الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientfiique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي - سكيكدة
Ecole Normale Supérieure d'enseignement technologique, Skikda

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

Département de Mathématiques

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الرابعة رياضيات أستاذ التعليم الثانوي
وأستاذ التعليم المتوسط بعنوان:

محاضرات في مقياس الاحتمالات والإحصاء 2

من إعداد الأستاذة :
صغير فاطمة الزهرة

السنة الجامعية: 2024-2025

الفهرس

مقدمة

1. الشعاع العشوائي..... 1

1.1. تذكرة حول المتغيرات العشوائية وحيدة البعد..... 2

1.1.1. بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة..... 4

2.1.1. بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة..... 6

2.1. الثنائية العشوائية..... 8

1.2.1. الثنائية العشوائية المتقطعة..... 9

2.2.1. الثنائية العشوائية المستمرة..... 19

3.2.1. التغاير ومعامل الارتباط..... 26

4.2.1. استبدال المتغيرات (حالة متغيرين عشوائيين)..... 27

3.1. المتغيرات العشوائية متعددة الأبعاد (الشعاع العشوائي)..... 29

1.3.1. تعاريف..... 29

2.3.1. الشعاع العشوائي المتقطع..... 30

3.3.1. الشعاع العشوائي المستمر..... 31

4.3.1. استقلال المتغيرات العشوائية..... 33

4.1. مصفوفة التغاير ومعاملات الارتباط..... 33

5.1. استبدال المتغيرات (حالة n متغيرات عشوائية)..... 35

6.1. تمارين مقترحة..... 38

2. أنواع التقارب في الاحتمالات..... 42

1.2. متراجحات هامة..... 43

1.1.2. متراجحة ماركوف 43
2.1.2. متراجحة تشيبيشيف 43
3.1.2. متراجحة كوشي-شوارز 44
2.2. التقارب بالاحتمال 44
3.2. التقارب بالمتوسط 47
4.2. التقارب بالقانون 50
5.2. التقارب شبه المؤكد 52
1.5.2. الشرط اللازم والكافي للتقارب شبه المؤكد 53
6.2. العلاقات بين أنواع التقارب 53
1.6.2. العلاقة بين التقارب بالاحتمال والتقارب بالمتوسط 53
2.6.2. العلاقة بين التقارب شبه المؤكد والتقارب بالاحتمال 54
3.6.2. العلاقة بين التقارب بالاحتمال والتقارب بالقانون 56
4.6.2. العلاقات بين الأنماط المختلفة للتقارب 57
7.2. نظريات النهايات 58
1.7.2. قانون الأعداد الكبيرة 59
2.7.2. نظرية النهاية المركزية 60
8.2. تمارين مقترحة 63

3. الإحصاء الاستقرائي (الاستدلالي) 66
1.3. عموميات وتعاريف 67
2.3. التقدير الإحصائي 67
1.2.3. التقدير النقطي 68
2.2.3. التقدير النقطي للمتوسط 75
3.2.3. التقدير النقطي للتباين 79
4.2.3. طرق إيجاد مقدرات النقطة 82
5.2.3. التقدير بمجال ثقة 93

3.3. اختبار الفرضيات..... 100
1.3.3. تعاريف ومفاهيم هامة..... 101
2.3.3. أنواع الخطأ وقوة الاختبار..... 102
3.3.3. مستوى المعنوية ومنطقتي القبول والرفض..... 102
4.3.3. خطوات اختبار الفرضيات..... 103
5.3.3. اتخاذ القرار بشأن نتيجة الاختبار..... 104
6.3.3. استخدام قيمة p لاختبار الفروض الإحصائية..... 105
7.3.3. اختبار الفرض حول وسط المجتمع..... 106
8.3.3. اختبار الفرض حول الفرق بين وسطي مجتمعين للعينات المستقلة..... 110
4.3. تمارين مقترحة..... 113
المراجع

مقدمة

تتضمن هذه المطبوعة دروس وأمثلة وفق البرنامج الوزاري والموحد للمدارس العليا للأساتذة لمقياس الاحتمالات والإحصاء 2 (Probabilités et Statistiques 2) موجهة لطلبة أقسام السنة الرابعة رياضيات أستاذ تعليم ثانوي وأستاذ تعليم متوسط، وإلى كل المستويات باختلاف تخصصاتها، وهي عبارة عن تكملة لبرنامج السنة الثالثة -احتمالات وإحصاء 1 - وقد حرصنا في تقديم هذه المطبوعة على الإيجاز والسهولة وتبسيط المفاهيم المدعمة بأمثلة تطبيقية بسيطة بعيداً عن البراهين المعقدة والمسترسلة، وذلك حتى يتسنى للطلبة استيعاب محاور المقرر الدراسي.

وقد قُسمت هذه المطبوعة إلى ثلاث فصول أساسية، نستهلها بفصل الشعاع العشوائي الذي يظم أهم التعاريف والمبادئ الأساسية كما نهتم فيه بدراسة وتقديم حالة خاصة ألا وهي الثنائية العشوائية بنوعيها المتقطعة والمستمرة وأخيرا نتطرق إلى استبدال المتغيرات. نمر بعدها إلى الفصل الثاني ألا وهو أنواع التقارب في الاحتمالات نتطرق فيه إلى أربعة أنواع من التقارب كما ندرس العلاقة التي تربط بين هذه الأنواع، وأخيرا نمر إلى نظريات النهاية والمتمثلة في قانون الأعداد الكبيرة ونظرية النهاية المركزية.

الفصل الثالث والأخير في هذه المطبوعة هو مدخل إلى الإحصاء الاستقرائي أو الاستدلالي الذي ينقسم بدوره إلى جزأين أساسيين هما التقدير الإحصائي واختبار الفرضيات.

الفصل الأول

الشعاع العشوائي

درسنا في السنة الثالثة المتغيرات العشوائية وحيدة البعد وتوزيعاتها الاحتمالية، والتي تعد الركيزة الأساسية لهذا الفصل. فلا يمكن دراسة الشعاع العشوائي دون فهم المتغير العشوائي، إذ أن الشعاع العشوائي ما هو إلا مجموعة من المتغيرات العشوائية وحيدة البعد. في هذا الفصل، سننتقل إلى دراسة المتغيرات العشوائية متعددة الأبعاد، حيث نبدأ بدراسة الثنائية العشوائية بصيغتيها المتقطعة والمستمرة، ثم نعمل على تعميم هذه المفاهيم لدراسة الشعاع العشوائي.

الأهداف التعليمية للفصل:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- ✓ الثنائية العشوائية
- ✓ قانون الاحتمال المشترك
- ✓ قوانين الاحتمال الهامشية والشرطية.
- ✓ التغاير ومعامل الارتباط.
- ✓ الشعاع العشوائي بنوعيه المتقطع والمستمر.
- ✓ استقلال المتغيرات العشوائية.
- ✓ مصفوفة التغاير ومعاملات الارتباط.
- ✓ استبدال المتغيرات.

1. الشعاع العشوائي

1.1. تذكرة حول المتغيرات العشوائية وحيدة البعد

1.1.1. تعاريف

تعريف 1.1.1. (مجموعة الأجزاء)

من أجل كل مجموعة Ω، نرمز بـ $\mathcal{P}(\Omega)$ بمجموعة أجزاء هذه المجموعة.

مثال:

لتكن $\Omega=\{1,2,3\}$، مجموعة أجزاء Ω هي:

$$\mathcal{P}(\Omega)=\{\phi,\Omega,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$$

تعريف 2.1.1. (العشيرة)

نسمي $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ عشيرة أو ($\sigma-$جبر) إذا كان:

1) $\Omega\in\mathcal{F}$.

2) إذا كان $\forall i\in IN$ ، $A_i\in\mathcal{F}$ فإن $\bigcup_{i\in IN}A_i\in\mathcal{F}$.

3) إذا كان $A\in\mathcal{F}$ إذن $A^c\in\mathcal{F}$.

- نسمي مجموعة قابلة للقياس، كل مجموعة A، حيث A عنصر في العشيرة $\mathcal{F}$.
- كل مجموعة مزودة بعشيرة تسمى فضاء قابل للقياس، و نكتب $(\Omega,\mathcal{F})$.

تعريف 3.1.1. (العشيرة البوريلية)

ليكن (Ω,τ) فضاء طبولوجي، نسمي عشيرة بوريلية على Ω نسبة إلى τ ونرمز لها بـ $\mathcal{B}_\tau(\Omega)$، العشيرة المولدة بمفتوحات Ω.

تعريف 4.1.1. (قابلية القياس)

نقول أن التطبيق $f:(\Omega,\mathcal{A})\to(E,\mathcal{F})$ قابل للقياس، إذا كان:

$$\forall B\in\mathcal{F},\quad f^{-1}(B)\in\mathcal{A}$$

حيث أن $(\Omega,\mathcal{A})$ و $(E,\mathcal{F})$ فضاءان قابلان للقياس.

تعريف 5.1.1. (الاحتمال)

نسمي احتمال على الفضاء $(\Omega,\mathcal{F})$، كل تطبيق IP حيث:

$$IP:\mathcal{F}\to[0,1]$$

يحقق

1) $IP(\Omega)=1$.

2) من أجل كل متتالية $(A_n)_{n\in IN^*}$ حيث $A_n\in\mathcal{F}$، منفصلة مثنى مثنى، لدينا:

$$IP\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}IP(A_n)$$

تعريف 6.1.1. (فضاء الاحتمال)

نسمي فضاء احتمال، الثلاثية $(\Omega,\mathcal{F},IP)$ حيث:

1) Ω: مجموعة.

2) $\mathcal{F}$: عشيرة أحداث، وعناصر $\mathcal{F}$ تسمى أحداث.

3) IP: قياس موجب على العشيرة $\mathcal{F}$، حيث $IP(\Omega)=1$ و $0\le IP\le 1$.

خواص الاحتمال

كل احتمال IP معرف على الفضاء $(\Omega,\mathcal{F})$ يحقق الخواص التالية:

1) $IP(\Omega)=1$.

2) $\forall A\in\mathcal{F},\ IP(\overline{A})=1-IP(A)$

3) $IP(\phi)=0$.

4) $\forall A\in\mathcal{F},\ \forall B\in\mathcal{F},\ IP(A\cup B)=IP(A)+IP(B)-IP(A\cap B)$.

5) $\forall A\in\mathcal{F},\ \forall B\in\mathcal{F},\ \mathrm{A}\subset\mathrm{B}\Rightarrow IP(A)\le IP(B)$.

تعريف 7.1.1. (المتغير العشوائي الحقيقي)

ليكن $(\Omega,\mathcal{F},IP)$ فضاء احتمال. نسمي متغير عشوائي حقيقي معرف على الفضاء $(\Omega,\mathcal{F},IP)$ كل تطبيق قابل للقياس $X:(\Omega,\mathcal{F},IP)\to(IR,\mathcal{B}_{IR})$

تقسم المتغيرات العشوائية إلى نوعين أساسيين هما:

- **المتغير العشوائي المتقطع** أو النقطي هو الذي يأخذ عددا منتهيا أو قابلا للعد من القيم.
- **المتغير العشوائي المستمر** هو الذي يأخذ كل قيم مجال محدود أو غير محدود.

تعريف 8.1.1. (قانون احتمال المتغير العشوائي)

ليكن X متغير عشوائي حقيقي، حيث $X:(\Omega,\mathcal{F},IP)\to(IR,\mathcal{B}_{IR})$

نعرف التابع IP_X على العشيرة $\mathcal{B}_{IR}$ كما يلي:

$$\forall B\in\mathcal{B}_{IR},\quad IP_X(B)=IP(X\in B)=IP\left(\omega\in\Omega;\ X(\omega)\in B\right)=IP\left(X^{-1}(B)\right)$$

تعريف 9.1.1. (تابع توزيع المتغير العشوائي)

نسمي تابع توزيع المتغير العشوائي الحقيقي X المعرف على فضاء الاحتمال $(\Omega,\mathcal{F},IP)$، التابع F_X المعرف على IR بـ:

$$\forall x\in IR,\quad F_X(x)=IP(X\le x)=IP(]-\infty,x])$$

2.1.1. بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1) توزيع برنولي

هو أبسط مثال للتوزيع النقطي حيث أن X هنا يأخذ قيمتين فقط هما 0 و 1، أي أن

$$X(\Omega)=\{0,1\}$$

يعطى توزيع برنولي بالشكل التالي:

$$IP(X=k)=p^k.q^{1-k}=p^k.(1-p)^{1-k},\quad k=0,1$$

ونكتب $X\to\mathcal{B}(p)$

2) التوزيع الثنائي

نعتبر نفس الشروط المتبعة في توزيع برنولي أي أن هناك حدث A متعلق بتجربة معينة واحتماله $IP(A)=p$ ، ونفرض أننا كررنا هذه التجربة n مرة، نعتبر في كل مرة متغير عشوائي X_i حيث $i=1,2,...$.

يعطى توزيع ثنائي الحد بالشكل التالي:

$$IP(X=k)=C_n^k p^k.q^{n-k}=C_n^k p^k.(1-p)^{n-k},\ \ k=0,1,...,n$$

ونكتب $X \to \mathcal{B}(n,p)$

3) التوزيع الهندسي

نعتبر أن A حدث متعلق بتجربة معينة و احتماله $IP(A)=p$.نستمر في إجراء هذه التجربة حتى يتحقق الحدث A (النجاح).

فيكون قانون احتمال X هو

$$IP(X=k)=q^{k-1}p \qquad ,k\in IN^*$$

ونكتب $X \to G(p)$

4) توزيع بواسون

هذا القانون خاص بالاحتمالات الصغيرة انطلاقا من قانون التوزيع الثنائي وهذا بملاحظة أن تطبيق القانون الثنائي بالأمر الصعب كلما كبر n وصغر المقدار الاحتمالي p ، ويمكن الحصول علية بالتقريب في التوزيع الثنائي.

يعطى توزيع بواسون للمتغير العشوائي X كما يلي:

$$IP_X(k)=IP(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad ,k\in IN,\ \ \lambda>0$$

ونكتب $X \to \mathcal{P}(\lambda)$

2.1.1. بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة

1) التوزيع الأسي

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الأسي، إذا كانت كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ,x\geq 0 \qquad (\lambda>0)\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$

ونكتب $X \to \mathcal{E}xp(\lambda)$

2) التوزيع الطبيعي

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي، إذا كانت كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (\sigma>0,\mu\in IR,x\in IR)$$

ونكتب $X \to \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

3) التوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع الطبيعي المعياري هو حالة خاصة من التوزيع الطبيعي.

نقول أن المتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري إذا كانت كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z)^2} \qquad z\in IR$$

حيث $\sigma^2=1$ و $\mu=0$.

يسمى Z المتغير الطبيعي المعياري، ويمكن أن نصل إليه باستعمال التبديل التالي:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

ونكتب $X \to \mathcal{N}(0,1)$

4) توزيع قاما

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع قاما، إذا كانت كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-\lambda x} & ,x>0 \qquad (\lambda>0,p>0)\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$$

حيث

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$$

ونكتب $X\to\gamma(p,\lambda)$

5) توزيع كاي مربع

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع كاي مربع، إذا كانت كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & ,x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$$

ونكتب $X\to\chi_n^2$

6) توزيع ستيودنت

إذا كان المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين، حيث

$$X\to\mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \text{ و } Y\to\chi_n^{\,2}$$

فإن $Z=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ يتبع توزيع ستيودنت T_n.

ونكتب $Z\to T_n$

7) توزيع فيشر

من أجل $n,m \notin IN^*$ ، إذا كان المتغيرين العشوائيين Y و Z مستقلين، حيث

$$Z \to \chi_m^{\,2} \text{ و } Y \to \chi_n^{\,2}$$

فإن $F = \frac{Y/n}{Z/m}$ يتبع قانون توزيع فيشر $\mathcal{F}_{n,m}$.

ونكتب $F \to \mathcal{F}_{n,m}$

2.1. الثنائية العشوائية

تعريف 1.2.1. (الثنائية العشوائية)

نسمي ثنائية عشوائية $X=(X_1,X_2)$ ، كل تطبيق قابل للقياس من فضاء الاحتمال $(\Omega,\mathcal{F},IP)$ إلى الفضاء $\left(IR^2,\mathcal{B}_{IR^2}\right)$.

تعريف 2.2.1. (الثنائية العشوائية)

ليكن $(\Omega,\mathcal{F},IP)$ فضاء احتمال وليكن X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين معرفين على الفضاء $(\Omega,\mathcal{F},IP)$ والتي تأخذ قيما في IR. ليكن X التطبيق المعرف بـ:

$$\begin{aligned} X &: \Omega \to IR^2 \\ \omega &\mapsto X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega)) \end{aligned}$$

نقول أن $X=(X_1,X_2)$ هي ثنائية عشوائية.

تعريف 3.2.1. (قانون الاحتمال المشترك)

لتكن $X=(X_1,X_2)$ ثنائية عشوائية معرفة بـ: $X:(\Omega,\mathcal{F},IP)\to\left(IR^2,\mathcal{F}_{IR^2},IP_X\right)$

نسمي IP_X قانون احتمال الثنائية $X=(X_1,X_2)$ ، ونكتب:

$$\forall B \in \mathcal{B}_{IR^2}, IP_X(B) = IP(X \in B) = IP(\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B)$$

1.2.1. الثنائية العشوائية المتقطعة

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين متقطعين، حيث

$$X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_p\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_q\}$$

1) قانون احتمال الثنائية العشوائية المتقطعة

لتكن (X,Y) ثنائية عشوائية متقطعة. قانون احتمال الثنائية العشوائية (X,Y)، معرف بمجموعة الأعداد p_{ij} $(0 \le p_{ij} \le 1)$، حيث

$$p_{ij} = IP(X = x_i, Y = y_j) = IP((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

حيث أن p_{ij} يحقق العلاقة:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} p_{ij} = 1$$

نعرف قانون احتمال الثنائية العشوائية (X,Y) أو قانون الاحتمال المشترك لـ X و Y في شكل جدول كما يلي:

X \ Y	y_1	...	y_j	...	y_q
x_1	p_{11}	...	p_{1j}	...	p_{1q}
. . .			. . .		. . .
x_i	p_{i1}	...	p_{ij}	...	p_{iq}
. . .			. . .		. . .
x_p	p_{p1}	...	p_{pj}	...	p_{pq}

2) قوانين الاحتمال الهامشية

إن معرفة قانون الاحتمال المشترك للثنائية العشوائية (X,Y) يسمح بمعرفة قانون الاحتمال الهامشي لـ X و Y (IP_X و IP_Y على الترتيب) كما يلي:

✓ قانون الاحتمال الهامشي لـ X

$$\begin{aligned} IP_X &= IP(X = x_i) \\ &= IP(X = x_i, Y = y_1) + IP(X = x_i, Y = y_2) + ... + IP(X = x_i, Y = y_q) \\ &= \sum_{j=1}^{q} p_{ij} = p_{i.} \end{aligned}$$

✓ قانون الاحتمال الهامشي لـ Y

$$\begin{aligned} IP_Y &= IP(Y = x_j) \\ &= IP(X = x_1, Y = y_j) + IP(X = x_2, Y = y_j) + ... + IP(X = x_p, Y = y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{p} p_{ij} = p_{.j} \end{aligned}$$

حيث أن المقادير $p_{i.}$ و $p_{.j}$ تحقق العلاقة

$$\sum_{i=1}^{p} p_{i.} = \sum_{j=1}^{q} p_{.j} = 1$$

يعطى قانون الاحتمال الهامشي للمتغيرين X و Y في السطر الأخير و العمود الأخير من الجدول كما يلي:

$X \diagdown Y$	y_1	...	y_j	...	y_q	IP_X
x_1	p_{11}	...	p_{1j}	...	p_{1q}	$p_{1.}$
. . .			. . .		. . .	
x_i	p_{i1}	...	p_{ij}	...	p_{iq}	$p_{i.}$
. . .			. . .		. . .	. . .
x_p	p_{p1}	...	p_{pj}	...	p_{pq}	$p_{p.}$
IP_Y	$p_{.1}$	...	$p_{.j}$	...	$p_{.q}$	$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} p_{ij} = 1$

مثال:

نرمي قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين ونراهن بدينارين على ظهور الصورة (F) في الرمية الأولى، وإذا حصلنا على (F) نراهن بدينار على ظهور (F) في الرمية الثانية. إذا حصلنا على (P) في الرمية الأولى نراهن بـ 3 دنانير على ظهور (F) في الرمية الثانية.

- نقوم بإيجاد قانون الاحتمال المشترك و من ثم قوانين الاحتمال الهامشية.

✓ مجموعة الإمكانيات لهذه التجربة هي:

$$\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$$

✓ نرمز بـ X للربح في الرمية الأولى، أي أن:

$$X = \{-2, 2\}$$

✓ نرمز بـ Y للربح في الرمية الثانية، أي أن:

$$Y = \{-1, 1, -3, 3\}$$

$$(X,Y)=\{(2,-1),(2,1),(-2,-3),(-2,3)\}$$

✓ قانون الاحتمال المشترك للثنائية يعطى كما يلي:

$$IP(X=2,Y=-1)=IP(FP)=\frac{1}{4}$$
$$IP(X=2,Y=1)=IP(FF)=\frac{1}{4}$$
$$IP(X=-2,Y=-3)=IP(PP)=\frac{1}{4}$$
$$IP(X=-2,Y=3)=IP(PF)=\frac{1}{4}$$

نلخص قانون الاحتمال المشترك جدوليا كما يلي:

X \ Y	1-	1	-3	3
-2	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0

وبالتالي يكون قانون الاحتمال الهامشي لـ X كما يلي:

$$IP(X=-2)=IP(X=-2,Y=-1)+IP(X=-2,Y=1)$$
$$+IP(X=-2,Y=-3)+IP(X=-2,Y=3)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$IP(X=2)=IP(X=2,Y=-1)+IP(X=2,Y=1)$$
$$+IP(X=2,Y=-3)+IP(X=2,Y=3)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

ويكون قانون الاحتمال الهامشي لـ Y كما يلي:

$$IP(Y=-1)=IP(Y=1)=IP(Y=-3)=IP(Y=3)=\frac{1}{4}$$

نلخص قانون الاحتمال الهامشي لـ X و Y جدوليا كما يلي:

$X \backslash Y$	1-	1	-3	3	IP_X
-2	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$
IP_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

3) قانون الاحتمال الشرطي للثنائية العشوائية المتقطعة

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين متقطعين معرفان على فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{F}, IP)$.

نعتبر الحدثين $A=(X=x_i)$ و $B=(Y=y_j)$ ولدينا

$$IP(A/B)=\frac{IP(A\cap B)}{IP(B)}, \quad IP(B)\neq 0$$

- قانون الاحتمال الشرطي لـ X

$$IP(X=x_i / Y=y_j)=\frac{IP(X=x_i \cap Y=y_j)}{IP(Y=y_j)}=p_{i/j}$$

أي أن $p_{i/j}=\frac{p_{ij}}{p_{.j}}$ حيث $p_{.j}\neq 0$.

