarrow{O\mathcal{M}}\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 4t - 5 \\ z = t^3 \end{cases}$.

♦ استنتج شعاع السرعة و التسارع اللحظتين ثم أحسب شدة كل منهما.

الجواب: تقوم بعملتي الإشتقاق فنحصل على:

$$\vec{v} = 4t\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3t^2\vec{k} \quad \longrightarrow \quad \vec{a} = 4\vec{\imath} + 6t\vec{k}$$

$$v = \sqrt{16t^2 + 16 + 9t^4} \quad \longrightarrow \quad a = \sqrt{16 + 36t^2}$$

II- أنواع الحركة:

إذا إعتبرنا المسار كمعيار لتصنيف الحركة فإنه لدينا نوعين من الحركة:

حركة مستقيمة وأخرى منحنية (دائرية جيبية)

1) الحركة المستقيمة (Mouvement rectiligne):

نقول عن حركة مستقيمة إذا كانت تتغير وفق خط مستقيم.

أ- الحركة المستقيمة المنتظمة (*Mouvement Rectiligne Uniforme*):

تكون نقطة مادية في حالة حركة مستقيمة منتظمة إذا كان مسارها مستقيما وشعاع سرعتها ثابتا وبالتالي فإن شعاع تسارعها معدوم.

*** المعادلة الزمنية :** نختار المحور Ox كمعلم، ونحدد الشروط الإبتدائية $t = t_0\,,\quad x = x_0$

لدينا

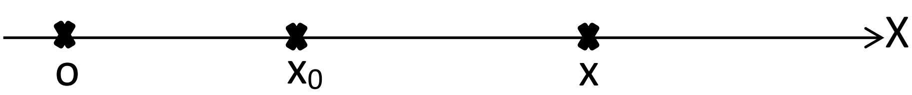
$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow dx = vdt = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt$$

$$x|_{x_0}^{x} = vt|_{t_0}^{t} \quad \Rightarrow x - x_0 = v(t - t_0)$$

$$x = v(t - t_0) + x_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III - 8)$$

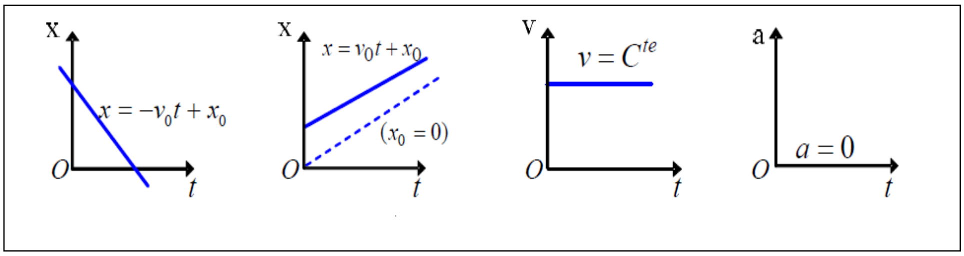
من أجل $t = 0s$

$$x = vt + x_0$$



- **مخططات الحركة (Diagramme du Mouvement):**

مخططات الحركة هي التمثيل البياني لكل من والإنتقال، السرعة و التسارع بدلالة الزمن (الشكل 6-II).



الشكل 6-III: مخططات الحركة المستقيمة المنتظمة

ب- الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام (Mouvement Rectiligne Uniformément Varié):

تكون حركة نقطة مادية مستقيمة متغيرة بإنتظام إذا كان المسار مستقيما و التسارع ثابتا.

*** السرعة الجبرية:** بإعتبار الشروط الإبتدائية $v=v_0$ و $t=t_0$ وإنطلاقا من التعاريف السابقة

$$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=adt\Rightarrow\int_{v_0}^{v}dv=\int_{t_0}^{t}adt\Rightarrow v|_{v_0}^{v}=at|_{t_0}^{t}$$

$$v-v_0=a(t-t_0)\quad\Rightarrow v=a(t-t_0)+v_0$$

$$v=at+v_0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (III-9)$$

*** المعادلة الزمنية للحركة :** إذا أخذنا في $x=x_0$ ، $t=t_0$ وإنطلاقا مماسبق.

$$v=\frac{dx}{dt}=a(t-t_0)+v_0\Rightarrow dx=(a(t-t_0)+v_0)dt\ \Rightarrow\int_{x_0}^{x}dx$$

$$=\int_{t_0}^{t}(a(t-t_0)+v_0)dt$$

$$x-x_0=\int_{t_0}^{t}a(t-t_0)dt+\int_{t_0}^{t}v_0dt=\frac{1}{2}a(t-t_0)^2+v(t-t_0)$$

$$=\frac{1}{2}a(t-t_0)(t-t_0)+v(t-t_0)$$

$$=\frac{a(t-t_0)^2}{2}+v(t-t_0)+x_0$$

لما $x=x_0$ و $t=0s$

$$x=\frac{1}{2}at^2+vt+x_0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (III-10)$$

*** العلاقة المستقلة عن الزمن :**

$$a=\frac{dv}{dt}\ldots\ldots..\ 1$$

$$v=\frac{dx}{dt}\ \Rightarrow dt=\frac{1}{v}dx$$

بالتعويض في 1 نجد:

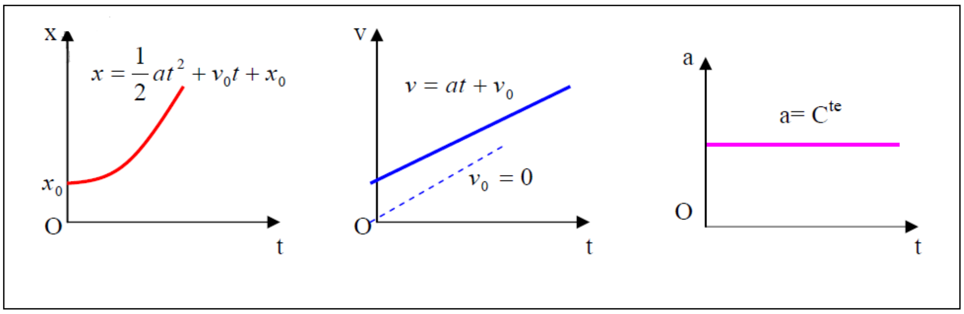
$$a = \frac{dv}{\frac{dx}{v}} = \frac{dv}{dx}.v \Rightarrow adx = v.dv$$

$$\int_{x_0}^{x} adx = \int_{v_0}^{v} vdv \Rightarrow a(x - x_0) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III - 11)$$

- مخططات الحركة

نلاحظ في الشكل الموالي مخططات الحركة لكل من الانتقال، السرعة و التسارع



الشكل III-7: مخططات الحركة

ج- الحركة المستقيمة متغيرة التسارع (Mouvement rectiligne à accélération variable):

تكون حركة نقطة مادية مستقيمة ومتغيرة التسارع إذا كان المسار مستقيما والتسارع تابع للزمن، $a = f(t)$

مثال:

ينتقل جسم نقطي وفق مستقيم بتسارع $a = 4 - t^2$

♦ أوجد عبارتي السرعة والإنتقال بدلالة الزمن وبأخذ الشروط الابتدائية:

$$t = 3s \quad , \quad v = 2ms^{-1}, \qquad x = 9$$

الجواب:

1- حساب v

$$v=\int_0^t a dt+v_0 \Rightarrow v=v_0+\int_0^t (4-t^2)dt$$

$$v=v_0+4t-\frac{1}{3}t^3 \qquad \Rightarrow \qquad v=4t-\frac{1}{3}t^3+v_0$$

نكامل من جديد للحصول على العبارة: الحرفية للإنتقال

$$x=\int_0^t vdt+x_0 \ \Rightarrow x=\int_0^t (4t-\frac{1}{3}t^3+v_0)+x_0$$

$$x=2t^2-\frac{1}{12}t^4+v_0t+x_0$$

$$x=-\frac{1}{12}t^4+2t^2+v_0t+x_0$$

يبقى لنا الآن تحديد كل من الفاصلة الإبتدائية x_0 والسرعة v_0 للجسم

حسب المعطيات لدينا

$$t=3s \quad , \quad v=2m/s, \qquad n=9m$$

نعوض في العبارة الأولى فنجد

$$2=4(3)-\frac{1}{3}(3)^3+v_0 \Rightarrow 2=12-9-v_0$$

$$v_0=-1ms^{-1}$$

$$9=-\frac{1}{12}(3)^4+2(3)^2+(-1)(3)+x_0$$

$$9=-\frac{1}{12}(81)+2\times 9-3+x_0 \quad \Rightarrow \quad 9+\frac{27}{4}-18+3=x_0$$

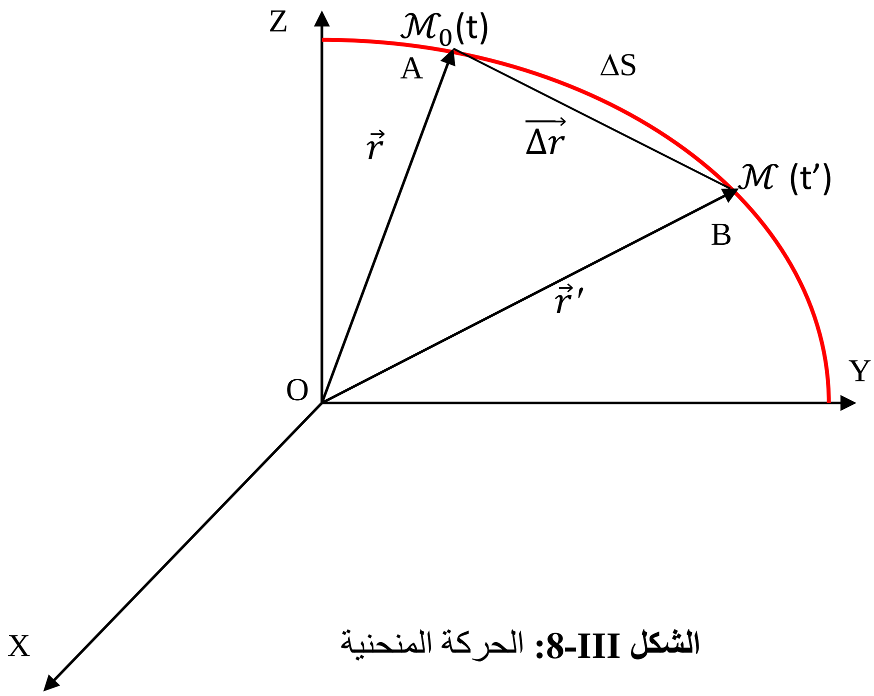
$$-6+\frac{27}{4}=x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-24+27}{4}=x_0 \quad \Rightarrow x_0=\frac{3}{4}m$$

في الأخير نكتب عبارتي السرعة والإنتقال:

$$x=2t^3-\frac{1}{12}t^4-t+\frac{3}{4}$$

$$v=4t-\frac{1}{3}t^3-1$$

2- الحركة المنحنية (Mouvement curviligne):



الشكل III-8: الحركة المنحنية

ليكن الجسم في اللحظة t في النقطة $\mathcal{M}_0$ موضعه يتعين بالشعاع $\vec{r}$

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}_0} = \vec{r}$$

♦ في اللحظة 't يكون الجسم في الموضع $\mathcal{M}$.

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \vec{r`}$$

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \vec{r`} = x`.\vec{i} + y`.\vec{j} + z`.\vec{k}$$

الإنتقال من $\mathcal{M}_0$ إلى $\mathcal{M}$ يعين بالشعاع $\overrightarrow{\mathcal{M}_0\mathcal{M}}$ حيث $\overrightarrow{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} = \Delta\vec{r}$

$$\vec{r`} = \vec{r} + \Delta\vec{r}$$

في المثلث OAB لدينا:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r`} - \vec{r}$$

$$\Delta\vec{r} = (x` - x)\vec{i} + (y` - y)\vec{j} + (z` - z)\vec{k}$$

خلال تغيير الزمن من $t \to t_0$ تنتقل النقطة من $\mathcal{M}_0$ إلى $\mathcal{M}$ (تقطع المسافة ΔS)

ΔS: هو طول القوس $\widehat{\mathcal{M}_0\mathcal{M}}$ وهي **الفاصلة المنحنية**

$$\Delta\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \widehat{\mathcal{M}_0\mathcal{M}} = \vec{r`} - \vec{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-12)$$

نعرف السرعة المتوسطة:

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-13)$$

و السرعة اللحظية:

$$\vec{v}_{ins} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_{moy} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

لما $\Delta t \to 0$ النقطة $\mathcal{M}$ قريبة جدا من $\mathcal{M}_0$

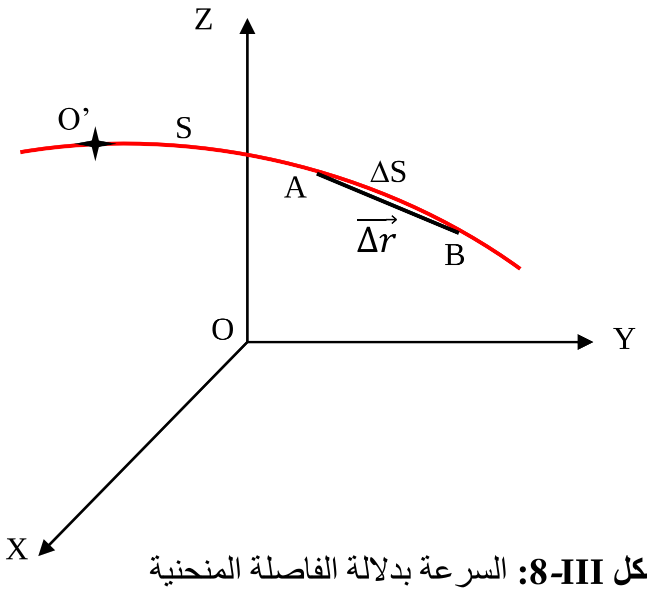
السرعة اللحظية هي شعاع مماسي للمسار.

$$\vec{v}_{ins} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}_{ins} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-14)$$

$$\|\vec{v}_{ins}\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

*** السرعة بدلالة الفاصلة المنحنية:**



الشكل III-8: السرعة بدلالة الفاصلة المنحنية

* "O" هو مبدأ المعلم و"`O" هو مبدأ المسار الحركة

القوس $S = \widehat{O`A}$

في اللحظة t : $S = \widehat{O`A}$

في اللحظة $t`$ : $S` = \widehat{O`B}$

الإنتقال من A إلى B يعطى بطول القوس $\widehat{AB}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right) \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{ds}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right) = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dr}{ds} \cdot \vec{u}_T$$

حيث $\vec{u}_T$ هو شعاع وحده مماسي للمسار

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right) = \vec{u}_T$$

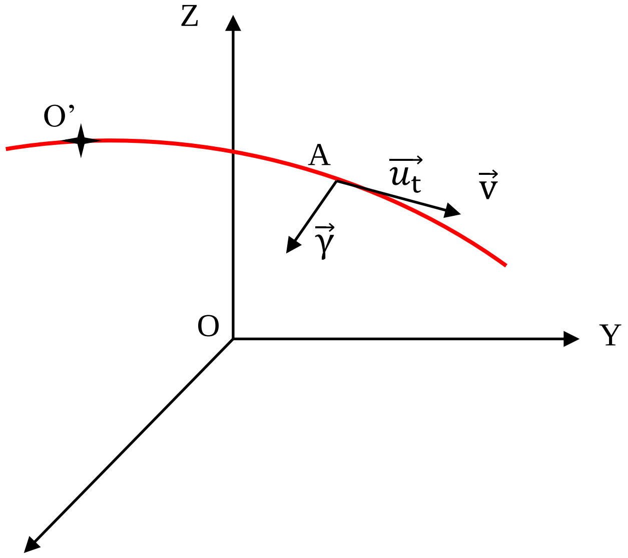
عندما $\Delta s \to 0$ فإن المستقيم $AB = \Delta s = \Delta r$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_T \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (III - 14)$$

$$\vec{v} = v . \vec{u}_T$$

ومن هنا نستنتج أن v تكون وفق $\vec{u}_T$ أي أن السرعة $\vec{v}$ تكون مماسية للمسار

*** التسارع:**



الشكل III-9: التسارع

التسارع: $\vec{\gamma} = \vec{v}(t)$

$\vec{v}$: يتغير مقدارا وإتجاها

مقدارا: لأن الجسم يتباطئ ويتسارع

إتجاها: لأن $\vec{v}$ مماسي للمسار وينحني بإستمرار ومنه تغير السرعة ← التسارع

*** التسارع المتوسط:**

$$\vec{\gamma}_{mo} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta V_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta V_z}{\Delta t}\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-15)$$

*** التسارع اللحظي:**

$$\vec{\gamma}_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{\gamma}_{ins} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-16)$$

$$\|\overrightarrow{\gamma}\| = \sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_z}{dt}\right)^2}$$

III- المقادير الحركية في مختلف الإحداثيات:

1- الإحداثيات الكارتيزية:(Les coordonnées Cartésiennes) :

ليكن المعلم R(o,x,y,z) المزود بالأساس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المتعامد و المتجانس

*** شعاع الموضع:**

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

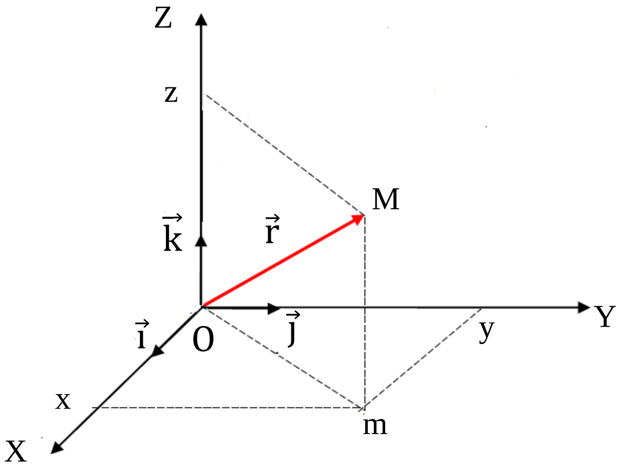
حيث x,y,z إحداثيات النقطة $\mathcal{M}$

x: الفاصلة (Abscisse)

y: الترتيب (Ordonnée)

z: الإرتفاع (Altitude)

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-17)$$



الشكل 10-III: الاحداثيات الكارتيزية

*** شعاع السرعة:**

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-18)$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

*** شعاع التسارع:**

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-19)$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

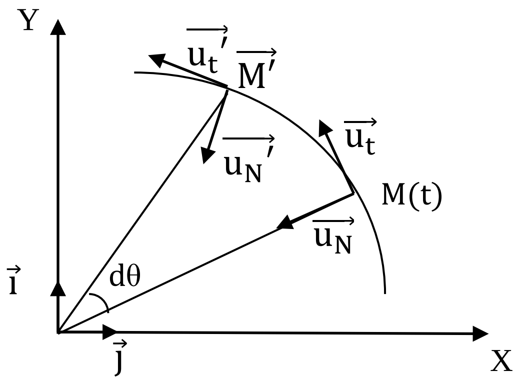
2- الإحداثيات الذاتية: (Les Cordonnées de Frenet):

عندما تكون الحركة غير خطية أي مسار غير مستقيم يمكننا إستعمال شعاعين $\vec{u}_T$ و $\vec{u}_N$ طويلة كل منهما تساوي الواحد يكون:

$\vec{u}_T$: شعاع مماسي للمسار إتجاهه نفس إتجاه الحركة.

$\vec{u}_N$. شعاع وحده ناظمي عمودي على المسار ويتجه نحو تقعر المسار.

- **الفاصلة المنحنية $s(t)$** : تمثل طولا معينا على المسار في فترة معينة من الزمن (تعرضنا إليها سابقا).



الشكل III-12: الاحداثيات الذاتية

- **شعاع السرعة:** لقد وجدنا أن السرعة طويلتها

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

وبما أن شعاع السرعة يكون دائما مماسيا على مسار الحركة فإن:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}.\vec{u}_T \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-20)$$

- **شعاع التسارع:**

لدينا:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v.\vec{u}_T]$$

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

نستطيع كتابة $\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ هي $\left[\frac{d\vec{U}_T}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right]$ حيث سرعة زاوية $\frac{d\theta}{dt} = w = \frac{v}{R}$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\vec{u}_T}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\vec{u}_T}{ds}$$

لنبحث عن $\frac{d\vec{u}_T}{ds}$ ، حسب الشكل III-12

خلال الفترة dt من الحركة ينتقل المتحرك من $\mathcal{M}$ إلى $\mathcal{M}$\` من مساره حيث: $ds = \widehat{\mathcal{M}\mathcal{M}}$\` يكون مقدارا صغيرا (أي أن $\mathcal{M}$ قريبة من $\mathcal{M}$\`).

نلاحظ أن العمودين على المسار يلتقيان في النقطة O تسمى مركز إتحاد المسار والمسافة $R = O\mathcal{M} = O\mathcal{M}$\` تسمى نصف قطر إنحناء المسار في النقطة $\mathcal{M}$.

الطول ds والذي يمثل الإنتقال الجزئي للمسار يكتب كمايلي:

$$ds = \widehat{\mathcal{M}\mathcal{M}}` = R.d\theta$$

نعوض ds بقيمتها فنجد: $\frac{d\vec{u}_T}{ds} = \frac{d\vec{u}_T}{R.d\theta}$

حيث

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta} = \vec{u}_N$$

لدينا

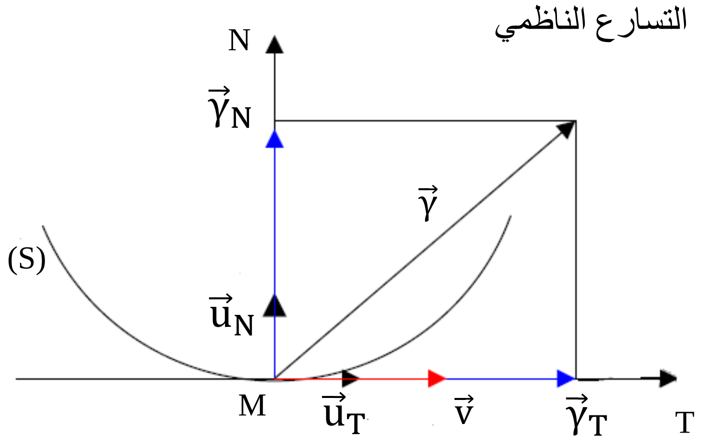
$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v.v}{R}\vec{u}_N$$

$$\vec{\gamma} = \dot{v}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-21)$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_T\vec{u}_T + \gamma_N\vec{u}_N$$

حيث: $\gamma_T = \frac{dv}{dt}$ التسارع المماسي

التسارع الناظمي $\gamma_N = \frac{v^2}{R}$



الشكل 13-III: السرعة و التسارع في معلم فريني

ملاحظة: يمكن البرهان أن:

$$\vec{\gamma}_t = \frac{\vec{\gamma}.\vec{v}}{v} \quad ، \quad \gamma_N = \frac{|\vec{\gamma} \wedge \vec{v}|}{v}$$

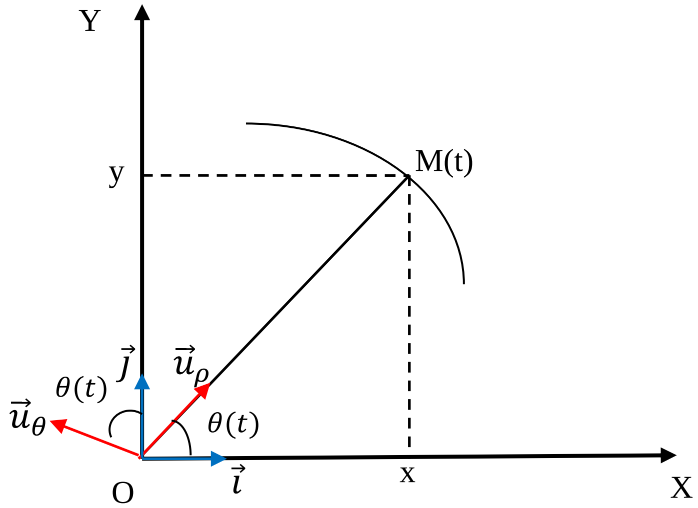
بإستعمال الجداء السلمي و الجداء الشعاعي (للبرهان).