- قانون الاحتمال الشرطي لـ Y

$$IP(Y=y_j / X=x_i)=\frac{IP(Y=y_j \cap X=x_i)}{IP(X=x_i)}=p_{j/i}$$

أي أن $p_{j/i}=\frac{p_{ij}}{p_{i.}}$ حيث $p_{i.}\neq 0$.

مثال:

رمينا قطعة نقود متجانسة ثلاث مرات متتالية. ليكن X عدد مرات ظهور (F) في الرمية الأولى، وليكن Y عدد مرات ظهور (P) في الرميات الثلاث.

لإيجاد قانون الاحتمال الشرطي للثنائية العشوائية (X,Y)، نقوم أولا بإيجاد قانون الاحتمال المشترك للثنائية العشوائية (X,Y) ومن ثم قوانين الاحتمال الهامشية لـ X و Y.

1. قانون الاحتمال المشترك

$$\Omega=\{PPP,PPF,PFP,PFF,FPP,FPF,FFP,FFF\}$$

- X تمثل عدد مرات ظهور (F) في الرمية الأولى، أي أن $X=\{0,1\}$.
- Y تمثل عدد مرات ظهور (P) في الرميات الثلاث، أي أن $Y=\{0,1,2,3\}$.
- إذا اعتبرنا سلوك المتغيرين العشوائيين معا فإن:

$$(X,Y)=\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2)\}$$

وبالتالي

$$IP(X=0)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\quad IP(X=1)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$
$$IP(Y=0)=\frac{1}{8},\quad IP(Y=1)=\frac{3}{8},\quad IP(Y=2)=\frac{3}{8},\quad IP(Y=3)=\frac{1}{8}.$$

قانون الاحتمال المشترك لـ X و Y يكون كما يلي:

$$IP(X=0,Y=0)=0,\qquad IP(X=0,Y=1)=\frac{1}{8}$$
$$IP(X=0,Y=2)=\frac{2}{8},\qquad IIP(X=0,Y=3)=\frac{1}{8}$$

$$IP(X=1,Y=0)=\frac{1}{8},\qquad IP(X=1,Y=1)=\frac{2}{8}$$
$$IP(X=1,Y=2)=\frac{1}{8},\qquad IP(X=1,Y=3)=0.$$

يمكن تلخيص النتائج السابقة جدوليا كما يلي:

X \ Y	0	1	2	3	IP_X
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{4}{8}$
IP_Y	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

2. قانون الاحتمال الشرطي للثنائية العشوائية (X,Y)

✓ $p_{i/j}$

$$p_{1/1} = IP(X = x_1 / Y = y_1) = IP(X = 0/Y = 0) = \frac{IP(X = 0 \cap Y = 0)}{IP(Y = 0)} = 0$$

$$p_{2/1} = IP(X = x_2 / Y = y_1) = IP(X = 1/Y = 0) = \frac{IP(X = 1 \cap Y = 0)}{IP(Y = 0)} = \frac{1/8}{1/8} = 1$$

$$p_{1/2} = IP(X = x_1 / Y = y_2) = IP(X = 0/Y = 1) = \frac{IP(X = 0 \cap Y = 1)}{IP(Y = 1)} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$$

$$p_{2/2} = IP(X = x_2 / Y = y_2) = IP(X = 1/Y = 1) = \frac{IP(X = 1 \cap Y = 1)}{IP(Y = 1)} = \frac{2/8}{3/8} = \frac{2}{3}$$

$$p_{1/3} = IP(X = x_1 / Y = y_3) = IP(X = 0/Y = 2) = \frac{IP(X = 0 \cap Y = 2)}{IP(Y = 2)} = \frac{2/8}{3/8} = \frac{2}{3}$$

$$p_{2/3} = IP(X = x_2 / Y = y_3) = IP(X = 1/Y = 2) = \frac{IP(X = 1 \cap Y = 2)}{IP(Y = 2)} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$$

$$p_{1/4} = IP(X = x_1 / Y = y_4) = IP(X = 0/Y = 3) = \frac{IP(X = 0 \cap Y = 3)}{IP(Y = 3)} = \frac{1/8}{1/8} = 1$$

$$p_{2/4} = IP(X = x_2 / Y = y_4) = IP(X = 1/Y = 3) = \frac{IP(X = 1 \cap Y = 3)}{IP(Y = 3)} = 0$$

ومنه قانون الاحتمال الشرطي $p_{i/j}$ يعطى جدوليا كما يلي:

X \ $p_{i/j}$	$p_{i/1}$	$p_{i/2}$	$p_{i/3}$	$p_{i/4}$
$X=0$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$X=1$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\sum$	1	1	1	1

✓ $p_{j/i}$

$$p_{1/1}=IP(X=x_1/Y=y_1)=IP(Y=0/X=0)=\frac{IP(X=0\cap Y=0)}{IP(X=0)}=0$$

$$p_{2/1}=IP(X=x_1/Y=y_2)=IP(Y=1/X=0)=\frac{IP(X=0\cap Y=1)}{IP(X=0)}=\frac{1/8}{4/8}=\frac{1}{4}$$

$$p_{3/1}=IP(X=x_1/Y=y_3)=IP(Y=2/X=0)=\frac{IP(X=0\cap Y=2)}{IP(X=0)}=\frac{2/8}{4/8}=\frac{2}{4}$$

$$p_{4/1}=IP(X=x_1/Y=y_4)=IP(Y=3/X=0)=\frac{IP(X=0\cap Y=3)}{IP(X=0)}=\frac{1/8}{4/8}=\frac{1}{4}$$

$$p_{1/2}=IP(X=x_2/Y=y_1)=IP(Y=0/X=1)=\frac{IP(X=1\cap Y=0)}{IP(X=1)}=\frac{1/8}{4/8}=\frac{1}{4}$$

$$p_{2/2}=IP(X=x_2/Y=y_2)=IP(Y=1/X=1)=\frac{IP(X=1\cap Y=1)}{IP(X=1)}=\frac{2/8}{4/8}=\frac{2}{4}$$

$$p_{3/2}=IP(X=x_2/Y=y_3)=IP(Y=2/X=1)=\frac{IP(X=1\cap Y=2)}{IP(X=1)}=\frac{1/8}{4/8}=\frac{1}{4}$$

$$p_{4/2}=IP(X=x_2/Y=y_4)=IP(Y=3/X=1)=\frac{IP(X=1\cap Y=3)}{IP(X=1)}=0$$

ومنه قانون الاحتمال الشرطي $p_{j/i}$ يعطى جدوليا كما يلي:

$p_{i/j}$ \ Y	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$
$p_{j/1}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
$p_{j/2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

4) استقلال متغيرين عشوائيين متقطعين

نقول أن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين إذا وفقط إذا كان:

$$IP(X=x_i, Y=y_j) = IP(X=x_i).IP(Y=y_j)$$

ومن ذلك ينتج أن

$$IP(X=x_i / Y=y_j) = IP(X=x_i)$$
$$IP(Y=y_j / X=x_i) = IP(Y=y_j)$$

أي أن تحقق الحادثة $(X=x_i)$ غير مرتبط بتحقق الحادثة $(Y=y_j)$.

5) الأمل الشرطي

الأمل الشرطي للمتغير العشوائي المتقطع Y شرط X ، ونكتب $IE(Y/X=x)$ يعطى كما يلي:

$$IE(Y/X=x) = \sum_j y_j IP(Y=y_j / X=x_i)$$

خواص:

1. الخطية: إذا كان a و b عددان حقيقيان

$$IE(aY_1 + bY_2 / X=x) = aIE(Y_1/X=x) + bIE(Y_2/X=x)$$

2. نظرية الأمل المطلق

$$IE(IE(Y/X)) = IE(Y)$$

مثال:

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين متقطعين مستقلين، يتبعان التوزيع الثنائي $\mathcal{B}(n,p)$. نريد حساب الأمل الشرطي لـ X بشرط $X+Y=m$.

- نقوم أولا بحساب قانون الاحتمال الشرطي $IP(X=k/X+Y=m)$.

$$\begin{aligned} IP(X=k/X+Y=m) &= \frac{IP(X=k, X+Y=m)}{IP(X+Y=m)} \\ &= \frac{IP(X=k, Y=m-k)}{IP(X+Y=m)} \\ &= \frac{IP(X=k)\,IP(Y=m-k)}{IP(X+Y=m)} \\ &= \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k} C_n^{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m+k}}{C_{2n}^m p^m (1-p)^{2n-m}} \\ &= \frac{C_n^k C_n^{m-k} p^m (1-p)^{2n-m}}{C_{2n}^m p^m (1-p)^{2n-m}} \\ &= \frac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m} \end{aligned}$$

وبالتالي

$$IE(X/Y=y)=\frac{m}{2}$$

6) التباين الشرطي

التباين الشرطي للمتغير العشوائي Y شرط X ، ونكتب $Var(Y/X=x)$ ، يعطى بالعلاقة التالية:

$$Var(Y/X=x)=IE\left((Y-IE(Y/X=x))^2/X=x\right)$$

2.2.1. الثنائية العشوائية المستمرة

1) قانون احتمال الثنائية العشوائية المستمرة

تعريف 4.2.1. (تابع الكثافة)

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين فإن $W=(X,Y)$ هي ثنائية عشوائية مستمرة وتقبل تابع كثافة معرف كما يلي:

$$f : IR^2 \longrightarrow IR^+$$

حيث أن

$$\forall (x,y) \in IR^2, \quad f(x,y) \geq 0$$

$$\iint_{IR} f(x,y)dxdy = 1$$

يسمى f بتابع الكثافة المشترك لـ X و Y.

مثال:

ليكن التابع f المعرف كما يلي:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x \geq 0, \ y \geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

نثبت أن f هو تابع الكثافة المشترك لـ X و Y.

لدينا

$$\forall (x,y) \in IR^2, \quad f(x,y) \geq 0$$

$$\iint_{IR} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x-y}dxdy = e^{-x}\Big]_0^{+\infty}.e^{-y}\Big]_0^{+\infty} = 1$$

وبالتالي ينتج أن f تابع كثافة مشترك لـ X و Y.

تعريف 5.2.1. (تابع التوزيع المشترك)

لتكن (X,Y) ثنائية عشوائية مستمرة وتقبل تابع كثافة f .

تابع التوزيع لـلثنائية (X,Y) أو تابع التوزيع المشترك لـ X و Y يعطى كما يلي:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy$$

مثال:

نحسب تابع التوزيع المشترك للمثال السابق

$$\begin{aligned}F(x,y)&=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy\\&=\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} e^{-x-y}dxdy\\&=e^{-x}\Big]_0^x.e^{-y}\Big]_0^y\\&=\left(e^{-x}-1\right)\left(e^{-y}-1\right)\\&=1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y}\end{aligned}$$

وبالتالي

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y}, & x\geq 0,\ y\geq 0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

2) قوانين الاحتمال الهامشية

لتكن (X,Y) ثنائية عشوائية مستمرة وتقبل تابع كثافة f . تابع التوزيع الهامشي لـ X يستنتج من تابع التوزيع المشترك لـ X و Y كما يلي:

$$\begin{aligned}F_X(x)&=IP(X\leq x)=IP(X\leq x,Y<+\infty)=IP\left(\lim_{y\to+\infty}\{X\leq x,Y\leq y\}\right)\\&=\lim_{y\to+\infty} IP(X\leq x,Y\leq y)=\lim_{y\to+\infty} F(x,y)\equiv F(x,+\infty)\end{aligned}$$

أي أن:

$$F_X(x)=F(x,+\infty)$$

بنفس الطريقة نحصل على التوزيع الهامشي لـ Y.

$$F_Y(y)=IP(Y\le y)=IP(X\le+\infty,Y<y)=IP\left(\lim_{x\to+\infty}\{X\le x,Y\le y\}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}IP(X\le x,Y\le y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)\equiv F(+\infty,y)$$

أي أن:

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)$$

أي أنه بانتهاء أحد المتغيرين X أو Y إلى $+\infty$ فإن التابع $F(x,y)$ يؤول إلى تابع التوزيع للمتغير العشوائي الآخر، أي أن:

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dydx$$
$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy$$

يكفي إجراء عملية الاشتقاق على $F(x,y)$ للحصول على الكثافة المشتركة $f(x,y)$ كما يلي:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)$$

باشتقاق تابع التوزيع الهامشي لـ X و Y (F_X و F_Y عل الترتيب) نحصل على تابع الكثافة الهامشي لـ X و Y (f_X و f_Y عل الترتيب) كما يلي:

$$f_X(x)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dydx\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$
$$f_Y(y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

أي أن الكثافة الهامشية لـ X هي:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

والكثافة الهامشية لـ Y هي:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

مثال:

لتكن (X,Y) ثنائية متغيرات عشوائية تتبع قانون احتمال ذو كثافة معرفة بـ:

$$f(x,y)=\begin{cases} ax(x+y) & ,0\le x\le 1 \quad ,0\le y\le 2 \\ 0 & ,ailleurs \end{cases}$$

1) إيجاد قيمة a حتى يكون f تابع كثافة

$$\int_0^2\int_0^1 f(x,y)dxdy=1\Rightarrow \int_0^2\int_0^1 (ax(x+y))dxdy=1\Rightarrow a=\frac{3}{5}$$

2) حساب $f_X(x)$, $f_Y(y)$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3}{5}x(x+y)dy=\frac{3}{5}\int_0^2 x(x+y)dy=\frac{3}{5}\int_0^2 (x^2+xy)dy$$
$$=\frac{3}{5}\left[x^2y+\frac{1}{2}xy^2\right]_0^2=\frac{3}{5}\left[2x^2+\frac{4}{2}x\right]=\frac{6}{5}x(x+1).$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3}{5}x(x+y)dx=\frac{3}{5}\int_0^1 x(x+y)dx=\frac{3}{5}\int_0^2 (x^2+xy)dx$$
$$=\frac{3}{5}\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2y\right]_0^1=\frac{3}{5}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}y\right]$$

3) قانون الاحتمال الشرطي للثنائية العشوائية المستمرة

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين.

- الكثافة الهامشية الشرطية لـ X بشرط Y معرفة كما يلي:

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad ,f_Y(y)\neq 0$$

- الكثافة الهامشية الشرطية لـ Y بشرط X معرفة كما يلي:

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)} \qquad , f_X(x)\neq 0$$

حيث أن

$$\int_{IR} f(y/x)dy=1 \text{ و } \int_{IR} f(x/y)dx=1$$

مثال:

لتكن (X,Y) ثنائية متغيرات عشوائية مستمرة تتبع قانون احتمال ذو كثافة:

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy & ,0\le x\le 1 \quad ,0\le y\le x\\ 0 & ,ailleurs\end{cases}$$

1) حساب الكثافة الهامشية $f_Y(y)$, $f_X(x)$.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x 8xydy=4xy^2\Big]_0^x=4x^3$$

حيث $0\le x\le 1$، أي أن

$$f_X(x)=\begin{cases}4x^3 & ,0\le x\le 1\\ 0 & ,ailleurs\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_y^1 8xydy=4x^2y\Big]_y^1=4y(1-y^2)$$

حيث $0\le y\le 1$، أي أن

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y(1-y^2) & ,0\le y\le 1\\ 0 & ,ailleurs\end{cases}$$

2) حساب الكثافة الشرطية $f(y/x)$, $f(x/y)$

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{8xy}{4y(1-y^2)}=\frac{2x}{1-y^2}$$

حيث $0\le y\le x\le 1$ ، و $y\neq 1$.

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{8xy}{4x^3}=\frac{2y}{x^2}$$

حيث $0\le y\le x\le 1$ ، و $x\neq 0$.

4) استقلال متغيرين عشوائيين

لتكن (X,Y) ثنائية عشوائية مستمرة، وليكن $F_{X,Y}(x,y)$ تابع التوزيع المشترك لـ X و Y.

وليكن $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ تابعي التوزيع الهامشيين لـ X و Y على الترتيب.

نقول أن المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين إذا كان:

$$\forall(x,y)\in(X(\Omega),Y(\Omega));\quad F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

أي أن

$$\forall(x,y);\quad f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)\Leftrightarrow X \text{ و } Y \text{ مستقلين}$$

مثال:

لتكن (X,Y) ثنائية متغيرات عشوائية مستمرة تتبع قانون احتمال ذو كثافة:

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & ,x\ge 0 \quad ,y\ge 0\\ 0 & ,ailleurs\end{cases}$$

نثبت أن X و Y مستقلان.

لدينا

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dy=e^{-x}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dx=e^{-y}$$

نلاحظ أن

$$f(x,y)= f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

وهذا يعني أن X و Y مستقلان.

5) الأمل الشرطي

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين، وليكن $f(x,y)$ تابع الكثافة المشترك للمتغيرين X و Y، ولتكن $f_Y(y)$ دالة الكثافة الهامشية لـ Y حيث أن $f_Y(y)>0$.

نعرف الأمل الشرطي لـ X شرط Y، ونكتب $IE(X/Y=y)$، بـ:

$$IE(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X/Y}(x/y)dx$$

مثال:

لتكن الكثافة الهامشية للمتغيرين العشوائيين المستمرين X و Y هي:

$$f(x,y)=\frac{e^{-\frac{x}{y}}\cdot e^{-y}}{y} \qquad ,0<x<\infty,\quad 0<y<\infty$$

نقوم بحساب $IE(X/Y=y)$.

$$IE(X/Y=y)=\int_0^{\infty} x f_{X/Y}(x/y)\,dx=\int_0^{\infty} x\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx$$

$$=\int_0^{\infty} x\frac{f(x,y)}{\int_0^{\infty} f(x,y)\,dx}\,dx=\int_0^{\infty} x\frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}\cdot e^{-y}}{y}}{\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{x}{y}}\cdot e^{-y}}{y}\,dx}\,dx$$

$$=\int_0^{\infty} x\frac{\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}}{\int_0^{\infty}\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx}\,dx=\int_0^{\infty} x\frac{\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}}{-e^{-\frac{x}{y}}\Big|_0^{\infty}}\,dx$$

$$=\int_0^{\infty} x\left(\frac{1}{y}\right)e^{-\frac{x}{y}}dx$$

$$=y$$

3.2.1. التغاير ومعامل الارتباط

تعريف 6.2.1. (التغاير)

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين، نعرف تغاير X و Y، ونكتب $Cov(X,Y)$ بـ:

$$Cov(X,Y)=IE\big((X-IE(X))(Y-IE(Y))\big)$$

نستطيع كتابة التغاير بصيغة أخرى كما يلي:

$$Cov(X,Y)=IE\big((X-IE(X))(Y-IE(Y))\big)$$
$$=IE\big(XY-XIE(Y)-YIE(X)+IE(X)IE(Y)\big)$$
$$=IE(XY)-IE(X)IE(Y)-IE(X)IE(Y)+IE(X)IE(Y)$$
$$=IE(XY)-IE(X)IE(Y)$$

- إذا كان X و Y مستقلتين، يكون لدينا

$$Cov(X,Y)=IE(XY)-IE(X)IE(Y)=0$$

قضية 1.2.1. [18]

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين، حيث $IE\left(X^2\right)<+\infty$ و $IE\left(Y^2\right)<+\infty$. فإن

$$Var\left(X+Y\right)=Var\left(X\right)+Var\left(Y\right)+2Cov\left(X,Y\right)$$

البرهان

$$\begin{aligned}
Var\left(X+Y\right) &= IE\left(\left(X+Y\right)^2\right)-\left(IE\left(X+Y\right)\right)^2 \\
&= IE\left(X^2+2XY+Y^2\right)-\left(IE\left(X\right)+IE\left(Y\right)\right)^2 \\
&= IE\left(X^2\right)+2IE\left(XY\right)+IE\left(Y^2\right)-\left(IE\left(X\right)\right)^2-2IE\left(X\right)IE\left(Y\right)-\left(IE\left(Y\right)\right)^2 \\
&= IE\left(X^2\right)-\left(IE\left(X\right)\right)^2+IE\left(Y^2\right)-\left(IE\left(Y\right)\right)^2+2IE\left(XY\right)-2IE\left(X\right)IE\left(Y\right) \\
&= Var\left(X\right)+Var\left(Y\right)+2Cov\left(X,Y\right)
\end{aligned}$$

تعريف 7.2.1.(معامل الارتباط)

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين، نعرف معامل الارتباط بين X و Y، ونكتب $\rho(X,Y)$ بـ:

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}}$$

خواص:

1. إذا كان X و Y مستقلين فإن $\rho(X,Y)=0$.
2. $-1\le\rho(X,Y)\le 1$.

4.2.1. استبدال المتغيرات (حالة متغيرين عشوائيين)

ليكن X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين مستمرين، يتبعان قانون احتمال ذو كثافة مشتركة $f_{X_1,X_2}\left(x_1,x_2\right)$.

نضع

$$Y_1=g_1\left(X_1,X_2\right) \text{ و } Y_2=g_2\left(X_1,X_2\right)$$

حيث أننا نستطيع حل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

نرمز للحلول بـ:

$$\begin{cases} x_1 = h_1(y_1, y_2) \\ x_2 = h_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

تابع الكثافة المشترك للمتغيرين العشوائيين Y_1 و Y_2 يعطى كما يلي:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)|J|^{-1}$$

حيث أن:

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} \neq 0$$

من أجل كل ثنائية (x_1, x_2).

مثال:

ليكن X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين مستمرين، يتبعان قانون احتمال ذو كثافة مشتركة $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$

نضع $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$.

نريد إيجاد تابع الكثافة المشترك للمتغيرين العشوائيين Y_1 و Y_2.

نضع $g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ و $g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

لدينا

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \equiv -1 - 1 = -2$$

ولدينا أيضا

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ x_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2} \end{cases}$$

وبالتالي نستنتج أن تابع الكثافة المشتركة لـ Y_1 و Y_2 كما يلي:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2} f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

3.1. المتغيرات العشوائية متعددة الأبعاد (الشعاع العشوائي)

يعتبر الشعاع العشوائي تعميمًا للمتغيرات العشوائية في الحالة متعددة الأبعاد، حيث يُعرف الشعاع العشوائي بأنه مجموعة من المتغيرات العشوائية المستقلة أو المرتبطة ببعضها البعض والمعرفة على نفس فضاء الاحتمال.

1.3.1. تعاريف

تعريف 1.3.1. (الشعاع العشوائي)

نسمي شعاعا عشوائيا X، كل تطبيق قابل للقياس من فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{F}, IP)$ إلى الفضاء $\left(IR^n, \mathcal{B}_{IR^n}\right)$.

تعريف 2.3.1. (الشعاع العشوائي)

ليكن $(\Omega, \mathcal{F}, IP)$ فضاء احتمال و $X_1, X_2, ..., X_n$، n متغيرات عشوائية معرفة على $(\Omega, \mathcal{F}, IP)$ و التي تأخذ قيم في IR. ليكن X التطبيق المعرف بـ:

$$X : \Omega \to IR^n$$
$$\omega \mapsto X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega))$$

نقول أن X هو شعاع عشوائي.

تعريف 3.3.1. (قانون الاحتمال المشترك)

ليكن X شعاع عشوائي معرف كما يلي:

$$X:(\Omega,\mathcal{F},IP)\to\left(IR^n,\mathcal{F}_{IR^n},IP_X\right)$$

نسمي IP_X قانون احتمال الشعاع X ، ونكتب:

$$\forall B\in\mathcal{B}_{IR^n},IP_X(B)=IP(X\in B)=IP(\omega\in\Omega,\ X(\omega)\in B)$$

تعريف 4.3.1. (تابع التوزيع المشترك)

ليكن X شعاع عشوائي، نسمي تابع توزيع الشعاع العشوائي X ، التابع $F_X:IR^n\to[0,1]$ المعرف بـ:

$$\begin{aligned}F_X(x_i)&=IP(X_1\le x_1,X_2\le x_2,...,X_n\le x_n)\\&=IP((X_1\le x_1)\cap(X_2\le x_2)\cap...\cap(X_n\le x_n))\end{aligned}$$

من أجل كل $X=(x_1,x_2,...,x_n)$.

خواص:

1. من أجل $(x_1,x_2,...,x_n)\in IR^n$ ، $0\le F_X(x_i)\le 1$.
2. $\lim_{x_i\to-\infty}F_X(x_i)=0$ و $\lim_{x_i\to-\infty}F_X(x_i)=1$.

2.3.1. الشعاع العشوائي المتقطع

تعريف 5.3.1. (الشعاع العشوائي المتقطع)

نسمي شعاع عشوائي متقطع $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ ، كل تطبيق من الشكل

$$\begin{aligned}&X:\Omega\to IR^n\\&\omega\mapsto X(\omega)=(X_1(\omega),X_2(\omega),...,X_n(\omega))\end{aligned}$$

حيث أن $X_1,X_2,...,X_n$ هي متغيرات عشوائية متقطعة.

تعريف 6.3.1. (قانون الاحتمال)

نسمي قانون احتمال الشعاع العشوائي المتقطع $X=(X_1, X_2,..., X_n)$ ، التابع

$$IP_X : X_1(\Omega)\times X_2(\Omega),..., X_n(\Omega)\to [0,1]$$
$$(X_1, X_2,..., X_n)\mapsto IP(X_1=x_1, X_2=x_2,..., X_n=x_n)$$

حيث أن:

$$(X_1=x_1, X_2=x_2,..., X_n=x_n)=((X_1\le x_1)\cap(X_2\le x_2)\cap...\cap(X_n\le x_n))$$

تعريف 7.3.1. (التوزيعات الهامشية)

التوزيعات الهامشية للشعاع العشوائي هي التوزيع الاحتمالي لكل عنصر من عناصر الشعاع العشوائي بشكل منفصل.

إذا كان لدينا شعاع عشوائي $X=(X_1, X_2,..., X_n)$ ، فإن التوزيعات الهامشية هي التوزيعات الاحتمالية لكل متغير $X_1, X_2,..., X_n$ على حدة.

ليكن $X=(X_1,..., X_n)$ شعاع عشوائي متقطع ذو تابع الاحتمال $IP(X_1=x_1,..., X_n=x_n)$ التوزيع الهامشي لأي متغير عشوائي $X_1, X_2,..., X_n$ يمكن حسابه عبر جمع الاحتمالات المشتركة على جميع القيم الممكنة لباقي المتغيرات.

3.3.1. الشعاع العشوائي المستمر

تعريف 8.3.1. (تابع الكثافة المشترك)

ليكن $X=(X_1, X_2,..., X_n)$ شعاع عشوائي معرف على فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{F}, IP)$.

نقول أن X شعاع عشوائي مستمر، إذا وجد التابع f_X حيث:

1. من أجل $(x_1, x_2,..., x_n)\in IR^n$ ، $f(x_1, x_2,..., x_n)\ge 0$.
2. $\int_{IR^n} f(x)dx=\int_{IR^n}...\int_{IR^n} f(x_1,..., x_n)dx_1...dx_n=1$.

قضية 1.3.1. [17]

ليكن $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ شعاع عشوائي مستمر ذو تابع كثافة f_X ، تابع توزيع الشعاع X يعرف بـ:

$$F_X(x_i)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}...\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,t_2,...,t_n)dt_1dt_2...dt_n$$

من أجل كل $(x_1,x_2,...,x_n)\in IR^n$.

ملاحظة:

باشتقاق تابع التوزيع F_X نحصل على تابع الكثافة للشعاع العشوائي X كما يلي:

$$f_X(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n}F_X(x_1,x_2,...,x_n)$$

تعريف 9.3.1. (التوزيعات الهامشية)

ليكن $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ شعاع عشوائي معرف على فضاء الاحتمال $(\Omega,\mathcal{F},IP)$.

بفرض أن $f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1,x_2,...,x_n)$ هي تابع كثافة الاحتمال المشترك لجميع متغيرات الشعاع العشوائي X ، فإن تابع التوزيع الهامشي لأي عنصر $X_1,X_2,...,X_n$ يمكن الحصول عليه بتكامل تابع الكثافة المشترك بالنسبة لباقي العناصر.

وباشتقاق تابع التوزيع الهامشي، نتحصل على تابع الكثافة الهامشي كما يلي:

$$f_{X_1}(x_1)=\frac{\partial}{\partial x_1}F_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}f(t_1,t_2,\ldots,t_n)dt_2,dt_3\ldots dt_n$$

$$f_{X_2}(x_2)=\frac{\partial}{\partial x_2}F_{X_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}f(t_1,t_2,\ldots,t_n)dt_1,dt_3\ldots dt_n$$

.

.

.

$$f_{X_n}(x_1)=\frac{\partial}{\partial x_n}F_{X_n}(x_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}f(t_1,t_2,\ldots,t_n)dt_1,dt_2\ldots dt_{n-1}$$

4.3.1. استقلال المتغيرات العشوائية

ليكن $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ شعاع عشوائي (متقطع أو مستمر)، معرف على فضاء الاحتمال $(\Omega,\mathcal{F},IP)$.

نقول أن المتغيرات العشوائية $X_1,X_2,\ldots,X_n$ مستقلة، إذا وفقط إذا كان:

- في حالة X شعاع عشوائي متقطع

$$IP(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n)=IP(X_1=x_1)\times IP(X_2=x_2)\times\ldots\times IP(X_n=x_n)$$

- في حالة X شعاع عشوائي مستمر

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f_{X_1}(x_1)\times f_{X_2}(x_2)\times\ldots\times f_{X_n}(x_n)$$

4.1. مصفوفة التغاير ومعاملات الارتباط

تعريف 1.4.1. (الأمل الرياضي)

ليكن $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ شعاع عشوائي، معرف على فضاء الاحتمال $(\Omega,\mathcal{F},IP)$.

نعرف الأمل الرياضي للشعاع العشوائي X بـ:

$$IE(X)=\begin{pmatrix} IE(X_1) \\ IE(X_2) \\ . \\ . \\ . \\ IE(X_n) \end{pmatrix}$$

حيث $IE(X_1^{\,2})<+\infty$ ، $IE(X_2^{\,2})<+\infty$ ،...، $IE(X_n^{\,2})<+\infty$.

تعريف 2.4.1. (مصفوفة التغاير)

ليكن $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ شعاع عشوائي، معرف على فضاء الاحتمال $(\Omega,\mathcal{F},IP)$.

نعرف مصفوفة التغاير للشعاع العشوائي X بـ:

$$Cov[X]=\begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1X_2} & ... & \sigma_{X_1X_n} \\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma_{X_2}^2 & ... & \sigma_{X_2X_n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \sigma_{X_nX_1} & \sigma_{X_nX_2} & & \sigma_{X_n}^2 \end{pmatrix}$$

حيث

$$\sigma_{X_iX_j}=Cov(X_i,X_j)=IE\left[(X_i-E(X_i))(X_j-E(X_j))\right]=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)$$

و

$$\sigma_{X_i}^2=Var(X_i)=E(X_i^{\,2})-(E(X_i))^2$$

تعريف 3.4.1. (مصفوفة الارتباط)

ليكن $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ شعاع عشوائي، معرف على فضاء الاحتمال $(\Omega,\mathcal{F},IP)$.

نعرف مصفوفة الارتباط للشعاع العشوائي X بـ:

$$Corr[X]=\begin{pmatrix} 1 & \rho_{X_1X_2} & \dots & \rho_{X_1X_n} \\ \rho_{X_2X_1} & 1 & \dots & \rho_{X_2X_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{X_nX_1} & \rho_{X_nX_2} & & 1 \end{pmatrix}$$

حيث

$$\rho(X_i,X_j)=\frac{Cov(X_i,X_j)}{\sqrt{Var(X_i)}\cdot\sqrt{Var(X_j)}},\quad i\neq j$$

قضية 1.4.1.[18]

ليكن $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ شعاع عشوائي معرف على فضاء الاحتمال $(\Omega,\mathcal{F},IP)$.

إذا كان $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ شعاع عشوائي حيث $IE(X_1^{\,2})<+\infty$ ، $IE(X_2^{\,2})<+\infty$ ،...، $IE(X_n^{\,2})<+\infty$. فإن:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)+2\sum_{i;i<j}\sum_{j;i<j}Cov(X_i,Y_j)$$

- في حالة ما إذا كانت $X_1,X_2,...,X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة مثنى مثنى، فإن

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)$$

5.1. استبدال المتغيرات (حالة n متغيرات عشوائية)

لتكن $X_1,X_2,...,X_n$ ، n متغيرات عشوائية مستمرة كثافتها المشتركة $f_{X_1,X_2,...,X_n}$.

ولتكن $Y_1,Y_2,...,Y_n$ ، n متغيرات عشوائية مستمرة، حيث:

$$Y_1=g_1(X_1,...,X_2),Y_2=g_2(X_1,...,X_2),...,Y_n=g_n(X_1,...,X_n)$$

حلول الجملة:

$$y_1 = g_1(x_1,...,x_2), y_2 = g_2(x_1,...,x_2),..., y_n = g_n(x_1,...,x_n)$$

هي الجملة:

$$x_1 = h_1(y_1,...,y_2), x_2 = h_2(y_1,...,y_2),..., x_n = h_n(y_1,...,y_n)$$

الكثافة المشتركة لـ $Y_1, Y_2,..., Y_n$ هي:

$$f_{Y_1,...,Y_n}(y_1,...,y_n) = f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)\left|J(x_1,...,x_n)\right|^{-1}$$

حيث:

$$J(x_1,...,x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

مثال:

ليكن X_1 ، X_2 و X_3 ثلاث متغيرات عشوائية مستمرة مستقلة تتبعان قانون التوزيع الطبيعي المعياري، ذات كثافة احتمالية مشتركة $f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)$.

نضع $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ ، $Y_2 = X_1 - X_2$ و $Y_3 = X_1 - X_3$.

نريد إيجاد تابع الكثافة المشترك للمتغيرين العشوائيين Y_1 ، Y_2 و Y_3.

لدينا

$$J(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

ولدينا أيضا

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_1 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ x_2 = \dfrac{y_1 - 2y_2 + y_3}{3} \\ x_3 = \dfrac{y_1 - 2y_3 + y_2}{3} \end{cases}$$

وبالتالي نستنتج أن تابع الكثافة المشتركة لـ Y_1 و Y_2 كما يلي:

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3) = \frac{1}{3} f_{X_1,X_2,X_3}\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{y_1-2y_2+y_3}{3}, \frac{y_1-2y_3+y_2}{3}\right)$$

وبما أن X_1، X_2 و X_3 تتبعان التوزيع الطبيعي المعياري ومستقلة، فإن:

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)}$$

حيث أن:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= \left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1-2y_2+y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1-2y_3+y_2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_2y_3}{3} \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2+2y_2^2+2y_3^2-2y_2y_3}{3}\right)}$$

وينتج أخيرا أن:

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3) = \frac{1}{3(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2+2y_2^2+2y_3^2-2y_2y_3}{3}\right)}$$

6.1. تمارين مقترحة

التمرين 01:

لتكن (X,Y) ثنائية عشوائية متقطعة، قانون احتمالها يعطى جدوليا كما يلي:

X / Y	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

1. أوجد قانون الاحتمال الهامشي لـ X و Y. و وضح إذا كان هذان المتغيران مستقلان.
2. أحسب $Cov(X,Y)$.
3. أوجد قانون الثنائية $(\min(X,Y),\max(X,Y))$.

التمرين 02:

نرمي على التوالي ثلاث قطع نقدية.

المتغيران العشوائيان X و Y يمثلان على التوالي (عدد F المشاهدة في الرميتين الأولتين و عدد P المشاهدة في الرميتين الأخيرتين).

1. أوجد قانون احتمال الثنائية (X,Y) ثم قانون الاحتمال الهامشي لـ X و Y.
2. هل المتغيرين العشوائيين X و Y مستقلين؟
3. أحسب $Cov(X,Y)$.

التمرين 03:

لتكن (X,Y) ثنائية عشوائية متقطعة، قانون احتمالها يعطى جدوليا كما يلي:

Y \ X	0	1	2
1	$1/12$	0	$1/12$
2	$2/12$	$1/12$	$1/12$
3	$3/12$	$2/12$	$1/12$

1. أوجد قانون الاحتمال الهامشي لـ X و Y. و وضح إذا كان هذان المتغيران مستقلان.
2. أحسب $Cov(X,Y)$.
3. أوجد قانون الاحتمال الشرطي لـ Y شرط $X=0$.

التمرين 04:

لتكن (X,Y) ثنائية عشوائية متقطعة، أثبت أن:

1. $IE\left(IE\left(Y|X\right)\right)=IE(Y)$
2. $Cov(X,Y)=IE\left(\left(X-IE(X)\right)\left(Y-IE(Y)\right)\right)=IE(XY)-IE(X)IE(Y)$
3. إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين، حيث $IE\left(X^2\right)<+\infty$ و $IE\left(Y^2\right)<+\infty$. فإن

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$

التمرين 05:

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين متقطعين مستقلين، يتبعان توزيع بواصون $\mathcal{P}(\mu_1)$ و $\mathcal{P}(\mu_2)$ على الترتيب.

- ✓ أوجد قانون احتمال $Z=X+Y$.

التمرين 06:

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين متقطعين مستقلين، يتبعان التوزيع الثنائي $\mathcal{B}(n,p)$.

1. أحسب قانون الاحتمال الشرطي $IP(X=k/X+Y=m)$.
2. أحسب الأمل الشرطي لـ X بشرط $X+Y=m$.

التمرين 07:

لتكن (X,Y) ثنائية عشوائية ذات كثافة احتمالية المعطاة كما يلي

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{k}{\sqrt{xy}} & ,0<x\le y<1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

1. أوجد قيمة k ثم أوجد تابع التوزيع المشترك $F_{X,Y}(x,y)$.
2. أوجد تابع التوزيع الهامشي لـ X و Y،
3. باستخدام السؤال السابق (تابع التوزيع الهامشي)، أوجد الكثافة الهامشية لـ X و Y.
4. هل المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان؟
5. أحسب $IE(Y/X=x)$ ثم $IE(IE(Y/X))$.

التمرين 08:

لتكن الكثافة الهامشية لـ X و Y هي:

$$f(x,y)=\frac{e^{-\frac{x}{y}}\cdot e^{-y}}{y} \qquad ,0<x<\infty,\quad 0<y<\infty$$

1) أحسب $IE(X/Y=y)$.

2) أحسب $Var(X/Y=y)$.

التمرين 09:

لتكن (X,Y) ثنائية متغيرات عشوائية حقيقية ذات كثافة احتمالية معطاة كما يلي:

$$f(x,y)=\begin{cases} c & si\ |x|^2+|y|^2\le 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. أوجد c.
2. أثبت أن المتغيران العشوائيان X و Y غير مستقلان.
3. أحسب $Var(X/Y)=IE\left[(X-IE(X/Y))^2/Y\right]$

التمرين 10:

لتكن الثنائية العشوائية المستمرة (X,Y) المعرفة على فضاء الاحتمال $(\Omega,\mathcal{A},IP)$، وليكن تابع التوزيع لهذه الثنائية المعرف بـ:

$$F(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-x}-e^{-y}+(e^x+e^y-1)^{-1} & ;x\ge 0;y\ge 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. أوجد تابع الكثافة للثنائية (X,Y).
2. أوجد تابع التوزيع الهامشي لـ X و تابع التوزيع الهامشي لـ Y.
3. لتكن الثنائية (U,V)، حيث أن $U=e^{-X+Y}$ و $V=Y+X$.
4. أوجد تابع الكثافة للثنائية (U,V).

الفصل الثاني

أنواع التقارب في الاحتمالات

يعد تقارب المتغيرات العشوائية مفهوما أساسيا وهاما في الاحتمالات، والذي يؤدي إلى بعض النتائج الأساسية كقانون الأعداد الكبيرة ونظرية النهاية المركزية. أنواع التقارب الأكثر استعمالا في الاحتمالات و التي سيتم عرضها في هذا الفصل هي

- التقارب بالاحتمال
- التقارب شبه المؤكد
- التقارب بالقانون
- التقارب بالمتوسط

الأهداف التعليمية للفصل:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- ✓ أنواع التقارب في الاحتمالات
- ✓ العلاقات بين أنواع التقارب
- ✓ القانون الضعيف للأعداد الكبيرة
- ✓ القانون القوي للأعداد الكبيرة
- ✓ نظرية النهاية المركزية

1.2. متراجحات هامة

1.1.2. متراجحة ماركوف

نظرية 1.1.2. [18]

ليكن X متغير عشوائي موجب أمله الرياضي منته $IE(X)$ ، من أجل كل $a>0$ لدينا

$$IP(X \geq a) \leq \frac{IE(X)}{a}$$

البرهان:

نفرض أن X متغير عشوائي مستمر ذو تابع كثافة f ، حيث

$$\begin{aligned} IE(X) &= \int_0^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^{a} xf(x)dx + \int_a^{+\infty} xf(x)dx \\ &\geq \int_a^{+\infty} xf(x)dx \\ &\geq \int_a^{+\infty} af(x)dx \\ &= a\int_a^{+\infty} f(x)dx \\ &= aIP(X \geq a) \end{aligned}$$

النظرية التالية هي نتيجة لمتراجحة ماركوف.

2.1.2. متراجحة تشيبيشيف

نظرية 2.1.2. [18]

ليكن X متغير عشوائي ذو الأمل الرياضياتي μ و التباين σ^2 المنتهيين، من أجل كل حقيقي $k>0$

$$IP(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

البرهان:

نستطيع تطبيق متراجحة ماركوف، بأخذ $a=k^2$ على المتغير $(X-\mu)^2$ لأنه قيمة غير سالبة.

نجد أن

$$IP\left((X-\mu)^2 \geq k^2\right) \leq \frac{IE\left((X-\mu)^2\right)}{k^2} \qquad (*)$$

لكن بما أن $(X-\mu)^2 \geq k^2$ تكافئ $|X-\mu| \geq k$، نستطيع إذن كتابة العلاقة (*) كما يلي

$$IP\left(|X-\mu| \geq k\right) \leq \frac{IE\left((X-\mu)^2\right)}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}$$

3.1.2. متراجحة كوشي-شوارز

نظرية 3.1.2. [18]

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين، حيث $IE\left(X^2\right) < +\infty$ و $IE\left(Y^2\right) < +\infty$ فإن

$$|IE(XY)| < \sqrt{IE\left(X^2\right)}\sqrt{IE\left(Y^2\right)}$$

البرهان:

من أجل كل λ من IR

$$\lambda^2 IE\left(X^2\right) + 2\lambda IE(XY) + IE\left(Y^2\right) = IE\left((\lambda X + Y)^2\right) \geq 0$$

المميز $4(IE(XY))^2 - 4IE\left(X^2\right)IE\left(Y^2\right)$ سالب أو معدوم، أي أن

$$(IE(XY))^2 - IE\left(X^2\right)IE\left(Y^2\right) \leq 0$$

ومنه

$$|IE(XY)| < \sqrt{IE\left(X^2\right)}\sqrt{IE\left(Y^2\right)}$$

2.2. التقارب بالاحتمال (la convergence en probabilité)

1.2.2. تعريف

نقول عن متتالية المتغيرات العشوائية (X_n) المعرفة على فضاء الاحتمال $\left(\Omega, \mathcal{A}, IP\right)$ أنها متقاربة بالاحتمال (IP) نحو عدد حقيقي x لما n تؤول إلى $+\infty$ إذا كان:

$$\forall \varepsilon,\eta > 0 \quad \exists N(\varepsilon,\eta) \quad t.q. \quad n \geq N \Rightarrow IP\left(\left|X_n - x\right| \geq \varepsilon\right) \leq \eta$$

ونكتب

$$X_n \overset{IP}{\to} X$$

تعريف 2.2.2.

نقول عن متتالية المتغيرات العشوائية (X_n) المعرفة على فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{A}, IP)$ أنها متقاربة بالاحتمال (IP) نحو المتغير العشوائي x لما n تؤول إلى $+\infty$ إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad IP\left(\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

أي أن

$$\forall \varepsilon > 0 \quad ; \quad IP\left(\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

التقارب بالاحتمال للمتتالية (X_n) نحو متغير عشوائي X هو تقارب متتالية المتغيرات العشوائية $(X_n - X)$ نحو 0. أي أن:

$$\left(X_n \overset{IP}{\to} X\right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} IP\left(\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

مثال:

لتكن (X_n) متتالية متغيرات عشوائية معرفة على فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{A}, IP)$ بتابع الكثافة التالي

$$f(X) = \begin{cases} ne^{-nx}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

نبين أن المتتالية (X_n) متقاربة بالاحتمال نحو 0.