3- الإحداثيات القطبية: (Les Coordonnées Polaires)

حين ينتمي المسار إلى مستوي، هنا كذلك يمكن تعيين الموضع اللحظي أو تعيين الحركة لهذا الجسم بإستعمال الإحداثيات القطبية (r, θ) حيث:

r: نصف القطر القطبي rayon polaire (r(t) يمثل طويلة شعاع الموضع $|\overrightarrow{OM}|$

θ: الزاوية القطبية Angle Polaire (θ(t) الزاوية المحصورة بين المحور القطبي Ox وشعاع الموضع.



الشكل 14-III: الاحداثيات القطبية

*** في المعلم الديكارتي:**

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = x\vec{i} + y\vec{j} = \rho\cos\theta.\vec{i} + \rho\sin\theta.\vec{j} = \rho\,(\cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j})$$

حيث $\vec{u}_\rho = (\cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j})$

*** شعاع الموضع :** في المعلم القطبي

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \rho\vec{u}_\rho \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-22)$$

$\vec{u}_\rho$. شعاع وحدة محمول على شعاع الموضع

$$\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{|\overrightarrow{O\mathcal{M}}|} = \frac{\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{\rho}$$

* لنحسب المشتق الأول لـ $\vec{u}_\rho$

من الشكل III-14

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta.\vec{i} + \rho\sin\theta.\vec{j})$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$$

$\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ شعاعان متعامدان ويمثلان القاعدة القطبية.

*** شعاع السرعة:**

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} = \frac{d}{dt}[\rho\vec{u}_\rho] = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta \Rightarrow \frac{d\,\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}\vec{u}_\theta \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-23)$$

*** شعاع التسارع:**

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}\vec{u}_\theta]$$

$$= \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}.\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}.\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}(\dot{\theta}\vec{u}_\theta) + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}[-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}]\dot{\theta} = [-\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}]\dot{\theta}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -[\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}]\dot{\theta} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{u}_\rho)$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\; (III-24)$$

♦ السرعة الزاوية:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

♦ و التسارع الزاوي

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ملاحظة: في حالة ما إذا كانت السرعة الزاوية ثابتة فإن $\ddot{\theta}$ التسارع الزاوي معدوم.

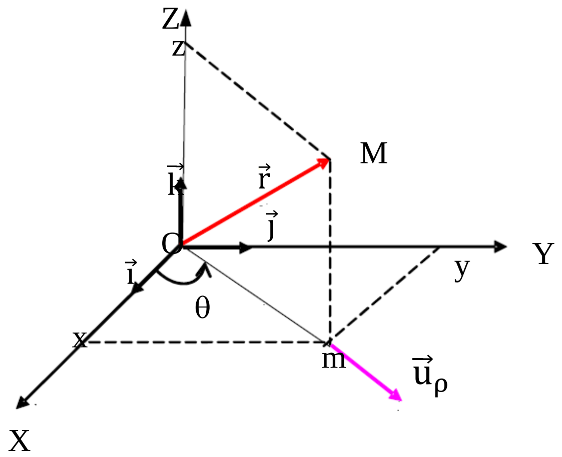
4- الإحداثيات الإسطوانية:(Coordonnées Cylindriques):

إذا كان المسار فضائيا حيث ρ و (oz) تلعبان دورا مميزا في تحديد موضع المتحرك (ذات قاعدة دائرية أو غير دائرية أو على سطح قطع مخروطي) من المستحسن إستعمال الإحداثيات الأسطوانية (ρ,θ,z) حيث

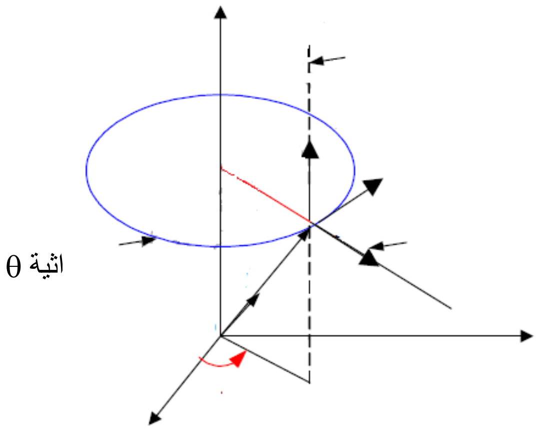
(ρ,θ): يمثلان الإحداثيات القطبية

θ: الزاوية القطبية (Angle Polaire)، ρ نصف قطر القطبي (Rayon Polaire)

z: هو الإحداثية الديكارتية على المحور (Oz) (العلو Altitude)



الشكل III-15: الإحداثيات الأسطوانية



الشكل III-16: قاعدة الإحداثيات الاسطوانية

معادلات الحركة في الإحداثيات الأسطوانية

$$\rho = \rho(t)$$
$$\theta = \theta(t) = (OX, Om)$$
$$z = z(t)$$

* شعاع الموضع:

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{m\mathcal{M}}$$
$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-25)$$

* شعاع السرعة:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-26)$$

$(\vec{k}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\rho)$ هي القاعدة الأسطوانية

ملاحظة:

$$\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta = \vec{k}$$
$$\vec{k} \wedge \vec{u}_\rho = \vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_\theta \wedge \vec{k} = \vec{u}_\rho$$

* شعاع التسارع:

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-27)$$

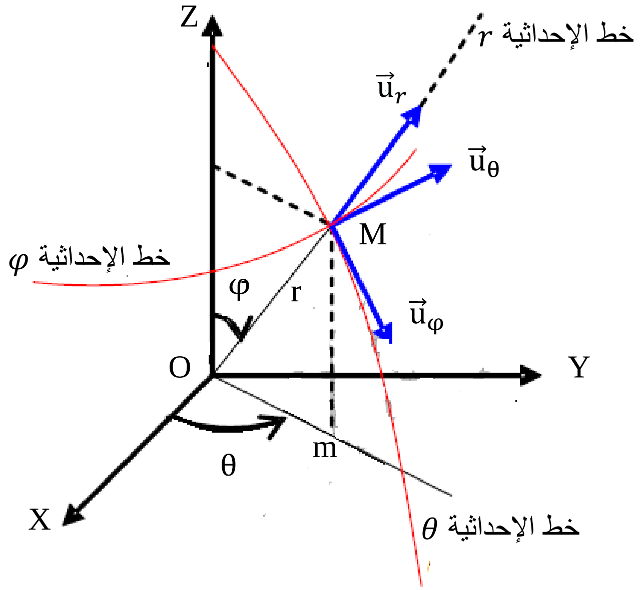
5- الإحداثيات الكروية (Coordonnées Sphériques):

الإحداثيات الكروية (r, θ, φ)

$[\infty, 0]\ r$

$[2\pi, 0]\ \theta$

$[\pi, 0]\ \varphi$



الشكل III-17: قاعدة الإحداثيات الكروية

$$r = \|\overrightarrow{O\mathcal{M}}\|$$
$$\theta = (OX, Om)$$
$$\varphi = (OZ, O\mathcal{M})$$

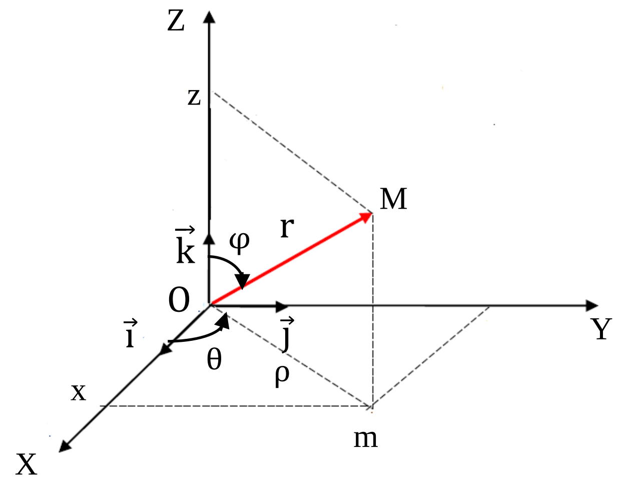
حيث m هومسقط $\mathcal{M}$ على المستوي (Oxy)

شعاع الوحدة $\vec{u}_r$ // $\overrightarrow{O\mathcal{M}}$

$\vec{u}_\theta$: مماسي لخط العرض (أي الدائرة الموازية للمستوي (Oxy) في النقطة $\mathcal{M}$)

$\vec{u}_\varphi$: مماسي لخط الطول المار بالنقطة $\mathcal{M}$ وفي إتجاه تزايد الزاوية φ

* شعاع الموضع:



الشكل 18-III: الإحداثيات الكروية

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \left\|\overrightarrow{O\mathcal{M}}\right\|\cos\varphi \end{cases}$$

$$\rho = f(r)$$

$$\rho = \left\|\overrightarrow{O\mathcal{M}}\right\|\sin\varphi = r\sin\varphi$$

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = r\sin\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + r\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + r\cos\varphi\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = r\underbrace{(\sin\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k})}_{\text{نعلم أن } \vec{u}_r}$$

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = r\vec{u}_r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}-28)$$

$$\vec{u}_r = \sin\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\vartheta\,\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r$$

$$\vec{u}_\varphi = [-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}] \wedge [\sin\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}]$$

$$\vec{U}_\varphi = \sin\theta^2\sin\varphi\,\vec{k} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\varphi\cos\theta^2\,\vec{k} + \cos\theta\cos\varphi\vec{\imath}$$

$$\vec{U}_\varphi = \cos\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} - \sin\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_r = \sin\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\vartheta\,\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}$$
$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{u}_\varphi = \cos\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}$$

$\vec{u}_r$ شعاع وحدة قطري

$\vec{u}_\theta$ شعاع وحدة عرضي

$\vec{u}_\varphi$ شعاع وحدة طولي

*** شعاع السرعة:**

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} = \frac{d}{dt}[r.\vec{u}_r] = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$
$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\cos\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\varphi\,\vec{k}\right]$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} - \dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\imath} + \dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta\vec{\jmath} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u}_\theta$$
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + r\dot{\theta}\sin\varphi\vec{u}_\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III-29)$$

*** شعاع التسارع:**

$$\vec{\gamma} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\sin\varphi\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\sin\varphi\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\sin\varphi\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta\,\vec{\imath} - \dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta\,\vec{\imath} - \dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta\vec{\jmath} - \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{k}$$
$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{u}_r + \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_\theta = \vec{u}_r \wedge \overrightarrow{uU}_\varphi \Rightarrow \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{dt}\wedge\vec{u}_\varphi + \vec{u}_r\wedge\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$$

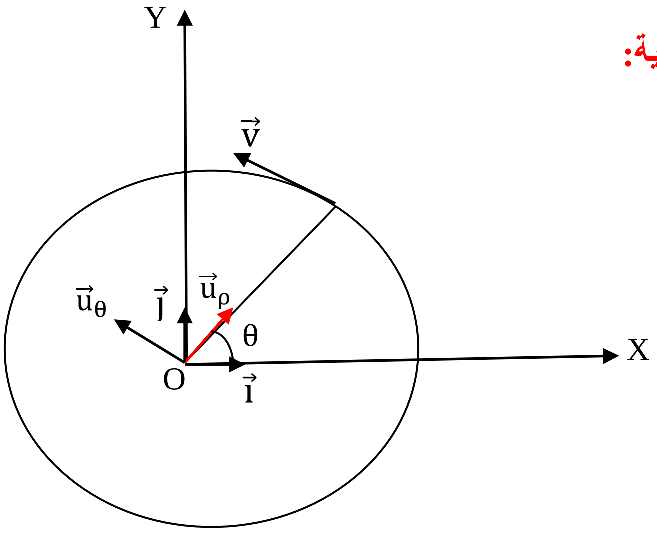
$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \left(\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u}_\theta\right)\wedge\vec{u}_\varphi + \vec{u}_r\wedge\left(-\dot{\varphi}\vec{u}_r + \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{u}_\theta\right)$$
$$= -\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u}_r - \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{u}_\varphi$$
$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\left(\sin\varphi\,\vec{u}_r + \cos\varphi\,\vec{u}_\varphi\right)$$

منه نجد التسارع

$$\vec{\gamma} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2\sin\varphi^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} - r\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\vec{U}_\varphi$$
$$+\left(2\dot{r}\dot{\theta}\sin\varphi + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi + r\ddot{\theta}\sin\varphi\right)\vec{U}_\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(III-30)$$

- **حالات خاصة:**

♦ **الحركة الدائرية:**



الشكل III-19: الحركة الدائرية

نفرض أن جسما $\mathcal{M}$ يتحرك على خط دائري نصف قطره "R" ومركزه "O"

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = \rho\vec{u}_\rho \qquad\qquad (\rho = R)$$
$$\overrightarrow{O\mathcal{M}} = R\vec{u}_\rho$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(III-31)$$

- **شعاع السرعة:**

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\vec{u}_\rho)$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-32)$$

حيث

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

السرعة الزاوية للحركة ووحدتها rad/s

ملاحظة:

نستطيع إختيار شعاع السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ عمودي على مسار الحركة أي في إتجاه المحور (oz) $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O\mathcal{M}}$$

- **شعاع التسارع:**

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[R\dot{\theta}\vec{u}_\theta] = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + R\dot{\theta}\frac{d}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-33)$$

وفق الإحداثيات الذاتية $\vec{u}_N = -\vec{u}_\rho$ $\vec{u}_N = \vec{u}_\theta$

$$\vec{\gamma} = R\dot{\theta}^2\vec{u}_N - R\ddot{\theta}\vec{u}_\rho$$

$\gamma_N = R\dot{\theta}^2 = R\left(\frac{V^2}{R^2}\right) = \frac{V^2}{R}$ التسارع الناظمي في الحركة الدائرية

$\gamma_t = R\ddot{\theta} = R\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{dv}{dt}$ التسارع المماسي في الحركة الدائرية

$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt}$ التسارع الزاوي

ملاحظة:

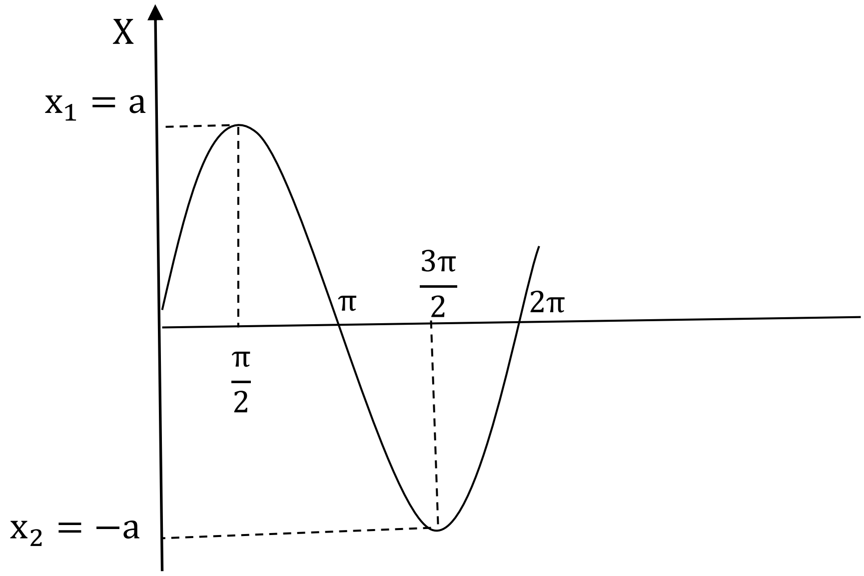
عندما تكون السرعة الزاوية $\omega = \dot{\theta} = cte$ تسمى الحركة حركة دائرية منتظمة وفي هذه الحالة التسارع الزاوي يكون معدوم.

- الحركة الجيبية:

أ)- تعريف: نقول عن جسم أنه في حالة حركة جيبية إذا تغيرت وضعيته دوريا حول وضعية معينة تسمى وضعية التوازن.

ب)-دراسة الحركة:

نأخذ حالة حركة جيبية لجسم على المستقيم (ox)



الشكل III-20: الحركة الجيبية

معادلة الحركة تعطى بـــ: $x = a\sin(\omega t + \alpha)$

وضعية الجسم تتغير بين $x_1 = 1$ و $x_2 = -1$ وهذا مرورا بوضع التوازن

$x_m = a$ المطال الأعظمي (السعة الأعظمية)

$(\omega t + \alpha)$ طور الحركة (الصفحة)

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ نبض الحركة

$T = \frac{1}{f}$ دور الحركة

f: تواتر الحركة (عدد الإهتزازات)

السرعة: $v = \frac{dx}{dt} = a\omega\cos(\omega t + \alpha)$

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = -a\omega^2\sin(\omega t + \alpha)$$

التسارع: $$\gamma = -\omega^2 \underbrace{a\sin(\omega t + \alpha)}_{x}$$

$$\gamma = -\omega^2 x$$

بالتعويض نجد: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega x = 0$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية وبدون طرف حلها مع الشروط الإبتدائية تعطينا معادلة الحركة الجيبية السابقة.

*** الحركة الجيبية على قطعة دائرية:**

النواس البسيط في حالة حركة إهتزازية توافقية (جيبية) على قطعة دائرية مثلا النواس تعطى معادلة الحركة على الشكل:

$$\begin{matrix} \theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi) \\ S = S_m \sin(\omega t + \varphi) \end{matrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-34)$$

حيث:

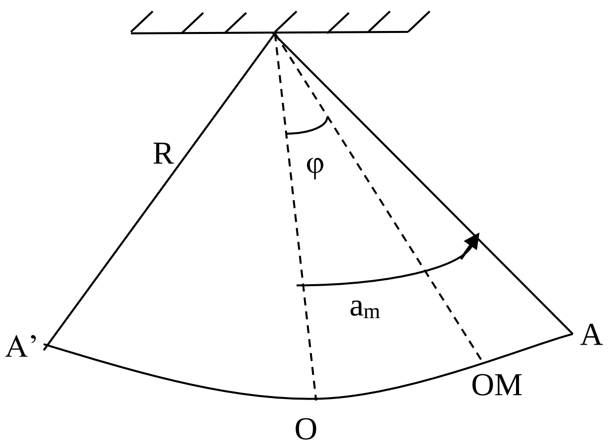
θ: سعة السرعة الزاوية

S: سعة القوس الدائري اللحظي

θ_m: السعة العظمى للزاوية

$$\begin{aligned} v &= \frac{dS}{dt} = \omega S_m \sin(\omega t + \varphi) \\ \gamma_T &= \frac{dv}{dt} = -\omega^2 S_m \sin(\omega t + \varphi) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (III-35) \\ \gamma_N &= \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 S_m}{R} \cos^2(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

معR نصف قطر الدائرة



الشكل III-20: الحركة الجيبية على قطعة دائرية

(Exercices) تمارين

التمرين الأول:

تنطلق سيارة بتسارع ثابت على مسافة 200m. تتدحرج بسرعة ثابتة على مسافة 160m ثم تتناقص سرعتها على 50m قبل أن تتوقف. المدة الزمنية الكلية للمسار هي 33s.

1- أرسم منحنى تغير السرعة بدلالة الزمن t.
2- ماهو الزمن الذي استغرقته السيارة و هي تتدحرج بسرعة ثابتة.

التمرين الثاني:

ينتقل جسم نقطي وفق مستقيم بتسارع $a = 4 - t^2$

- أوجد عبارتي السرعة و الانتقال بدلالة الزمن و متخذا الشروط الابتدائية $t = 3s; v = 2m/s; x = 9m$

التمرين الثالث:

يدخل متحرك بسرعة ثابتة v_0 في وسط مقاوم، فيخضع لتسارع $\gamma = -kv^2$ حيث k ثابت موجب، و v السرعة اللحظية

1)- أكتب عبارة السرعة اللحظية v(t) اذا كان في اللحظة t = 0s فان $V=V_0$

2)- بأخذ مبدأ الأزمنة و الفواصل لحظة و موقع المتحرك عند دخوله للوسط، و باعتبار أن الحركة مستقيمة' أكتب المعادلة الزمنية للحركة X(t)

3)- بين أنه بعد قطع المسافة X فان السرعة V_0 تكتب على الشكل $V=V_0e^{-Kx}$

التمرين الرابع:

تعطى الإحداثيات الديكارتية لنقطة مادية M في الفضاء كما يلي:

$$a)\ \begin{cases} x(t) = t+1 \\ y(t) = 3t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad ; \quad b)\ \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad ; \quad c)\ \begin{cases} x(t) = R(\omega t - \sin\omega t) \\ y(t) = R(1-\cos\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1- أوجد معادلة مسار النقطة M و مثل منحاها؟

2- حدد السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$ للنقطة M؟

التمرين الخامس:

يعطى تسارع نقطة مادية في الفضاء بالعلاقة: $\vec{a} = e^{-t}\,\vec{i} + 5\sin(t)\,\vec{j} - 3\cos(t)\,\vec{k}$. في اللحظة t=0s، تكون النقطة المادية في الموضع $(1;\,0;\,3)$، وسرعتها تقدر ب $(1;\,2;\,-1)$.

- حدد سرعة و موضع النقطة المادية في أي لحظة t؟

التمرين السادس:

مركبات شعاع السرعة بدلالة الزمن لنقطة مادية M معطاة بالعلاقة التالية

$$\begin{cases} V_x = 4t \\ V_y = 4t^3 + 4t \end{cases}$$

في اللحظة t=0s ، المتحرك موجود في النقطة $M_0\,(2,\,1)$

1) أوجد معادلة المسار $y=f(x)$ ، ماهي طبيعة الحركة؟ مثلها بيانيا؟
2) أحسب مركبات التسارع؟
3) مثل على المسار أشعة السرعة و التسارع في اللحظة $t = 1s$ ؟

التمرين السابع:

احداثيات جزيئة M في اللحظة t هي:

$$x = 2A(1+\cos wt)$$
$$y = A\sin wt$$
$$Z = 0$$

A وw ثابتان موجبان.

1- أوجد معادلة المسار في الإحداثيات الديكارتية حدد طبيعة الحركة
2- أعطي العبارة الشعاعية للسرعة اللحظية ثم طويلتها، استنتج سرعة M في النقطة الخاصة O(0,0)
3- أحسب المركبات المماسية و الناظمية للتسارع و كذلك نصف قطر انحناء المسار في اللحظة t.

التمرين الثامن:

تعطى مركبات سرعة متحرك بدلالة الزمن بالعلاقات التالية:

$$v_x = \frac{t}{t^2+1}$$
$$v_y = 2t$$

عند اللحظة t=0 يكون المتحرك عند النقطة (0,1)، أوجد معادلة الحركة $y = f(x)$ و مركبات التسارع $\gamma_x(t)$ و $\gamma_y(t)$.

التمرين التاسع:

ينسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس XOY مبدأه O و قاعدته $(\vec{i},\vec{j})$. تتغير الإحداثيتان x و y لنقطة M متحركة في المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$ مع الزمن حسب القانون:

$$\begin{cases} x(t) = c\,t \\ y(t) = b\,t\,(t-\tau) \end{cases}$$

حيث: c = 2 S.I, b = 4 S.I, τ = 1 S.I.

1- حدد طبيعة المسار، ومثله في المعلم الديكارتي؟
2- حدد مركبتي شعاع السرعة $\vec{v}$ في لحظة t ؟
3- أكتب عبارة الفاصلة المنحنية ds لعنصر متناهي الصغر بدلالة t و dt. أكتب المسافة المقطوعة بين اللحظتين t=os و t=2s على شكل دالة تكاملية؟
4- بين أن تسارع المتحرك ثابت، أحسب المركبات المماسية $\overrightarrow{a_T}$ و الناظمية $\overrightarrow{a_N}$. استنتج نصف قطر انحناء المسار في اللحظة t=0 .5s؟

التمرين العاشر:

نقطة مادية تتحرك وفق المحور (Ox)، حسب العلاقة التالية

$x(t) = \frac{g}{b^2}(bt + e^{-bt})$ ، مع العلم أن g و b ثوابت.

1- أعط عبارة سرعة المتحرك و حدد سرعته الابتدائية v_0.
2- أرسم منحنى المسار v=f(t) من أجل قيم موجبة ل b.
3- أوجد عبارة التسارع a(t) بدلالة السرعة v(t).