لدينا حسب خواص الاحتمال

$$IP\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = 1 - IP\left(|X_n| \le \varepsilon\right)$$

$$= 1 - IP\left(-\varepsilon \le X_n \le \varepsilon\right)$$

$$= 1 - \int_0^{\varepsilon} ne^{-nx} dx$$

$$= 1 - \left[-e^{-nx}\right]_0^{\varepsilon}$$

$$= 1 - \left[-e^{-n\varepsilon} + 1\right]$$

$$= 1 + e^{-n\varepsilon} - 1$$

$$= e^{-n\varepsilon}$$

وبحساب النهاية لما n تؤول إلى $+\infty$، نجد أن:

$$\lim_{n\to+\infty} IP\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$$

وبالتالي المتتالية (X_n) متقاربة بالاحتمال نحو 0، ونكتب $X_n \xrightarrow{IP} 0$

خاصية

إذا كان $\lim_{n\to+\infty} IE(X_n) = c$ و $\lim_{n\to+\infty} Var(X_n) = 0$ ، فإن المتتالية X_n تتقارب بالاحتمال نحو الثابت c

البرهان:

$$IP\left(|X_n - c| > \varepsilon\right) \le IP\left(|X_n - IE(X_n)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + IP\left(|IE(X_n) - c| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

من متراجحة تشيبيشف، لدينا

$$IP\left(|X_n - IE(X_n)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \le \frac{Var(X_n)}{\varepsilon^2/4}$$

ومنه

$$IP\left(|X_n - c| > \varepsilon\right) \le \frac{Var(X_n)}{\varepsilon^2/4} + IP\left(|IE(X_n) - c| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

وبالتالي

$$IP\left(\left|X_n - c\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

لأن $\lim_{n\to+\infty} IE(X_n) = c$ و $\lim_{n\to+\infty} Var(X_n) = 0$

ومنه المتتالية X_n تتقارب بالاحتمال نحو الثابت c.

3.2. التقارب بالمتوسط (la convergence en moyen)

تعريف1.3.2. (تقارب بالمتوسط)

نقول عن متتالية المتغيرات العشوائية (X_n) المعرفة على فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{A}, IP)$ أنها متقاربة بالمتوسط (m.) نحو المتغير العشوائي X لما n تؤول إلى $+\infty$ إذا كان:

$$\lim_{n\to+\infty} IE\left(\left|X_n - X\right|^r\right) = 0 \quad ; r > 0$$

ونكتب

$$X_n \overset{m}{\to} X$$

نتطرق الآن إلى التقارب الأكثر استعمالا وهو التقارب بالمتوسط التربيعي، أي لما $r = 2$.

تعريف 2.3.2. (تقارب بالمتوسط التربيعي)

نقول عن متتالية المتغيرات العشوائية (X_n) المعرفة على فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{A}, IP)$ أنها متقاربة بالمتوسط التربيعي (m.q.) نحو X لما n تؤول إلى $+\infty$ إذا كان:

$$\lim_{n\to+\infty} IE\left(\left|X_n - X\right|^2\right) = 0$$

ونكتب

$$X_n \overset{m.q.}{\to} X$$

مثال 1

لتكن $(X_n)_{n\in IN^*}$ متتالية متغيرات عشوائية حيث

$$X \to \mathcal{B}(n,p)$$

نضع $Y_n = \dfrac{n - X_n}{n}$

نبين أن المتتالية Y_n متقاربة بالمتوسط التربيعي نحو $(1-p)$.

لدينا حسب خواص الأمل الرياضي

$$\begin{aligned}
IE\left(\left|Y_n - (1-p)\right|^2\right) &= IE\left(\left|\frac{n - X_n}{n} - (1-p)\right|^2\right) \\
&= IE\left(\left|\frac{n - X_n - n + np}{n}\right|^2\right) \\
&= IE\left(\left|\frac{-X_n + np}{n}\right|^2\right) \\
&= IE\left(\left|\frac{-(X_n - np)}{n}\right|^2\right) \\
&= IE\left(\left|\frac{X_n - np}{n}\right|^2\right) \\
&= \frac{1}{n^2} IE\left(\left|X_n - np\right|^2\right) \\
&= \frac{1}{n^2} Var(X_n) \\
&= \left(\frac{1}{n^2}\right) np(1-p) \\
&= \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}$$

بحساب النهاية لما n تؤول إلى $+\infty$، نجد أن

$$\lim_{n\to+\infty} IE\left(\left|Y_n - (1-p)\right|^2\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{p(1-p)}{n}\right) = 0$$

وبالتالي تكون المتتالية (Y_n) متقاربة بالمتوسط التربيعي نحو $(1-p)$.

مثال 2

لتكن (X_n)متتالية متغيرات عشوائية معرفة بالاحتمالات التالية:

$$IP(X_n=-n)=\frac{1}{n^2},\quad IP(X_n=n)=\frac{1}{2n^2},\quad IP(X_n=0)=1-\frac{1}{n^2}$$

نبين هل المتتالية (X_n) متقاربة بالمتوسط التربيعي نحو 0 أو لا.

لدينا

$$\begin{aligned}IE\left(|X_n-0|^2\right)&=IE\left(|X_n|^2\right)\\&=(-n)^2\left(\frac{1}{n^2}\right)+(n)^2\left(\frac{1}{2n^2}\right)+(0)^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\&=1+\frac{1}{2}\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} IE\left(|X_n-0|^2\right)\neq 0$$

وبالتالي المتتالية (X_n) ليست متقاربة بالمتوسط التربيعي نحو 0.

نظرية 1.3.2. [11]

لتكن متتالية المتغيرات العشوائية $(X_n)_{n\in IN^*}$ المعرفة على فضاء الاحتمال $(\Omega,\mathcal{A},IP)$، حيث أن $IE(X_n)$ ، $IE(X)$ ، $IE(X_n^2)$ و $IE(X^2)$ موجودة.

المتتالية (X_n) متقاربة بالمتوسط التربيعي (m.q.) نحو المتغير العشوائي X المعرف على نفس فضاء الاحتمال، إذا و فقط إذا كان:

$$IE(X_n)\underset{n\to+\infty}{\to} IE(X)$$

$$IE(X_n^2)\underset{n\to+\infty}{\to} IE(X^2)$$

4.2. التقارب بالقانون (la convergence en loi)

تعريف 1.4.2.

نقول عن متتالية المتغيرات العشوائية $(X_n)_{n\geq 0}$ المعرفة على فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{A}, IP)$ أنها تتقارب بالقانون (L) نحو المتغير العشوائي X لما n تؤول إلى $+\infty$ إذا كان تابع التوزيع $F_n(x)$ لـلمتتالية X_n يتقارب نحو تابع التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X لما n تؤول إلى $+\infty$، حيث أن التابع F مستمر. أي أن

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

عند كل نقطة x أين F مستمرة.

و نكتب

$$X_n \xrightarrow{L} X$$

مثال:

لتكن $(X_n)_{n\in IN}$ متتالية متغيرات عشوائية تتبع قانون التوزيع الثنائي $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. المتتالية (X_n) تتقارب بالقانون نحو المتغير العشوائي X لما n تؤول إلى $+\infty$، حيث أن X يتبع قانون توزيع بواصون $\mathcal{P}(\lambda)$.

لدينا

$$p_n(x)=IP(X_n=x)=C_n^x\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$\lim_{n\to+\infty}p_n(x)=\frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

وبالتالي

$$\lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(x)=\lim_{n\to+\infty}p_n(x)=F_X(x)$$

حيث X يتبع قانون توزيع بواسون $\mathcal{P}(\lambda)$.

خواص

لتكن $(X_n)_{n\in IN}$ و $(Y_n)_{n\in IN}$ متتاليتي متغيرات عشوائية وليكن X متغير عشوائي و a عدد حقيقي، حيث

$$Y_n\xrightarrow[n\to\infty]{L}a \quad \text{و} \quad X_n\xrightarrow[n\to\infty]{L}X$$

فإن

1) $X_n+Y_n\xrightarrow[n\to\infty]{L}X+a$.

2) $X_nY_n\xrightarrow[n\to\infty]{L}aX$.

3) $X_n/Y_n\xrightarrow[n\to\infty]{L}X/a$، حيث $a\neq 0$.

نظرية 1.4.2. (بول - ليفي) [14]

1) إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية $(X_n)_{n\in IN}$ تتقارب بالقانون نحو المتغير العشوائي X فإن التابع المميز لـ $(X_n)_{n\in IN}$ يتقارب ببساطة نحو التابع المميز لـ X .

2) إذا كانت $\phi_n(x)$ تتقارب ببساطة نحو $\phi(x)$ من أجل كل x حيث $\phi(x)$ مستمرة عند $x=0$ ، فإن المتتالية $(X_n)_{n\in IN}$ تتقارب بالقانون نحو المتغير العشوائي X . أي أن:

$$\left(X_n \xrightarrow{L} X\right) \Leftrightarrow \forall x \in IR, \quad \lim_{n\to+\infty} \phi_n(x) = \phi(x)$$

5.2. التقارب شبه المؤكد (la convergence presque sure)

تعريف 1.5.2. (التقارب شبه المؤكد)

نقول عن متتالية المتغيرات العشوائية $(X_n)_{n\in IN}$ المعرفة على فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{A}, IP)$ أنها متقاربة تقارب شبه مؤكد (p.s.) نحو X لما n تؤول إلى $+\infty$ إذا كان:

$$IP\left(\omega \in \Omega, \quad \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$$

ونكتب

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X$$

مثال:

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, IP)$ فضاء احتمال، حيث $\Omega\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ و $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ، حيث

$$IP(\omega_1) = \frac{1}{2}, \quad IP(\omega_2) = \frac{1}{4} \quad , IP(\omega_3) = \frac{1}{4}$$

لتكن المتتالية $(X_n)_{n\in IN}$ المعرفة على هذا الفضاء بـ:

$$X_n(\omega_1)=\frac{\alpha}{n}$$

$$X_n(\omega_2)=-1+\frac{\alpha}{n}$$

$$X_n(\omega_3)=1-\frac{\alpha}{n}$$

المتتالية (X_n) تتقارب تقارب شبه مؤكد نحو المتغير العشوائي X المعرف على الفضاء $(\Omega,\mathcal{A},IP)$ بـ

$$X(\omega_1)=0$$

$$X(\omega_2)=-1$$

$$X(\omega_3)=1$$

1.5.2. الشرط اللازم والكافي للتقارب شبه المؤكد

لتكن $(X_n)_{n\in IN}$ متتالية متغيرات عشوائية معرفة على الفضاء الاحتمالي $(\Omega,\mathcal{A},IP)$، نقول أن هذه المتتالية متقاربة تقارب شبه مؤكد (p.s.) نحو X إذا وفقط إذا كان

$$\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\to+\infty} IP\left(\cup|X_n(\omega)-X(\omega)|\geq\varepsilon\right)=0$$

6.2. العلاقات بين أنواع التقارب

1.6.2. العلاقة بين التقارب بالاحتمال و التقارب بالمتوسط

قضية 1.6.2. [11]

التقارب بالمتوسط يستلزم التقارب بالاحتمال، والعكس غير صحيح عموما.

$$\left(X_n\overset{m.q.}{\to}X\right)\Rightarrow\left(X_n\overset{IP}{\to}X\right)$$

البرهان:

نفرض أن متتالية المتغيرات العشوائية (X_n) متقاربة بالمتوسط نحو المتغير العشوائي X هذا يعني أن

$$\left(X_n \overset{m.q.}{\to} X\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} IE\left(\left|X_n - X\right|^2\right) = 0$$

يكفي تطبيق متراجحة ماركوف كما يلي

ليكن $\varepsilon > 0$

$$IP\left(\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right) = IP\left(\left|X_n - X\right|^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{IE\left(\left|X_n - X\right|^2\right)}{\varepsilon^2}$$

وبما أن متتالية المتغيرات العشوائية (X_n) متقاربة بالمتوسط التربيعي (m.q.)، أي أن

$$\lim_{n\to+\infty} IE\left(\left|X_n - X\right|^2\right) = 0$$

فإن

$$IP\left(\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

ومنه متتالية المتغيرات العشوائية (X_n) متقاربة بالاحتمال نحو المتغير العشوائي X لما n تؤول إلى $+\infty$

2.6.2. العلاقة بين التقارب شبه المؤكد والتقارب بالاحتمال

قضية 2.6.2. [11]

التقارب شبه المؤكد يستلزم التقارب بالاحتمال، والعكس غير صحيح عموما.

$$\left(X_n \overset{p.s.}{\to} X\right) \Rightarrow \left(X_n \overset{IP}{\to} X\right)$$

لإثبات هذه القضية نستخدم النظرية التالية

نظرية 1.6.2. (التقارب المهيمن) [11]

لتكن $(X_n)_{n\geq 0}$ متتالية متغيرات عشوائية حيث $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ ، لما n تؤول إلى $+\infty$.

إذا وجد متغير عشوائي Y قابل للتكامل ($IE(|Y|)<+\infty$)، حيث من أجل كل n ،

$$|X_n| \leq Y \qquad p.s.$$

فإن

$$\lim_{n\to+\infty} IE(X_n) = IE(X)$$

البرهان:

ليكن $\varepsilon > 0$ ثابت. نضع $Y_n = 1_{\{|X_n - X|>\varepsilon\}}$

التوابع Y_n قابلة للقياس، موجبة، محدودة من الأعلى بالقيمة 1.

حسب التقارب شبه مؤكد، من أجل $\omega \in \Omega$ ، توجد n_0 ، حيث من أجل كل $n \geq n_0$ ،

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon$$

يعني أن $Y_n(\omega) = 0$ (من أجل كل $n \geq n_0$)

إذن Y_n متقاربة تقارب شبه مؤكد نحو 0.

حسب نظرية التقارب المهيمن (la convergence dominée)،

$$IP(|X_n - X| \geq \varepsilon) = IE(Y_n)$$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} IE(Y_n) = IE(0) = 0$$

وهذا يعني أن

$$IP\left(\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

وهذا ما يمثل التقارب بالاحتمال.

3.6.2. العلاقة بين التقارب بالاحتمال و التقارب بالقانون

قضية 3.6.2. [11]

التقارب بالاحتمال يستلزم التقارب بالقانون ، والعكس غير صحيح عموما.

$$\left(X_n \overset{IP}{\to} X\right) \Rightarrow \left(X_n \overset{L}{\to} X\right)$$

البرهان:

نثبت أنه إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية X_n متقاربة بالاحتمال نحو المتغير العشوائي X ، فإن $F_n(x) = IP(X_n \leq x)$ متقاربة نحو $F(x) = IP(X \leq x)$ عند كل نقطة x حيث F_X مستمرة.

ليكن $X_n = X + (X_n - X)$ حيث $\forall \varepsilon > 0$ ، $X_n \leq x$ و $X \leq x + \varepsilon$ ومنه $(X_n - X) \leq -\varepsilon$

ومنه يكون لدينا

$$(X_n \leq x) \subset (X \leq x + \varepsilon) \cup ((X_n - X) \leq -\varepsilon)$$

وحسب رتابة الاحتمال يكون لدينا

$$IP(X_n \leq x) \leq IP(X \leq x + \varepsilon) + IP((X_n - X) \leq -\varepsilon)$$

أي أن

$$IP(X_n \leq x) \leq IP(X \leq x + \varepsilon) + IP(\left|X_n - X\right| \geq \varepsilon)$$

ليكن $\eta > 0$ ، حسب استمرارية F_X عند x ، يوجد ε_0 حيث

$$F_X(x) \leq F_X(x + \varepsilon_0) \leq F_X(x) + \frac{\eta}{2}$$

من أجل هذا الاختيار لـ ε_0، يوجد n_0 حيث من أجل كل $n \geq n_0$ يكون لدينا $IP(|X_n - X| \geq \varepsilon_0) \leq \frac{\eta}{2}$.

أخيرا من أجل كل $n \geq n_0$ يكون لدينا

$$F_{X_n}(x) = IP(X_n \leq x) \leq F_X(x+\varepsilon_0) + IP(|X_n - X| \geq \varepsilon_0) \leq F_X(x) + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} \leq F_X(x) + \eta$$

بصفة مشابهة يكون

$$IP(X \leq x - \varepsilon) \leq IP(X_n \leq x) + IP((X - X_n) \leq -\varepsilon)$$

تكتب بالشكل

$$IP(X_n \leq x) \geq IP(X \leq x - \varepsilon) - IP((X - X_n) \leq -\varepsilon)$$
$$\geq IP(X \leq x - \varepsilon) - IP(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

من أجل n كبيرة يكون

$$F_{X_n}(x) \geq F_X(x - \varepsilon) - IP(|X_n - X| \geq \varepsilon) \geq F_X(x) - \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{2}$$

نحتار ε صغيرة حيث $F_X(x-\varepsilon) \geq F_X(x) - \frac{\eta}{2}$ حسب استمرارية F_X في x، ثم من أجل n التقارب بالاحتمال $IP(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\eta}{2}$ يسمح بإثبات المتراجحة الثانية، أي أن

$$F_{X_n}(x) \geq F_X(x) - \eta$$

وأخيرا نجد تقارب $F_{X_n}(x)$ نحو $F_X(x)$ عند كل نقطة x، نقاط استمرار F_X.

4.6.2. العلاقات بين الأنماط المختلفة للتقارب

العلاقات بين أنماط التقارب المختلفة تعطى بالمخطط التالي:

التقارب شبه مؤكد التقارب بالمتوسط

⇘⇙

التقارب بالاحتمال

⇓

التقارب بالقانون

7.2. نظريات النهاية

نتطرق في هذا الفصل إلى نوعين من نظريات النهاية وهما، قانون الأعداد الكبيرة ونظرية النهاية المركزية.

1.7.2. قانون الأعداد الكبيرة

1) القانون الضعيف للأعداد الكبيرة

نظرية 1.7.2. [18]

لتكن $(X_n)_{n\in IN^*}$ متتالية متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس القانون حيث $IE(X_n)=\mu$ و $Var(X_n)=\sigma^2$ موجودان. إذن

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{IP} IE(X_1), \qquad n\to+\infty$$

البرهان:

حسب تعريف التقارب بالاحتمال علينا إثبات أن

$$\forall \varepsilon>0, \quad \lim_{n\to+\infty} IP\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - IE(X_1)\right|\geq \varepsilon\right)=0$$

لدينا $IE(X_i)=IE(X_1)$ من أجل كل i لأن المتغيرات العشوائية X_i لها نفس القانون، وبالتالي لها نفس الأمل الرياضي ونفس التباين.

نضع $M_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ وحسب خواص الأمل الرياضي، لدينا

$$IE(M_n) = IE\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} IE\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} IE(X_i) = \frac{1}{n} \times (nIE(X_1))$$
$$= IE(X_1)$$

ومن جهة أخرى، حسب استقلالية X_i وحسب خواص التباين، يكون لدينا

$$Var(M_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times (nVar(X_1))$$
$$= \frac{Var(X_1)}{n}$$

بتطبيق متراجحة تشيبيشف على M_n، نجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ و $n \in IN^*$

$$IP\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - IE(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) = IP\left(|M_n - IE(X_1)| \geq \varepsilon\right)$$
$$\leq \frac{Var(M_n)}{\varepsilon^2}$$
$$\leq \frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2}$$

وبحساب النهاية لما n تؤول إلى $+\infty$ يتم المطلوب.

2) القانون القوي للأعداد الكبيرة

نظرية 2.7.2. [18]

لتكن $(X_n)_{n \in IN^*}$ متتالية متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس القانون حيث $IE(X_1) = \mu < +\infty$ و $Var(X_n) = \sigma^2$ موجودان. إذن

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s.} IE(X_1), \qquad n \to +\infty$$

2.7.2. نظرية النهاية المركزية

مفتاح برهان نظرية النهاية المركزية هو النظرية التالية، والتي تعطى دون برهان.

نظرية 3.7.2. [18]

لتكن (Z_n) متتالية متغيرات عشوائية، تابع التوزيع لهذه المتتالية هو F_{Z_n} ودالتها المولدة هي φ_{Z_n}، حيث $n \geq 1$. وليكن Z متغير عشوائي ذو تابع التوزيع F_Z والدالة المولدة φ_Z.

إذا كان $\varphi_{Z_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_Z(t)$ من أجل كل t، فإن

$$F_{Z_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_Z(t)$$

من أجل كل قيم t، نقاط استمرار F_Z.

نظرية 4.7.2. (نظرية النهاية المركزية)[18]

لتكن $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية متغيرات عشوائية حقيقية مستقلة ولها نفس القانون، حيث أن $V(X_n)=\sigma^2$ و $E(X_n)=\mu$.

قانون المتغير العشوائي $Z_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ يؤول إلى القانون الطبيعي المعياري $\mathcal{N}(0,1)$.

ونكتب

$$Z_n \xrightarrow{L} Z \text{ و } Z \to \mathcal{N}(0,1)$$

البرهان:

لدينا

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nE(X_i)}{\sqrt{n}\sqrt{V(X_i)}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

ليكن φ التابع المميز لـ $(X_i - \mu)$ وليكن φ_n التابع المميز لـ Z_n

ولدينا التابع المميز لـ Z هو

$$\varphi_Z(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

نبرهن أن

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(t)=\varphi_Z(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

نلاحظ أن $\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ مستقلة أيضا وبالتالي

$$\varphi_{\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}(t)=\varphi_{(X_i-\mu)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

ولدينا وحسب خواص الدالة المميزة

$$\varphi_n(t)=\varphi_{Z_n}(t)=\varphi_{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}=\left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)$$

أي أن

$$\log\varphi_n(t)=\log\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n=n\log\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

ننشر هذا المقدار بجوار 0 من الرتبة الثانية، حيث أن $\varphi'(0)$ و $\varphi''(0)$ موجودان و

$$\varphi'(0)=i\mu'_{(X_i-\mu)}(0)=iIE(X_i-\mu)$$
$$\varphi''(0)=i^2\mu''(0)=i^2IE(X_i-\mu)^2=-\sigma^2$$

يمكن أن ننشر بجوار الصفر حتى الرتبة الثانية فنجد أن

$$\log\varphi(t)=\log\varphi(0)+t\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}+\frac{t^2}{2}\left[\frac{\varphi''(0).\varphi(0)-\varphi'(0)^2}{\varphi^2(0)}+\varepsilon(t)\right]$$

حيث

$$\varphi(0)=1 \text{ و } \lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$$

ومنه يكون لدينا

$$\log\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\frac{t^2}{2n\sigma^2}\left(-\sigma^2+\varepsilon\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)$$

ومن جهة أخرى

$$\log\varphi_n(t)=\frac{t^2}{2\sigma^2}\left(-\sigma^2+\varepsilon\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)=\frac{-t^2}{2}+\frac{t^2}{2\sigma^2}\varepsilon\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\log\varphi_n(t)=\frac{-t^2}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}=\varphi_Z(t)$$

وبالتالي

$$\varphi_{Z_n}(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\varphi_Z(t)$$

ومنه نستنتج أن

$$Z_n\xrightarrow{L}Z \text{ و } Z\longrightarrow\mathcal{N}(0,1)$$

8.2. تمارين مقترحة

التمرين 01:

لتكن (X_n) متتالية متغيرات عشوائية موجبة ذات كثافة احتمالية $f_n(x)=ne^{-nx}$ من أجل $x>0$.

- أثبت أن المتتالية (X_n) متقاربة بالمتوسط $(m.q.)$ نحو الصفر.

التمرين 02:

لتكن (X_n) متتالية متغيرات عشوائية معرفة على الفضاء $(\Omega,\mathcal{B},IP)$. حيث أن $IE(X_n)$ و $Var(X_n)$ موجودان. X متغير عشوائي معرف على $(\Omega,\mathcal{B},IP)$. حيث $IE(X)$ و $Var(X)$ موجودان.