التمرين الحادي عشر:

ليكن في المستوي (P)، معلم متعامد و متجانس xOy و متحرك M ينتقل في هذا المستوي. في اللحظة t، احداثياتاه معرفتان ب: $x = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}, y = 2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$

1- ماهو مساره؟
2- أحسب احداثيات شعاع السرعة $\vec{v}$ و شعاع التسارع $\vec{a}$ لهذا المتحرك في اللحظة t. ماهي العلاقة الموجودة بين $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{a}$؟ ماهي المدة اللازمة حتى يمر المتحرك من نفس الموضع من المنحنى؟
3- بين اللحظتين $t_1 = 0$ و $t_2 = 4\pi$، حدد مواقع المتحرك و كذا إحداثيتي $\vec{v}$ حتى تكون طويلة التسارع $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

التمرين الثاني عشر:

تتحرك نقطة مادية في المستوي XOY حيث مركبات تسارعها هي كالأتي:

$$\gamma_x = 0.8ms^{-2}$$
$$\gamma_y = 0.0ms^{-2}$$

عند اللحظة t=0s، تكون النقطة M في مبدأ المعلم و مركبات سرعتها هي $V_x = 0ms$ و $V_y = 0.8ms$، أوجد:

1- مسار النقطة M
2- سرعتها في اللحظة t=1s
3- تسارعها و نصف قطر انحناء المسار عند النقطة المطابقة للحظة t=1s

التمرين الثالث عشر:

تتحرك نقطة مادية M في السطح كمايلي

$$x = \frac{t}{3} + 1 \quad \text{و} \quad y = \frac{t^2}{3}$$

1- أوجد و أرسم مسار حركة M
2- أوجد مركبات و طويلة كل من شعاعي السرعة و التسارع
3- أحسب نصف قطر انحناء المسار في اللحظة t. ماهي قيمته عند اللحظة t=0s

التمرين الرابع عشر:

حركة نقطة مادية M في المستوي xOy معرفة بالقانون:

$$\begin{cases} x = 2\cos(0,5t) \\ y = 2\sin(0,5t) \end{cases}$$

عين

1) طبيعة المسار؟
2) مركبات شعاع السرعة؟
3) عبارة السرعة $\frac{ds}{dt}$ وكذلك الفاصلة المنحنية s للنقطة M؟
(في اللحظة t=0s ، s=0)
4) المركبات الناظمية و المماسية للتسارع في معلم Frenet؟
5) استنتج نصف قطر الانحناء للمسار؟

التمرين الخامس عشر:

نقطة مادية تتحرك على دائرة, تعطى الفاصلة المنحنية s(t) لهذه النقطة ب $s(t)=t^3+2t^2$ حيث s(t) مقاسة بالمتر و t بالثانية. لما t=2s تسارع النقطة المادية يساوي $16\sqrt{2}m/s^2$

- أحسب نصف قطر انحناء الدائرة.

التمرين السادس عشر:

ينسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس XOY مبدأه O و قاعدته $(\vec{i},\vec{j})$. تتغير الإحداثيتان x وy لنقطة M متحركة في المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$ مع الزمن حسب القانون: $x=2\cos\frac{t}{2}$ و $y=2\sin\frac{t}{2}$.

1- حدد طبيعة المسار.
2- حدد مركبتي شعاع السرعة $\vec{v}$.
3- حدد عبارة السرعة $\frac{ds}{dt}$ و كذا عبارة الإحداثية s المنحنية لنقطة M في اللحظة t، بأخذ الشرط الابتدائي s=0 لما t=0.
4- حدد المركبتين المماسية و الناظمية للتسارع في المعلم الذاتي (Frenet).
5- استنتج نصف قطر الانحناء.
6- المسار باقي على حاله في حين تتأثر النقطة M بتسارع زاوي $\frac{d^2\theta}{dt^2}=\theta^{\cdot\cdot}=0,2t$. في أي لحظة تبلغ النقطة M سرعة $10ms^{-1}$، علما أنها انطلقت من السكون، ماهي المسافة التي قطعتها.

التمرين السابع عشر:

يدور قضيب OA بسرعة ثابتة w في مستوي ثابت، اذا كان OA=AB= l وطول القطعة AM=d (d<l)

1)- أوجد معادلة مسار النقطة M

2)- أحسب السرعة $\vec{V}$ و *التسارع* $\vec{\gamma}$ للنقطة M

3)- أحسب التسارع المماسي و العمودي و نصف قطر الانحناء

التمرين الثامن عشر:

تعطى حركة نقطة مادية M في الإحداثيات القطبية بالمعادلات التالية

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} r(t) = a(1+\cos\theta) \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$ حيث a عدد ثابت و موجب

1- أحسب السرعة و التسارع للنقطة M في الإحداثيات القطبية

2- ليكن $\vec{T}$ شعاع وحدة مماسي لمسار المتحرك في الموضع M و الموجه في اتجاه الحركة.

أ- ماذا يمثل الشعاع $(\vec{\gamma}.\vec{T}).\vec{T}$

ب- ماذا يمثل المقدار $\dfrac{|\vec{\gamma}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|}$

التمرين التاسع عشر:

لتكن معادلات حركة نقطة مادية M في المرجع القطبي كالتالي:

$$\begin{cases} \rho = [1+Sin\theta] \\ \theta = wt \end{cases}$$

حيث $\rho = \overline{OM}$ طويلة شعاع الموضع، و النبض w ثابت موجب

1) أرسم مسار النقطة M.

2) أوجد شعاعي السرعة و التسارع في المرجع القطبي، و أحسب طويلتهما.

3) وضح نوعية الحركة عند اللحظة t=π/2.

4) أوجد عبارة نصف قطر انحناء المسار R. ماهي قيمته عند اللحظة t=0s.

التمرين العشرون:

في الإحداثيات القطبية، المعادلات الزمنية لحركة نقطة مادية M معرفة كمايلي:

$$\begin{cases} r(t) = r_0 \sin(\frac{\pi}{4}t) \\ \theta(r) = \left(\frac{\pi}{4}t\right) \end{cases}$$

حيث r_0 ثابت موجب $0 \leq t \leq \pi$

(r بالمتر، و t بالثانية و θ بالراديان)

1) مثل مسار النقطة M؟

2) أ) عين شعاع السرعة و التسارع للنقطة M؟

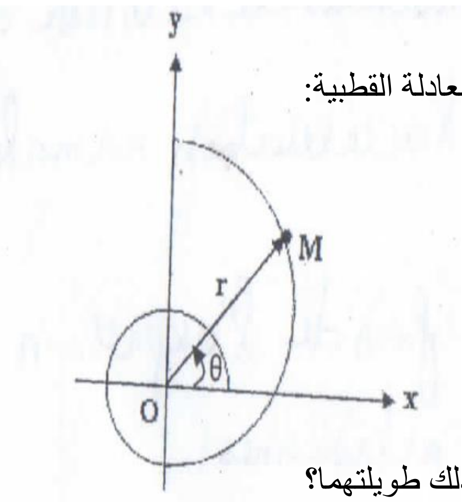
ب) أوجد الزاوية بين شعاع السرعة و شعاع التسارع؟

ج) أحسب نصف قطر انحناء المسار؟.

3) أكتب معادلات المرور من الإحداثيات القطبية (r, θ) إلى الإحداثيات الديكارتية (x, y)؟

4) أوجد معادلة المسار في الإحداثيات الديكارتية؟

التمرين الواحد و العشرون:



لتكن M نقطة مادية ترسم منحنى ممثل في الشكل المقابل و المعرفة بالمعادلة القطبية:

$$\begin{cases} r = r_0 e^{\theta} \\ \theta = wt \end{cases}$$

حيث (w, r_0) ثوابت موجبة

1- مثل على الشكل أشعة القاعدة القطبية $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ لنقطة مادية M ؟

2- أوجد شعاعي السرعة $\vec{v}$ *و التسارع* $\vec{a}$ للنقطة M بدلالة w و r وكذلك طويلتهما؟

3- أحسب الفاصلة المنحنية S مع العلم أن $S=0$ عند اللحظة $t=0$ ؟

4- كم هي الزاوية α التي تصنعها السرعة $\vec{v}$ *مع المركبة القطبية* $\vec{v}_r$؟

5- مثل على نفس الشكل (س 1) أشعة المعلم الذاتي $(\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N})$ للنقطة المادية M ؟

6- أوجد المركبات الذاتية للتسارع و استنتج ρ نصف قطر انحناء المسار؟

التمرين الثاني و عشرون:

لتكن في المستوي XOY النقطة P (انطلقت من المبدأ O) حيث المركبات القطبية لشعاع سرعتها $\vec{v}$ في جملة الإحداثيات القطبية هي على التوالي : $2K_1t$ و K_2t^2 ، K_1 و K_2 ثابتان.

1)- ماهي عبارة r(t) و θ(t) بدلالة الزمن.

2)- أوجد المعادلة القطبية للمسار r=f(θ).

3)- أحسب بدلالة الزمن المركبات القطبية لشعاع التسارع.

التمرين الثالث والعشرون:

لتكن النقطة المتحركة M المعرفة بالإحداثيات القطبية (r,θ)، فإذا كان $r=K\theta^2$:

1- أعط مسارا تقريبيا للحركة من أجل K=3 و $0 \leq \theta \leq \pi$.

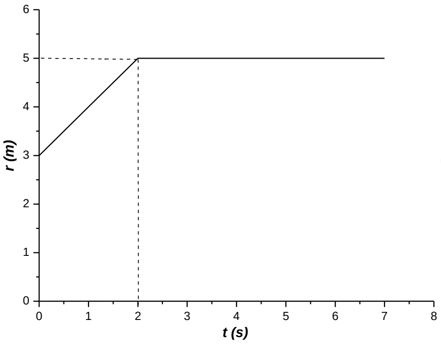
2- أحسب شعاع السرعة $\vec{V}$؟

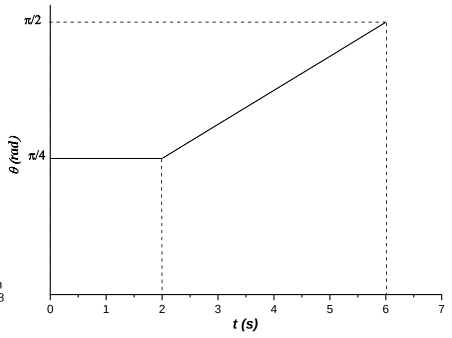
3- عين شعاعي السرعة و التسارع للنقطة M عند $\theta = \pi / 2$ مع العلم أن $w = \frac{d\theta}{dt} = cte$.

4- ماهو الموضع الذي يكون فيه شعاع التسارع ناظمي.

التمرين الرابع و العشرون:

الإحداثيات القطبية لمتحرك معطاة بالبيانات التالية





1)- ماهي مراحل الحركة، و ماطبيعة الحركة في كل مرحلة بين t= 0s و t=6s

2)- أرسم مسار المتحرك؟

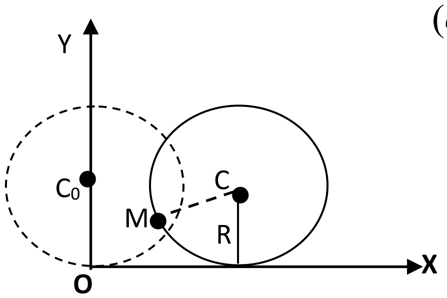
3)- مثل على المسار أشعة السرعة و التسارع في اللحظة t=1s و t=4s

التمرين الخامس و العشرون:

كرة نصف قطرها R تدور بسرعة زاوية w حول المحور (Δ) المار من مركزها O.

1- حدد السرعة الخطية v لنقطة مادية M تتحرك على الخط العرضي للكرة λ (الزاوية بين $\overrightarrow{OM}$ و المستوي العرضي للكرة)
2- استنتج طول التسارع a للنقطة M.
3- أحسب v و a في حالة النقطة M تتحرك على سطح الأرض (الأرض كروية مركزها O و نصف قطرها R).
يعطى: R=638 Km ، λ =45° و مدة دوران الأرض T=24h.

التمرين السادس و العشرون:



تتدحرج عجلة نصف قطرها R بدون احتكاك على محور أفقي (OX) (الشكل)

1)- أوجد بدلالة R و θ إحداثيات نقطة M موجودة على إطار العجلة

(عند بداية الحركة كانت M منطبقة على المبدأ O)

2)- أحسب سرعة و تسارع النقطة M

3)- أعط قيم $\vec{v}$ و $\vec{a}$ في اللحظة التي تلمس فيها M الأرض

4)- باعتبار أن حركة مركز العجلة حركة مستقيمة منتظمة بسرعة $\overrightarrow{v_0}$

* بين أن التسارع $\vec{a}$ نابذ نحو المركز O و احسب طويلته بدلالة R و v_0

* أحسب عدديا هذا التسارع في حالة نقطة من دولاب عجلة سيارة في طريق سريع ذات سرعة 130Km/h (R=35cm)

التمرين السابع و العشرون:

ينتقل متحرك في الفضاء وفق القانون :

$$\begin{cases} X(t) = RSinwt \\ Y(t) = R(1-Coswt) \\ Z(t) = bt \end{cases}$$

حيث R, b, w ثوابت موجبة.

أحسب:

1- سرعة المتحرك.
2- التسارع.
3- حدد مسار المتحرك ثم ارسمه.

التمرين الثامن و العشرون:

ينتقل متحرك M في الفضاء وفق القانون:

$$x = a\cos\omega t\,,\ y = a\sin\omega t\ ,\ z = h\,\omega t$$

a, w ثوابت موجبة

1- نفرض أن H هي مسقط النقطة M في المستوي (XOY) .

أ) بين أن حركة H هي حركة دائرية منتظمة.

ب) على أي سطح من المسار تكون حركة النقطة M؟ مثله.

2- أوجد مركبات السرعة $\vec{v}\,(M/R)$ في جملة الإحداثيات الاسطوانية، أحسب طويلتها. ماذا تلاحظ؟ أوجد الزاوية بين شعاع السرعة $\vec{v}\,(M/R)$ و المحور Oz (α). ماذا تلاحظ؟

3- أوجد مركبات التسارع $\vec{a}\,(M/R)$ في جملة الإحداثيات الاسطوانية.

4- حدد مركبات شعاعي السرعة و التسارع في المعلم الديكارتي.

5- في القاعدة $(\vec{i}\,,\ \vec{j}\,,\ \vec{k}\,)$، عبر عن أشعة وحدة المعلم الذاتي $\vec{u}_N\ ,\ \vec{u}_T$.

6- أحسب نصف قطر انحناء المسار.

التمرين التاسع و العشرون:

في جملة الإحداثيات الكروية $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$ تتحرك نقطة مادية M على سطح كرة نصف قطرها R.

إحداثيتها الكرويتان هما: $\theta = \left(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}\right) = \dfrac{\pi}{6}\,rad$ $\qquad\qquad$ $\varphi = wt^2$

مع w ثابت موجب

1) انطلاقا من شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية :

أ/ أوجد السرعة و التسارع لهذه النقطة في القاعدة $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta\right)$

ب/ أحسب طويلتي السرعة و التسارع؟ $\qquad$ ج/ استنتج التسارع الناظمي

2) انطلاقا هذه المرة من عبارة شعاع الموضع في الإحداثيات الديكارتية

3) أ/ أوجد السرعة و التسارع في القاعدة $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ ، ثم أحسب من جديد طويلتهما و تأكد من تطابقهما مع نتائج السؤال 1/ب

حلول التمارين

التمرين الأول:

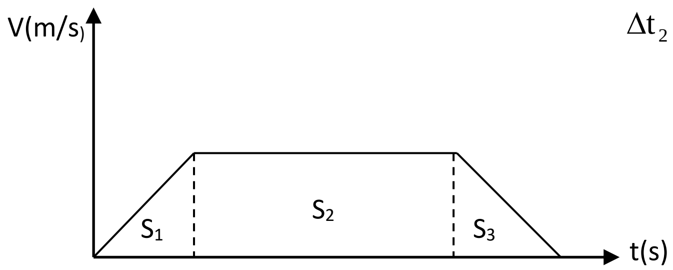
1- منحنى تغير السرعة بدلالة الزمن t

الطور I $\begin{pmatrix} t=0 \rightarrow V(o)=V_o=0 \\ \delta_1>0 \\ \Delta_{x1}=200\ \text{m} \end{pmatrix}$ الطور II $\begin{pmatrix} V_2=Cte \\ \delta_2=0 \\ \Delta_{x2}=160\ \text{m} \end{pmatrix}$

الطور III $\begin{pmatrix} \delta_3<0 \\ \Delta_{x3}=50\ \text{m} \\ V_g=0\ \text{m/s} \end{pmatrix}$

$$\Delta t_{tot}=335$$

الزمن الكلي للسرعة الثابتة Δt_2



$V=f(t)$ تعطي لنا تغير السرعة بدلالة الزمن، نستطيع نجد المسافة $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ من حساب مساحة S_1, S_2, S_3.

$$V=\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx=v\,dt \qquad \Delta_x=\int v\,dt \qquad (x_2=V_{nx}\,t)$$

2) حيث $(S_{i=1\,à\,3})$ مساحة Δ_x

$$\begin{cases} \Delta x_1=\frac{1}{2}(V_{\max}-o)\,\Delta t_1 & (S1).............(1) \\ \Delta x_2=(V_{\max}-o)\,\Delta t_2 & (S2).............(2) \\ \Delta x_3=\frac{1}{2}(V_{\max}-o)\,\Delta t_3 & (S3).............(3) \end{cases}$$

بالجمع (1) + (2) + (3)

$$2\Delta_{x1}+\Delta_{x2}+2\Delta_{x3}=V_{\max}(\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3)$$

$$400+160+100=V_{\max}(\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3)=V_{\max}\,\Delta t_{tot}$$

$$V_{\max}=\frac{660}{33}=20m/s$$

$$\Delta t_2=\frac{\Delta x_2}{V_{\max}}=\frac{160}{20}=8s$$

$$\Delta t_2=8s$$

التمرين الثاني:

$$a = 4 - t^2$$

لما $t = 3s, \quad V = 2m/s, \quad x = 9m$

لدينا

$$a = \frac{dV}{dt} \Rightarrow dV = a \ dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} V = \int_0^t a \, dt$$

$$V = \int a \ dt + V_0 \quad \Rightarrow V = \int_0^t (4 - t^2) \, dt + V_0 = V + \left[4t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^t$$

$$V = 4t - \frac{1}{3} t^3 + V_0$$

نكامل من جديد للحصول على العبارة الحرفية للإنتقال

$$x = \int_0^t v \, dt + x_0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \int_0^t (4t - \frac{1}{3} t^3 + V_0) \, dt + x_0$$

$$x = 2t^2 - \frac{1}{12} t^4 + V_0 \ t + x_0$$

$$x = -\frac{1}{12} t^4 + 2t^2 + V_0 \ t + x_0$$

بقي لنا الآن تحديد كل من الفاصلة الإبتدائية x_0 و السرعة V_0 للجسم، حسب المعطيات

$$à \quad t = 3s, \qquad V = 2m/s, \qquad x = 9m$$

$$2 = 4\,(3) - \frac{1}{3} (3)^3 + V_0 \qquad \Rightarrow \quad V_0 = -1 \, m/s$$

$$9 = -\frac{1}{12} (3)^4 + 2\,(3)^2 + (-1)\,(3) + x_0$$

$$9 = -\frac{1}{12} (81) + 2\,(9) - 3 + x_0 \qquad \Rightarrow \ x_0 = \frac{3}{4} \, m$$

في الأخيرنـكتب عبارتي السرعة والإنتقال

$$x = 2\,t^3 - \frac{1}{12} (t)^4 - t + \frac{3}{4}$$

$$V = 4t - \frac{1}{3} t^3 - 1$$

التمرين الثالث:

$$\gamma = -K\,V^2$$

1) إيجاد عبارة السرعة اللحظية $V(t)$ حيث $à \ t = 0 \, , V = V_0$

$$\gamma=\frac{dV}{dt}\Rightarrow -\mathrm{KV}^2=\frac{dV}{dt}\Rightarrow\int_{v_0}^{v}\frac{dV}{V^2}=\int_0^t -Kdt$$

$$\left[-\frac{1}{V}\right]_{v_0}^{v}=-Kt\Rightarrow -\frac{1}{V}+\frac{1}{V_0}=-Kt$$

$$-\frac{1}{V}=-Kt-\frac{1}{V_0}\quad\Rightarrow\frac{1}{V}=\frac{K\,V\,t+1}{V_0}$$

$$V=\frac{V_0}{K\,V_0t+1}$$

2) المعادلة الزمنية للحركة:

$$V=\frac{dx}{dt}=\frac{V_0}{K\,V_0t+1}$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{dx}=\frac{V_0}{K\,V_0t+1}\mathrm{dt}\Rightarrow\int_{x_0}^{x}\mathrm{dx}=\int_0^t\frac{V_0}{K\,V_0t+1}\mathrm{dt}$$

$$=\frac{1}{K}\int\frac{K\,V_0}{V_0\,t+1}\mathrm{dt}$$

$$x=\frac{1}{K}\left[\ln\,(1+\mathrm{KV_0t})\right]$$

$$\mathrm{x}=\frac{1}{K}\ln\,(1+\mathrm{KV_0t})$$

$$\mathrm{xK}=\ln\,(1+\mathrm{KV_0t})$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Kx}}=1+\mathrm{KV_0t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$V=\frac{V_0}{K\,V_0t+1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

نعوض (1) في (2)

$$V=\frac{V_0}{e^{Kx}}\quad\Rightarrow\ \mathrm{V}=\mathrm{V_0}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{Kx}}$$

التمرين الرابع:

a) $t=x-1\Rightarrow\quad y=3x-3$

طبيعة المسار: خط مستقيم

حركة مستقيمة $y=3(x-1)$

b)

$$t=\frac{x}{2}\Rightarrow y=4\frac{x^2}{4}\Rightarrow y=x^2$$

Mouvement Parabolique

c)

$$y=R-R\cos\omega t\Rightarrow\cos\omega t=1-\frac{y}{R}$$

$$x = R\arccos\left(\frac{R-4}{R}y\right) - \sqrt{2Ry - y^2}$$

2) حركة نقطة مادية على دائرة والتي تدور (Sans glissant) على مستقيم

a)

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 3t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = 1 \\ V_y = 3 \\ V_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = 2 \\ V_y = 8t \\ V_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 8 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

C)

$$\begin{cases} x = R(wt - \sin wt) \\ y = R(1-\cos wt) \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = Rw(1-\cos wt) \\ V_y = Rw\sin wt \\ V_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = Rw^2 \sin wt \\ a_y = Rw\cos wt \\ a_z = 0 \end{cases}$$

التمرين الخامس:

$$\vec{a} = e^{-t}\vec{i} + 5\sin(t)\vec{j} - 3\cos\vec{k}$$

$$\vec{V} = \int \vec{a}dt \Rightarrow \vec{V} = (-e^{-t} + V_{x_0})\vec{i} + (-5\cos(t) + V_{y_0})\vec{j} + (-3\sin(t) + V_{z_0})\vec{k}$$

$$\vec{V}(1,2,-1) \qquad t = 0$$

$$\vec{V}_{x_0} = e^0 + = 2$$

$$V_{x_0} = -5\cos + 2 = -3$$

$$V_{z_0} = -3\sin 0 - 1 = -1$$

$$\vec{V} = (2 - e^{-t})\vec{i} + (-3 - 5\cos t)\vec{j} - (1 + 3\sin t)\vec{k}$$

$$\vec{V} = (2 - e^{-t})\vec{i} - (3 + 5\cos t)\vec{j} - (1 + 3\sin t)\vec{k}$$

$$O\vec{M} = \int \vec{V}.dt$$

$$O\vec{M} = (2t + e^{-t} + x_0)\vec{i} - (3t + 5\sin t y_0)\vec{j} - (t - 3\cos t + z_0)\vec{k}$$

التمرين العاشر:

$$x(t)=\frac{g}{b^2}(b\,t+e^{-bt})$$

1- عبارة سرعة المتحرك

$$V=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{g}{b^2}(b\,t+e^{-bt})\right]$$

$$=\frac{g}{b^2}(b+b\,e^{-bt})$$

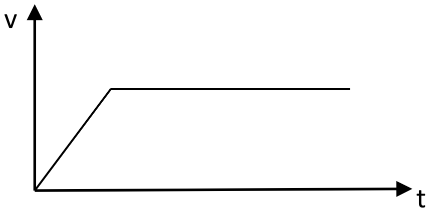
$$\text{Donc } V(t)=\frac{g}{b^2}(b+b\,e^{-bt})=\frac{g}{b}(1+e^{-bt})$$

* تحديد السرعة الإبتدائية $à \quad t=0,\quad V=\frac{g}{b}(1\text{-}1)=0$

2- منحنى المسار $V=f(t)$ من أجل قيم موجبة bb>0

$V(0)=0$

$t\to\infty \qquad V(t)=\frac{g}{b}$



3- عبارة التسارع a(t) بدلالة السرعة v(t)

$$a(t)=\frac{dV(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left\|\frac{g}{b}(1-b\,e^{-bt})\right\|=\frac{d}{dt}\frac{g}{b}-\frac{d}{dt}\left(\frac{g}{b}e^{-bt}\right)$$

$$=1+g\,e^{-bt}=g\,e^{-bt}$$

نعلم أن

$$V(t)=\frac{g}{b}-\frac{g}{b}e^{-bt}=\frac{g}{b}-\frac{a(t)}{b}$$

$$V(t)=\frac{g-a(t)}{b}\Rightarrow b\,V(t)=g-a(t)$$

$$\text{Donc}\quad a(t)=g-b\,V(t)$$

التمرين السادس عشر:

1) صيغة المسار

$$\begin{cases} x=2\cos\frac{t}{2}\text{..........................(1)}\\ y=2\sin\frac{t}{2}\text{..........................(2)}\end{cases}$$

بالتربيع و الجمع (1) و(2) نجد:

$x^2+y^2=4$ معادلة دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها 2

-(2

$$Vx=\frac{dx}{dt}=-\sin\frac{t}{2}$$
$$Vy=\frac{dy}{dt}=\cos\frac{t}{2} \qquad \Rightarrow\ \mathrm{V}=-\sin\frac{t}{2}\,\vec{\mathrm{i}}+\cos\frac{t}{2}\,\vec{\mathrm{j}}$$

3) عبارة السرعة $V=\dfrac{ds}{dt}$

$$\mathrm{V}=\sqrt{\left(-\sin\frac{t}{2}\right)^2+\cos^2\frac{t}{2}} \qquad \mathrm{V}=1\,\mathrm{m/s}$$

$$\mathrm{V}=\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} \quad \Rightarrow \int \mathrm{ds}=\int \mathrm{V\,dt} \qquad \mathrm{S}=\mathrm{V\,t}+\mathrm{C}te$$

$$\grave{a}\ \ \mathrm{t}=0,\ \mathrm{S}=0 \quad \Rightarrow \mathrm{c}=0$$

$$\mathrm{S}=\mathrm{t}$$

4)-

$a_N=?$ $\qquad$ $\mathrm{a_T}=?$

$$\mathrm{a}_x=\frac{\mathrm{dVx}}{\mathrm{dt}}=\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\ \mathrm{j}\ \ \mathrm{ay}=-\frac{1}{1}\sin\frac{t}{2}$$

$$a^2=ax^2+ay^2=0{,}25\ \ \mathrm{m/s}$$

$$\mathrm{a_T}=\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}}=0\ \ ,\ \mathrm{a_N}=\sqrt{\mathrm{a}^2-\mathrm{a_T}^2} \quad \Rightarrow \mathrm{a_N}=0{,}5\,\mathrm{m/s}$$

التسارع الناظمي

5) نصف قطر الإنحناء

$$\rho=\frac{V^2}{a_N}=\frac{1}{0{,}5} \quad \Rightarrow \mathrm{R}=2\mathrm{m}$$

6)-

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}}=\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \ddot{\theta}=0{,}2\mathrm{t}$$

$$\omega=\frac{0{,}2\,\mathrm{t}^2}{2}+\mathrm{C} \qquad \Leftarrow \int \mathrm{d}\omega=\int \ddot{\theta}\,\mathrm{dt}$$

$$\omega=0{,}1\,\mathrm{t}^2+\mathrm{C}\quad \grave{a}\ \mathrm{t}=0 \quad \mathrm{S}=0, \qquad \omega=0$$

$$\omega=0{,}1\,\mathrm{t}^2$$

إستنتاج السرعة الخطية $V=\omega R=0{,}1\,\mathrm{t}^2\ \mathrm{R}=0{,}2\,\mathrm{t}^2$

تبلغ السرعة القيمة $10\ \mathrm{m/s}$ في اللحظة $10=0{,}2\,\mathrm{t}^2$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{t}=7{,}1\mathrm{S}$$

تكامل السرعة الزاوية فنحصل على الزاوية الممسوحة لنحسب المسافة

$$\theta=\omega\,\mathrm{dt}=\frac{0{,}1}{3}t^3 \Rightarrow \quad \mathrm{S}=\mathrm{R}\,\theta=2\,\frac{0{,}1}{3}(7{,}1)^3$$

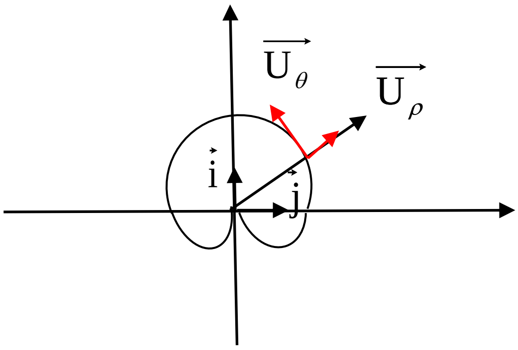
$$S=23{,}9\,\mathrm{m}$$

التمرين التاسع عشر:

$$\begin{cases} \rho = 1+\sin\theta \\ \theta = \omega\, t \end{cases}$$

1) رسم مسار النقطة

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{4}$	π	$5\frac{\pi}{4}$	$6\frac{\pi}{4}=3\frac{\pi}{2}$	$7\frac{\pi}{4}$	2π
ρ	1	1,70	2	1,70	1	0,29	0	0,29	1



2) شعاعي السرعة في المعلم القطبي

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\rho} = \rho.\vec{U}_\rho$$

$$\vec{V} = \dot{\rho}\,\overrightarrow{U_\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\vec{V}\begin{cases} \dot{\rho} = w\cos\theta \\ \rho\,\dot{\theta} = w\,(1\text{-}\sin\theta) \end{cases} \qquad \vec{V} = w\cos\theta\,\vec{U}_\rho + w\,(1\text{-}\sin\theta)\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{w^2\cos\theta^2 + w^2\,(1\text{-}\sin^2\theta)}$$

$$\left|\vec{V}\right| = \left[w^2\cos\theta^2 + w^2 + w^2\sin^2\theta - 2w^2\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}} = w\sqrt{2}\,\sqrt{1+\sin\theta}$$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{2}\,w\sqrt{\rho}$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{U}_\rho + (2\dot{\rho}\ddot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{U}_\theta$$

$$\vec{\gamma}\begin{cases} -w^2\sin\theta + w^2\,(1+\cos\theta) = -2w^2\sin\theta - w^2 \\ 2w^2\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{\gamma} = -w^2\,(2\sin\theta+1)\,\overrightarrow{U_\rho} + 2\,w^2\cos\theta\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\vec{\gamma} = \left[w^4\,(2\sin\theta+1)^2 + 4\,w^4\cos\theta^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[4w^4\sin^2\theta + w^4 + 4w^4\sin\theta + 4w^4\cos\theta^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{\gamma} = \left[5w^4 + 4w^4\sin\theta\right]^{\frac{1}{2}} = w\,\sqrt{5+4\sin\theta}$$

3) عند $t = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{V} = 2\,w\,\vec{U}_\theta \qquad ,\gamma = \text{-}3w^2\,\overrightarrow{U_\rho}$$

$$à \ \ t=\frac{\pi}{2} \qquad \vec{V}\perp\vec{\gamma} \ \Rightarrow$$ حركة دائرية منتظمة

4) عبارة نصف قطر إنحناء المسار: R

$$R=\frac{V^2}{\gamma_N} \qquad \gamma^2=\gamma_N{}^2+\gamma_T{}^2 \qquad \Rightarrow \gamma_N{}^2=\gamma^2-\gamma_T{}^2$$

$$\gamma_T=\frac{dv}{dt}=w\sqrt{2}\,\frac{1}{2}(1+\sin\theta)^{-\frac{1}{2}}\ (w\cos\theta)$$

$$\gamma_N{}^2=w^4\,(5+4\sin\theta)-\frac{w^4\cos^2\theta}{2\,(1+\sin\theta)}=\frac{10\,w^4+10\,w^4\sin\theta+8\,w^4\sin\theta+8\,w^4\sin^2\theta-w^4+w^4\sin^2\theta}{2\,(1+\sin\vartheta)}$$

$$\gamma_N{}^2=\frac{9\,w^4+18\,w^4\sin\theta+9\,w^4\sin^2\theta}{2\,(1+\sin\theta)}=\frac{9\,w^4(1+2\sin\theta+\sin^2\theta)}{2\,(1+\sin\theta)}=\frac{9\,w^4(1+\sin\theta)}{2\,(1+\sin\theta)}=\frac{9\,w^4(1+\sin\theta)}{2}$$

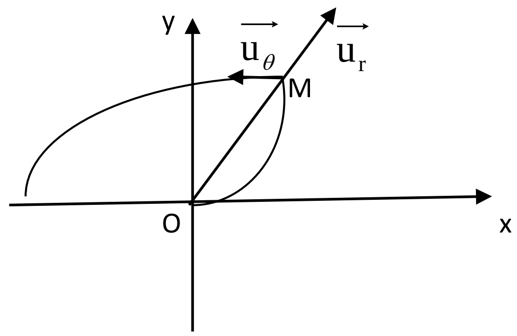
$$R=\frac{2w^2\,(1=Sin\theta)}{\frac{3w^2}{\sqrt{2}}(1+\sin)^{\frac{1}{2}}} \qquad \Rightarrow \ R=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1+\sin\theta)^{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\rho}$$

$$à \ \ t=0 \qquad R=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

التمرين الثالث و العشرون:

-1 $r=K\,\theta^2$ ، $r=3\,\theta^2$ من أجل $K=3$ $\quad 0\le\vartheta<\pi$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{4}$	π
r	0	1,84	7,39	5,29	29,57



-2 شعاع السرعة $\vec{V}$

$$\vec{V}=\frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r}+r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_\theta}=\frac{dr}{dv}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_r}+r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_r}$$

$$V=6\theta\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U_r}+3\theta^2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{U\theta}$$

3- شعاعي السرعة والتسارع للنقطة M عند

$$\theta=\frac{\pi}{2}\qquad\qquad \frac{d\theta}{dt}=w=Cte,$$

$$\vec{V}(\theta=\frac{\pi}{2})=3\pi\, w\overrightarrow{U_r}+\frac{3\pi^2}{4}w\overrightarrow{U_\theta}$$

أما شعاع التسارع في جملة الإحداثيات القطبية:

$$\vec{\gamma}=\left[\ddot{r}+r\,\dot{\theta}^2\right]\overrightarrow{U_r}+\left[2\,\dot{r}\,\dot{\theta}+r\,\ddot{\theta}\right]\overrightarrow{U_\theta}$$

$$=(6-3\theta^2)\,w^2\,\overrightarrow{U_r}+120\,w^2\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\vec{\gamma}\,(\theta=\frac{\pi}{2})=(6-\frac{3\pi^2}{4})\,w^2\,\overrightarrow{U_r}+6\,\pi\,w^2\,\overrightarrow{U_\theta}$$

4- يكون التسارع ناظمي إذا كانت المركبة المماسية معدومة $\gamma_T=0\quad \gamma=\gamma_N$

$$\gamma_T=\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\left[36\,\theta^2\,w^2+9\,\theta^4\,w^2\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

$$=w^2\frac{d}{d\theta}\left[36\,\theta^2+9\,\theta^4\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

$$=w^2\frac{\left[36\,\theta+18\,\theta^3\right]}{\sqrt{\left[36\,\theta^2+9\,\theta^4\right]}}=0$$

$$\Rightarrow\ 36\,\theta+18\,\theta^3=0$$

$$\theta\,(36+18\,\theta^3)=0$$

لهذه المعادلة حل وحيد وهو يقابل $\theta=0$ ، ما عدا مبدأ الإحداثيات لا يوجد موضعا يكون فيه التسارع مساويا لتسارع الناظمي.

التمرين الرابع و العشرون:

1) مراحل الحركة:

لدينا المجال - $[0,2]\leftarrow t$ المعادلة الزمنية $r\ =\ a\,t+b$

$$\theta=\frac{\pi}{4}\qquad r=t+3\qquad a=\frac{5-3}{2-0}=1\qquad b=3$$

$$\vec{V}=\dot{r}\ \overrightarrow{U_r}+r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U\theta}\qquad\Rightarrow\qquad \vec{V}=\vec{U}_r\qquad \left|\vec{V}\right|=1\,m/s$$

حركة مستقيمة منتظمة

$\theta = a\,t + b$ $\quad r = 5m$ $\quad t\,[2,6]$

$à\ \ t = 2$ $\quad \vartheta = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow b = \dfrac{\pi}{8}$ $\quad a = \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}}{\delta - 2} = \dfrac{\pi}{16}$

$\theta = \dfrac{\pi}{16}\,t + \dfrac{\pi}{8}$

حركة دائرية منتظمة من $[0,2]$

$à\ \ t = 0$ $\quad r = 3$

$t = 1$ $\quad r = 4$

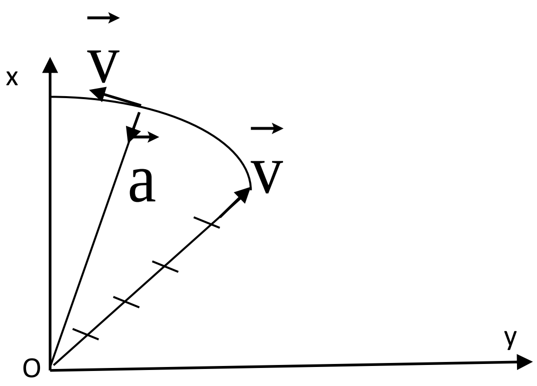
$t = 2$ $\quad r = 5$

- المجال $[2,6]$

$à\ \ t = 2$ $\quad \theta = \dfrac{\pi}{4}$

$t = 4$ $\quad \theta = \dfrac{3\pi}{2}$

$t = 6$ $\quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$



3) في اللحظة $t = 1\ s$

$V = 1\,\text{m/s}$ $\quad r = 4\,\text{m}$

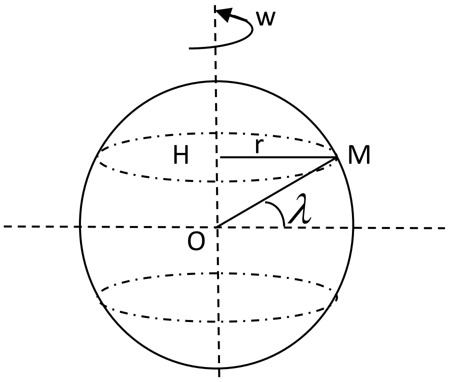
$à\ V = \dot{\theta}\,r = \dfrac{\pi}{16}5 \Rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{\pi}{16}$ $\quad \Leftarrow à\ t = 4\,s \quad \theta = \dfrac{3\pi}{8}$

$V = 0{,}99\ \text{m/s}$ $\quad \vec{a} = \dfrac{d|\vec{V}|}{dt}\vec{U}_r + \dfrac{V^2}{r}\vec{U}_N$

$\vec{a} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{U_N} = 0{,}2\,\overrightarrow{U_N}$

$a = 0{,}2\ \text{m/s}^2$

التمرين الخامس و العشرون:



$$V = w\,r$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{HM}$$

في مثلث OHM $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{HM}{OM}$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM}$$

$$HM = r = \mathrm{OM}\sin\theta = \mathrm{OM}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$$

$$w = \mathrm{Cte}$$

$$\mathrm{r} = \mathrm{R}\cos\lambda = \mathrm{Cte}$$

$$\theta = \omega$$

$$V = w\,\mathrm{R}\cos\lambda$$

بما أن الحركة دائرية نستعمل الإحداثيات ت القطبية

$$\begin{cases} \vec{r} = r\,\vec{\mathrm{U}}_{\mathrm{r}} \\ \vec{V} = \dot{r}\,\overrightarrow{U_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{U\theta} \\ \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{\mathrm{U}}_{\mathrm{r}} + (\mathrm{r}\ddot{\theta} + 2\dot{\mathrm{r}}\dot{\theta})\,\overrightarrow{\mathrm{U}_\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{U}_r = \frac{\vec{r}}{r} \\ w = \frac{d\theta}{dt} = w \end{cases}$$

$Comme\ \mathrm{r} = \mathrm{Cte}$

$$\mathrm{V} = \omega\,\mathrm{r}$$

مركزية $\vec{a} = -\mathrm{r}\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{\mathrm{U}_{\mathrm{r}}}$ c'est-à-dire $\vec{a}$ est centripète

$$a = \mathrm{r}\,\dot{\theta}^2 = rw^2$$

3) حالة M على سطح الأرض $R = 638\ \mathrm{Km}$ $\lambda = 45°$ $T = 24\mathrm{h}$

$$\mathrm{V} = \mathrm{R}\cos\lambda$$

$$T = 24h = 86400\ \mathrm{s}$$

$$a = \omega^2\ \mathrm{R}\cos\lambda$$

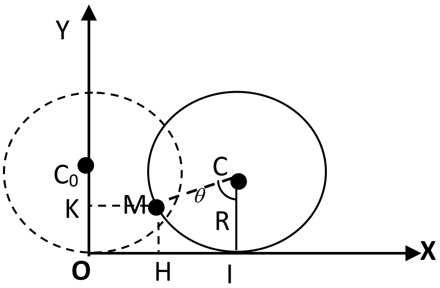
$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 7{,}3\,10^{-5}\ \mathrm{rod/s}$$

$$\omega = 7{,}3\,10^{-5}\ 638\,10^{3}\ \cos 45 = 32{,}8\ \mathrm{ms^{-1}}$$

$$a = \left(7{,}3\,10^{-5}\right)^2\ 638\,10^{3}\ \cos 45 = 2{,}4\,10^{-3}\ \mathrm{m/s}$$

التمرين السادس و العشرون:

إحداثيات نقطة M



$x = OH = OI - HI$

$HI = R\sin\theta$

$OI = C_0C = v\,t$

$\mathrm{OI} = \mathrm{R}\theta$

$\mathrm{x} = \mathrm{R}\theta - \mathrm{R}\sin\theta$

$\mathrm{x} = \mathrm{R}(\theta - \sin\theta)$

$\theta = \dfrac{v}{R}t$

$y = OK = OC_0 - KC_0$

$= \mathrm{R} - \mathrm{R}\cos\theta$

$\mathrm{y} = \mathrm{R}(1 - \cos\theta)$

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{R}(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1-\cos\theta) \end{cases}$$

2) سرعة و تسارع النقطة M

$$OI = C_0C = v\,t$$

$$v = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{V} = R(\theta - \theta\cos\theta)\dot{\vec{i}} + R\theta\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\theta = \omega t = \frac{v}{R}t$$

$$\vec{V} = R\theta(1-\cos\theta)\dot{\vec{i}} + R\theta\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{V} = V(1-\cos\theta)\dot{\vec{i}} + V\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{V^2}{R}\sin\theta\,\dot{\mathrm{i}} + \frac{V^2}{R}\cos\theta\,\dot{\mathrm{j}}$$

3) قيم $\vec{a}$ و $\vec{V}$ لما M يلمس الأرض $\theta = 2\pi$

$$V = 2V\sin\frac{\theta}{2} = \frac{V}{2R}t$$

4) $\vec{a}$ نابذ نحو المركز (مركزي)

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\left(\frac{V^2}{R}\right)^2 \sin^2\theta - \left(\frac{V^2}{R}\right)^2 \cos^2\theta}$$

$$\gamma = \frac{V^2}{R}$$

التسارع ثابت الطويلة ومتجه نحو مركز العجلة

- حسابه

$$\gamma = \frac{\left(130\,10^3 / 3600\right)^2}{35\ 10^2} = 0.138\ \ \mathrm{m/s^2}$$

التمرين الثامن و العشرون:

$$\begin{cases} x = a\cos wt \\ y = a\sin wt \\ z = hwt \end{cases}$$

أ- الحركة في المستوي (oxy) $\quad z = 0 \quad x^2 + y^2 = a^2$

إذن هي معادلة دائرة مركزها (o) ونصف قطرها a

سرعة H

$$V_H{}^2 = x_H{}^2 + y_H{}^2 \Rightarrow V_H{}^2 = a^2w^2\sin^2 wt + a^2w^2\cos^2 wt$$

ثابتة

$$V_H = aw \qquad V_H{}^2 = a^2w^2$$

H لها حركة دائرية منتظمة

-(b

$$V_z(H) = \dot{Z} = wh$$

حركة M على المستوي (oxy) هي حركة النقطة H بحركة دائرية منتظمة وكذلك وفق المركبة z ب $h\omega$ حركة مستقيمة منتظمة منه الحركة لولبية اسطوانية

-(2

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HM}} \qquad \vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{U}_r + Z\vec{U}_z$$

$$\vec{V} = a\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{Z}\vec{U}_z = aw\vec{U}_\theta + hw\vec{U}_z$$

$$|\vec{V}| = w\sqrt{a^2 + h^2}$$

نلاحظ أن سرعة OM المعلم R ثابتة

- الزاوية بين لشعاع

السرعة $\vec{V}(M)$ والمحور (oz)

$$\vec{V}\ \vec{\mathrm{U}}_z = \left(aw\vec{U}_o + hw\vec{U}_z\right)\vec{U}_z = hw \quad , \vec{V}\ \vec{\mathrm{U}}_z = V\ \mathrm{U}_z \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{hw}{\omega\sqrt{\mathrm{a}^2 + h^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{\mathrm{a}^2 + h^2}}$$

α : ثابتة

3)- مركبات التسارع

$$\vec{\mathrm{a}}(M) = \frac{d\vec{V}}{dt} = aw\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} + hw\frac{d\vec{U}_z}{dt}$$

$$= aw^2\vec{U}_r$$

4)-مركبات شعاعي السرعة والتسارع في المعلم الديكارتي

$$\begin{cases} x = a\cos wt \\ y = a\sin wt \\ z = hwt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = aw\sin wt \\ V_y = aw\cos wt \\ V_z = hw \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = aw^2\cos wt \\ a_y = aw^2\sin wt \\ a_z = 0 \end{cases}$$

$$|\vec{V}| = w\sqrt{a^2 + h^2} \qquad |\vec{\mathrm{a}}| = aw^2$$

5)- أشعة معلم Frenet

المركبة المماسية $\vec{U}_t$

$$\vec{U}_t = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{-aw\sin wt\,\vec{i} + aw\cos wt\,\vec{j} + hw\,\vec{k}}{\omega\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$\vec{U}_t = \frac{-a}{\sqrt{a^2+h^2}}\sin wt\,\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\cos wt\,\vec{j} + \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\,\vec{k}$$

المركبة الناظمية $\vec{U}_N$

$\vec{U}_N = ?$ $\qquad \vec{K} = \vec{U}_t \wedge \vec{U}_N \Rightarrow \vec{U}_N = \vec{K} \wedge \vec{U}_t$

$$\vec{U}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{-a}{\sqrt{a^2+h^2}}\sin wt\,\vec{i} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\cos wt\,\vec{j} \\ \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\,\vec{k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\cos wt \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+h^2}}\sin wt \end{pmatrix} \text{ alors } \quad \vec{U}_N = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}(\cos wt\,\vec{i} + \cos wt\,\vec{j})$$

الفصل VII : تحريك جملة نقاط مادية

Dynamique des Points Matériels

*** مقدمة:**

في الفصول السابقة درسنا حركة وتحريك الجسم الواحد، دون إعطاء أهمية إلى حركة أو تحريك الجسيمات المجاورة له.

- لكن في الواقع وفي الحياة العملية بإمكاننا أن نجد عدة جسيمات في حالة تفاعل أو تأثير متبادل فيما بينها، أو تتحرك الواحدة بالنسبة للأخرى أو جميعها بالنسبة لمجموعة (جملة) أخرى.

- كمثال: كل جسم صلب أو مائع يمكن إعتباره كمجموعة كبيرة من الجسيمات ذات كتل صغيرة بحيث مجموع هذه الكتل تساوي كتلة الجسم وما دام الجسم صلب متماسكا بذاته فيمكن أن نستنتج أن الجسيمات التي تكون الجسم في تفاعل متبادل بينها. وهذا التفاعل يتمثل في قوى التجاذب بين هذه الجسيمات.