- بين أن الشرط الكافي للتقارب بالاحتمال لـ X_n نحو X لما n تؤول إلى ∞ هو:

$$\lim_{n\to+\infty} IE(X_n-X)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} Var(X_n-X)=0$$

التمرين 03:

لتكن $X_1,X_2,...,X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة و تتبع نفس قانون المتغير العشوائي X ذو الكثافة الاحتمالية $f(x)$ ، حيث:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)} & ;x\geq\theta \\ 0 & ;ailleurs \end{cases}$$

حيث أن θ هو عدد حقيقي موجب معطى. نعرف المتغير العشوائي $m_n=\min\{X_1,...,X_n\}$.

1. أوجد تابع التوزيع لـ m_n ، ثم أوجد تابع الكثافة لها.
2. أحسب الأمل الرياضي لـ m_n.
3. أثبت أن المتتالية m_n تتقارب بالمتوسط من الرتبة 1 نحو θ ، لما n تؤول إلى ∞.
4. أثبت أن المتتالية m_n تتقارب بالاحتمال نحو θ ، لما n تؤول إلى ∞.

التمرين 04:

لتكن $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية متغيرات عشوائية مستقلة وتتبع كلها قانون التوزيع المنتظم على المجال $[0,1]$، ولتكن $M_n = Max\{U_1,...,U_n\}$.

1. أوجد تابع التوزيع لـلمتتالية $\left(n(1-M_n)\right)_{n\geq 1}$.
2. أثبت أن المتتالية $\left(n(1-M_n)\right)_{n\geq 1}$ متقاربة بالقانون لما n تؤول إلى $+\infty$ مع توضيح قانون التوزيع للنهاية.

التمرين 05:

لتكن $X_1, X_2,..., X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس القانون. حيث أن X يتبع القانون الطبيعي $\mathcal{N}(0,\sigma)$، σ هو عدد حقيقي موجب معطى.

- أثبت أن المتتالية T_n المعرفة بـ:

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

متقاربة بالمتوسط من الرتبة 2 نحو النهاية التي سنحددها.

التمرين 06:

لتكن $X_1, X_2,..., X_n$ متغيرات عشوائية لها نفس القانون، ذات كثافة احتمالية معطاة كما يلي:

$$f(x) = \frac{\theta}{2}e^{-\theta|x|}$$

حيث θ عدد حقيقي موجب معطى.

- أدرس التقارب بالاحتمال لمتتالية المتغيرات العشوائية المعرفة بـ:

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

التمرين 07:

لتكن $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية لها نفس القانون، ذات كثافة احتمالية معطاة كما يلي

$$f(x) = \exp\left[-(x-\theta) - e^{-(x-\theta)}\right]$$

حيث θ عدد حقيقي موجب معطى.

- أدرس التقارب بالقانون لمتتالية المتغيرات العشوائية المعرفة بـ:

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-(X_i-\theta)}$$

الفصل الثالث

الإحصاء الاستقرائي (الاستدلالي)

نظرا للصعوبات التي تواجه الباحثين في الحصول علي بيانات المجتمع ككل واللجوء إلى أسلوب العينة في جمع البيانات، أصبحت أساليب الإحصاء الاستدلالي هي الوسيلة لاتخاذ القرارات الإحصائية بل وأصبح الإحصاء الوصفي هو مرحلة من مراحل البحث الإحصائي التي يتم على أساسها تحديد أسلوب الاستدلال الإحصائي المناسب الذي يمثل الهدف الأساسي من دراسة الإحصاء.

للإحصاء الاستدلالي جزءان أساسيان يسمى الأول بالتقدير الإحصائي بينما يسمى الثاني باختبار الفرضيات.

الأهداف التعليمية للفصل:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- ✓ الاستدلال الإحصائي
- ✓ التقدير النقطي
- ✓ التقدير بمجال
- ✓ اختبار الفرضيات

1.3. عموميات وتعاريف

تعريف 1.1.3. (الإحصاء الاستقرائي (الاستدلالي))

- هو مجموعة الطرق الإحصائية التي تسمح لنا باستنتاج القرارات الخاصة بالمجتمع بناءًا على العينة المختارة من هذا المجتمع.
- وبصيغة أخرى هو مجموعة الطرق والأساليب التي تحول المعلومات المستخلصة من العينة (العينات) إلى معرفة لخصائص وسلوك وعلاقات الظواهر محل الدراسة في المجتمع.

تعريف 2.1.3. (المعلمة)

هي عبارة عن خاصية أو مقياس يتم حسابها من المجتمع محل الدراسة كالمتوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ .أي أن المعالم هي مقاييس تحدد خصائص المجتمع ونرمز لها بالرمز θ.

تعريف 3.1.3. (الإحصائية أو الإحصاء)

هي عبارة عن خاصية أو مقياس يتم حسابها من العينة المسحوبة من المجتمع محل الدراسة كالمتوسط الحسابي $\overline{X}$ والانحراف المعياري S. ونرمز لها بالرمز T.

تعريف 4.1.3. (التقدير)

هو أسلوب إحصائي مبني على نظريات إحصائية، يستخدم لتقدير معلمة ما محل الاهتمام عن طريق استخدام مقاييس العينة.

تعريف 5.1.3. (المقدر)

هو إحصائية T تستخدم للحصول على تقدير لمعلمة المجتمع θ.

2.3. التقدير الإحصائي

تتلخص مشكلة التقدير في استخدام بيانات عينة عشوائية مسحوبة من المجتمع في إيجاد تقدير لمعالم هذا المجتمع المجهولة، وهناك نوعان من التقدير هما:

- ✓ التقدير بنقطة (النقطي): أي أنه توجد قيمة وحيدة (مفردة) من بيانات العينة تكون تقديرا لمعلمة المجتمع وفي هذه الحالة نحصل على مقدر النقطة.
- ✓ التقدير بمجال (بفترة): أي أنه توجد فترة تقع فيها معلمة المجتمع بدرجة ثقة عالية، وفي هذه الحالة نحصل على مقدر الفترة.

1.2.3. التقدير النقطي

عادة يوجد أكثر من إحصاء يصلح كمقدر لمعلمة المجتمع ونواجه مشكلة التفضيل بين هذه المقدرات. فإذا كان $T_1 = \Phi_1(X_1, X_2, ..., X_n)$ ، $T_2 = \Phi_2(X_1, X_2, ..., X_n)$ مقدران للمعلمة θ فأيهما نفضل ولماذا؟

نفاضل بين المقدرات بمقدار قرب كل منها من المعلمة وبمقدار تبايناتها، ويقاس ذلك بما يسمى متوسط مربع خطأ التقدير.

1) متوسط مربع الخطأ (Mean Squared Error)

إذا كانت $X' = (X_1, X_2, ..., X_n)$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع X توزيعه الاحتمالي $f(x;\theta)$ يعتمد على معلمة θ، وإذا أخذنا $T = \Phi(X')$ كتقدير للمعلمة فإن الخطأ في هذا التقدير أو الخسارة الناجمة من اتخاذ T كتقدير للمعلمة θ يمكن أن يقاس بالمقدار:

$$(T - \theta)$$

ولكن هذا المقدار يمكن أن يكون موجبا أو سالبا حسب قيمة T المحسوبة من العينة، وحتى نتخلص من الإشارة فإننا نأخذ مربع هذا المقدار، أي:

$$(T - \theta)^2$$

كمقياس لقرب التقدير T من المعلمة θ ولكن هذا المقدار يتغير من عينة لأخرى لذلك فإننا نأخذ القيمة المتوقعة له أي نأخذ:

$$IE\left[(T - \theta)^2\right]$$

والتي تسمى متوسط مربع خطأ التقدير T ويرمز لها بالرمز $MSE(T)$ أي أن:

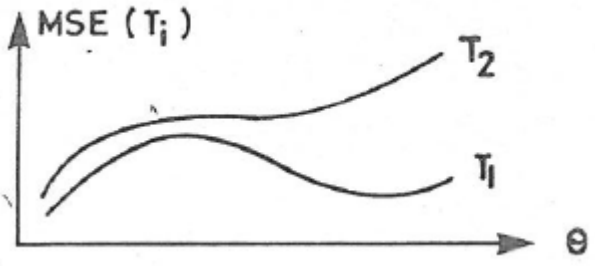
$$MSE(T) = IE\left[(T - \theta)^2\right]$$

كمقياس لجودة المقدر T للمعلمة θ.

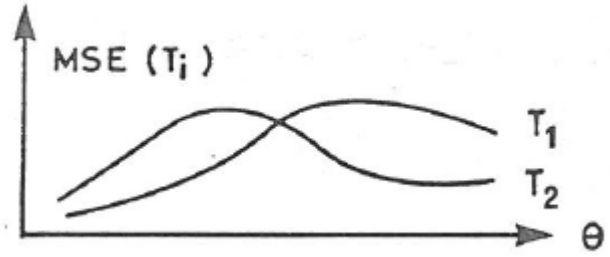
وعلى ذلك فإننا نفضل التقدير الذي له أقل متوسط مربع خطأ، فإذا كان T_1 ، T_2 مقدران للمعلمة θ فإننا نفضل T_1 عن T_2 إذا كان:

$$MSE(T_1) < MSE(T_2)$$

ولكن نادرا أن نجد مقدرا له أقل متوسط مربع خطأ لجميع قيم θ فمثلا نادرا أن نجد الحالة المبينة في الشكل التالي:



ولكن الغالب أن نجد مثل الحالة المبينة في الشكل التالي:



أي أن T_1 أفضل من T_2 لبعض قيم θ وأن T_2 أفضل من T_1 لبعض القيم الأخرى للمعلمة θ.

وعلى ذلك يجب البحث عن معايير أخرى للمفاضلة بين المقدرات، حيث أنه توجد بعض الصفات التي يجب أن تتوفر في المقدر الجيد وهي:

1) عدم التحيز

ذكرنا أنه من النادر أن نجد تقديرا يكون متوسط مربع خطأه أقل ما يمكن لجميع قيم θ، فإذا كان T تقديرا للمعلمة θ فإن متوسط مربع الخطأ هو:

$$MSE(T) = IE\left[(T-\theta)^2\right]$$

حيث أننا يمكن إعادة كتابته على الصورة التالية:

$$\begin{aligned} MSE(T) &= IE\left[\left(T - IE(T)\right) + \left(IE(T) - \theta\right)\right]^2 \\ &= IE\left[\left(T - IE(T)\right)^2\right] + IE\left[\left(IE(T) - \theta\right)^2\right] + 2\left(IE(T) - \theta\right) IE\left(T - IE(T)\right) \\ &= Var(T) + \left(IE(T) - \theta\right)^2 + 2\left(IE(T) - \theta\right) IE\left(T - IE(T)\right) \end{aligned}$$

الحد الأخير في الطرف الأيمن يساوي الصفر لأن:

$$IE\left(T-IE\left(T\right)\right)=IE\left(T\right)-IE\left(T\right)=0$$

وعلى ذلك فإن:

$$MSE\left(T\right)=Var\left(T\right)+b^2\left(\theta\right)$$

حيث أن:

$$b^2\left(\theta\right)=\left(IE\left(T\right)-\theta\right)^2$$

أي أن متوسط مربع الخطأ لأي تقدير يساوي تباين التقدير مضافا إليه مقدار آخر مربع هو $b^2\left(\theta\right)$.

يسمى المقدار $b\left(\theta\right)=\left(IE\left(T\right)-\theta\right)$ بمقدار التحيز في الإحصاء T كتقدير للمعلمة θ وهو يبين مقدار الاختلاف بين متوسط توزيع الإحصاء T وبين المعلمة θ.

ويكون متوسط مربع الخطأ أقل ما يمكن إذا كان كل من:

- ✓ التباين $Var\left(T\right)$،
- ✓ مربع التحيز $b^2\left(\theta\right)$

أقل ما يمكن، وهذا يعني أن التقدير T يكون قريبا من المعلمة θ إذا كان كل من التباين ومربع التحيز أقل ما يمكن.

إن أقل قيمة لمربع التحيز $b^2\left(\theta\right)$ هي الصفر ويحدث ذلك عندما يكون $IE\left(T\right)=\theta$ ، وعندها لا يوجد تحيز في التقدير ويقال أن T تقدير غير متحيز للمعلمة θ وفي هذه الحالة يكون متوسط مربع الخطأ $MSE\left(T\right)$ مساويا لتباين التقدير $Var\left(T\right)$، وعلى ذلك فإننا نختار بين التقديرات الغير متحيزة على أساس تبايناتها ونفضل التقدير الغير متحيز بأقل تباين.

تعريف 1.2.3. (المقدر غير المتحيز)

نقول عن إحصائية ما T بأنها مقدر غير متحيز (غير منحاز) لمعلمة المجتمع θ إذا كان أملها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع أي أن:

$$IE\left(T\right)=\theta$$

مثال:

إذا كانت $X'=\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع متوسطه μ وتباينه σ^2.

1) هل $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$ تقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع μ وما تباينه.

2) أي التقديرات التالية غير متحيزة لتباين المجتمع σ^2 وأحسب تباين كل منها.

$$T=\frac{1}{n}\sum\left(X-\overline{X}\right)^2 \quad \checkmark$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum\left(X-\overline{X}\right)^2 \quad \checkmark$$

3) إذا كان المجتمع يتبع توزيع طبيعي فقارن بين كل من S^2 و T.

الحل:

1. $\overline{X}$ تقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع μ لأن:

$$IE\left(\overline{X}\right)=IE\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}IE\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}IE\left(X_i\right)=\frac{1}{n}\times nIE\left(X\right)=\mu$$

$$Var\left(\overline{X}\right)=Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Var\left(X_i\right)=\frac{1}{n^2}\times n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

2. لدينا

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-\overline{X}^2$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}
IE\left(S^2\right)&=IE\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-\overline{X}^2\right)=IE\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)\right)-IE\left(\overline{X}^2\right)\\
&=\frac{1}{n}IE\left(\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)\right)-IE\left(\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}IE\left(X_i^2\right)-IE\left(\overline{X}^2\right)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(IE\left(X_i^2\right)-\left(IE\left(X_i\right)\right)^2\right)+\left(IE\left(X_i\right)\right)^2-\left(IE\left(\overline{X}^2\right)-\left(IE\left(\overline{X}\right)\right)^2\right)-\left(IE\left(\overline{X}\right)\right)^2\\
&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[Var\left(X_i\right)+\left(IE\left(X_i\right)\right)^2\right]-\left[Var\left(\overline{X}\right)+\left(IE\left(\overline{X}\right)\right)^2\right]\\
&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[Var\left(X\right)+\left(IE\left(X_i\right)\right)^2\right]-\frac{1}{n}\sigma^2-\mu^2\\
&=Var\left(X\right)+\left(IE\left(X\right)\right)^2-\frac{1}{n}\sigma^2-\mu^2\\
&=\sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2-\mu^2\\
&=\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

وهذا يعني أن T تقدير متحيز لـلمعلمة θ وأن مقدار التحيز هو $b(\theta)=-\frac{\sigma^2}{n}$.

3. لدينا

$$IE\left(S^2\right)=IE\left(\frac{1}{n-1}\sum\left(X-\overline{X}\right)^2\right)=\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2$$

أي أن S^2 تقدير غير متحيز للمعلمة σ^2.

2) الاتساق

يبدو لنا بوضوح من تعريف العينة أن المقدر المبني على أساس عينة تحوي n ملاحظة مثلا يجب أن تكون أفضل بشكل عام من المقدر المبني على أساس عينة عشوائية تحوي عددا أقل من n. ولإيضاح الفكرة أكثر، لنفرض أن T_1 مقدرا للمعلمة θ في مجتمع معطى مبنى على عينة حجمها $n=1$ أي تحوي ملاحظة واحدة للمتغير العشوائي X ، وليكن أن T_2 مقدرا للمعلمة θ في مجتمع معطى مبنى على عينة حجمها $n=2$ وبشكل عام لنفرض أن T_n هو مقدر لـ θ مبنى على أساس عينة حجمها n، أي أن $T_1,T_2,...,T_n,...$ متتالية من المقدرات لـ θ ونرمز لها بـ $\{T_n\}$.

تعريف 2.2.3. (الاتساق)

نقول أن المقدر T_n للدالة المعلمية $g(\theta)$ متسق، إذا كان:

$$\forall\varepsilon>0,\ \lim IP\left(\left|T_n-g(\theta)\right|>\varepsilon\right)=0$$

وهذا يعني أن T_n يكون تقديرا متسقا للمعلمة $g(\theta)$ إذا اقترب التقدير من المعلمة كلما زاد حجم العينة، أي أن الإحصاء T_n يتقارب احتماليا إلى المعلمة $g(\theta)$.

مثال:

إذا كانت $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي، متوسطه μ وتباينه σ^2.

- هل $\overline{X}$ تقديرا متسقا للمعلمة μ ؟

الحل:

نعلم أنه إذا كان:

$$X_i \to \mathcal{N}\left(\theta,\sigma^2\right);\quad i=1,...,n$$

فإن: $\overline{X} \to \mathcal{N}\left(\theta,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

وبذلك يكون:

$$Z=\frac{\overline{X}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1)$$

لدينا:

$$\begin{aligned}P_\theta\left(\left|\overline{X}-\theta\right|>\varepsilon\right)&=1-P_\theta\left(\left|\overline{X}-\theta\right|\le\varepsilon\right)=1-P_\theta\left(-\varepsilon\le\overline{X}-\theta\le\varepsilon\right)\\&=1-P_\theta\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\le\frac{\overline{X}-\theta}{\sigma\sqrt{n}}\le\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)=1-P_\theta\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\le Z\le\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)\\&=1-\int_{\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}}^{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz\end{aligned}$$

بأخذ نهاية الطرفين لما n تؤول إلى $+\infty$ نجد أن:

$$\lim_{n\to+\infty}P_\theta\left(\left|\overline{X}-\theta\right|>\varepsilon\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\int_{\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}}^{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz\right)=1-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz=1-1=0$$

وبالتالي حسب التعريف نجد أن $T_n=\overline{X}$ مقدر متسق للمعلمة θ.

4) الفعالية، الكفاءة

يمكن قياس جودة المقدرات T_i بمقدار تبايناتها، ونحصل بذلك على مقياس بسيط لمقارنة المقدرات غير المتحيزة.

تعريف 3.2.3. (المقدر الفعال أو الأكفأ)

إذا كان T_1,T_2 مقدرين، وكان: $Var(T_1)\le Var(T_2)$

نقول عندئذ أن المقدر T_1 له الأفضلية كمقدر أكثر دقة لتقدير θ بالمقارنة مع المقدر T_2.

تعريف 4.2.3. (المقدر الأكفأ نسبيا)

إذا كان T_1, T_2 مقدرين غير متحيزين لـ θ، وكانت المتباينة $Var(T_1) \leq Var(T_2)$ محققة مهما تكن θ، بالإضافة إلى تحقق المتباينة من أجل قيمة واحدة على الأقل لـ θ، فيقال عندئذ أن T_1 الأكفأ نسبيا من T_2 لتقدير θ.

وتقاس الكفاءة النسبية للمقدر T_1 مقارنة بـ T_2 بالنسبة بين تباينهما، ونكتب:

$$e = \frac{Var(T_1)}{Var(T_2)} \leq 1$$

مثال:

إذا كانت $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ عينة عشوائية من مجتمع يتبع توزيع $\Gamma(1,\theta)$، وكان:

$$T_1 = X_1;\ T_2 = \frac{(X_1 + X_2)}{2};\ T_3 = \frac{(X_1 + X_2 + X_3)}{3};\ T_4 = \overline{X}$$

1. ما هو المقدر الأكفأ بين المقدرات $T_i;\ i = 1,2,3,4$ لـ θ؟
2. أحسب الكفاءة النسبية للمقدر الأكفأ مقارنة ببقية المقدرات الأخرى.

الحل:

بما أن العينة مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع $\Gamma(1,\theta)$، فإن:

$$IE(X_i) = \theta,\ Var(X_i) = \theta^2,\ i = 1,2,3,4$$

ومن ثم:

$$IE(T_1) = IE(X_1) = \theta; \quad IE(T_2) = \frac{1}{2}IE(X_1 + X_2) = \frac{1}{2}\left(IE(X_1) + IE(X_2)\right) = \theta;$$
$$IE(T_3) = \frac{1}{3}IE(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{1}{3}\left(IE(X_1) + IE(X_2) + IE(X_3)\right) = \theta;\ IE(T_4) = IE\left(\overline{X}\right) = \theta$$

وبالتالي فإن الإحصاءات $T_i;\ i = 1,2,3,4$ هي مقدرات غير متحيزة لـ θ.

لمعرفة المقدر الأكفأ من بين هذه المقدرات نقوم بحساب تبايناتها:

$$Var(T_1)=\theta^2;\quad Var(T_2)=\frac{\theta^2}{2};\quad Var(T_3)=\frac{\theta^2}{3};\quad Var(T_4)=\frac{\theta^2}{3}$$

نلاحظ أن: $$Var(T_4)<Var(T_3)<Var(T_2)<Var(T_1)$$

وهذا يعني أن T_4 هو المقدر الأكفأ ضمن هذه المجموعة من المقدرات.

تقاس الكفاءة النسبية للمقدر T_4 بالمقارنة مع كل المقدرات T_1,T_2,T_3 كالآتي:

$$\frac{Var(T_4)}{Var(T_1)}=0.25\ ;\ \frac{Var(T_4)}{Var(T_2)}=0.5\ ;\ \frac{Var(T_4)}{Var(T_3)}=0.75$$

2.2.3. التقدير النقطي للمتوسط

تعريف 5.2.3. (متوسط العينة)

نسمي متوسط العينة العشوائية $(X_1,X_2,...,X_n)$، الإحصائية $\overline{X}$ المعرفة بـ:

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

نضع $IE(X)=\mu$ و $Var(X)=\sigma^2$.