جملة الجسيمات يمكن أن تكون منفصلة (مثل المجموعة الشمسية التي تتكون من الشمس، الأرض...) ويمكن أن تكون متصلة متماسكة فيما بينها مثل الجسم الصلب، السائل....إلخ.

- القوى التي تؤثر بها الجسيمات على بعضها (من نفس الجملة) تسمى قوى داخلية.

- من القانون الثالث لنيوتن (مبدأ الفعل ورد الفعل) نستنتج أن محصلة القوى الداخلية تساوي صفرا لأنها تنعدم مثنى مثنى.

- يمكن لجسيمات الجملة أن تكون خاضعة لقوى مؤثرة عليها من أجسام أو جسيمات لا تنتمي إلى نفس الجملة ولكن تنتمي إلى جملة ثانية هذه القوى تسمى قوى خارجية.

إذا كانت محصلة القوى الخارجية تساوي صفرا نقول أن هذه الجملة عبارة عن جملة معزولة (حرة).

1- حركة مركز العطالة (مركز الثقل):

أ- شعاع موضع مركز العطالة:

لتكن مجموعة من الجسيمات كتلة كل واحدة $m_1, m_2; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; m_m$، تتحرك بالنسبة لمعلم عطالي(O,x,y,z) يعرف مركز عطالة الجملة بالشعاع:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{m_1\overrightarrow{O\mathcal{M}_1} + m_2\overrightarrow{O\mathcal{M}_2} + \cdots \ldots\ldots + m_n\overrightarrow{O\mathcal{M}_n}}{m_1 + m_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n}$$

أو:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{VII}-1)$$

بوضع $m = m_1 + m_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$

والتي تسمى الكتلة الإجمالية الكلية للجملة

$\overrightarrow{O\mathcal{M}_i}$ يمثل شعاع الموضع للجسم i (موضع الجسم i بالنسبة للمعلم العطالي(O,x,y,z)

* إحداثيات مركز العطالة هو:

$$\overrightarrow{OC}\begin{cases} x_c=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m} \\ y_c=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m} \\ z_c=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m} \end{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (VII-2)$$

ب- شعاع سرعة مركز العطالة:

حيث $\vec{v}_i$ سرعة الجسم i من الجملة

$$\vec{V}_i=\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{m} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (VII-3)$$

$$\vec{v}_C=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots\dots\dots\dots\dots+m_n\vec{v}_n}{m_1+m_2+\cdots\dots\dots\dots\dots+m_n}$$

ج- شعاع تسارع مركز العطالة:

$$\vec{\gamma}_c=\frac{d\vec{v}_c}{dt}=\frac{1}{m}\sum m_i\vec{\gamma}_i \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (VII-4)$$

ملاحظة: عندما تكون القوى الخارجية المؤثرة على الجملة هي قوى الجاذبية الأرضية يسمى مركز العطالة ب مركز الثقل ويرمز له بـ $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}$

2- نظرية حركة مركز العطالة :

أ- كمية الحركة الكلية لجملة الجسيمات "الدفع الخطي" (بالنسبة لمعلم عطالي):

تعرف كمية الحركة الكلية للجملة كمايلي:

$$\vec{P}=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots\dots\dots\dots\dots+m_n\vec{v}_n$$

$$\vec{P}=m\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vec{v}_i}{m}=m\vec{v}_c$$

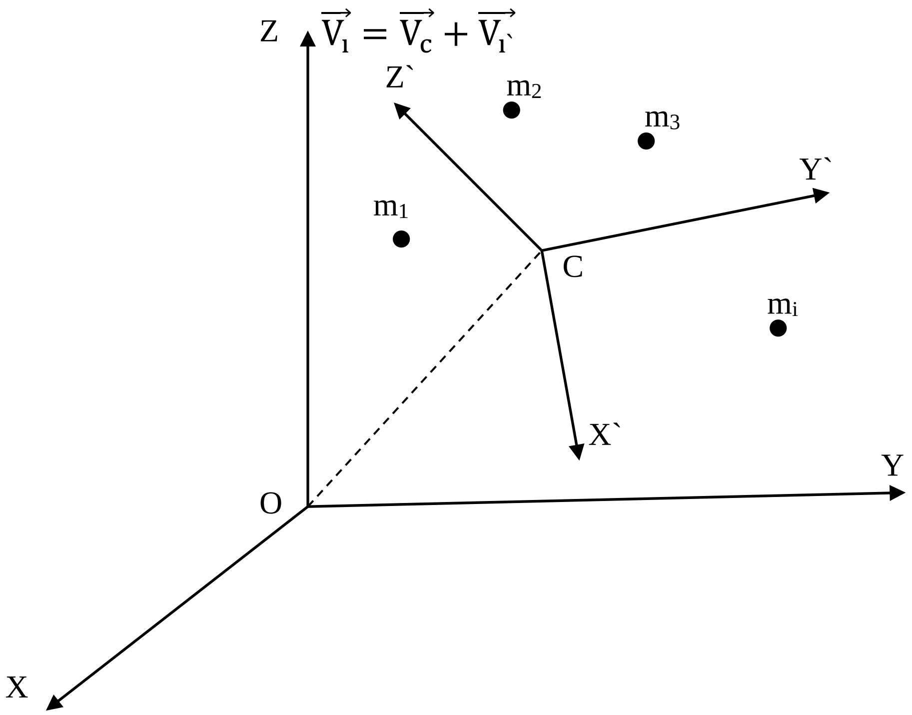
$$\vec{P} = m\vec{v}_c \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (VII-5)$$

- كمية الحركة الكلية لجملة تساوي كمية الحركة لجسم كتلته تساوي كتلة كل الجسيمات ويوضع في مركز العطالة ويتحرك بسرعة مركز العطالة.

ملاحظة:

- كمية الحركة الكلية لجملة جسيمات في معلم غير عطالي (c,x`,y`,z`) هي:

$$\overrightarrow{Om_i} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{Cm_i}$$



الشكل **1-VII:** حركة مركز العطالة

حيث :

$$\vec{V_{i`}} = \frac{d\overrightarrow{Om_i}}{dt}$$

$$\vec{P} = \sum_i m_i\vec{v}_i = \sum m_i(\vec{v}_c + \vec{v}_{i`}) = m\vec{v}_c + \sum m_i\vec{v}_{i`}$$

$$\Rightarrow \sum m_i\vec{v}_{i`} = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{P`} = \vec{0}$$

$\vec{P`}$ كمية الحركة الكلية بالنسبة للمعلم (O,x`,y`,z`) تساوي صفرا.

ب- نظرية حركة مركز العطالة:

لتكن جملة جسيمات تتحرك كل واحدة منها بسرعة $\vec{v}_j$ تحت تأثير قوى خارجية محصلتها $\vec{F}_j^{\,e}$ وقوى داخلية محصلتها $\vec{F}_j^{\,i}$.

حسب المبدأ الأساسي للتحريك، كمية الحركة الكلية للجملة:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_j m_j\vec{v}_j$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt}(m_j\vec{v}_j) = \sum(\vec{F}_j^e + \vec{F}_j^i)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_j \vec{F}_j^e + \sum_j \vec{F}_j^i$$

- محصلة القوى الداخلية لجملة جسيمات تساوي صفر

$$\sum_j \vec{F}_j^i = 0$$

ومنه:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_j \vec{F}_j^e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (VII-6)$$

- إذن التغيير في كمية الكلية $\vec{P}$ لجملة جسيمات يساوي محصلة القوى الخارجية.
- وعليه يمكن تطبيق المبدأ الأساسي للتحريك على جملة جسيمات.
- في حالة جملة جسيمات معزولة عن التأثير الخارجي أو حرة معناه$(\sum \vec{F}_j^{\,e} = \vec{0})$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \text{ومنه} \quad \vec{P} = 0$$

- في حالة الكتلة الإجمالية ثابتة

$$\vec{P} = m\vec{v}_c$$

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum_j \vec{F}_j^e$$

$$\Rightarrow m\vec{\gamma}_c = \sum_j \vec{F}_j^e \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (VII-7)$$

وهي عبارة مشابهة لما تحصلنا عليه في حالة تحريك جسم واحد ذي كتلة ثابتة.

نص النظرية:

في معلم عطالي (O,x,y,z) يتحريك مركز العطالة لجملة جسيمات مثلما يتحرك جسم ذو كتلة تساوي الكتلة الكلية للجملة تحت تأثير قوى خارجية محصلتها $\sum_j \vec{F}_j^e$ والتي تساوي محصلة القوى الخارجية التي تؤثر على الجملة.

3- نظرية العزم الحركي:

أ- العزم الحركي لجملة جسيمات (الدفع الزاوي):

- العزم الحركي لجملة جسيمات بالنسبة لنقطة O هو الشعاع التالي:

$$\vec{L}/o = \sum_j \overrightarrow{O\mathcal{M}_j} \wedge m_j\vec{v}_j = \sum_j \vec{L}/o$$

حيث $\overrightarrow{O\mathcal{M}_j}$ و $m_j\vec{v}_j$ يمثلان شعاع الموضع للجسم j وكمية الحركة على التوالي، أما العزم الحركي بالنسبة للنقطة A من الفضاء.

$$\vec{L}/A = \sum_j \overrightarrow{A\mathcal{M}_j} \wedge m_j\vec{v}_j$$

$$\overrightarrow{A\mathcal{M}_j} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{O\mathcal{M}_j}$$

$$\vec{L}/A = \sum (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{O\mathcal{M}_j}) \wedge m_j\vec{v}_j$$

$$\vec{L}/A = \sum \overrightarrow{AO} \wedge m_j\vec{v}_j + \sum \overrightarrow{O\mathcal{M}_j} \wedge m_j\vec{v}_j$$

حيث أن:

$$\sum \overrightarrow{O\mathcal{M}_j} \wedge m_j\vec{v}_j = \vec{L}/o$$

منه:

$$\vec{L}/A = \vec{L}/o + \overrightarrow{AO} \wedge m\vec{v}_c \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (VII-8)$$

ب- نظرية العزم الحركي:

$$\vec{L}/o = \sum_j \overrightarrow{O\mathcal{M}_j} \wedge m_j\vec{v}_j$$

$$\frac{d\vec{L}/_o}{dt} = \sum_j \frac{d\overrightarrow{O\mathcal{M}_j}}{dt} \wedge m_j\vec{v}_j + \sum \overrightarrow{O\mathcal{M}_j} \wedge \frac{dm_j\vec{v}_j}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}/_o}{dt} = \sum \overrightarrow{O\mathcal{M}_j} \wedge \frac{d\vec{P}_j}{dt}$$

حيث

$$\frac{d\vec{P}_j}{dt} = \vec{F}_j^e + \vec{F}_j^i$$

نضع: $\vec{F}_j^i = \sum_{j\neq k} \vec{F}_{jk}^i$

حيث $\vec{F}_{jk}^i$ القوة التي يؤثر بها الجسم K من نفس الجملة الجسيمات على الجسم j.

$$\frac{d\,\vec{L}/_o}{dt} = \sum_j \overrightarrow{O\mathcal{M}_j} \wedge (\vec{F}_j^e + \sum_{j\neq k} \vec{F}_{jk}^i)$$

$$\frac{d\,\vec{L}/_o}{dt} = \sum_j \overrightarrow{O\mathcal{M}_j} \wedge \vec{F}_j^e + \sum \overrightarrow{O\mathcal{M}_j} \wedge \sum_{j\neq k} \vec{F}_{jk}^i$$

حيث أن عزم القوة $\vec{F}_j^e$ هو:

$$\sum_j \overrightarrow{O\mathcal{M}_j} \wedge \vec{F}_j^e = \mathcal{M}/o\left(\vec{F}_j^e\right)$$

$$\mathrm{I} = \overrightarrow{O\mathcal{M}_1} \wedge \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots \ldots \ldots + \vec{F}_{1n}\right) + \overrightarrow{O\mathcal{M}_2} \wedge \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \cdots \ldots \ldots + \vec{F}_{2n}\right) + \cdots \ldots \ldots \ldots \overrightarrow{O\mathcal{M}_n} \wedge \left(\vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \cdots \ldots \ldots + \vec{F}_{n,n-1}\right)$$

حيث:

$\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$ (مبدأ الفعل ورد الفعل بين جسمين)

$$\mathrm{I} = \left(\overrightarrow{O\mathcal{M}_2} - \overrightarrow{O\mathcal{M}_1}\right) \wedge \vec{F}_{21} + \left(\overrightarrow{O\mathcal{M}_3} - \overrightarrow{O\mathcal{M}_1}\right) \wedge \vec{F}_{31} + \cdots \ldots \ldots + \left(\overrightarrow{O\mathcal{M}_n} - \overrightarrow{O\mathcal{M}_{n-1}}\right) \wedge \vec{F}_{nn-1}$$

$$\mathrm{I} = \overrightarrow{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2} \wedge \vec{F}_{21} + \overrightarrow{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_3} \wedge \vec{F}_{31} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \overrightarrow{\mathcal{M}_n\mathcal{M}_{n-1}} \wedge \vec{F}_{nn-1}$$

حيث $\overrightarrow{\mathcal{M}_j\mathcal{M}_k} // \vec{F}_{jk}$

(لأنه معلوم أن القوة الداخلية بين جسمين إثنين نكون موازية للمستقيم الواصل بين الجسمين)

$$\Rightarrow \quad \sum \overrightarrow{O\mathcal{M}_j} \wedge \sum_{j \neq k} \vec{F}_{jk} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}/_{o}}{dt} = \mathcal{M}/o\left(\vec{F}_j^e\right) = \sum \overrightarrow{O\mathcal{M}_j} \wedge \vec{F}_j^e \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (VII-9)$$

نص النظرية:

مشتق العزم الحركي الكلي بالنسبة للزمن لجملة جسيمات بالنسبة لنقطة O يساوي محصلة العزوم لكل القوى الخارجية بالنسبة لنفس النقطة.

4- نظرية الطاقة الحركية لجملة جسيمات:

أ- تعريف الطاقة الحركية الكلية:

لتكن مجموعة جسمات تتحرك في معلم عطالي (O,x,y,z) الطاقة الحركية الكلية هي مجموع الطاقات الحركية لجميع الجسيمات

$$E_c = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (VII-10)$$

ب- نظرية الطاقة الحركية الكلية:

حسب المبدأ الأساسي للتحريك

$$m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \vec{F}_j^e + \vec{F}_j^i$$

من أجل إنتقال عنصري $\overrightarrow{d\ell}$:

$$d\vec{P} = \vec{V}_j . dt$$

$$m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \overrightarrow{d\ell} = (\vec{F}_j^e + \vec{F}_j^i) \overrightarrow{d\ell}$$

$$m_j . \vec{v}_j . d\vec{v}_j = \vec{F}_j^e . \vec{v}_j . dt + \vec{F}_j^i . \vec{v}_j . dt$$

$$d\left[\frac{1}{2} m_j . v_j^2\right] = \vec{F}_j^e . \overrightarrow{d\ell} + \vec{F}_j^i . \overrightarrow{d\ell}$$

هذه العلاقة تمثل التغير الجزئي للطاقة الحركية لجسم واحد.

أما التغير الجزئي للطاقة الحركية الكلية للجملة:

$$dE_c = \sum_j dE_{cj} = \sum_j \vec{F}_j^e . \overrightarrow{d\ell} + \sum_j \vec{F}_j^i . \overrightarrow{d\ell}$$

بالتكامل بين A و B نحصل على:

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum_j \int_A^B \vec{F}_j^e . \overrightarrow{d\ell} + \sum_j \int_A^B \vec{F}_j^i . \overrightarrow{d\ell}$$

$$E_c(B) - E_c(A) = \omega_{AB}^e + \omega_{AB}^i \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (VII - 11)$$

ω_{AB}^e عمل محصلة القوى الخارجية عند إنتقال الجسم من A الى B

ω_{AB}^i عمل محصلة القوى الداخلية عند إنتقال الجسم من A الى B

نص النظرية:

- التغيير في الطاقة الحركية لجملة جسيمات بين نقطتين A و B يساوي مجموع أعمال القوى الداخلية منها والخارجية التي تؤثر على الجسمات بين النقطتين A و B.

5- إنحفاظ الطاقة الكلية:

أ- الطاقة الكامنة الداخلية:

نفرض أن محصلة القوى الداخلية مشتقة من طاقة كامنة E_p^i أي

$$\vec{F}^i = -\overrightarrow{grad}\, E_p^i$$

$$w_{A-B}(\vec{F}_i) = \sum_j \int \vec{F}_j^i . \overrightarrow{d\ell} = -\int_A^B dE_p^i$$

$$w_{A-B}^i = E_p^i(A) - E_p^i(B)$$

بالنعويض في نظرية الطاقة الحركية $E_c(B) - E_c(A) = w_{A-B}^e + w_{A-B}^i$ نحصل على:

$$E_c(B) - E_c(A) = E_p^i(A) - E_p^i(B) + \sum_j \int_A^B \vec{F}_j^e . \overrightarrow{d\ell}$$

$$\left[E_c(B) + E_p^i(B)\right] - \left[E_c(A) + E_p^i(A)\right] = \sum_j \int_A^B \vec{F}_j^e . \overrightarrow{d\ell}$$

المقدار $E_{\mathcal{M}} = E_c + E_p^i$ يسمى الطاقة الذاتية أو الأصلية (Energie Propre) لجملة الجسيمات.

$$\Delta E_{MP} = w_{A-B}^e \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (VII - 12)$$

- إذن التغيير في الطاقة الذاتية للجملة بين نقطتين A و B يساوي عمل القوى الخارجية المؤثرة على الجملة.

ب- الطاقة الكامنة الخارجية:

من بين القوى الخارجية المؤثرة على جسيمات الجملة قوى مشتقة من طاقة كامنة (أي محافظة) نرمز لها بـ $\vec{F}_{jc}^{e}$ وأخرى غير محافظة $\vec{F}_{jN}^{e}$.

$$\vec{F}_{j}^{e} = \vec{F}_{jc}^{e} + \vec{F}_{jN}^{e}$$

حيث أن: $\vec{F}_{jc}^{e} = -\overrightarrow{grad}\, E_{PJ}^{e}$

ومنه فإن عمل القوى الخارجية يكتب كمايلي:

$$w_{A-B}^{e} = \sum_{j}\int_{A}^{B} \vec{F}_{jN}^{e}.\overrightarrow{d\ell} + \left[E_{p}^{e}(A) - E_{p}^{e}(B)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (VII-13)$$

إذن عمل محصلة القوى بين نقطتين يساوي التغيير في الطاقة الكامنة الخارجية زائد عمل القوى الخارجية غير محافظة.

ملاحظة:

- في حالة إنعدام القوى الخارجية غير المحافظة $\vec{F}_{jN}^{e} = \vec{0}$ فإن عمل القوى الخارجية المؤثرة على الجملة يساوي التغيير في الطاقة الكامنة.

ج- مبدأ إنحفاظالطاقة الكلية للجملة:

$$E_{p} = E_{p}^{i} + E_{p}^{e}$$

من نظرية الطاقة الحركية

$$E_{c}(B) - E_{c}(A) = E_{p}^{i}(A) - E_{p}^{i}(B) + E_{p}^{e}(A) - E_{p}^{e}(B) + \sum_{j}\int_{A}^{B} \vec{F}_{jN}^{e}.\overrightarrow{d\ell}$$

$$\left[E_{c}(B) + E_{p}(B)\right] - \left[E_{c}(A) + E_{p}(A)\right] = \sum_{j}\int_{A}^{B} \vec{F}_{jN}^{e}.\overrightarrow{d\ell}$$

$$\Rightarrow \quad E_{\mathcal{M}}(B) - E_{\mathcal{M}}(A) = \sum_{j}\int_{A}^{B} \vec{F}_{jN}^{e}.\overrightarrow{d\ell} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (VII-14)$$

- التغير في الطاقة الميكانيكية بين نقطتين يساوي عمل القوى الخارجية غير المحافظة إن كانت موجودة.
- في حالة إنعدام هذه الأخيرة نحصل على مبدأ إنحفاظ الطاقة الكلية

$$E_{\mathcal{M}}(B) - E_{\mathcal{M}}(A) = 0 \qquad \text{أي} \qquad E_{\mathcal{M}}(B) = E_{\mathcal{M}}(A)$$

تمارين (Exercices)

التمرين الأول:

يسقط جسمان A و B كتلتهما m_1 و m_2 من ارتفاع h_1 و h_2 $(h_1< h_2)$ على مستوى أفقي في A' و B'.

إذا كانت A'B'= a

* أدرس حركة مركز العطالة C. نفرض أن A و B أطلقا عند نفس اللحظة.

التمرين الثاني:

جسمان كتلتهما m_1 و m_2 و سرعتهما

$$\vec{V_1} = V_1\vec{i}$$

$$\vec{V_2} = V_2\cos\alpha\vec{i} + V_2\sin\alpha\vec{j}$$

حيث α الزاوية مع الحور (OX).

1- ماهي حركة مركز العطالةC.
2- ماهي سرعة كل جسم في المعلم C.
3- ماهي الطاقة الحركية في المعلم C.
4- تحقق من العلاقة بين الطاقة الحركية في المعلم C و المعلم R.

التمرين الثالث:

لتكن جملة ثلاثة نقاط ماديةM_1، M_2 و M_3 كتلتها $m_1=1Kg$ و$m_2=2Kg$, $m_3=3Kg$ و مركبات شعاع الموضع لكل نقطة هي:

$$\overrightarrow{OM}_1 = 2t\vec{i} + 3\vec{k} \qquad \overrightarrow{OM}_2 = -t\vec{j} - 3t\vec{k} \qquad \overrightarrow{OM}_3 = 3\vec{i} + t\vec{j}$$

1- عين كمية الحركة الإجمالية $\vec{P}$ للجملة.
2- عين إحداثيات مركز العطالة C و استنتج السرعة $\vec{v_c}$ و لاحظ أن العلاقة $\vec{P} = (m_1+m_2+m_3)\vec{v_c}$ محققة.
3- أحسب الطاقة الحركية E_c و العزم الحركي $\vec{L}$ و كذلك E'_c و $\vec{L'}$ في المعلم C ثم تحقق من العلاقة بين E_c و E'_c و كذلك من العلاقة بين $\vec{L}$ و $\vec{L'}$.

التمرين الرابع:

ثلاث نقاط مادية M_1,M_2, M_3 كتلتها m_1, m_2, m_3 تقع على رؤوس المثلث ABC (M_1 على A، M_2 على B، M_3 على C)

1- أكتب العبارة الشعاعية لمركز العطالة G.

2- تنتقل M_1 إلى الموضع B و M_2 الى الموضع C و M_3 الى الموضع A :

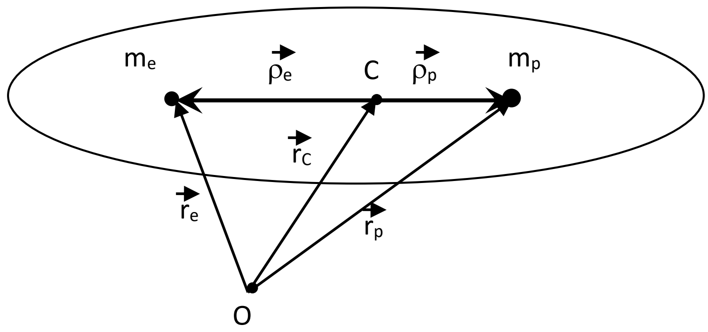
أ- ماهو موضع مركز العطالة الجديد G'.

ب- في أي حالة يكون G' منطبق مع G.

3- إذا كان التنقل يتم بحركة خطية منتظمة سرعتها v، في أي حالة يبقى مركز العطالة ثابت.

التمرين الخامس:

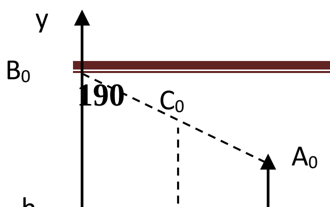
يبين الشكل أدناه جملة جسيمين (إلكترون و بروتون) في ذرة الهيدروجين حيث (C) مراقب داخلي (معلم مركز الثقل) و (O) مراقب مخبري (معلم عطالي). تعطى الطاقة الكامنة للجملة بالعبارة: $E_P=\dfrac{K}{\left\|\vec r_e-\vec r_p\right\|}$ حيث K ثابت موجب



1. أكتب قانون حفظ الطاقة الكلية للجملة.
2. عين الطاقة الكلية للجملة بدلالة السرعة النسبية $\vec v_{ep}=\vec v_e-\vec v_p$ و سرعة مركز الثقل $\vec V_C$ و شعاع الموضع النسبي $\vec r_{ep}=\vec r_e-\vec r_p$.
3. بين أن الدفع الزاوي للجملة بالنسبة لمراقب مخبري هو:

$\vec L=\vec r_C\wedge(m_e+m_p)\vec V_C+\vec r_{ep}\wedge\mu\vec v_{ep}=\vec r_C\wedge M\vec V_C+\vec S$ حيث μ هي الكتلة المختزلة للجملة و $\vec S=\vec L_{CM}$ هو الدفع الزاوي بالنسبة لمركز الكتل C.

حلول التمارين



التمرين الأول:

تطبيق م. أ. ت على مركز العطالة

$$\frac{d\vec{p}}{dr}=\sum_i \vec{F}_i$$

حيث أن $\vec{p}$ هي كمية الحركة

مركز الثقل C و $\sum_i \vec{F}_i$ هي محصلة كل القوى المؤثرة على أي عنصر من الجملة والناشئة من خارج الجملة (القوى الخارجية)، بالنسبة لهذه الجملة فإن القوى الخارجية هي ثقلي الجسم A والجسمB.

$$(m_1+m_2)\frac{d\vec{V}_c}{dr}=-m_1 g\vec{j}-m_2 g\vec{j}=-(m_1+m_2)g\vec{j}$$

ومنه تكون حركة مركز الثقل

$$\vec{V}\begin{bmatrix} V_{cx}=k_1 \\ V_{cy}=-gt+k_2 \end{bmatrix} \quad \vec{\gamma}_c\begin{bmatrix} \gamma_{cx}=0 \\ \gamma_{cy}=-g \end{bmatrix}$$

السرعة الإبتدائية للجسمين منعدمة ومنه فإن السرعة الإبتدائية لمركز الثقل منعدمة كذلك، ومنه

$K_1=k_2=0$

$$\vec{V}_c=\begin{bmatrix} V_{cx}=0 \\ V_{cy}=-gt \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{OC}\begin{bmatrix} x_c=k_3 \\ y_c=-\frac{1}{2}gt^2+k_4 \end{bmatrix}$$

في اللحظة الإبتدائية يكون الجسمين في الموضعين

$$A_0=\begin{pmatrix} x_{A_0}=a \\ y_{A_0}=h_1 \end{pmatrix} \quad B_0=\begin{pmatrix} x_{B_0}=a \\ y_{B_0}=h_2 \end{pmatrix}$$

ويكون مركز الثقل إذن في الموضع:

$$C_0=\begin{pmatrix} x_{c_0}=(m_1x_{A_0}+m_2x_{B_0})/(m_1+m_2)=m_1a/(m_1+m_2) \\ y_{c_0}=(m_1y_{A_0}+m_2y_{B_0})/(m_1+m_2)=m_1h_1+m_2h_2)/(m_1+m_2) \end{pmatrix}$$

ولهذا يكون موضع مركز الثقل أثناء الحركة

$$C\begin{pmatrix} x_c=m_1a/(m_1+m_2) \\ y_c=-\frac{1}{2}gt^2+(m_1h_1+m_2h_2)/(m_1+m_2) \end{pmatrix}$$

التمرين الثاني:

1- حركة مركز العطالة:

$$\vec{V}_1 = V_1\vec{i}$$
$$\vec{V}_2 = V_2\cos\alpha\vec{i} + V_2\sin\alpha\vec{j}$$
$$\vec{V}_c = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}, \quad V_{cx} = \frac{m_1V_1 + m_2V_2\cos\alpha}{(m_1 + m_2)}$$

$$V_{cy} = \frac{m_2V_2\sin\alpha}{(m_1 + m_2)}$$

وبتكامل السرعة وإستعمال الشروط الإبتدائية

T=0, $x_1 > y_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = y_2 = 0$

$x_c(o) = y_c(o) = 0$

نحصل على إحداثيات مركز العطالة

$$x_c = \frac{(m_1V_1 + m_2V_2\cos\alpha)t}{(m_1 + m_2)}$$
$$y_c = \frac{(m_2V_2\sin\alpha)t}{(m_1 + m_2)}$$

ومنها معادلة المسار

$$y_c = \frac{m_2V_2\sin\alpha}{m_1V_1 + m_2V_2\cos\alpha}x_c$$

ومنه فإن حركة مركز العطالة حركة خطية منتظمة.

2- سرعة الجسمين بالنسبة لمعلم مركز العطالة (c) بتطبيق قانون تركيب السرعات حيث سرعة الجر هي سرعة مركز العطالة.

$$\vec{V}'_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_c - [(m_2/(m_1 + m_2)][(V_1 - V_2\cos\alpha)\vec{i} - V_2\sin\alpha\vec{j}]$$
$$\vec{V}'_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_c - [(m_1/(m_1 + m_2)][(V_2\cos\alpha - V_1)\vec{i} - V_2\sin\alpha\vec{j}]$$

3- الطاقة الحركية للجملة في المعلم (c)

$$E_{ci} = \frac{1}{2}m_1V_1'^2 + \frac{1}{2}m_2V_2'^2$$

$$E'_{ci} = \frac{m_1m_2^2\left[(V_1 - V_2\cos\alpha)^2 - V_2^2\sin\alpha^2\right] + m_2m_1^2\left[(V_2\cos\alpha - V_1)^2 - V_2^2\sin\alpha^2\right]}{2(m_1 + m_2)^2}$$

$$E'_{ci} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(V^2_1 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\alpha)$$

$$E'_{ci} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2$$

4- التأكد من العلاقة:

$$E_{ci} = E'_{ci} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_c^2$$

$$E_{ci} = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2$$

$$E'_{ci} + \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_c^2 = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2 + \frac{(m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2)^2}{2(m_1+m_2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[m_1V_1^2 + m_2V_2^2\right] = E_{ci}$$

التمرين الثالث:

1- كمية الحركة الإجمالية

$$\vec{P} = \vec{P}_{(1)} + \vec{P}_{(2)} + \vec{P}_{(3)}$$

$$\vec{P}_{(1)} = m_1\vec{V}_1 = m_1\frac{d\overrightarrow{OM}_1}{dt} = 1(2\vec{i}) = 2\vec{i}$$

$$\vec{P}_{(2)} = m_2\vec{V}_2 = m_2\frac{d\overrightarrow{OM}_2}{dt} = 2(-\vec{j} - 3\vec{k}) = -2\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{P}_{(3)} = m_3\vec{V}_3 = m_3\frac{d\overrightarrow{OM}_3}{dt} = 3\vec{j}$$

$$\vec{P} = 2\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$$

2- إحداثيات مركز العطالة تعطى بالعلاقة

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{m}(m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2 + m_3\overrightarrow{OM}_3)$$

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 6kg$$

ومنه

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{6}\left[(2\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}) + 2(-t\vec{j} - 3t\vec{k}) + 3(3\vec{i} + t\vec{j})\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[(2(2t+9)\vec{i} + t\vec{j} + (3-6t)\vec{k}\right]$$

ومنه فإن سرعة مركز العطالة

$$\vec{V}_c = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} = \frac{1}{6}\left[2\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}\right]$$

وبالمقارنة مع كمية الحركة في السؤال السابق نلاحظ أن

$$\vec{P} = 6\vec{V}_c = m\vec{V}_c = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{V}_c$$

3- الطاقة الحركية في المعلم الثالث

$$E_c = E_c(1) + E_c(2) + E_c(3)$$

$$E_c(1) = \frac{1}{2}m_1V_1^2 = \frac{P_1^2}{2m_1} = \frac{1}{2}4 = 2J$$

$$E_c(2) = \frac{P_2^2}{2m_2} = \frac{40}{2.2} = 10J$$

$$E_c(3)=\frac{P_3^{\,2}}{2m_3}=\frac{3}{2}J$$

$$E_c=\frac{27}{2}=13{,}5J$$

3)-الطاقة الحركية في معلم مركز العطالة

من أجل ذلك نحسب أولا كمية الحركة لكل نقطة في معلم العطالة.

$$\vec{P}'_{(1)}=m_1(\vec{V}_1-\vec{V}_c)=\vec{P}_{(1)}-m_1\vec{V}_c=\frac{5}{3}\vec{i}-\frac{1}{6}\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{P}'_{(2)}=m_2(\vec{V}_2-\vec{V}_c)=\vec{P}_{(2)}-m_2\vec{V}_c=-\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{7}{3}\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\vec{P}'_{(3)}=m_3(\vec{V}_3-\vec{V}_c)=\vec{P}_{(3)}-m_3\vec{V}_c=-\vec{i}+\frac{2}{5}\vec{j}+3\vec{k}$$

ثم نحسب الطاقة الحركية لكل نقطة

$$E'_c(1)=\frac{P'^{\,2}_1}{2m_1}=\frac{137/36}{2.1}=\frac{137}{72}J$$

$$E'_c(2)=\frac{P'^{\,2}_2}{2m_2}=\frac{197/9}{2.2}=\frac{197}{36}J$$

$$E'_c(3)=\frac{P'^{\,2}_3}{2m_3}=\frac{65/4}{2.3}=\frac{65}{24}J$$

$$E'_c=\frac{121}{12}=10{,}08J$$

$$\frac{1}{2}mV_c^{\,2}=\frac{P^2}{2m}=\frac{41}{2.6}=\frac{41}{12}J$$

$$E'_c+\frac{1}{2}mV_c^{\,2}=\frac{27}{2}J=E_c$$

- العزم الحركي في المعلم الثابت

$$\vec{L}=\vec{L}_{(1)}+\vec{L}_{(2)}+\vec{L}_{(3)}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{L}_{(1)}&=\overrightarrow{OM}_1\wedge\vec{P}_1=6\vec{j}\\ \vec{L}_{(2)}&=\overrightarrow{OM}_2\wedge\vec{P}_2=\vec{o}\\ \vec{L}_{(3)}&=\overrightarrow{OM}_3\wedge\vec{P}_3=9\vec{k}\end{aligned}\right\}\vec{L}=6\vec{j}+9\vec{k}$$

العزم الحركي في معلم مركز العطالة

من أجل ذلك نحسب أولا شعاع الموضع لكل نقطة في معلم مركز العطالة

$$\overrightarrow{CM}_1=\overrightarrow{OM}_1-\overrightarrow{OC}=(\frac{5}{3}t-\frac{3}{2})\vec{i}-\frac{t}{6}\vec{j}+(t+\frac{5}{2})\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CM}_2=\overrightarrow{OM}_2-\overrightarrow{OC}=(-\frac{t}{3}-\frac{3}{2})\vec{i}-\frac{7t}{6}\vec{j}-(2t+\frac{1}{2})\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CM}_3=\overrightarrow{OM}_3-\overrightarrow{OC}=(\frac{3}{2}-\frac{t}{3})\vec{i}+\frac{5t}{6}\vec{j}+(t-\frac{1}{2})\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned}
\vec{L}'_{(1)} &= \overrightarrow{CM_1} \wedge \vec{P}'_{(1)} = \frac{5}{12}\vec{i} + \frac{17}{3}\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k} \\
\vec{L}'_{(2)} &= \overrightarrow{CM_2} \wedge \vec{P}'_{(2)} = -\frac{7}{2}\vec{i} - \frac{17}{3}\vec{j} + \frac{7}{2}\vec{k} \\
\vec{L}'_{(3)} &= \overrightarrow{CM_3} \wedge \vec{P}'_{(3)} = \frac{5}{4}\vec{i} - 4\vec{j} + \frac{15}{4}\vec{k}
\end{aligned}\right\} \vec{L}' = \frac{1}{2}\vec{i} - 4\vec{j} + \frac{15}{2}\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned}
\overrightarrow{OC} \wedge \vec{P} &= \frac{1}{2}\vec{i} + 10\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k} \\
(\overrightarrow{OC} \wedge \vec{P}) + \vec{L}' &= 6\vec{j} + 9\vec{k}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}' + (\overrightarrow{OC} \wedge \vec{P})$$

الفصل VIII : التصادم
Le Choc

- **مدخل:**

- عندما يلتقي جسمين وتتغير سرعتهما نقول أنهما إصطداما أو وقع تصادم بينهما.
- زمن التصادم هو الوقت الذي يبقى فيه الجسمين في تفاعل أو في تلامس، ويكون عامة زمن (وقتا) قصيرا جدا.
- التفاعل بين جسمين معزولين ويتبادلان التأثير بينهما خلال مدة زمنية قصيرة حيث يستعمل هذا التفاعل كثيرا في الفيزياء لمعرفة البناء الذري والنووي للمادة حيث لا نعلم بدقة قانون التفاعل الذي يحكمهما. في هذا الفصل سنفارق فقط بين الحالتين الإبتدائية والنهائية ولا نهتم بما يحدث خلال التفاعل.

1- تعريف وخواص التصادم بين جسمين:

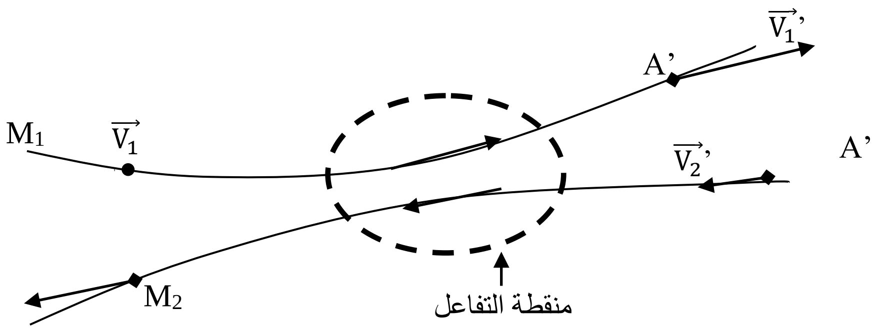
التصادم بين جسمين هو ذلك التأثير المتبادل بينهما خلال فترة زمنية قصيرة جدا وفي موضع معين من الفضاء.

يطبق هذا التعريف على جسمين مجهرين أو على المذنبات.

- أما بالنسبة للأجسام الجهرية (العيانية) يمكن أن نعطي التعريف التالي: التصادم بين جسمين عيانين هو التماس بين المساحتين التين تحددان الجسمين عند لحظة معينة والتي لم تكونا تتلامسان مباشرة قبل ولا تتلامسان مباشرة بعد التصادم و من أهم خواصه:
- يستغرق مدة قصيرة من الزمن.
- محدد في موضع معين من الفضاء.
- يستلزم تغييرا كبيرا في سرعة الجسمين ويرجع هذا التغيير الكبير في السرعة إلى نوع التأثير بالتماس (Interaction de Contact)، دراسة هذا النوع من التأثير يتطلب معرفة القوى المطبقة أثناء التفاعل ومدة هذا التفاعل، دراسة هذا النوع من التفاعل معقدة جدا. لذا نكتفي بدراسة حوصلة التغيرات في كمية الحركة و الطاقة الحركية للجملة المدروسة.

2- دراسة تأثير بين جسمين مجهرين:

نعتبر جسمين M_1 وM_2 كتلتهما على التوالي m_1، m_2 تعرف الطاقة الكامنة للتأثير بين الجسمين $E_p(r)$ التفاعل قصير المدى بينهما، حيث r المسافة التي تفصل بين الجسمين.



الشكل 1-VIII: تصادم جسمين

- خلال التصادم (فترة صغيرة جدا) حيث يمكن القول أن ليس هناك إنتقال للجسيمات (أو الجسمين) [القوى الخارجية معدومة]

$$\vec{F}^{e} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_{p}^{e} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{VIII}-1)$$

منه الطاقة الكامنة الخارجية E_p^e للجملة تبقى محفوظة (Cte ثابتة) لا تتغير خلال التصادم،
وبالتالي فإن التغير في الطاقة الكامنة الخارجية مباشرة قبل وبعد التصادم يساوي صفرا أي

$$E_{p_{av}}^{e} - E_{p_{ap}}^{e} = 0$$

بما أن جملة الجسمين معزولة فإن الدفع الخطي (كمية الحركة) للجملة بالنسبة لمعلم عطاليR محفوظة أي

$$\vec{P}_{av} = \vec{P}_{ap} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{VIII}-2)$$

حيث $\vec{P}_{av}$ الدفع الخطي للجملة فبل التأثير
و $\vec{P}_{ap}$ الدفع الخطي للجملة بعد التأثير.

حسب م. أ. ت $\frac{d}{dt}(\vec{P}_{av} + \vec{P}_{ap}) = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$ من مبدأ الفعل ورد الفعل $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_{av} + \vec{P}_{ap}) \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_{av} + \vec{P}_{ap} = \text{Cte} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{VIII}-3)$$

بعبارة أخرى $\sum_{i} \vec{P}_{iav} = \sum_{i} \vec{P}_{iap}$

إذا كانت الجملة المتفاعلة تخضع لقوى خارجية (مجال الجاذبية مثلا) تصبح الجملة غير معزولة ولكن فعليا يبقى الدفع الخطي (كمية الحركة) محفوظا.
من م. أ. ت

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \quad \Delta\vec{P} = \int_{t}^{t+\tau} \vec{F}_{ex} dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{VIII}-5)$$

حيث τ يمثل مدة التفاعل وهي قصيرة جدا أمام كل فترة تميز التجربة. إذا كانت شدة محصلة القوى الخارجية محدودة

$$\Delta\vec{P} = \vec{0} \quad \Leftarrow \quad \Delta\vec{P} = \vec{F}_{ex}(t+\tau) - \vec{F}_{ex}(t) \simeq 0$$

مما يجعلنا نعتبر دائما في مثل هذه التصادمات حفظ الدفع الخطي.
نعتبر كذلك في مثل هذه التصادمات قوى التأثير الداخلية للجملة تشتق من كمون بحيث تكون الطاقة الميكانيكية للجملة محفوظة

$$E_{M} = E_{c} + E_{p} = \text{Cte} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{VIII}-6)$$

في بعض التجارب يمكن لأحد الجسمين أو كلاهما الإنقسام لذا نعمم مبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية إلى حفظ الطاقة الكلية للجملة.

$$\left\{\begin{matrix} E_{pin} = E_p + \sum_i E_{pini} \quad \text{حيث} E_T = E_c + E_{p_{ex}} + E_{pin} = Cte \\ \text{الطاقة الداخلية للجملة : } E_{pin} \end{matrix}\right\}$$

$$\sum_{av} E_{ci} + \sum_{av} E_{int_i} = \sum_{ap} E_{ci} + \sum_{ap} E_{int_i} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\text{VIII} - 7)$$

إذا بقي عدد ونوع الجسمات التي تدخل في تأثير متبادل ثابتا ولم يتغير يدعى هذا النوع من التصادم: التصادم المرن ومن مميزات

$$\sum_{av} E_{ini} = \sum_{ap} E_{ini}$$

$$\Rightarrow \sum_{av} E_{ci} = \sum_{ap} E_{ci}$$

فيمايلي نلخص المعادلتين التين تميز التصادم المرن:

- لدفع الخطي للجملة محفوظ

$$\vec{P}_{av_1} + \vec{P}_{av_2} = \vec{P}_{ap_1} + \vec{P}_{ap_2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\text{VIII} - 8)$$

- الطاقة الحركية للجملة محفوظة.

$$\frac{\vec{P}_{av_1}}{2m_1} + \frac{\vec{P}_{av_2}}{2m_2} = \frac{\vec{P}_{ap_1}}{2m_1} + \frac{\vec{P}_{ap_2}}{2m_2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\text{VIII} - 9)$$

حل هاتين المعادلتين يعطينا ما يلي:

$$\begin{matrix} \vec{V}_{ap_1} = \dfrac{(m_1 - m_2)\vec{V}_{ap_1} + 2m_2\vec{V}_{av_2}}{m_1 + m_2} \\ \vec{V}_{ap_2} = \dfrac{(m_2 - m_1)\vec{V}_{av_2} + 2m_1\vec{V}_{av_1}}{m_1 + m_2} \end{matrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\text{VIII} - 10)$$

أما في معلم مركز الكتل C تعطى قوانين الحفظ مايلي:

- الدفع الخطي محفوظ

$$\vec{P}_{cav_1} + \vec{P}_{cav_2} = \vec{P}_{cap_1} + \vec{P}_{cap_2} = \vec{0}$$

- الطاقة الحركية محفوظة

$$\frac{\vec{P}^2{}_{cav_1}}{2m_1} + \frac{\vec{P}^2{}_{av_2}}{2m_2} = \frac{\vec{P}^2{}_{cap_1}}{2m_1} + \frac{\vec{P}^2{}_{cap_2}}{2m_2}$$

ومن كون $\vec{P}_{1c} = -\vec{P}_{2c}$ قبل وبعد التصادم نجد

$$\frac{\vec{P}^2{}_{cav_1}}{2}\left[\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right] = \frac{\vec{P}^2{}_{cap_2}}{2}\left[\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right]$$

نستنتج مايلي:

$$\vec{P}^2{}_{cav_1} = \vec{P}^2{}_{av_2} = \vec{P}^2{}_{cap_1} = \vec{P}^2{}_{cap_2}$$

أي

$$P_{cav_1} = P_{cav_2} = P_{cap_1} = P_{cap_2} = P = \mu v \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (VIII-11)$$

μ: الكتلة الكلية للجملة.

يحتفظ كل جسم في معلم مركز الكتل c خلال التصادم المرن بطويلة كمية حركته.

3- دراسة التصادم بين جسمين:

بعدما درسنا التأثير المتبادل (التفاعل) بين جسمات مجهرية ندرس في هذه الفقرة التصادم بين أجسام عيانية.

- نعلم أن التصادم بين جسمين هو التماس بين سطحيهما عند لحظة t، اللذان لم يكونا يتلامسان مباشرة قبل ومباشرة بعد هذه اللحظة.
- تجريبيا لحظة التصادم صغيرة جدا أمام كل مدة تميز تحليل هذا التصادم. ينتج عن هذا أن التصادم محدد موضعه في الفضاء.

* حوصلة كمية الحركة والدفع الزاوي:

نذكر بمعادلات حوصلة كمية الحركة والدفع الزاوي التي رأيناها في الفترة السابقة.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \quad \rightarrow \quad \Delta\vec{P} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}_{ex}dt$$

$$\frac{d\vec{t}/_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}/_O \vec{F}_{ex} \quad \rightarrow \Delta t = \int_t^{t+\tau} \vec{\mathcal{M}}/_O \vec{F}_{ex}dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (VIII-12)$$

مثل ما رأينا سابقا: كون مدة التصادم قصيرة جدا فإذا كانت الجملة معزولة والإندفاع الخطي.

$\Delta\vec{P} = \int_t^{t+\tau}\vec{F}_{ext}dt$ مهمل يكون الدفع الخطي والدفع الزاوي محفوظين.

*** التصادم المرن والغير مرن:** يكون التصادم بين جسمين، يكونان جملة معزولة أو شبه معزولة تصادما مرنا عندما تكون الطاقة الحركية للجملة محفوظة.

$$E_{cav} = E_{cap} \quad \longrightarrow \Delta E_c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (VIII-13)$$

في كل الحالات الأخرى نقول أن التصادم غير مرن.

- إن الطاقة الحركية المفقودة تسمح بتغيير طبيعة الجمل بتشويهها أو تكسيرها إلى قطع أو رفع درجة حرارتها.

وتتميز مثل هذه التصادمات بالتغير في الطاقة الحركية قبل وبعد التصادم

$$Q = E_{cf} - E_{ci}$$

تمارين (Exercices)

التمرين الأول:

تصدم جسيمة A كتلتها m_A و سرعتها $\vec{V}_A$ جسيمة B في حالة سكون ولها نفس الكتلة.

- بين أنه إذا كان الصدم بينهما مرنا فان سرعتيهما بعد الصدم مباشرة تكونا متعامدتين.

التمرين الثاني:

تصدم كرية كتلتها 2M و سرعتها $v=2ms^{-2}$ مع كرية A في حالة سكون كتلتها M=1Kg، نفرض أن السرعتين $\vec{V}_{A'}$ و $\vec{V}_{B'}$ موازيتان للسرعة الابتدائية $\vec{V}_B=\vec{V}$.