خواص [13]

ليكن X، n متغير عشوائي ذو متوسط μ وانحراف معياري σ. فإنه لدينا:

1) في حالة السحب بإرجاع

$$Var(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}\quad و\quad IE(\overline{X})=\mu$$

2) في حالة السحب دون إرجاع (N حجم المجتمع)

$$Var(\overline{X})=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}\quad و\quad IE(\overline{X})=\mu$$

البرهان:

1) في حالة السحب بإرجاع

باستخدام خواص الأمل الرياضي واستقلال المتغيرات العشوائية نجد أن:

$$\begin{aligned} IE\left(\overline{X}\right) &= IE\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} IE\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} IE\left(X_i\right) = \frac{1}{n} \times nIE\left(X\right) \\ &= \mu \end{aligned}$$

باستخدام خواص الأمل الرياضي و استقلال المتغيرات العشوائية نجد أن:

$$\begin{aligned} Var\left(\overline{X}\right) &= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left(X_i\right) = \frac{1}{n^2} \times nVar\left(X\right) \\ &= \frac{1}{n} Var\left(X\right) = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

2) في حالة السحب دون إرجاع

لدينا

$$\begin{aligned} Var\left(\overline{X}\right) &= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} Var\left(X_i\right) + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} Cov\left(X_i, X_j\right)\right] \end{aligned}$$

ولدينا أيضا

$$\begin{aligned} Cov\left(X_i, X_j\right) &= \mathrm{E}\left[\left(X_i - IE\left(X\right)\right)\left(X_j - IE\left(X\right)\right)\right] \\ &= IE\left[\left(X_i - \mu\right)\left(X_j - \mu\right)\right] \\ &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_l - \mu\right)\left(x_k - \mu\right) IP\left(X_i = x_l, X_j = x_k\right) \\ &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_l - \mu\right)\left(x_k - \mu\right) IP\left(X_i = x_l\right) IP\left(X_j = x_k / X_i = x_l\right) \\ &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_l - \mu\right)\left(x_k - \mu\right)\frac{1}{N} IP\left(X_j = x_k / X_i = x_l\right) \end{aligned}$$

- إذا كان $k = l$، فإن

$$Cov\left(X_i, X_j\right) = 0$$

- إذا كان $k \neq l$، فإن

$$Cov\left(X_i, X_j\right) = \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_l - \mu\right)\left(x_k - \mu\right)\frac{1}{N}\frac{1}{N-1}$$

بالتالي

$$Cov\left(X_i, X_j\right) = \frac{1}{N}\frac{1}{N-1}\sum_{\substack{l,k=1 \\ l \neq k}}^{N}\left(x_k - \mu\right)\left(x_l - \mu\right)$$

وباستخدام العلاقة التالية، نجد أن

$$\left[\sum_{i=l}^{N}\left(x_i - \mu\right)\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu\right)^2 + 2\sum_{\substack{l,k=1 \\ l \neq k}}^{N}\left(x_l - \mu\right)\left(x_k - \mu\right)$$

حيث أن

$$\left[\sum_{i=l}^{N}\left(x_i - \mu\right)\right]^2 = \left(N\sigma^2 - N\sigma^2\right)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu\right)^2 = N\sigma^2$$

وبالتالي

$$\sum_{\substack{l,k=1 \\ l\neq k}}^{N}\left(x_l-\mu\right)\left(x_k-\mu\right)=\frac{-N\sigma^2}{2}$$

ومنه نجد أن

$$Cov\left(X_i,X_j\right)=\frac{1}{N}\frac{1}{N-1}\left(\frac{-N\sigma^2}{2}\right)$$

وبالتعويض ينتج أن

$$\begin{aligned}Var\left(\overline{X}\right)&=\frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2+\sum_{\substack{l,k=1 \\ l\neq k}}^{N}\left(\frac{-\sigma^2}{N-1}\right)\right]\\&=\frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2-\frac{\sigma^2}{N-1}n\left(n-1\right)\right]\\&=\frac{1}{n^2}\left[\frac{n\sigma^2\left(N-1\right)-\sigma^2n\left(n-1\right)}{N-1}\right]\\&=\frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{N-n}{N-1}\right]\end{aligned}$$

نظرية 1.2.3. [13]

متوسط العينة $\overline{X}=\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+...+X_n\right)$ هو مقدر فعال لـ μ .

البرهان

لدينا مما سبق $IE\left(\overline{X}\right)=\mu$

هذا إضافة إلى أن

$$Var\left(\overline{X}\right)=\frac{Var\left(X\right)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}O$$

وبالتالي نستنتج أن المتوسط $\overline{X}$ مقدر فعال لـ μ .

3.2.3. التقدير النقطي للتباين

تعريف 6.2.3. (تباين العينة)

نسمي تباين العينة العشوائية $(X_1, X_2, ..., X_n)$، الإحصائية S^2 المعرفة بـ:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \overline{X}^2$$

خواص: [13]

$$IE\left(S^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$Var\left(S^2\right) = \frac{n-1}{n^3}\left[(n-1)\mu_4 - (n-3)\sigma^4\right]$$

حيث $\mu_4 = IE\left(X-\mu\right)^2$.

البرهان:

باستخدام خواص التباين واستقلال المتغيرات العشوائية نجد أن:

$$\begin{aligned}
IE\left(S^2\right) &= IE\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \overline{X}^2\right) = IE\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right) - IE\left(\overline{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n} IE\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right) - IE\left(\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} IE\left(X_i^2\right) - IE\left(\overline{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(IE\left(X_i^2\right) - \left(IE\left(X_i\right)\right)^2\right) + \left(IE\left(X_i\right)\right)^2 - \left(IE\left(\overline{X}^2\right) - \left(IE\left(\overline{X}\right)\right)^2\right) - \left(IE\left(\overline{X}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[Var\left(X_i\right) + \left(IE\left(X_i\right)\right)^2\right] - \left[Var\left(\overline{X}\right) + \left(IE\left(\overline{X}\right)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[Var\left(X\right) + \left(IE\left(X_i\right)\right)^2\right] - \frac{1}{n}\sigma^2 - \mu^2 \\
&= Var\left(X\right) + \left(IE\left(X\right)\right)^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 - \mu^2 \\
&= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 - \mu^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2
\end{aligned}$$

1) تقدير التباين لمجتمع طبيعي

ليكن X متغير عشوائي يتبع القانون الطبيعي $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ نريد تقدير التباين σ^2.

- **في حالة μ معلوم**

نظرية 2.2.3. [13]

التباين $T^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ هو مقدر فعال لـ σ^2.

البرهان:

باستخدام خواص الأمل الرياضي واستقلال المتغيرات العشوائية نجد أن:

$$\begin{aligned} IE\left(T^2\right) &= IE\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2\right) \\ &= IE\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}-2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu X_i+\mu^2\right) \\ &= \frac{1}{n}IE\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}\right)-2\mu\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}IE\left(X_i\right)+\mu^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}IE\left(X_i^{\,2}\right)-2\mu^2+\mu^2 \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} IE\left(T^2\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[Var\left(X_i\right)+\left(IE\left(X_i\right)\right)^2\right]-\mu^2 \\ &= \sigma^2+\mu^2-\mu^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن T^2 هو مقدر غير متحيز لـ σ^2.

$$\begin{aligned} Var\left(T^2\right) &= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var\left(\left(X_i-\mu\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}IE\left(\left(X_i-\mu\right)^4\right)-\left(IE\left(\left(X_i-\mu\right)^2\right)\right)^2\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن T^2 هو مقدر متقارب.

وبالتالي بما أن T^2 مقدر غير متحيز ومتقارب ومنه نجد أن التباين T^2 هو مقدر فعال لـ σ^2.

- **في حالة μ مجهول**

نظرية 3.2.3. [13]

تباين العينة $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ هو مقدر متحيز لـ σ^2.

البرهان:

لدينا مما برهن مسبقا أن

$$IE\left(S^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

وبالتالي التباين S^2 هو مقدر متحيز لـ σ^2.

نظرية 4.1.3. [13]

تباين العينة $\left(S'\right)^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ هو مقدر غير متحيز لـ σ^2.

البرهان:

لدينا

$$IE\left(\left(S'\right)^2\right) = IE\left(\frac{n}{n-1}S^2\right) = \frac{n}{n-1}IE\left(S^2\right)$$

باستخدام النظرية السابقة نجد أن

$$IE\left(\left(S'\right)^2\right) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\sigma^2\right) = \sigma^2$$

وبالتالي نستنتج أن التباين $\left(S'\right)^2$ هو مقدر غير متحيز لـ σ^2.

4.2.3. طرق إيجاد مقدرات النقطة

هناك عدة طرق تعطي مقدرات نقطية تتصف بكل أو بعض صفات المقدر الجيد، نتطرق فيما يلي إلى بعض الطرق الشائعة الاستخدام في الإحصاء للحصول على المقدرات.

1) طريقة المعقولية العظمى (الإمكان الأعظم)

في عام 1920 عرض العالم فيشر أحد رواد الإحصاء في عصرنا طريقة عامة للتقدير أطلق عليها اسم طريقة "المعقولية العظمى" أو "الإمكان الأعظم"، كما بين مميزات هذه الطريقة.

تعتبر طريقة المعقولية العظمى إحدى أهم وأكثر الطرق انتشارا في الإحصاء لتقدير معالم التوزيع الاحتمالي (النموذج الإحصائي) المقترح.

تعريف 7.2.3. (دالة المعقولية)

نسمي دالة المعقولية للمعلمة θ المرفقة بالشعاع العشوائي $(X_1, X_2, ..., X_n)$، الدالة $L(\theta, X_1, ..., X_n)$ حيث:

- ✓ إذا كانت المتغيرات X_i متقطعة فإن

$$L(\theta, x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} IP(X = x_i; \theta)$$

- ✓ إذا كانت المتغيرات X_i مستمرة فإن

$$L(\theta, x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \theta)$$

في هذه الطريقة يتم اختيار قيمة θ التي تجعل دالة الإمكان أكبر ما يمكن وبالتالي نلجأ إلى تقدير المعلمة θ بالقيمة التي تحد الدالة $L(\theta, X_1, ..., X_n)$ من الأعلى.

نسمي $\hat{\theta}$ المقدر الأعظم لـ θ المعرف بـ:

$$\theta = \left\{ \theta = L_{(X_1, ..., X_n)}(\theta) = \sup L_{(X_1, ..., X_n)}(\theta) \right\}$$

إذا كانت الدالة $L(\theta, X_1,..., X_n)$ قابلة للاشتقاق وتقبل قيمة عظمى $\hat{\theta}$ فإن المشتق الأول للدالة ينعدم والمشتق الثاني يكون سالب القيمة.

أي أن:

$$\frac{\partial \ln L(\theta, X_1,..., X_n)}{\partial \theta} = 0 \text{ أو } \frac{\partial L(\theta, X_1,..., X_n)}{\partial \theta} = 0$$

بالإضافة إلى:

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta, X_1,..., X_n)}{\partial \theta^2} < 0 \text{ أو } \frac{\partial^2 L(\theta, X_1,..., X_n)}{\partial \theta^2} < 0$$

وهذا يعني أنه بحل المعادلة $\frac{\partial L(\theta, X_1,..., X_n)}{\partial \theta} = 0$ نجد أن الدالة $L(\theta, X_1,..., X_n)$ تنعدم في النقطة $\theta = \hat{\theta}$ والمشتق الثاني سالب تماما في النقطة $\hat{\theta}$.

ونقول في هذه الحالة أن الدالة $L(\theta, X_1,..., X_n)$ تقبل قيمة عظمى عند النقطة $\hat{\theta}$. وفي أغلب الأحيان يكون من الأسهل اختيار قيمة θ التي تعظم $\ln L(\theta, X_1,..., X_n)$ بدلا من $L(\theta, X_1,..., X_n)$ كمقدر المعقولية العظمى للمعلمة.

مثال 1: (توزيع بواسون)

نريد تقدير المعلمة λ في توزيع بواسون انطلاقا من عينة حجمها n.

لدينا:

$$f(x, \lambda) = IP(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{x!}$$

دالة المعقولية لهذا التوزيع تكتب كما يلي:

$$L_{(x_1.....x_n)}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-n\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\lambda}$$

بإدخال دالة اللوغاريتم نجد أن:

$$\ln L(\lambda; x_1, x_2, ..., x_n) = -\lambda n + \ln(\lambda)\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$$

وبالتالي المشتقة الأولى لدالة المعقولية تكون كما يلي:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda; x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

بوضع $\frac{\partial \ln L(\lambda; x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial \lambda} = 0$ وحلها بالنسبة لـ λ نجد أن:

$$-n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \rightarrow \hat{\lambda} = \overline{X}$$

والمشتق الثاني:

$$\frac{\partial^2 \ln\left(L_{(X_1.....X_n)}(\lambda)\right)}{\partial \lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} X_i \langle 0$$

وبالتالي يكون المقدر بطريقة المعقولية العظمى للمعلمة λ في توزيع بواسون هو $\hat{\lambda} = \overline{X}$ وهو الوسط الحسابي للعينة.

مثال 2: (التوزيع الأسي)

لتكن $(X_1, X_2, ..., X_n)$ عينة عشوائية حجمها n تتبع التوزيع الأسي .نريد تقدير المعلمة λ باستخدام طريقة المعقولية العظمى.

دالة المعقولية للتوزيع الآسي تعطى كما يلي:

$$L(\lambda, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

بإدخال دالة اللوغاريتم نجد:

$$\ln L(\lambda, x_1, \ldots, x_n) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

وبالتالي يكون لدينا

$$\frac{\partial \ln L(\lambda, x_1, \ldots, x_n)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

وأخيرا

$$\frac{\partial \ln L(\lambda, x_1, \ldots, x_n)}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{X}}$$

ومن ثم فإن مقدر المعقولية العظمى للمعلمة λ هو:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$$

2) طريقة العزوم

تعتبر طريقة العزوم تاريخيا من إحدى أقدم طرق التقدير الإحصائي. والتي قدمت من طرف العالم الإحصائي كارل بيرسون عام 1894م. ويتمثل جوهر هذه الطريقة في المساواة بين بعض عزوم المجتمع وعزوم العينة المناظرة لها، فنحصل بذلك على جملة من المعادلات بحلها بالنسبة لمعالم المجتمع نحصل على التقديرات المطلوبة، التي تدعى بتقديرات طريقة العزوم. وبعبارة أخرى تأخذ العزوم التجريبية (عزوم العينة) كتقديرات للعزوم النظرية (عزوم المجتمع) الموافقة لها، ومنها نستخلص تقديرات معالم المجتمع بدلالة العزوم التجريبية.

نفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية تعتمد على K من المعالم $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ وأن المطلوب هو إيجاد تقديرات لهذه المعالم بطريقة العزوم.

نتبع في عملية التقدير الخطوات التالية:

1. نحصل على صيغ لـ K من العزوم النظرية الخاصة بالمجتمع، وهذه العزوم قد تختار بحيث تكون مركزية أو غير مركزية، وقد تكون العزوم الـ K الأولى.

العزوم النظرية اللامركزية هي:

- ✓ في حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطعة)

$$\mu_r' = IE(X^r) = \sum_x X^r f(X, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

✓ في حالة المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

$$\mu_r^{'} = IE(X^r) = \int_X X^r \ f(X;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)dx$$

أما العزوم المركزية حول الوسط الحسابي فهي:

✓ في حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة

$$\mu_r = IE\left[(X-\mu)^r\right] = \sum_x (X-\mu)^r \ f(X;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$$

✓ في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة

$$\mu_r = IE\left[(X-\mu)^r\right] = \int_x (x-\mu)^r f(X;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)dx$$

2. من بيانات العينة $X_1, X_2,..., X_n$ نحسب العزوم المناظرة للعزوم النظرية التي تم اختيارها في الخطوة (1) وعزوم العينة اللامركزية هي:

$$m_r^{'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ r}$$

بينما عزوم العينة حول الوسط الحسابي هي:

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - m_1^{'}\right)^r$$

3. نعادل العزوم المتناظرة الرتبة في كل من المجتمع الإحصائي والعينة العشوائية لنحصل على K معادلة في K مجهولا هي $\theta_1,\theta_2,....,\theta_k$.

وبحل هذه المعادلات نحصل على مقدرات طريقة العزوم: $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,.....,\hat{\theta}_k$ للمعالم $\theta_1,\theta_2,.....,\theta_k$ على الترتيب.

مثال 1:

ليكن X متغير عشوائي مستمر كثافته الاحتمالية $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$ حيث أن $\theta > 0$ و $0 < x < 1$.

نريد تقدير θ بطريقة العزوم.

بما أن المطلوب هو تقدير معلم واحد ألا وهو θ ، فإننا نحتاج إلى معادلة واحدة فقط، لذا نجد صيغة العزم الأول للمجتمع كما يلي:

$$\mu_1^{'} = IE(X) = \int_0^1 x\, f(x;\theta)dx = \int_0^1 x\ \theta x^{\theta-1}dx$$

$$= \theta\int_0^1 x^{\theta}dx = \frac{\theta}{\theta+1}x^{\theta+1}\Big]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

ثم نحسب من بيانات العينة العشوائية العزم الأول

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$$

ثم نعادل العزم الأول للمجتمع بالعزم الأول للعينة عند $\hat{\theta}$ أي أن $\mu_1^{'} = m_1$

وبمعادلة هذه العزوم نحصل على

$$\frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}+1} = \overline{X}$$

وبالتالي مقدر θ بطريقة العزوم هو $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$

مثال 2: (التوزيع الطبيعي)

نستخدم طريقة العزوم لتقدير المعلمتين μ و σ^2 في التوزيع الطبيعي.

بما أن المطلوب هو تقدير معلمتين فإننا نحتاج إلى معادلتين وعزمين، وبما أن μ و σ^2 هما الوسط الحسابي والتباين للمجتمع على الترتيب فإن من المناسب في هذه الحالة اختيار العزم الأول حول الصفر والعزم الثاني حول الوسط الحسابي μ .

فنجد عندئذ عزوم المجتمع $\mu_1^{'}$ و μ_2 . ومن المعلوم أنه في التوزيع الطبيعي لدينا

$$\mu_2 = IE\left(X-\mu\right)^2 = \sigma^2 \quad \text{و} \quad \mu_1^{'} = IE\left(X\right) = \mu$$

وعزوم العينة المناظرة هي $m_1^{'}$ و m_2 حيث أن

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 = S^2 \quad \text{و} \quad m_1^{'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$$

وبمعادلة عزوم المجتمع بما تناظره من عزوم العينة نحصل على:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 \quad \text{و} \quad \hat{\mu} = \overline{X}$$

أي أن الوسط الحسابي في العينة $\overline{X}$ هو مقدر الوسط الحسابي μ وكذلك تباين العينة S^2 هو مقدر التباين σ^2 بطريقة العزوم.

3) طريقة المربعات الصغرى

تعتبر طريقة المربعات الصغرى من أهم طرق التقدير وأكثرها تطبيقا، وقد شاع استخدام هذه الطريقة بصفة خاصة في مجال تحليل الانحدار والذي يسعى بدوره لإيجاد معادلة تربط بين متغير تابع Y ومتغيرات مستقلة $X_1, X_2, ..., X_n$ بحيث يمكن الاستفادة منها في التنبؤ بقيم التابع من معرفة قيم المتغيرات المستقلة.

نستعرض فيما يلي نموذج الانحدار في أبسط حالته عندما يكون خطيا على متغير واحد X ، حيث تسمى هذه الحالة **بالانحدار الخطي البسيط**.

1. كتابة النموذج الخطي

يمكن نمذجة العلاقة بين المتغيرين X_i و Y_i على الشكل:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i; \; i = 1, 2, ..., n$$

- ✓ Y_i يسمى بالمتغير التابع.
- ✓ X_i يسمى بالمتغير المستقل.
- ✓ n مؤشر للدلالة على رقم المشاهدة $(i = 1, 2, ..., n)$ حيث n هو حجم العينة المختارة من المجتمع الذي نرغب في دراسته.
- ✓ β_0 و β_1 هما معلما النموذج.
- ✓ ε_i يمثل الخطأ في تفسير Y_i ويمكن كتابته انطلاقا من العلاقة:

$$\varepsilon_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

يرجع وجود هذه الأخطاء إلى عدة أسباب نذكر منها:

- ✓ إهمال بعض المتغيرات المستقلة التي يمكن أن تؤثر على المتغير التابع في النموذج،
- ✓ الصياغة الرياضية غير السليمة للنموذج،
- ✓ وجود أخطاء في تجميع البيانات المشاهدة التي قد لا تعبر بشكل دقيق عن المتغيرات.

مثال:

نموذج انحدار خطي بسيط ممثل لدالة الاستهلاك العائلي. إذا اخترنا عينة مكونة من 12 عائلة، فإنه من أجل كل عائلة i يمكن كتابة دالة الاستهلاك العائلي على الشكل التالي:

$$C_i = \beta_0 + \beta_1 R_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1,2,....,12$$

حيث أن: C_i يرمز لاستهلاك العائلة i وهو المتغير التابع، R_i يرمز لدخل العائلة i وهو المتغير المستقل. هذه الدالة تعني أن الاستهلاك العائلي هو متغير تابع للدخل بحيث يتحدد داخل النموذج (أي كلما تغير دخل العائلة تغير استهلاكها تبعا له)، أما الدخل فهو متغير مستقل يتحدد خارج النموذج.

2. تقدير معالم النموذج

يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى في تقدير المعالم β_0 ، β_1 وتقوم هذه الطريقة على اختيار المقدرات $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ على الترتيب والتي تجعل مربعات الخطأ أصغر ما يمكن. تهدف طريقة المربعات الصغرى لإيجاد مقدرات النموذج عن طريق تدنية (تصغير) مجموع مربعات الأخطاء (ε_i) أو البواقي وتفضي إلى النتائج التالية:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \\ \hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} \end{cases}$$

البرهان:

الكتابة الرياضية للأخطاء انطلاقا من نموذج الانحدار الخطي البسيط يمكن تحديدها كما يلي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \Rightarrow \varepsilon_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i$$

تبعا لذلك يمكن إيجاد مجموع مربعات الأخطاء الذي يرمز له بالرمز S:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{\,2}=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)^2,\quad i=1,2,....,n$$

المقدرات $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ التي تصغر مجموع مربعات الأخطاء بدلالة المشاهدات X و Y هي تلك التي تعدم مشتقات S بالنسبة لـ β_0 و β_1 على الترتيب.

باشتقاق S بالنسبة لـ β_0 و β_1 نجد أن:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial\beta_0}=\dfrac{\partial}{\partial\beta_0}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)^2=-2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)\\ \dfrac{\partial S}{\partial\beta_1}=\dfrac{\partial}{\partial\beta_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)^2=-2\sum_{i=1}^{n}X_i\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)\end{cases}$$

$\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ هي المقدرات التي تعدم المشتقات وتستخرج كما يلي:

$$\Rightarrow\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)=0.....(1)\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right).....(2)\end{cases}\quad\begin{cases}\displaystyle-2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)=0\\ \displaystyle-2\sum_{i=1}^{n}X_i\left(Y_i-\beta_0-\beta_1X_i\right)=0\end{cases}$$

انطلاقا من المعادلة (1) نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}Y_i-n\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}X_i=0\rightarrow\sum_{i=1}^{n}Y_i-\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}X_i=n\hat{\beta}_0$$

وبالتالي مقدر المعلمة β_0 بطريقة المربعات الصغرى هو:

$$\hat{\beta}_0=\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{X}$$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{n}Y_iX_i-\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}X_i-\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}X_i^2=0$$

أي أن

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - (\overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}) \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \overline{Y} \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta}_1 \overline{X} \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

وبالتالي يكون لدينا $$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \overline{Y} \sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\beta}_1 \overline{X} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

وهذا يعني أن

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \overline{Y} \sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)$$

وبذلك يكون مقدر β_1 بطريقة المربعات الصغرى هو:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \overline{Y} \sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X} \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

بضرب البسط والمقام في n نجد أن:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2}$$

بضرب البسط والمقام في $\frac{1}{n}$ مرة أخرى نجد أن:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2}$$

بعبارات مكافئة نجد أن: $$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) \left(Y_i - \overline{Y} \right)}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$$

وذلك لأن:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})\left(Y_i-\bar{Y}\right)=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\bar{Y}\sum_{i=1}^{n}X_i-\bar{X}\sum_{i=1}^{n}Y_i+\bar{X}\bar{Y}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iY_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\bar{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\bar{X_i}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$$

وأخيرا ينتج أن:

$$\begin{cases}\hat{\beta}_1=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})\left(Y_i-\bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\\ \hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}\end{cases}$$

$\bar{X}$ و $\bar{Y}$ يمثلان المتوسط الحسابي للمتغيرات X و Y على الترتيب.