أحسب السرعتين $\vec{V}_{A'}$ و $\vec{V}_{B'}$

1- إذا كان الصدم مرنتا.
2- إذا كان الصدم لينا (الكرتان متلاصقتان).
3- استنتج في هذه الحالة أن الطاقة الحركية غير محفوظة.

التمرين الثالث:

كتلة m_1 ذات سرعة $\vec{V}_1$ تدخل في صدم تام المرونة مع كتلة m_2 ساكنة.

*- ماهي الطاقة (القدرة) التي تفقدها الكتلة m_1 خلال الصدم إذا قفزت بزاوية 90° على الاتجاه الأصلي بعد الاصطدام مع m_2.

مع العلم أن $E_C=\dfrac{P^2}{2m}$

التمرين الرابع:

تصطدم كتلة m_1 ذات سرعة ثابتة $\vec{v}_1$ بكتلة m_2 ساكنة.

1- باعتبار أن الصدم تام المرونة، ماهي الطاقة الحركية لكل من الكتلتين بدلالة m_1, m_2, v_1 و الزاوية φ التي يشكلها اتجاه حركة m_2 مع الاتجاه الأصلي للكتلة m_1.
2- إذا كانت $m_1=m_2$ أوجد علاقة بسيطة بين φ و الزاوية θ التي يشكلها اتجاه حركة m_1 بعد الصدم مع الاتجاه الأصلي للكتلة m_1.

التمرين الخامس:

تصطدم كتلة m_1 ذات سرعة ثابتة $\vec{v_1}$ بكتلة m_2 ساكنة.

1- باعتبار أن الصدم تام المرونة، ماهي الطاقة الحركية لكل من الكتلتين بدلالة m_1, m_2, v_1 و الزاوية φ التي يشكلها اتجاه حركة m_2 مع الاتجاه الأصلي للكتلة m_1.

2- إذا كانت $m_1=m_2$ أوجد علاقة بسيطة بين φ و الزاوية θ التي يشكلها اتجاه حركة m_1 بعد الصدم مع الاتجاه الأصلي للكتلة m_1.

التمرين السادس:

كتلتان m_1 و m_2 مثبتان على رأسي قضيب M_1M_2 طوله l. وضعت هذه الجملة على طاولة أفقية لتأتي كتلة m_3 بسرعة ثابتة $\vec{V}_0$ حيث $\alpha = (\vec{V}_0, \overrightarrow{M_1M_2})$، وتصطدم m_3 بالكتلة m_2 فتأخذ m_3 اتجاها عموديا لاتجاهها الأصلي و سرعتها بعد الصدم $\vec{V'}_3$.

- ماهي حركة مركز العطالة C للجملة المتكونة من الكتلتين m_1 و m_2.

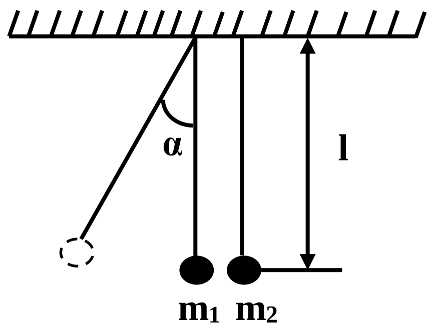
التمرين السابع:

كرتان كتلتهما m_1 و m_2 معلقتان كما هو موضح في الشكل.

تزاح الكرة الأولى بزاوية α ثم تترك بدون سرعة ابتدائية، بعد الصدم بالكرة الثانية تزاح هذه الأخيرة أي الكرة الثانية بزاوية β.

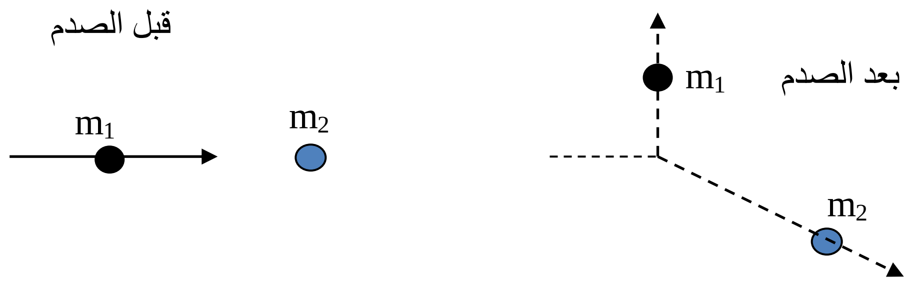
1- أحسب سرعتي الكرتين مباشرة بعد الصدم في حالة صدم مرن. أدرس اتجاه شعاعي السرعة بدلالة الكتلتين.

2- أحسب الزاوية β.



حلول التمارين

التمرين الأول:



من أجل إنخفاظ كمية الحركة الإجمالية قبل وبعد الصدم فإن

$$\vec{P}_1 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2$$

أي أن $\vec{P}'_2 = \vec{P}_1 + \vec{P}'_1$

وبالتربيع $P'^2_2 = P_1^2 + P'^2_1 - 2P_1 P'_1 \cos 90$

أي $P'^2_2 = P_1^2 + P'^2_1$

من أجل إنخفاظ الطاقة الحركية فإن

$$\frac{P_1^2}{2m_1} = \frac{P'^2_1}{2m_1} + \frac{P'^2_2}{2m_2}$$

$$= \frac{P'^2_1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}(P_1^2 + P'^2_1) = \frac{P_1^2}{2m_2} + \frac{P'^2_1}{2}\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\right)$$

$$\frac{P'^2_1}{2m_1} = \frac{P_1^2}{2m_1}\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$\Delta E_c = E_{c_1} - E'_{c_1} = \frac{P_1^2}{2m_1} - \frac{P'^2_1}{2m_1} = \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)\frac{P_1^2}{2m_1} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}E_{c_1}$$

التمرين الثاني:

1) تصادم مرن $\Leftarrow$ إنخفاظ كمية الحركة

$$\vec{P}_B = \vec{P}_{A'} + \vec{P}_{B'}$$

$$2M\vec{V}_B = M\vec{V}_{A'} + 2M\vec{V}_{B'}$$

كل السرعات متوازية، فالإسقاط على المحور الموجة B إلى A

$$2V_B = V_{A'} + 2V_{B'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

إنخفاظ الطاقة الحركية

$$E_{CB} = E_{CA'} + E_{dB'}$$

$$\frac{1}{2} 2 M V_B^{\ 2} = \frac{1}{2} M V_{A'}^{\ 2} + \frac{1}{2} 2 M V_{B'}^{\ 2}$$

$$V_B^{\ 2} = \frac{1}{2} V_{A'}^{\ 2} + V_{B'}^{\ 2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) $V_{A'} = 2\left(V_B - V_{B'}\right)$

من (1) $V_{A'}^{\ 2} = 4\left(V_B^{\ 2} - 2 V_B V_{B'} + V_{B'}^{\ 2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots *$

من (2) $\frac{1}{2} V_{A'}^{\ 2} = V_B^{\ 2} - V_{B'}^{\ 2}$

$$V_{A'}^{\ 2} = 2\left(V_B^{\ 2} - V_{B'}^{\ 2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots **$$

$$2\left(V_B^{\ 2} - V_{B'}^{\ 2}\right) = 4\left(V_B^{\ 2} - 2 V_B V_{B'} + V_{B'}^{\ 2}\right)$$

$$* = ** \ V_B^{\ 2} - V_{B'}^{\ 2} = 2 V_B^{\ 2} - 4 V_B V_{B'} + 2 V_{B'}^{\ 2}$$

$$3 V_{B'}^{\ 2} - 4 V_B V_{B'} + V_B^{\ 2} = 0$$

حساب $V_{B'}$ من المعادلة من الدرجة الثانية

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 16 V_B^{\ 2} - 4(3) V_{B'}$$

$$\Delta = 4 V_B^{\ 2}$$

$$V_{1B'} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 V_B - 2 V_B}{6}$$

$$V_{1B'} = \frac{1}{3} V_B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$V_{2B'} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 V_B + 2 V_B}{6}$$

$$V_{1B'} = V_B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من الحل (2) $V_{B'} = V_B \Leftarrow V_A = 0 \Leftarrow$ الحل مرفوض لأن تغيير يعني أن الكرية B مرت عبر الكرية A.

من (1)

$$V_{A'} = 2\left(V_B - \frac{1}{3} V_B\right) \qquad V_{B'} = \frac{1}{3} V_B$$

$$V_{A'} = \frac{4}{3} V_B$$

$V_{B'}$ و $V_{A'}$ موجه والشعاعان لهما نفس جهة الشعاع $\overrightarrow{V_B}$

2) التصادم بين الكريتان تبقى متلاصقتين بعد الصدم لهما نفس السرعة إنخفاظ كمية الحركة

$$V_{B'} = V_{A'} \quad \Rightarrow 2\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_{A'}} + 2\overrightarrow{V_{B'}}$$

$$2\overrightarrow{V_B} - 3\overrightarrow{V_{B'}} = 3\overrightarrow{V_{A'}}$$

$$\overrightarrow{V_{A'}} = \overrightarrow{V_{B'}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{V_{B'}}$$

3- ليس هناك إنخفاظ في الطاقة الحركة

$$E_c = \frac{1}{2} 2M\,V_B{}^2 = M\,V_B{}^2$$

قبل الصدم

$$E_c{}' = \frac{1}{2} 2M\,V_{A'}{}^2 + \frac{1}{2} 2M\,V_{B'}{}^2 = \frac{2}{3} M\,V_B{}^2$$

$E_c{}' - E_c$ تحولت إلى حرارة في هذا الصدم

ت. ع:

$V_B = V = 2\ m/s \qquad M = 1Kg$

$$V_{A'} = \frac{4}{3} 2 = \frac{8}{3}\ m/s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$V_{B'} = \frac{1}{3} 2 = \frac{2}{3}\ m/s$$

$$V_{A'} = V_{B'} = \frac{2}{3} 2 = \frac{4}{3}\ m/s \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

التمرين السابع:

حساب سرعتي الكرتين مباشرة بعد الصدم

غياب قوى خارجية مؤثرة على الجملة يسمح لنا بتطبيق مبدأ إنخفاظ كمية الحركة

كمية الحركة الإبتدائية = كمية الحركة النهائية

كمية الحركة الإبتدائية $m_1\,\vec{V_1} + m_2\,\vec{V_2} = m_1\,\vec{V_1}$

كمية الحركة النهائية $m_1\,\vec{V_1'} + m_2\,\vec{V_2'}$

إذن $m_1\,\vec{V_1} = m_1\,\vec{V_1'} + m_2\,\vec{V_2'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

الصدم مرن يسمح لنا كذلك بتطبيق مبدأ إنخفاظ الطاقة الحركية

$$\frac{1}{2} m_1\,V_1{}^2 = \frac{1}{2} m_1\,V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2\,V_2'^2$$

$$m_1\,V_1{}^2 = m_1\,V_1'^2 + m_2\,V_2'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

حساب V_1 سرعة الكتلة m_1 قبل الصدم

مبدأ إنخفاظ الطاقة الكلية بالنسبة للكرة m_1

$$\frac{1}{2} m_1\,V_1{}^2 = m_1\,g\,h = m_1\,g\,\rho\,(1 - \cos\alpha)$$

$$V_1 = \sqrt{g\,\rho\,(1 - \cos\alpha)}$$

بإسقاط المعادلة (1) على محور أفقي لحظة الإصطدام نحصل على

$$m_1 V_1 = m_1 V_1' + m_2 V_2'$$

$$m_1 (V_1 - V_1') = m_2 V_2' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$(2) \Rightarrow m_1 (V_1^2 - V_1'^2) = m_2 V_2'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\frac{(4)}{(3)} \Rightarrow V1 + V_1' = V_2' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\frac{(3)}{(5)} \Rightarrow m_1 \frac{V_1 - V_1'}{V_1 + V_1'} = m_2$$

$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1$$

$$(5) \qquad V_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} V_1$$

$\vec{V_1}$ $m_1 > m_2$ * و $\overrightarrow{V'}_1$ يكون لهما نفس الإتجاه

$\vec{V_1}$ $m_1 < m_2$ * و $\overrightarrow{V'}_1$ يكون لهما إتجاه معاكس

السرعة $\overrightarrow{V'}_2$ يكون لهما نفس إتجاه $\vec{V_1}$ مهم تكون قيم الكتلتين m_2 و m_1

$* \; m_1 = m_2 \; \overrightarrow{V_1'} = \vec{0}$

2) حساب الزاوية β نطبق م إنخفاظ الطاقة الكلية بالنسبة للكتلة m_2

$$\frac{1}{2} m_2 V_2'^2 = m_2 g h = m_2 g \rho (1 - \cos\beta)$$

$$\cos\beta = 1 - \frac{V_2'^2}{2 g \rho} = 1 - \frac{1}{2 g \rho}\left[\frac{4 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} V_1^2\right]$$

$$\cos\beta = 1 - \frac{4 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}(1 - \cos\alpha)$$

الفصلIX : الجسم الصلب

Le Corps Solide

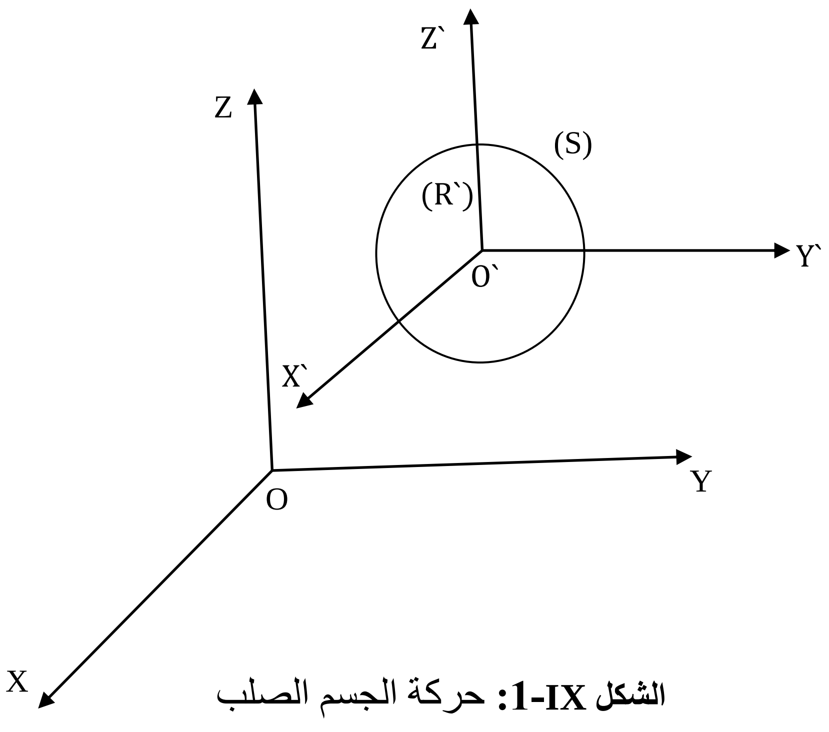
I- تعريف الجسم الصلب:

- الجسم الصلب هو كل جسم (جملة جسيمات) تبقى المسافة بين أجزائها (الجسيمات المكونة لها) ثابتة. أي هو الجسم الذي يبقى شكله و أبعاده ثابتتين خلال حركته مهما كانت القوى المؤثرة عليه.

- في الواقع لا يوجد جسم صلب مثالي ينطبق عليه هذا التعريف و ذلك نظرا للتشوهات المجهرية التي تلحق بالأجسام الصلبة و الاهتزازات الدائمة لذراته، غير أن المجال المجهري لهذه التشوهات و الاهتزازات يسمح لنا قصد الدراسة العيانية لحركة الجسم الصلب، باعتبار هذا الأخير عبارة عن مجموعة نقاط مادية ملتحمة فيما بينها.

II- حركة الجسم الصلب غير القابل للتشوه:

نعتبر جسما صلبا غير قابل للتشوه (S) لدراسة هذا الجسم بالنسبة لمعلم عطاليR نرفقه بمعلم $R`(o`, x`, y`, z`)$ متصل به (انظر الشكل 1-IX).



الشكل 1-IX: حركة الجسم الصلب

*** حقل السرعة للجسم الصلب:**

نعتبر نقطتين A و B من الجسم الصلب (S). للجسم (S) حركة كيفية بالنسبة للمعلم R نعين سرعتي النقطتين A و B كما يلي:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_{o`}} + \vec{w} \wedge \overrightarrow{O`B} \qquad \text{و} \qquad \overrightarrow{V_A} = \vec{V}_{o`} + \vec{w} \wedge \overrightarrow{O`A}$$

أما سرعة النقطة A بالنسبة للنقطة B نستنتجها من طرح سرعة النقطة Bمن سرعة النقطةA :

$$\overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B} = \vec{w} \wedge \left(\overrightarrow{O`A} - \overrightarrow{O`B}\right) = \vec{w} \wedge \overrightarrow{BA}$$

و نحصل أخيرا على قانون توزيع السرعات أو حقل السرعات:

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{w} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IX-1)$$

نلاحظ من هذه العلاقة أن سرعة نقطتين من جسم صلب واحد يمكن أن لا يملكان نفس السرعة (لهما سرعتان مختلفتان) رغم أن المسافة بين النقطتين تبقى ثابتة أي

$$\frac{d\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{dt} = \vec{0}$$

من هذه العبارة نستنتج كذلك علاقة جد مهمة لدراسة حركة الأجسام الصلب:

$$\frac{d\overrightarrow{AB}^2}{dt} = 2\overrightarrow{AB}.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 2\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A}\right) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{V_A} = \dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt}, \quad \overrightarrow{V_B} = \dfrac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \\ \dfrac{d\overrightarrow{AO}}{dt} = -\overrightarrow{V_A} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IX-2)$$

أي أن كل نقطتين من جسم صلب تحقق العلاقة التالية:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{V_B}$$

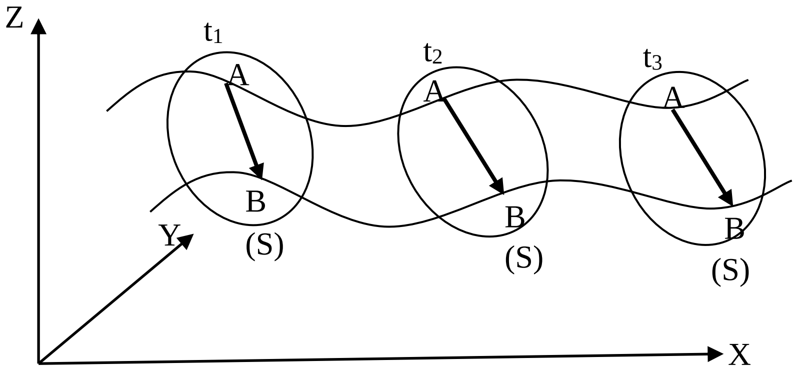
*** الحركة الانسحابية:**

هي كل حركة يبقى فيها كل مستقيم من الجسم الصلب موازيا لنفسه خلال حركته بالنسبة لمعلم عطالي R.

يبقى الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ثابتا خلال الحركة المنحنية للجسم ،نستنتج ما يلي:

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IX-3)$$

أي أن السرعة الزاوية (سرعة دوران الجسم) معدومة $\vec{w} = \vec{0}$



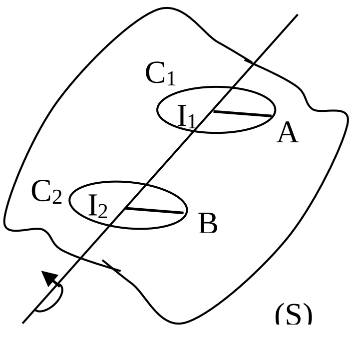
الشكل 2-IX: الحركة الانسحابية

كل نقاط جسم صلب (S) له حركة انسحابية نفس السرعة و نفس التسارع بالنسبة للمعلم العطالي *R* .

ملاحظة: ليست الحركة الانسحابية لجسم صلب بالضرورة خطية (الشكل 2-IX).

*** الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت (Δ):**

كل حركة تبقى فيها نقطتان من الجسم الصلب ثابتتان تدعى حركة دورانية بالنسبة لمستقيم المار من هاتين النقطتين و نسمى هذا المستقيم محور الدوران. كل نقاط الجسم الصلب التي تنتمي لهذا المحور تبقى ثابتة خلال الحركة (لها سرعة معدومة)←أنظر الشكل 3-IX.

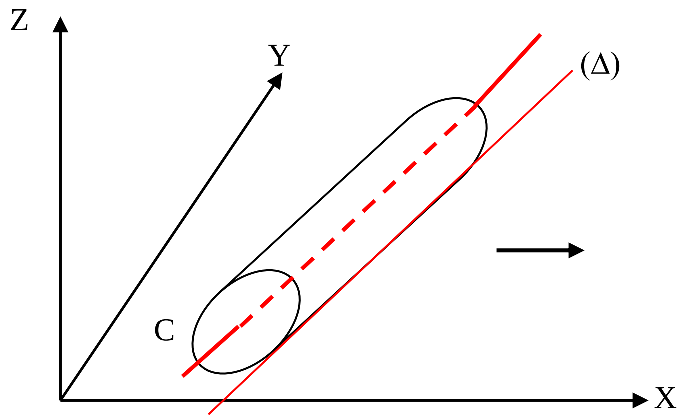


الشكل 3-IX: الحركة الدورانية

***تطبيق: دراسة حركة انسحابية و دورانية لجسم صلب:** نعتبر في هذا المثال أسطوانة نصف قطرها R تتدحرج بدون انزلاق على مستوي أفقي. بما أن الأسطوانة لا تنزلق يعني أن كل نقاط الأسطوانة التي تلمس السطح ثابتة (سرعتها معدومة) لحظة تماسها مع السطح، نعرف إذا ما يلي:

كل حركة تكون فيها سرعة إحدى نقاط الجسم ساكنة في لحظة ما تدعى حركة دورانية حول تلك النقطة و تدعى النقطة مركزا آنيا (لحظيا) للدوران.

نلاحظ في هذا المثال:

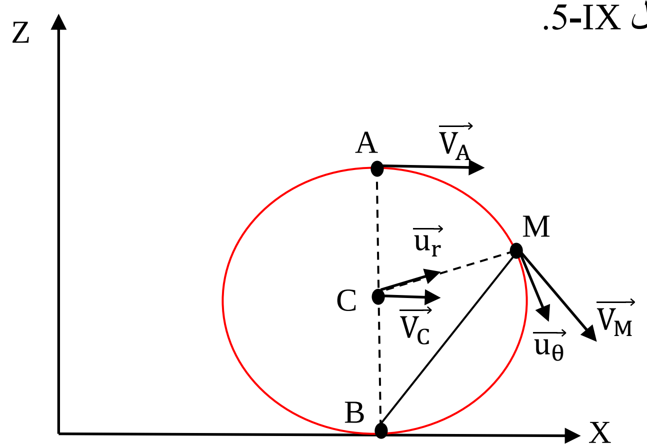


الشكل 4-IX: حركة انسحابية و دورانية

1- مجموع النقاط التي تلمس السطح ساكنة، هي على شكل مستقيم، ندعوه محورا آنيا للدوران و بذلك تعتبر الحركة دورانية حول هذا المحور.

2- لمحور الدوران الآني هذا حركة انسحابية نستنتج أن لهذا الجسم الصلب حركة مركبة حركة دورانية زائد حركة انسحابية (الشكل 4-IX).

* لدراسة حركة هذه الأسطوانة نرسم مقطع عمودي على المحور (OY) و نختار ثلاث نقاط A و B و C كما هو موضح في الشكل 5-IX.



الشكل 5-IX: دراسة حركة انسحابية و دورانية

نطبق قانون توزيع السرعات على نقطتين A و B نجد:

$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{w}$ حيث w سرعة دوران الاسطوانة لكن نعلم أن النقطة B ساكنة عند هذه اللحظة أي:

$$\vec{0} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{w}$$

و منه:

$$\overrightarrow{V_A} = -\overrightarrow{BA} \wedge \vec{w} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IX-4)$$

$\overrightarrow{V_A} = -BA\vec{k} \wedge w\vec{j} = 2Rw\vec{\imath}$ ، أما سرعة النقطة C نحسبها كذلك باستعمال قانون توزيع السرعات على نقطتين C وB نجد:

$$\vec{V}_C = -\overrightarrow{BC} \wedge \vec{w} = -BC\vec{k} \wedge w\vec{j} = Rw\vec{\imath} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IX-5)$$

نختار الآن نقطة كيفية $\mathcal{M}$على سطح الاسطوانة و نحسب سرعتها بنفس الطريقة:

$$\vec{V}_{\mathcal{M}} = -\overrightarrow{B\mathcal{M}} \wedge \vec{w} = -(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C\mathcal{M}}) \wedge \vec{w}$$

$$= \overrightarrow{BC} \wedge \vec{w} - \overrightarrow{C\mathcal{M}} \wedge \vec{w}$$

$$\vec{V}_{\mathcal{M}} = \overrightarrow{V_C} + R\omega\vec{u}_\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IX-6)$$

هذه السرعة عمودية على شعاع $\overrightarrow{B\mathcal{M}}$ $(\vec{V}_{\mathcal{M}} = -\overrightarrow{B\mathcal{M}} \wedge \vec{w})$.