مثال:

يبين الجدول التالي تطور كل من الاستهلاك والدخل المتاح في الجزائر خلال السنوات 2001 و 2007:

السنة i	الاستهلاك الإجمالي Y_i	الدخل المتاح X_i
2001	18.47	39.25
2002	19.89	41.84
2003	21.26	49.06
2004	23.71	57.31
2005	25.53	69.89
2006	26.95	78.64
2007	29.48	88.00

الجدول (1):تطور الاستهلاك والدخل خلال 07 سنوات.

انطلاقا من معطيات الجدول (1)، نقوم بحساب كل من $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$.

لدينا:

السنة i	Y_i	X_i	$Y_i-\overline{Y}$	$X_i-\overline{X}$	$(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})$	$(X_i-\overline{X})^2$	$(Y_i-\overline{Y})^2$
2001	18.47	39.25	-5.14	-21.32	109.58	454.54	26.41
2002	19.89	41.84	-3.72	-18.73	69.67	350.81	13.83
2003	21.26	49.06	-2.35	-11.51	27.04	132.48	5.52
2004	23.71	57.31	0.10	-3.26	-0.32	10.62	0.01
2005	25.53	69.89	1.92	9.32	17.89	86.86	3.68
2006	26.95	78.64	3.34	18.07	60.35	326.52	11.15
2007	29.48	88.00	5.87	27.43	161.01	752.40	34.45
المجموع	165.29	423.99			445.24	2114.25	95.05
المتوسط	23.61	60.57			63.60	302.03	13.57

الجدول (2):حساب معاملات الانحدار.

وبالتالي يكون لدينا:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{7}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^{7}(X_i-\overline{X})^2} = \frac{445.24}{2114.25} = 0.21$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{X} = 23.61 - (0.21)(60.57) = 10.89$$

وعليه النموذج المقدر يكتب كما يلي:

$$Y_i = 0.21X_i + 10.89$$

5.2.3. التقدير بمجال ثقة

لقد علمنا مما سبق أن لكل مجتمع معالم ذكرنا منها المتوسط μ والانحراف المعياري σ، ودرسنا كيفية إيجاد التقدير بنقطة لتلك المعالم وعلمنا أن التقدير بنقطة لإحدى هذه المعالم هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة ولذلك فإن احتمال الخطأ في التقدير بنقطة يكون كبيرا. وبناءا عليه فإنه من

الأفضل ايجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو باحتمال معين، تسمى هذه الفترة بفترة الثقة (مجال الثقة).

تعريف 8.2.3.(مستوى المعنوية)

هي أقصى احتمال يمكن تحمله من مقدار الخطأ ويرمز له بالرمز α ويمكن أن يحدد قبل اختبار العينة وتمثله القيم 0,05، 0,01...

تعريف 9.2.3. (مجال الثقة)

- هو المدى الذي تقع فيه القيمة الحقيقية لمعلمة مجتمع ما بدرجة ثقة معينة والحد الأعلى والحد الأدنى لهذا المجال يسمى حدود الثقة.
- نسمي مجال الثقة للمعلمة θ المجال $[a;b]$ حيث a و b كميتان تكتبان بدلالة مقادير معرفة من العينة ومن المجتمع محل الدراسة. نسمي الاحتمال $IP(\theta \in [a;b]) = 1-\alpha$ بمعامل الثقة.

تعريف 10.2.3. (معامل الثقة)

نسمي معامل الثقة، الاحتمال $IP(\theta \in [a;b]) = 1-\alpha$ وهو احتمال أن تقع المعلمة داخل مجال الثقة $[a;b]$.

تعريف 11.2.3. (درجة الحرية)

هي عدد المشاهدات المستقلة والتي تساوي حجم العينة مطروحا منه عدد معالم المجتمع المراد تقديرها من بيانات العينة.

1) مجال الثقة للمتوسط

لتكن $(X_1,\ldots,X_2)$ عينة عشوائية للمتغير العشوائي X الذي يتبع القانون $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ أو $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ يتبع القانون الطبيعي المعياري $\mathcal{N}(0,1)$. أي أن

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1)$$

❖ **التوزيع طبيعي و σ معلوم**

نعلم أن $\overline{X}$ مقدر جيد للوسيط μ ، وأن

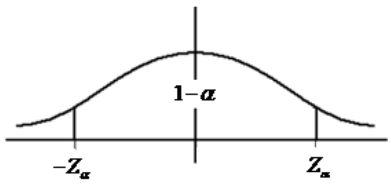
$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad \overline{X}\to\mathcal{N}\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

نقوم بإيجاد مجال ثقة ذو مستوى $1-\alpha$، للمعلمة μ المقدرة بـ $\overline{X}$:

لدينا:

$$IP\left(|Z|\le Z_\alpha\right)=1-\alpha$$

وبالتالي يكون لدينا:



$$IP\left(-Z_\alpha\le Z\le Z_\alpha\right)=1-\alpha$$

أي أن:

$$IP\left(-Z_\alpha\le\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le Z_\alpha\right)=1-\alpha$$

وبالتالي:

$$IP\left(-Z_\alpha\,\sigma/\sqrt{n}\le\overline{X}-\mu\le Z_\alpha\,\sigma/\sqrt{n}\right)=1-\alpha$$

أي أن:

$$IP\left(\overline{X}-Z_\alpha\,\sigma/\sqrt{n}\le\mu\le\overline{X}+Z_\alpha\,\sigma/\sqrt{n}\right)=1-\alpha$$

وبالتالي يكون المجال $[a;b]$ هو المجال $\left[\overline{X}-Z_\alpha \sigma/\sqrt{n};\overline{X}+Z_\alpha \sigma/\sqrt{n}\right]$ باحتمال $1-\alpha$.

ومنه نستنتج أن $\mu\in\left[\overline{X}-Z_\alpha \sigma/\sqrt{n};\overline{X}+Z_\alpha \sigma/\sqrt{n}\right]$ باحتمال $1-\alpha$.

وعادة ما نضع $\alpha=0,05$ أو $\alpha=0,01$، فمن أجل $\alpha=0,05$ مثلا يصبح معامل الثقة هو $0,95$، ويكون الاحتمال كما يلي:

$$IP\left(\overline{X}-Z_\alpha \sigma/\sqrt{n}\le\mu\le\overline{X}+Z_\alpha \sigma/\sqrt{n}\right)=0,95$$

نحسب أولا Z_α، كما يلي:

$$IP\left(-Z_\alpha\le Z\le Z_\alpha\right)=F\left(Z_\alpha\right)-F\left(-Z_\alpha\right)=1-\alpha$$

أي أن:

$$F\left(Z_\alpha\right)-\left(1-F\left(Z_\alpha\right)\right)=1-\alpha$$

ومنه:

$$2F\left(Z_\alpha\right)-1=1-\alpha$$

وبالتالي:

$$F\left(Z_\alpha\right)=\frac{2-\alpha}{2}$$

وبما أن $\alpha=0,05$ فإن:

$$F\left(Z_\alpha\right)=0,975$$

وبقراءة للجدول الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري، نجد أن:

$$Z_\alpha=1,96$$

مثال:

باختيار $\alpha = 0,05$ ، $n = 15$ ، $\sigma = 3,75$ ، $Z_\alpha = 1,96$ ، $\sum_{i=1}^{15} X_i = 2400$ ، بالتالي يكون $\overline{X} = 160$.

معامل الثقة هو $1-\alpha = 0,95$.

من هذه المعطيات يكون مجال الثقة كما يلي:

$$I = \left[160 - 1,96\frac{3,75}{\sqrt{15}}; 160 + 1,96\frac{3,75}{\sqrt{15}}\right] = [158,10; 161,90]$$

وبالتالي

$$IP(158,10 \le \mu \le 161,90) = 0,95$$

❖ **σ مجهول**

الإحصائية المستعملة في المثال السابق $\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ غير ملائمة في هذه الحالة لأن المعلمة σ مجهولة وبالتالي يجب تعويضها بمقدر مناسب، وسنركز على تباين العينة الذي هو مقدر غير متحيز للتباين σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

وبالتالي نستعمل كإحصائية جديدة:

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{S^2}$$

بما أن القانون معلوم، واعتمادا على نظرية فيشر، نستنتج أن الإحصائية $\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{S}$ المستعملة هنا تتبع قانون ستيودنت بدرجة حرية تساوي $n-1$، وبقراءة للجدول الخاص بتوزيع ستيودنت، يمكننا إذا تحديد قيمة t بحيث:

$$IP\left(-t<\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n-\mu}{S}<t\right)=1-\alpha$$

نجد أن:

$$IP\left(\overline{X}-t\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+t\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

مثال:

تسبب المقاعد الخالية لشركات الطيران في خسارة لمصدر الدخل. بفرض أن إحدى شركات الطيران الكبرى أرادت تقدير عدد المقاعد الخالية لكل رحلة خلال العالم الماضي، ولهذا الغرض تم الاختيار عشوائيا لـ 255 رحلة طيران، وتم تسجيل عدد المقاعد الخالية في كل رحلة من هذه العينة.

حيث كان المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد المقاعد الخالية لهذه العينة على الترتيب $\overline{X}=11,6$ و $S=4.1$.

نقوم بتقدير المتوسط μ (متوسط عدد المقاعد الخالية للرحلة خلال العام الماضي) باستخدام مستوى ثقة 90٪.

لدينا:

$$n=225\text{ ، }\overline{\mathrm{X}}=11.6\text{ ، }S=4.1\text{ ، }1-\alpha=0.90$$

إذن $t=1,65$

وبالتالي

$$\mathrm{I}=\left[\overline{\mathrm{X}}-t\frac{S}{\sqrt{n}};\overline{\mathrm{X}}+\mu\frac{S}{\sqrt{n}}\right]=\left[11,6-(1,65)\frac{4,1}{\sqrt{225}};11,6+(1,65)\frac{4,1}{\sqrt{225}}\right]$$

ومنه

$$\mu\in[11,15;12,05]$$

أي أن متوسط عدد المقاعد الخالية خلال العام الماضي يقع داخل الفترة $[11,15;12,05]$ وذلك بدرجة ثقة 90٪.

2) مجال الثقة للتباين

لتكن $(X_1,\ldots,X_2)$ عينة عشوائية للمتغير العشوائي X الذي يتبع القانون $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.

- **μ معلوم**

لدينا

$$T^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

هو مقدر فعال لـ σ^2.

لدينا

$$\frac{nT^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$$

هو مجموع n متغير عشوائي الذي يتبع القانون الطبيعي المعياري $\mathcal{N}(0,1)$.

إذن

$$\frac{nT^2}{\sigma^2} \to \chi^2_n$$

ومنه يمكننا إذا تحديد قيمتي a و b حيث:

$$IP\left(a \le \frac{nT^2}{\sigma^2} \le b\right) = 1-\alpha$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$IP\left(\frac{nT^2}{b} \le \sigma^2 \le \frac{nT^2}{a}\right) = 1-\alpha$$

ومنه يكون مجال الثقة كما يلي:

$$I = \left[\frac{nT^2}{b}; \frac{nT^2}{a}\right]$$

- μ **مجهول**

عندما تكون المعلمة m للقانون الطبيعي مجهولة، المقدر الغير متحيز والمتقارب لـ σ^2 يكون من الشكل:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

وقانونه معلوم حيث:

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \to \mathcal{X}^2_{n-1}$$

ومنه نستطيع أن نحدد القيم a و b حيث:

$$IP\left(a \le (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \le b\right) = 1-\alpha$$

وهذا يسمح باستنتاج المجال المعرف بـ:

$$IP\left\{(n-1)\frac{S^2}{b} \le \sigma^2 \le (n-1)\frac{S^2}{a}\right\} = 1-\alpha$$

ومنه يكون مجال الثقة كما يلي:

$$I = \left[(n-1)\frac{S^2}{b}; (n-1)\frac{S^2}{a}\right]$$

3.3. اختبار الفرضيات

بعد دراستنا للجزء الأول من الإحصائي الاستدلالي، نتناول في ما يلي الجزء الثاني منه ألا وهو اختبار الفرضيات. حيث تعتبر اختبارات الفروض الإحصائية واحدة من أهم التطبيقات التي قدمها علم الإحصاء كحل للمشاكل العلمية المختلفة بشتى فروع العلم.

وتنقسم اختبارات الفروض الإحصائية إلى قسمين:

1) اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية: في هذا القسم يكون معلوم لدينا التوزيع الذي تتبعه البيانات التي لدينا وما إذا كان توزيعا متصلا أم منفصلا ويكون المطلوب هو اختبار الفروض حول معالم المجتمع.

2) اختبارات الفروض الإحصائية اللامعلمية: في كثير من التجارب والأبحاث يكون لدينا بيانات واقعية يصعب من خلالها التعرف على التوزيع الذي تتبعه ومن هنا نشأت الحاجة إلى ما يعرف باختبارات الفروض اللامعلمية حيث لا تحتاج مثل هذه الاختبارات إلى معرفة شكل التوزيع الذي تتبعه البيانات محل الدراسة، كما يفضل استخدامها عندما يكون حجم العينة المسحوبة من المجتمع صغيرا نسبيا. وسوف نهتم في فصلنا هذا بالقسم الأول وهو اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية.

1.3.3. تعاريف ومفاهيم هامة

تعريف 1.3.3.(اختبار الفرضيات)

هو أحد أساليب الإحصاء الاستدلالي الذي تستخدم فيه بيانات العينة المسحوبة من مجتمع محل الدراسة لاتخاذ قرارات أو إصدار أحكام حول قيمة معلمة أو أكثر من معالم المجتمع.

تعريف 2.3.3. (الفرضية الإحصائية)

هو أي ادعاء أو تخمين أو مقولة أو تصريح حول معلمة معينة لمجتمع أو عدة مجتمعات تكون صحتها أو عدم صحتها بحاجة إلى قرار.

تعريف 3.3.3. (الفرض العدمي (الفرضية الصفرية H_0))

هي صفة مميزة لا تحتاج إلى إثبات، نفترض أنها صحيحة ما لم يظهر بوضوح أنها غير صحيحة.

تعريف 4.3.3. (الفرض البديل H_1)

هو بديل الفرضية الصفرية، يقبل في حال رفض الفرض العدمي.

تعريف 5.3.3. (إحصائية الاختبار)

هو أسلوب يساعدنا على اتخاذ القرار حول فرضية إحصائية معينة تحسب قيمته من بيانات العينة، ومن قيمته نقبل أو نرفض H_0 . أي أنه طريقة لتحديد قاعدة رفض الفرضية الصفرية.

تعريف 6.3.3. (المنطقة الحرجة)

هي المنطقة التي إذا وقعت قيمة دالة الاختبار (إحصائية الاختبار) فيها نرفض الفرضية الصفرية.

2.3.3. أنواع الخطأ وقوة الاختبار

أي قرار إحصائي يمكن أن ينتج عنه نوعين من الخطأ.

تعريف 7.3.3. (خطأ من النوع الأول α)

يحدث هذا الخطأ عندما نقوم برفض فرض العدم H_0 في حين أنه صحيح وذلك باحتمال مقداره α.

تعريف 8.3.3. (خطأ من النوع الثاني β)

يحدث هذا الخطأ عندما نقوم بقبول فرض العدم H_0 في حين انه خاطئ وذلك باحتمال مقداره β.

ويوضح ذلك في الجدول التالي:

القرار / الفرض العدمي	قبول الفرض العدمي H_0	رفض الفرض العدمي H_0
الفرض العدمي H_0 صحيح	قرار صحيح	خطأ من النوع الأول α
الفرض العدمي H_0 خاطئ	خطأ من النوع الثاني β	قرار صحيح

تعريف 9.3.3. (قوة الاختبار)

هي احتمال قرار رفض الفرض العدمي عندما يكون البديل صحيحا.

3.3.3. مستوى المعنوية ومنطقتي القبول والرفض

تعريف 10.3.3. (مستوى المعنوية α) هو أقصى احتمال يمكن تحمله من الخطأ الأول، يحدد قبل اختيار العينة عادة يأخذ القيم 0.01 أو 0.05.

تعريف 11.3.3. (منطقة القبول) هي المنطقة التي تحتوي على جميع قيم إحصاء الاختبار التي تؤدي إلى عدم رفض الفرضية الصفرية H_0.

تعريف 12.3.3. (منطقة الرفض) هي المنطقة التي تحتوي على جميع قيم إحصاء الاختبار التي تؤدي إلى رفض الفرضية الصفرية H_0، حيث تسمى أيضا بالمنطقة الحرجة.

وهناك ثلاث حالات مختلفة لمنطقتي القبول والرفض وهي كما يلي:

1) إذا كان الفرض البديل يأخذ الشكل:

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

فان منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الأيمن للمنحى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة اختبار الطرف الواحد.

2) إذا كان الفرض البديل يأخذ الشكل:

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

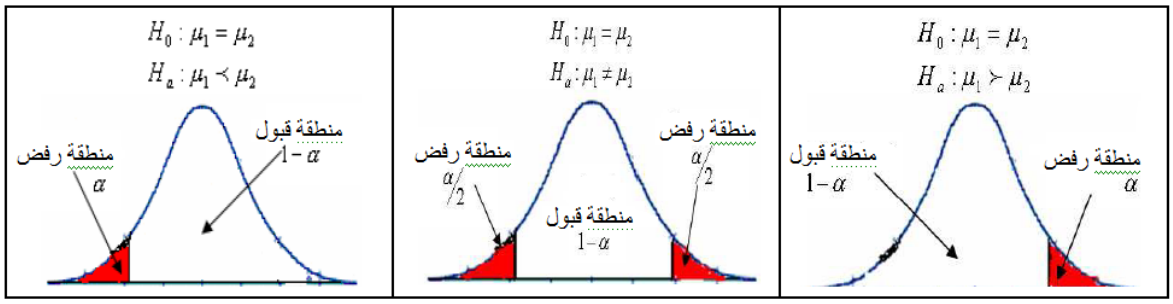
فان منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الأيسر للمنحى ويسمى الاختبار في هذه الحالة باختبار الطرف الواحد.

3) إذا كان الفرض البديل يأخذ الشكل:

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

فان منطقة الرفض تكون موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي. ويسمى الاختبار في هذه الحالة باختبار الطرفين.

يعطى تمثيل مستوى المعنوية ومنطقتي القبول والرفض كما يلي:



4.3.3. خطوات اختبار الفرضيات

1) صياغة الفرضيات (تحديد الفرض الصفري H_0 والفرض البديل H_1).

2) تحديد نوع الاختبار إذا كان ذو جهتين أو جهة واحدة.

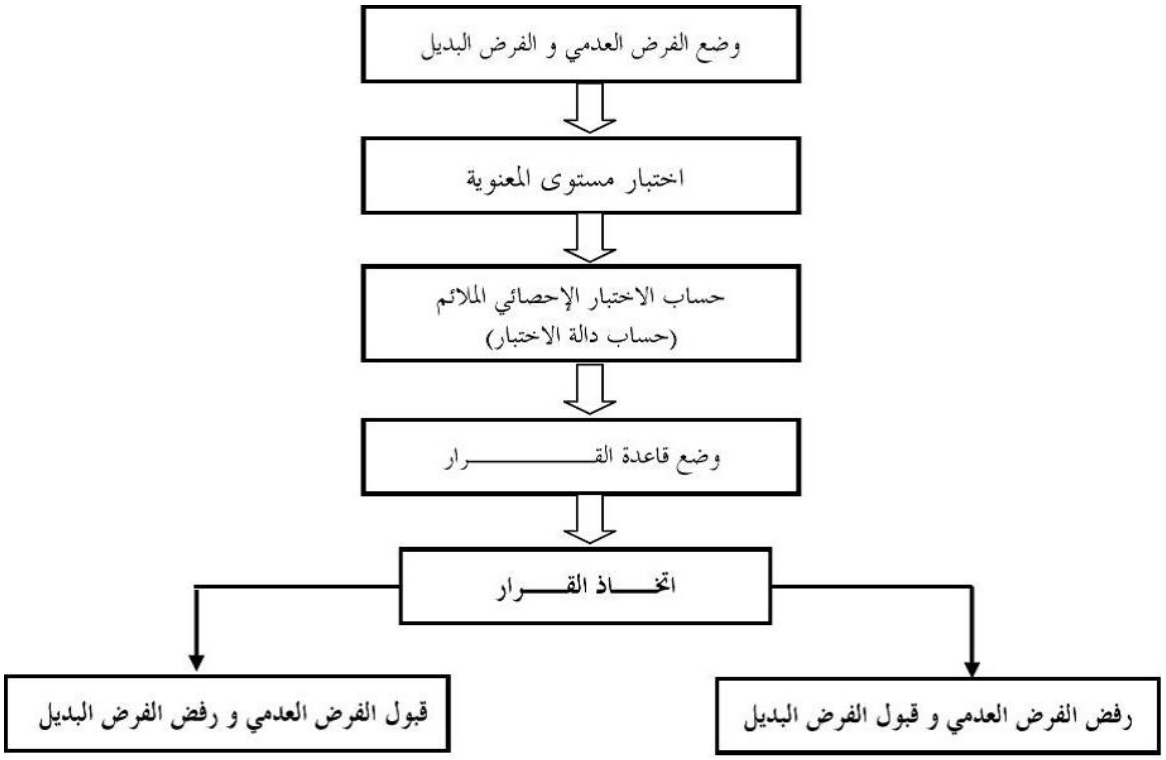
3) نحسب من بيانات العينة إحصائية الاختبار وذلك أولا بالتحقق من الانحراف المعياري σ للمجتمع (معلوم أو غير معلوم) وتحديد حجم العينة (أقل أو أكبر من 30) من ثم تحديد المقياس الإحصائي للاختبار.

4) تحديد مستوى المعنوية 0.05 أو 0.01.

5) تحديد مناطق القبول والرفض بالاعتماد على مستوى المعنوية ودرجة الحرية ونوع الاختبار والقيمة الجدولية.

6) اتخاذ القرار بعد المقارنة بين القيمة الجدولية والقيمة المحسوبة، وذلك بقبول أو رفض الفرضية الصفرية.

يمكن تلخيص هذه الخطوات في المخطط التالي:



5.3.3. اتخاذ القرار بشأن نتيجة الاختبار

إن قرار قبول أو رفض فرضية العدم يعتمد على نتيجة المقارنة بين القيمة المحسوبة والقيمة الجدولية لإحصاء الاختبار تحت مستوى المعنوية المقرر وحسب حالات اختبار الفرضيات حيث:

- **في حالة اختبار الفرضيات ذو طرفين** عندما تنتمي القيمة المحسوبة إلى منطقة القبول تقبل الفرضية الصفرية وعندما تنتمي إلى منطقة الرفض ترفض.

- **في حالة اختبار الفرضيات ذو طرف واحد (اليمين)** إذا كانت القيمة المحسوبة أصغر من القيمة الجدولية تقبل الفرضية الصفرية، وإذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية ترفض الفرضية الصفرية، وهذا يعني قبول الفرضية البديلة
- **في حالة اختبار الفرضيات ذو طرف واحد (اليسار)** إذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية تقبل الفرضية الصفرية، وإذا كانت القيمة المحسوبة أصغر من القيمة الجدولية ترفض الفرضية الصفرية، وهذا يعني قبول الفرضية البديلة.

6.3.3. استخدام قيمة p لاختبار الفروض الإحصائية

قيمة p هي أصغر قيمة لمستوى المعنوية α يمكن عندها رفض H_0.

- ✓ إذا كان $\alpha \leq p$، *هذا* يعني أن H_0 مقبول.
- ✓ إذا كان $\alpha > p$، *هذا* يعني أن H_0 مرفوض.

مثال :

ادعى احد الباحثين في دراسة له حول متوسط الاستهلاك لأحد المواد الغذائية الأساسية أنه يساوي 1000 كلغ في إحدى الأحياء بمدينة ما. وبعد جمع وإدخال البيانات في الحاسب الآلي ومعالجتها إحصائيا وباستخدام برنامج Excel، حصل على النتيجة التالية:

$$p = 0.600492$$

- ما هو القرار حول متوسط الاستهلاك؟ هل يختلف عن 1000 كلغ؟
- اختبر هذا الفرض عند مستوى معنوية 0.05.

الحل:

من المعطيات نجد أن الفرضية الصفرية والفرضية البديلة على النحو التالي:

$$H_0 : \mu = 1000$$
$$H_1 : \mu \neq 1000$$

حيث أن قيمة $\alpha \leq p$، فإننا لا نرفض الفرض العدمي، أي أن متوسط الاستهلاك للمادة الغذائية الأساسية يساوي 1000 كلغ وذلك عند مستوى معنوية 0.05.

7.3.3. اختبار الفرض حول وسط المجتمع

1) حالة الانحراف المعياري معلوم

إذا كانت $x_1, x_2, ..., x_n$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه σ^2 معلوم، فإن إحصاء الاختبار المناسب هو Z ونتبع الخطوات التالية:

1. صياغة الفرضان:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

2. إحصاء الاختبار:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

3. تحديد منطقة القبول

4. اتخاذ القرار

- $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ، فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية α إذا كانت: $Z > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $Z < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$
- $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ، فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية α إذا كانت: $Z > Z_{\alpha}$.
- $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ ، فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية α إذا كانت: $Z < -Z_{\alpha}$.

مع الإشارة إلى أن القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ هي قيمة على المحور الأفقي للتوزيع الطبيعي المعياري Z وتقع إلى يمينها مساحة قدرها $\frac{\alpha}{2}$.

2) حالة الانحراف المعياري غير معلوم

- **حالة** $n > 30$

إذا تم أخذ عينة عشوائية كبيرة الحجم من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه σ^2 مجهول فإن إحصاء الاختبار المناسب هو Z ، حيث

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

وبنفس الطريقة نتخذ القرار.

➢ **حالة** $n \leq 30$

إذا تم أخذ عينة عشوائية صغيرة الحجم من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وسطه μ وتباينه σ^2 مجهول فإن إحصاء الاختبار المناسب هو t:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

وبنفس الطريقة نتخذ القرار.

مع الإشارة إلى أن القيمة الحرجة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي قيمة على المحور الأفقي للتوزيع t ذي درجة حرية $n-1$ ويقع إلى يمينها مساحة قدرها $\frac{\alpha}{2}$. أما القيمة الحرجة t_α هي قيمة على المحور الأفقي للتوزيع t ذي درجة الحرية $n-1$ ويقع إلى يمينها مساحة قدرها α.

مثال 1:

تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4000 دينارا، إذا أخذت عينة عشوائية مكونة من 25 موظف، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3950 دينارا.

فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 125$.

نقوم بتوضيح كيفية إجراء الاختبار بمستوى الثقة 95%.

1) صياغة الفرضيات

$$H_0 : \mu = 4000$$

$$H_1 : \mu \neq 4000$$

2) المقياس الإحصائي

بما أن $\sigma = 125$ معلومة، إذن نستخدم المقياس الإحصائي Z حيث:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

لدينا

$$n = 25 \text{ و } \overline{X} = 3950$$

وبالتالي

$$Z = \frac{3950 - 4000}{125/\sqrt{25}} = -2$$

3) مستوى الثقة 95%

مستوى الثقة 95% وبالتالي $\alpha = 0,05$ ومنه $\alpha/2 = 0.025$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري يكون لدينا $Z_{\alpha/2} = 1.96$

4) منطقة القبول

$$[-1.96,1.96]$$

5) اتخاذ القرار

بما أن

$$-2 \notin [-1.96,1.96]$$

إذن:

- ✓ نرفض فرض العدم $H_0 : \mu = 4000$.
- ✓ نقبل الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 4000$.

مثال 2:

يعتقد مدير شركة دراسة إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارا. فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل، تبين أن متوسطها الحسابي هو 283 دينار وانحرافها المعياري هو 32 دينار.

هل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟ حيث استخدم مستوى ثقة 95% (علما بأن المجتمع يتبع توزيعا طبيعيا).

لدينا:

$$n=10 \ , \ \mu=290 \ , \ S=32 \ , \ \bar{x}=283$$

1) صياغة الفروض

$$H_0 : \mu = 290$$

$$H_1 : \mu \neq 290$$

2) المقياس الإحصائي

σ مجهول و $n \leq 30$، وبالتالي نستخدم المقياس الإحصائي t حيث:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

أي أن:

$$t = \frac{283 - 290}{32/\sqrt{10}}$$

3) مستوى الثقة 95%

درجات الحرية : $n-1=10-1=9$

لدينا $\alpha = 0,05$ ومنه $\alpha/2 = 0.025$

بالرجوع إلى جدول توزيع ستيودنت يكون لدينا $t_{0.025} = 2.262$

4) منطقة القبول

$$[-2.262, 2.262]$$

5) اتخاذ القرار الإحصائي

$$283 \in [-2.262, 2.262]$$

وبالتالي قبول فرض العدم $\mu = 290$.

8.3.3. اختبار الفرض حول الفرق بين وسطي مجتمعين للعينات المستقلة

1) حالة الانحراف المعياري معلوم

إذا كان $\overline{X_1}$ هو الوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n_1 تم سحبها من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه، σ_1^2 وإذا كان $\overline{X_2}$ الوسط الحسابي لعينة حجمها n_2 مستقلة عن الأولى تم سحبها من مجتمع له توزيع طبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 معلوم أيضا، وأردنا اختبار الفرضية $H_0 : \mu_1 \neq \mu_2$ نستخدم الإحصائية التالية:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

2) حالة الانحراف المعياري غير معلوم

- **حالة** $n > 30$

إذا كان σ_1 و σ_2 مجهولين وحجم العينة كبير كفاية، تكون الإحصائية المناسبة كالتالي:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

حيث S_p هو التباين المشترك.

- **حالة** $n \leq 30$

إذا كان σ_1 و σ_2 مجهولين وحجم العينة صغير، تكون الإحصائية المناسبة كالتالي:

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

مثال:

لغرض معرفة الفرق بين ذكاء تلاميذ العلوم وتلاميذ الآداب، اختيرت عينة عشوائية حجمها 11 تلميذ من شعبة العلوم فوجد أنّ متوسط ذكائهم 80 درجة بانحراف معياري 7 درجات. كذلك اختيرت عينة عشوائية حجمها 6 تلاميذ من شعبة الآداب فقدر متوسط ذكائهم بـ 75 بانحراف معياري 5. هل يمكننا القول أنّ متوسط ذكاء تلاميذ العلوم أكبر من متوسط ذكاء تلاميذ الآداب؟

- اختبر عند مستوى معنوية 0.05.

الحل:

1) صياغة الفرضيات

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

2) إحصائية الاختبار

من نص المثال، لدينا:

$n_2 = 11$	$n_1 = 6$
$S_1 = 7$	$S_2 = 5$
$\overline{X}_1 = 80$	$\overline{X}_2 = 75$

لأن الانحرافين المعياريين للمجتمعين مجهولين وحجم العينتين أقل من 30 نستخدم الإحصائية t

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

نحسب التباين المشترك كما يلي:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$
$$= \frac{(11-1)(7)^2 + (6-1)(5)^2}{11+6-2}$$
$$= 41$$

بالتعويض نجد أن:

$$t = \frac{(80-75)-0}{\sqrt{41\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{6}\right)}}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{10.56}}$$
$$= 1.54$$

3) مستوى الثقة 95%

عند مستوى المعنوية $\alpha = 0,05$ وبما أن الاختبار من طرف واحد إذا قيمة t الجدولية هي:

$$t_{(n_1+n_2-2,\alpha)} = t_{(15,0.05)} = 2.131$$

4) اتخاذ القرار

بما أن قيمة t المحسوبة أقل من القيمة الجدولية، نقبل الفرضية الصفرية أي لا يوجد فرق بين متوسط ذكاء تلاميذ شعبة العلوم ومتوسط ذكاء تلاميذ شعبة الآداب.

4.3. تمارين مقترحة

التمرين 01:

إذا كانت $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ عينة عشوائية مأخوذة من التوزيع $\mathcal{N}(\theta_1,\theta_2^2)$، فأوجد مقدر المعقولية العظمى للمعلمة $\theta=(\theta_1,\theta_2^2)$.

التمرين 02:

إذا كانت $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ عينة عشوائية مأخوذة من التوزيع $\Gamma(\theta_1,\theta_2)$، فأوجد مقدر كل من المعلمتين θ_1,θ_2 باستخدام طريقة العزوم.

التمرين 03:

إذا كان T_1 ، T_2 مقدرين غير متحيزين للمعلمة θ وكان:

$$T=aT_1+(1-a)T_2$$

1. أثبت أن T مقدر غير متحيز للمعلمة θ.
2. إذا كان T_1 ، T_2 مستقلين. أوجد قيمة a التي تجعل له أقل تباين.

التمرين 04:

إذا كان لدينا عينتين مستقلتين حجمهما n_1 ، n_2 تم اختيارهما من نفس المجتمع، وكان متوسط العينتين هما $\overline{X}_1$ ، $\overline{X}_2$.

- أوجد أكفأ مقدر لمتوسط المجتمع.

التمرين 05:

إذا كانت $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع $\Gamma(\alpha,\beta)$.

أوجد مقدر المعقولية العظمى للمعلمة $\theta=(\alpha,\beta)$.

ملاحق

جدول التوزيع الطبيعي

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0190	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2969	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3513	0.3554	0.3577	0.3529	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

جدول توزيع كاي مربع

	P										
DF	0.995	0.975	0.2	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	.0004	.00016	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	9.55	10.828
2	0.01	0.0506	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.21	10.597	12.429	13.816
3	0.0717	0.216	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	14.796	16.266
4	0.207	0.484	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.86	16.924	18.467
5	0.412	0.831	7.289	9.236	11.07	12.833	13.388	15.086	16.75	18.907	20.515
6	0.676	1.237	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	20.791	22.458
7	0.989	1.69	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	22.601	24.322
8	1.344	2.18	11.03	13.362	15.507	17.535	18.168	20.09	21.955	24.352	26.124
9	1.735	2.7	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	26.056	27.877
10	2.156	3.247	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	27.722	29.588
11	2.603	3.816	14.631	17.275	19.675	21.92	22.618	24.725	26.757	29.354	31.264
12	3.074	4.404	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.3	30.957	32.909
13	3.565	5.009	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819	32.535	34.528
14	4.075	5.629	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	34.091	36.123
15	4.601	6.262	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	35.628	37.697
16	5.142	6.908	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32	34.267	37.146	39.252
17	5.697	7.564	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	38.648	40.79
18	6.265	8.231	22.76	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	40.136	42.312
19	6.844	8.907	23.9	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	41.61	43.82
20	7.434	9.591	25.038	28.412	31.41	34.17	35.02	37.566	39.997	43.072	45.315
21	8.034	10.283	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	44.522	46.797
22	8.643	10.982	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	45.962	48.268
23	9.26	11.689	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	47.391	49.728
24	9.886	12.401	29.553	33.196	36.415	39.364	40.27	42.98	45.559	48.812	51.179
25	10.52	13.12	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	50.223	52.62
26	11.16	13.844	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.29	51.627	54.052
27	11.808	14.573	32.912	36.741	40.113	43.195	44.14	46.963	49.645	53.023	55.476
28	12.461	15.308	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993	54.411	56.892
29	13.121	16.047	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.336	55.792	58.301
30	13.787	16.791	36.25	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	57.167	59.703
31	14.458	17.539	37.359	41.422	44.985	48.232	49.226	52.191	55.003	58.536	61.098
32	15.134	18.291	38.466	42.585	46.194	49.48	50.487	53.486	56.328	59.899	62.487
33	15.815	19.047	39.572	43.745	47.4	50.725	51.743	54.776	57.648	61.256	63.87

جدول توزيع فيشر

	DF1	α = 0.10										
DF2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	39.863	49.5	53.593	55.833	57.24	58.204	58.906	59.439	59.858	60.195	60.705	61.22
2	8.5263	9	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916	9.4081	9.4247
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.24	5.2304	5.2156	5.2003
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1073	4.0506	4.0098	3.979	3.9549	3.9357	3.9199	3.8955	3.8704
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.453	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974	3.2682	3.238
6	3.776	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.983	2.9577	2.9369	2.9047	2.8712
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025	2.6681	2.6322
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7265	2.6683	2.6241	2.5894	2.5612	2.538	2.502	2.4642
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163	2.3789	2.3396
10	3.285	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.414	2.3772	2.3473	2.3226	2.2841	2.2435
11	3.2252	2.8595	2.6602	2.5362	2.4512	2.3891	2.3416	2.304	2.2735	2.2482	2.2087	2.1671
12	3.1766	2.8068	2.6055	2.4801	2.394	2.331	2.2828	2.2446	2.2135	2.1878	2.1474	2.1049
13	3.1362	2.7632	2.5603	2.4337	2.3467	2.283	2.2341	2.1954	2.1638	2.1376	2.0966	2.0532
14	3.1022	2.7265	2.5222	2.3947	2.3069	2.2426	2.1931	2.1539	2.122	2.0954	2.0537	2.0095
15	3.0732	2.6952	2.4898	2.3614	2.273	2.2081	2.1582	2.1185	2.0862	2.0593	2.0171	1.9722
16	3.0481	2.6682	2.4618	2.3327	2.2438	2.1783	2.128	2.088	2.0553	2.0282	1.9854	1.9399
17	3.0262	2.6446	2.4374	2.3078	2.2183	2.1524	2.1017	2.0613	2.0284	2.0009	1.9577	1.9117
18	3.007	2.624	2.416	2.2858	2.1958	2.1296	2.0785	2.0379	2.0047	1.977	1.9333	1.8868
19	2.9899	2.6056	2.397	2.2663	2.176	2.1094	2.058	2.0171	1.9836	1.9557	1.9117	1.8647
20	2.9747	2.5893	2.3801	2.2489	2.1582	2.0913	2.0397	1.9985	1.9649	1.9367	1.8924	1.8449
21	2.961	2.5746	2.3649	2.2333	2.1423	2.0751	2.0233	1.9819	1.948	1.9197	1.875	1.8272
22	2.9486	2.5613	2.3512	2.2193	2.1279	2.0605	2.0084	1.9668	1.9327	1.9043	1.8593	1.8111
23	2.9374	2.5493	2.3387	2.2065	2.1149	2.0472	1.9949	1.9531	1.9189	1.8903	1.845	1.7964
24	2.9271	2.5383	2.3274	2.1949	2.103	2.0351	1.9826	1.9407	1.9063	1.8775	1.8319	1.7831
25	2.9177	2.5283	2.317	2.1842	2.0922	2.0241	1.9714	1.9293	1.8947	1.8658	1.82	1.7708
26	2.9091	2.5191	2.3075	2.1745	2.0822	2.0139	1.961	1.9188	1.8841	1.855	1.809	1.7596
27	2.9012	2.5106	2.2987	2.1655	2.073	2.0045	1.9515	1.9091	1.8743	1.8451	1.7989	1.7492
28	2.8939	2.5028	2.2906	2.1571	2.0645	1.9959	1.9427	1.9001	1.8652	1.8359	1.7895	1.7395
29	2.887	2.4955	2.2831	2.1494	2.0566	1.9878	1.9345	1.8918	1.8568	1.8274	1.7808	1.7306
30	2.8807	2.4887	2.2761	2.1422	2.0493	1.9803	1.9269	1.8841	1.849	1.8195	1.7727	1.7223
40	2.8354	2.4404	2.2261	2.091	1.9968	1.9269	1.8725	1.8289	1.7929	1.7627	1.7146	1.6624
60	2.7911	2.3933	2.1774	2.041	1.9457	1.8747	1.8194	1.7748	1.738	1.707	1.6574	1.6034
120	2.7478	2.3473	2.13	1.9923	1.8959	1.8238	1.7675	1.722	1.6843	1.6524	1.6012	1.545
Inf	2.7055	2.3026	2.0838	1.9449	1.8473	1.7741	1.7167	1.6702	1.6315	1.5987	1.5458	1.4871

جدول توزيع فيشر

	DF1	α = 0.05										
DF2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	161.45	199.5	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.95
2	18.513	19	19.164	19.247	19.296	19.33	19.353	19.371	19.385	19.396	19.413	19.429
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.041	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.099	4.06	3.9999	3.9381
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.866	3.787	3.7257	3.6767	3.6365	3.5747	3.5107
8	5.3177	4.459	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.478	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.913	2.845
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.948	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.671	2.6037	2.5331
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.463
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034
16	4.494	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4247	2.3522
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.81	2.6987	2.6143	2.548	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.308	2.2341
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.599	2.514	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.366	2.321	2.2504	2.1757
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508
23	4.2793	3.4221	3.028	2.7955	2.64	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.603	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889
26	4.2252	3.369	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655	2.2197	2.1479	2.0716
27	4.21	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501	2.2043	2.1323	2.0558
28	4.196	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.236	2.19	2.1179	2.0411
29	4.183	3.3277	2.934	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229	2.1768	2.1045	2.0275
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.606	2.4495	2.3359	2.249	2.1802	2.124	2.0772	2.0035	1.9245
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.097	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.175	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8337	1.7505
Inf	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799	1.8307	1.7522	1.6664

جدول توزيع ستيودنت

	P						
one-tail	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
DF							
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289	636.578
2	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	22.328	31.6
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.61
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.93	4.318
13	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.61	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.85
21	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.5	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.06	2.485	2.787	3.45	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.689
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.66
30	1.31	1.697	2.042	2.457	2.75	3.385	3.646
60	1.296	1.671	2	2.39	2.66	3.232	3.46
120	1.289	1.658	1.98	2.358	2.617	3.16	3.373
1000	1.282	1.646	1.962	2.33	2.581	3.098	3.3

المراجع

[1] **السعدي رجال (2008)**، نظرية الاحتمالات مبادئ الحساب الاحتمالي، دروس و تمارين، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية الساحة المركزية - بن عكنون – الجزائر.

[2] **بوعبد الله صالح (2006-2005)**، محاضرات الإحصاء الرياضي، لطلبة كلية العلوم الاقتصادية.

[3] **جبار عبد مضحي (2011)** ، مقدمة في نظرية الاحتمالات، دار الميسرة للنشر والتوزيع-عمان-الطبعة الأولى.

[4] **سلسلة ملخصات شوم (1995)**، (نظريات ومسائل في الاحتمالات) الدكتور سيمور ليبشتز، الدار الدولية للنشر والتوزيع –القاهرة.

[5] **عبد الحفيظ مصطفى (2008)**، نظرية الاحتمالات مبادئ وتطبيقات، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية الساحة المركزية ـ بن عكنون ـ الجزائر.

[6] **عبد الحفيظ مصطفى (2008-11)**، نظرية الاحتمالات مبادئ وتطبيقات، الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية الساحة المركزية ـ بن عكنون ـ الجزائر.

[7] **عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى (1999)**، الاستدلال الإحصائي (1): نظرية التقدير، جامعة ناصر، الجماهيرية العظمى.

[**8**] **ALI MOUHOUCHE**, lexique de mathématiques, avec les statistiques et l'astronomie, Français- arabe, niveau secondaire et supérieur.

[**9**] **AVNER BAR-HEN (2002-2003),** COURS de DEUG, probabilités et statistique, Université Aix-Marseille III**.**

[**10**] **DOMINIQUE FOATA, AIME FUCHS (1998),** Calcul des probabilités cours, exercice et problème corriges.© DUNOD, Paris.

[**11**] **JEAN-PIERRE LECOUTRE (2003),** statistique et probabilités, 2^{e} édition, DUNOD.

[**12**] **KACI REDJDAL (1995),** Cour de probabilités, 1 place centrale de- Ben Aknoun- (Alger). Réimpression.

[**13**] **KHALED KHALDI (2010),** Méthodes statistiques, office des Publications, 11.

[**14**] **M. METIVIER (1972),** Notions fondamentales de la théorie des probabilités, maitrises de mathématiques, dunod université.

[**15**] **MICHEL TERRAZA (2014) ,** Inférence statistique et probabilités, De Boeck Supérieur s.a., 1re édition.

[**16**] **MOUSSEDEK BOUSSEBOUA (2006),** Eléments de la théorie des probabilités –Tome 2 - office des publications Universitaires, 1 place centrale de – Ben Aknoun –(Alger) ,2 Edition.

[**17**] **SAADI N (2018-2019),** Polycopié de cours: Variables aléatoires à plusieurs dimensions, UNIVERSITE A.MIRA DE BEJAIA

[**18**] **SHELDON M. ROSS (1987),** Initiation aux probabilités, Presses polytechniques romandes, 1re édition.