و نلاحظ أنها مركبة من جزأين المركبة الانسحابية $\vec{V}_C$ و المركبة الدورانية $Rw\vec{u}_\theta$, و هكذا يمكن تحليل الحركة الى نوعين:

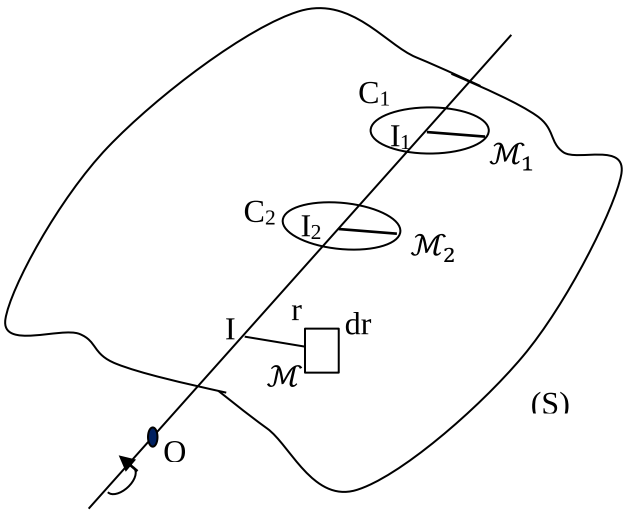
*الحركة الدورانية بالنسبة لمحور الاسطوانة $\vec{V}_\theta = Rw\vec{u}_\theta$

*حركة انسحابية لمركز كتل الاسطوانة $\overrightarrow{V_C} = Rw\vec{\imath}$

III- عزم العطالة:

* الطاقة الحركية لجسم صلب يدور حول محور ثابت.

- عندما يدور الجسم (S) حول المحور (Δ) الذي نعتبره يمر من مركز ثقل الجسم، بسرعة زاوية ثابتة w فإن للنقطتين $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ سرعتين خطيتين مختلفتين كون المسافتين: $d_1 = I_1\mathcal{M}_1$ و$d_2 = I_2\mathcal{M}_2$ غير متساويين (الشكل IX-6)،



الشكل IX-6: عزم العطالة

لحساب الطاقة الحركية الدورانية لهذا الجسم الصلب يجب جمع على كل النقاط المكونة للجسم

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_i m_i V_i^2$$

حيث السرعةالخطية

$$V_i = wd_i$$

فتصبح عبارة الطاقة الحركية:

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, w^2 d_i^2 = \frac{1}{2}w^2\Big(\sum_i m_i d_i^2\Big) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IX-7)$$

يتعلق الحد $I_{(\Delta)} = (\sum_i m_i d_i^2)$ بشكل و توزيع المادة داخل الجسم و يدعى عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور (Δ) تصبح عبارة الطاقة الحركية

$$E_c = \frac{1}{2}I_{(\Delta)}w^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IX-8)$$

*** عزم عطالة جسم صلب بالنسبة للمحور الثابت (Δ):**

نعرف عزم العطالة لجملة جسيمات (جسم صلب) (S) بالنسبة لمحور (Δ) بأنه القيمة الموجبة

$$I_\Delta = \sum_i \mathcal{M}_i \overrightarrow{I_i\mathcal{M}_i}^2 = \left[\sum_i \mathcal{M}_i d_i^2\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IX-9)$$

حسب d_i^2 هو مربع مسافة النقطة المادية $\mathcal{M}_I$ االتي كتلتها m_i بالنسبة للمحور (Δ) (الشكل 6-VII)، بالنسبة لجسم صلب حيث نعتبر توزيع الجسيمات فيه مستمرا تأخذ عبارة عزم العطالة بالنسبة للمحور (Δ) الصيغة التالية:

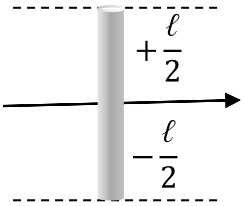
$$I_\Delta = \int r^2\, \rho d\tau \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IX-10)$$

حيث ρ: الكثافة الحجمية و $d\tau$ عنصر الحجم و يحسب التكامل على كل حجم الجسم الصلب و r المسافة بين موضع عنصر الحجم $d\tau$ و المحور (Δ) . في بعض الحالات حيث يوجد تناظر معين يمكن استعمال الكثافة الخطية أو الكثافة السطحية للمادة فتكون الصيغة العامة لعزم العطالة كالتالي:

$$I_{(\Delta)} = \int r^2\, dm$$

حيث: $dm = \lambda d\ell$: في حالة التوزيع الخطي

$dm = \sigma ds$: في حالة التوزيع السطحي. **مثال:** أحسب عزم عطالة قضيب، مهمل السمك و متجانس طوله ℓ كتلته m بالنسبة للمحور (Δ) المار من مركزه و عمودي عليه.



- نلاحظ التناظر الخطي موجود في القضيب لهذا نستعمل الكثافة الخطية لحساب عزم العطالة:

$$I_\Delta = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \ell^2\, \lambda d\ell = \lambda . 2\frac{\ell^3}{8.3} = \frac{\lambda\ell^2}{12}$$

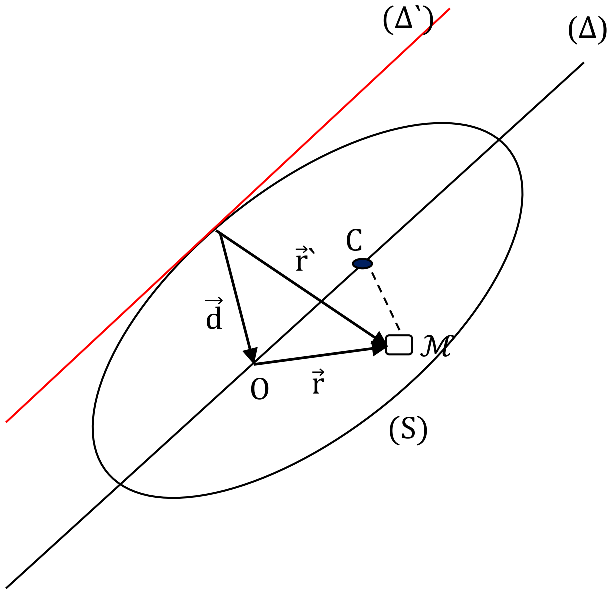
نحسب $m = \ell\lambda$ ومنه

$$I_\Delta = \frac{1}{12} m\ell^2$$

IV-نظرية المحاور المتوازنة أو نظرية هويغنز (huyghens):

حساب عزم العطالة في المثال السابق أو عبارات عزوم العطالة لبعض الأجسام الصلبة يتطلب معرفة محاور تناظر تمر من مركز الكتل حتى يسهل حسابها.

حساب عزم العطالة لجسم صلب بالنسبة لمحور كيفي يمكن أن يكون صعب و معقدا لذا نلجأ إلى نظرية تسهل حساب عزم العطالةI` بالنسبة الى محور كيفي موازي لمحور (Δ) و يمر من مركز الكتل C (الشكل IX-7)



الشكل IX-7: عزم العطالةبالنسبة لمحور كيفي

$$I` = \int r`^2 dm = \int (\vec{d} + \vec{r})^2 dm$$

$$I` = d^2 \int dm + \int dm r^2 + \int dm 2\vec{r}.\vec{d}$$

$$\vec{d}.$$

$$I` = Md^2 + I_{(\Delta)} + 2\vec{d} \int (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{C\mathcal{M}})\, dm$$

$$I` = I_{(\Delta)} + \mathcal{M}d^2 + 2\mathcal{M}\vec{d}.\overrightarrow{OC} + 2\vec{d} \int \overrightarrow{C\mathcal{M}}\, dc$$

من تعريف مركز الكتل لدينا

$$\overrightarrow{O\mathcal{M}_i} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{C\mathcal{M}_i}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{O\mathcal{M}_i}}{\mathcal{M}} + \frac{\sum m_i \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{C\mathcal{M}_i}\right)}{\mathcal{M}} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OC}}{\mathcal{M}} + \frac{\sum m_i \overrightarrow{C\mathcal{M}_i}}{\mathcal{M}}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathcal{M}\overrightarrow{OC}}{\mathcal{M}} + \frac{\sum m_i \overrightarrow{C\mathcal{M}_i}}{\mathcal{M}}$$

$$\Rightarrow \sum m_i \overrightarrow{C\mathcal{M}_i} = \vec{0}$$

$$\int dm \overrightarrow{C\mathcal{M}} = \vec{0}$$

و بماأن المحور (Δ) عمودي على شعاع $\vec{d}$ فان $\vec{d}.\overrightarrow{OC} = 0$ نحصل في الأخير على عبارة التالية:

$$I` = I_\Delta + \mathcal{M}d^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IX-11)$$

تنص هذه النظرية أن عزم عطالة جسم صلب لمحور كيفي يساوي عزم عطالته بالنسبة لمحور موازي للأول و يمر من مركز الكتل زائد جداء كتلة الجسم الصلب في مربع البعد بين المحورين.

V- الدفع الزاوي لجسم صلب يدور حول محور ثابت:

في الشكلIX-6 نحسب الدفع الزاوي للنقطة $\mathcal{M}_i$.

$$\vec{L}_1 = \overrightarrow{O\mathcal{M}} \wedge m_1\vec{v}_1 = \left(\overrightarrow{OI_1} + \overrightarrow{I_1\mathcal{M}}\right) \wedge m_1 d\vec{w}$$

$$\vec{L}_1 = m_1 d.\overrightarrow{OI_1} \wedge \vec{w} + m_1 d.\overrightarrow{I_1\mathcal{M}} \wedge \vec{w}$$

$$\vec{L}_1 = m_1\left(\overrightarrow{I\mathcal{M}_1}\right)^2 \vec{w} = m_1 d^2$$

اما الدفع الزاوي الكلي

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \left(\sum (m_i.d^2)\right)\vec{w} = I_{(\Delta)}\vec{w}$$

$$\vec{L} = I_{(\Delta)}\vec{w} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IX-12)$$

VI-نظرية الدفع الزاوي لجسم صلب يدور حول محور ثابت:

ينص المبدأ الأساسي للحركة الدورانية على أن التغير في الدفع الزاوي لجملة جسيمات يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة على الجملة:

$$\frac{d\vec{L}/O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}/O(ext)$$

وبما أن

$$\vec{L} = I_{(\Delta)}\vec{w}$$

نجد

$$\vec{\mathcal{M}}/O(ext) = \frac{dI_{(\Delta)}\vec{w}}{dt} = I_{(\Delta)}\frac{d\vec{w}}{dt}$$

حيث أن التسارع الزاوي يساوي:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{\alpha}$$

تصبح عبارة نظرية الدفع الزاوي

$$\vec{\mathcal{M}}/O(ext) = I_{(\Delta)}\vec{\alpha} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (IX-13)$$

مجموع عزوم القوى الخارجية بالنسبة للنقطة O يساوي جداء عزم عطالة الجسم الصلب بالنسبة لمحور (Δ) يمر من هذه النقطة في التسارع الزاوي للجسم.

تمارين (Exercices)

التمرين الأول:

نعتبر التركيب الممثل في الشكل و المتكون من:

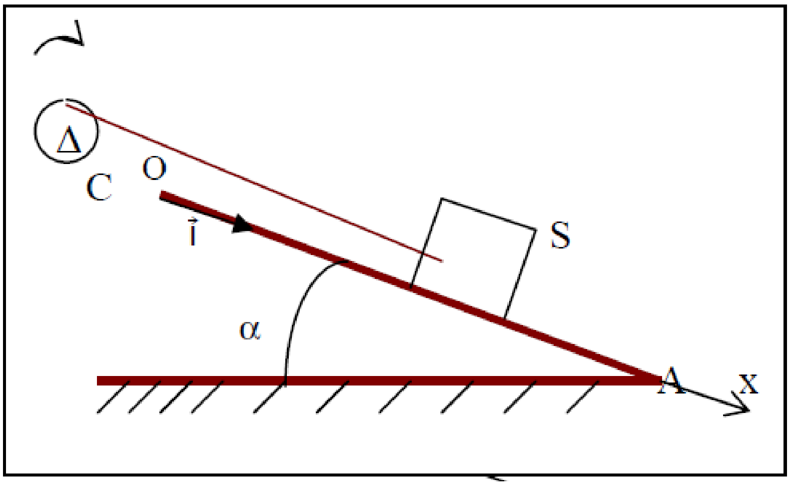
- جسم صلب S كتلته $m=200g$ قابل للانزلاق على مستوي مائل بزاوية $\alpha=30°$ بالنسبة للمستوي الأفقي بدون احتكاك .
- أسطوانة C متجانسة طويلة شعاعها $r=8cm$ قابلة للدوران حول محور تماثلها الأفقي Δ ثابت.
- خيط غير قابل للامتداد، مهمل الكتلة، ملفوف على الأسطوانة ربط طرفه الحر بالجسم S. نأخذ الجاذبية $g=10\ m/s^2$، نحرر S عند اللحظة $t=0s$ فينزلق بدون سرعة ابتدائية انطلاقا من الموضع O. نعرف موضع S على السكة في كل لحظة بالفواصل x_G لمركز الكتل G للجسم S في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- ينزلق S من O نحو A بتسارع ثابت $a=1.2m/s^2$ و يمر من A بالسرعة $V_A=1.7m/s$

1- حدد مع التعليل طبيعة حركة S، ثم أكتب المعادلة الزمنية لهذه الحركة.

2- أوجد قيمة x_G عند مرور S من A.

3- بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك على S، أوجد قيمة T توتر الخيط.

4- بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك على C، أوجد علاقة I_Δ عزم ثقل C بالنسبة للمحور Δ بدلالة r, T,a، ثم أحسبه.



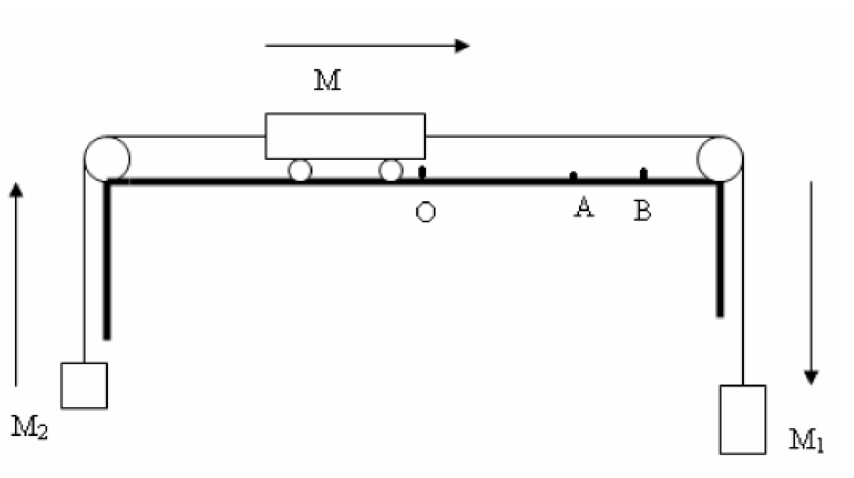
التمرين الثاني:

نعتبر التركيب الممثل في الشكل و المتكون من:

- عربة كتلتها $M=1Kg$ موضوعة على سكة أفقية
- جسمين S_1 و S_2 كتلتيهما $M_1=300g$ و $M_2=200g$
- بكرتين لهما نفس الكتلة $m=100g$ و نفس نصف القطر R يمكن كل واحدة أن تدور حول محور ثابت أفقي بدون احتكاك و عزم عطالة كل واحدة $J_\Delta=\frac{1}{2}MR^2$ بالنسبة لمحور الدوران
- خيطين f_1 و f_2 غير قابلين للامتداد مهملي الكتلة و لا ينزلقان على مجرى البكرة.

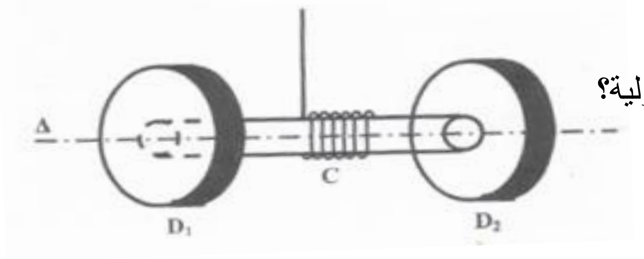
نعتبر أن حركة العربة على السكة تتم بالاحتكاك و أن قوى الاحتكاك تكافئ قوة شدتها $f=\frac{P}{20}$ و أن منحاها عكس منحى الحركة

1- تنطلق العربة من النقطة O اختيرت نقطة مبدأ المعلم بدون سرعة ابتدائية ، أحسب تسارعها؟



التمرين الثالث:

وشيعة عبارة عن أسطوانة صغيرة C نصف قطرها r=0,5cm و كتلتها مهملة، تحمل في طرفيها قرصين (على شكل أسطوانة) D_1 و D_2 متماثلان نصف قطرهما R=5cm و كتلة كل واحد m=0,1Kg، القرصان و الأسطوانة لهم نفس محور الدوران Δ. على الأسطوانة C يمكن لف بدون انزلاق و لا احتكاك خيط ذو كتلة مهملة.



1- أحسب التسارع الخطي للجملة أثناء حركتها الشاقولية؟

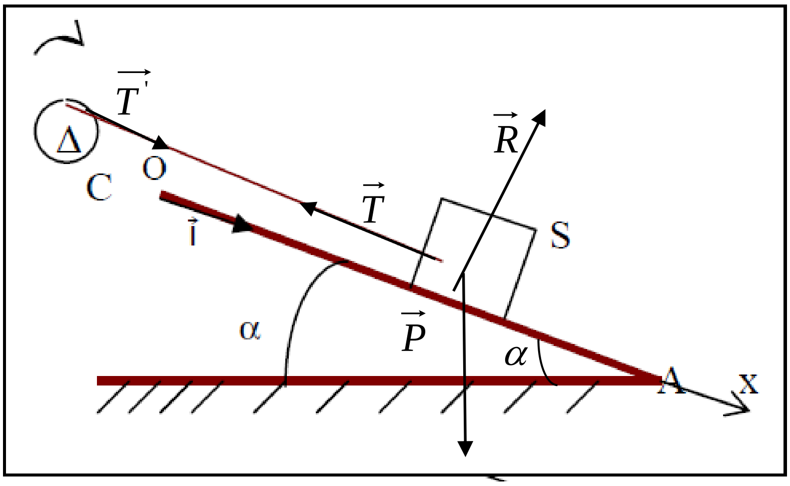
2- أحسب توتر الخيط؟

يعطى $g=9.8\ m/s^2$

حلول التمارين

التمرين الأول:

-1



- حسب المعطيات عندما نحرر المجموعة بدون سرعة ابتدائية من الموضع 0 فمسار مركز ثقل الجسم S مستقيم وأن التسارع $a=1{,}2m/s2$ ثابت فإن طبيعة حركة S حركة مستقيمة متغيرة بانتظام يمكن أن نستنتج أنها متسارعة لكون السرعة تزداد خلال الحركة من $V_0 = m/s$ إلى $V_A = 1{,}7m/s$

* المعادلة الزمنية:

$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$ حسب الشروط الابتدائية للحركة عند اللحظة $t=0$ عندها $x_0 = 0$ و $V_0 = 0$ و

$a = 1{,}2m/s^2$

$x = 0{,}6t^2$

-2 قيمة x_G عند مرور S من A

نطبق العلاقة المستقلة عن الزمن بين 0 و A

$$V_A^2 - V_0^2 = 2a(x_G - x_0)$$

$$V_0 = 0 \text{ et } x_0 = 0$$

$$V_A^2 = 2ax_G \Rightarrow x_G = \frac{V_1^2}{2a} \Rightarrow x_G = 1{,}2m$$

2- قيمة التوتر T: نطبق م.أ.تعلى البكرة والجسم S في معلم $(\vec{o},\vec{i},\vec{j})$ وباختيار المنحنى (كما فيالشكل) وأن الاحتكاكات مهملة.

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك على الجسم S الجسم في إزاحة مستقيمة .... $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\vec{a}$

سقط العلاقة في المعلم
$$\begin{cases} mg\sin\alpha - T = ma......(1) \\ R - mg\cos\alpha - 0........(2) \end{cases}$$

من العلاقة (1) نستنتج أن:
$$T = mg\sin\alpha - ma$$
$$= m(g\sin\alpha - a)$$

ت. ع:
$$T = 0,76N$$

4- علاقة $I_{(\Delta)}$، نطبق العلاقة الأساسية على البكرة، وبما أن البكرة في دوران حول المحور (Δ) ،
$$\sum M(\vec{F}_i) = I_{(\Delta)}\ddot{\theta}$$

القوى المطبقة على البكرة: $\vec{P}^{'}.\vec{R}^{'}.\vec{T}^{'}$

$$M_{(\Delta)}(\vec{P}) = M_{(\Delta)}(R^{'}) = 0$$
$$M_{(\Delta)}(T) = I_{(\Delta)}\ddot{\theta}$$

حسب المنحنى الذي تم اختيار على الشكل

$$T^{'}r = I_{\Delta}\theta \Leftrightarrow I_{(\Delta)} = \frac{T^{'}r}{a}$$

عندما ينتقل الجسم S بـ x فإن تدور بـ θ بحيث أن:

$$x = R\theta$$
$$V = Rw$$
$$a = R\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{a}{R}$$
$$I(\Delta) = \frac{T^{'}R^2}{a}$$

وبما أن الخيط غير قابل للامتداد والانزلاق $T^{'} = T$

$$I(\Delta) = \frac{T^{'}r^2}{a}$$

التمرين الثالث:

1- نطبق المبدأ الأساسي للديناميك الجملة في حالة دوران حول المحور Δ

$$\vec{M}_{/0}\vec{T} = J_{\Delta}.\theta''$$

نسمي γ تسارع الجملة أثناء حركتها الشاقولية إذا كانت المسافة المقطوعة على الشاقول هي x إذن $x = r\theta$ ومنه:

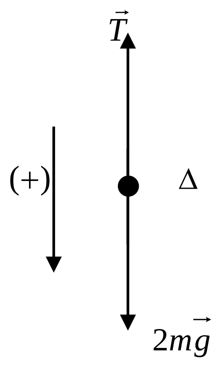
$$\gamma = \frac{d^2x}{dt2} = \frac{d^2}{dt^2}(r\theta) = r\frac{d^2\theta}{dt^2} = r\theta$$

ومنه $\vec{M}_{/0}\vec{T} = J_{\Delta}.\frac{\gamma}{r}$

$$\left.\begin{array}{r} J_{\Delta} = J_{D1} + J_{D2} + J_{C} \\ J_{D1} = J_{D2} = \dfrac{mR^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow J_{\Delta} = mR^2$$

$J_C = 0$ لأن كتلة الأسطوانة مهملة

حساب توتر الخيط $\vec{T}$.



$$\vec{T} + 2m\vec{g} = 2m\vec{\gamma}$$

نسقط هذه المعادلة على محور شاقولي مرجه للأسفل

$$2mg - T = 2m\gamma$$
$$T = 2m(g - \lambda)$$

$2m$: الكتلة الإجمالية للجملة

$$\vec{M}_{/\Delta}\vec{T} = T.r = J_{\Delta}\frac{\lambda}{r}$$

نعوض T و J_{Δ} كل بقيمته على التوالي في المعادلة أعلاه نحصل على:

$$\gamma = g\frac{2r^2}{R^2 + 2r^2}$$
$$\gamma = 0{,}196 m/s^2$$

2- طويلة توتر الخيط $\vec{T}$ هي

$$T = 2m(g - \gamma) = 1{,}92N$$