

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي سكيكدة

Ecole normale supérieure d'Enseignement Technologique de Skikda



Département de Mathématiques

قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ تعليم متوسط-رياضيات-
تحت عنوان

تطبيق تحويل لابلاس في حل بعض المعادلات التفاضلية

الأستاذة المشرفة :

◀ رمضان سميرة

من إعداد :

◀ منصورى أسماء

◀ نزار هديل

لجنة المناقشة

◀ مزياىى محمد سيف الدين أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة ◀ رئيسا

◀ غمرانى سارة أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة ◀ مناقشا

◀ مزيرى إيمان أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة ◀ مناقشا

السنة الجامعية: 2024-2025

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

شكر و تقدير

الحمد لله وحده، همداً يليق بجلال وجهه وعظيم سلطانه، وبه نستعين وعليه نتوكل. والصلاة والسلام على خير خلقه، خاتم الأنبياء والمرسلين، محمد ﷺ، وعلى آله الأطهار وصحابه الأفيار، ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين. واقتداءً بحديثه الشريف ﷺ :

"من لا يشكر الناس لا يشكر الله".

نستهل هذه المذكرة بتوجيه أسمى عبارات الشكر والعرفان لكل من سعى بإخلاص، وعلمنا كلمة، وترك في مسيرتنا بصمة علم أو خلق، فكان لهم الفضل بعد الله فيما بلغناه من علم ومعرفة .

بداية، كل الشكر و الإمتنان للأستاذة الفاضلة ((رمضان سميرة))، مشرفتنا، التي رافقتنا بتوجيهاتها الحكيمة، و نصائحها القيمة، و التي كان لها الفضل الكبير في إنجاز هذه المذكرة، جزاها الله خير الجزاء .

كما نتقدم بجزيل الشكر و العرفان إلى أعضاء لجنة المناقشة المكونة من الأستاذ " مزياني سيف الدين " رئيساً، و الأستازين المناقشين " غمراني سارة " و " مزياني إيمان " لتكرمهم مناقشة مذكرتنا .

كما نتقدم بعظيم التقدير و العرفان إلى الأستاذ " بوجعدار جمال " مدير المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي سكيكدة.

و لا يمكننا أن نختم دون أن نتوجه بتحيةة تقدير و عرفان إلى كل الأساتذة الكرام بالمدرسة العليا للأساتذة بسكيكدة، الذين كانوا منارات علم و خلق و مصدر إلهام .

إهداء

لم تكن الرحلة قصيرة و لا الطريق محفوفا بالتسهيلات، لكنني فعلتها،
فالحمد لله الذي بفضلته تتحقق الثايات، و الحمد لله حبا و امتنانا على البدء
و الختام .

بكل حب أهدي ثمرة نجاحي و تخرجي و حصاد ما زرعتة سنينا طويلة في سبيل
العلم لـ :
التي قالت أنا لها سأنالها ...

“ نفسي ”

إلى الذي زين إسمي بأجمل الألقاب، من دعمني بلا حدود و أعطاني بلا مقابل،
إلى من علمني أن الدنيا كفاح و سلاحها العلم و المعرفة، إلى من أرسى في
روحي دعائم الأخلاق الفاضلة من كان داعمي الأول في مسيرتي و قوتي بعد الله

“ أبي الغالي ”

إلى من جعل الله الجنة تحت أقدامها، من كان دعائها سببا في نجاحي، أنيسة
العمر و حبيبة الروح و سندي في الحياة، من أرشدتني و رافقتني في كل مشاوير
حياتي ...

“ أهي الحبيبة ”

إلى ضلعي الثابت، و أمان أيامي، إلى ملهمي نجاحي، رغم المسافات إلا أن
روحك كانت دائما قريبة، كلماتك، اهتمامك كان لها أثر لا ينسى. أسأل الله أن
يحفظك في غربتك ...

“ أخي العزيز محمد أمين ”

يا من شددت عضدي به فكان لي ينبوع ارتوي منه، يا خيرة أيامي و صفوتها، يا
قرة عيني، ذو القلب الدافئ و الإبتسامة الصادقة، ايقنت أنني حظيت بخير اخوة
و رفاق و سند ...

“ أخي الغالي إياد عبد الجليل ”

إلى عائلتي جميعا، من حملوني بالدعاء، و أحاطوني بالحب و الإهتمام ، لكم في
قلبي مكانة لا تزول. أختص بالذكر إلى أحن و أنقى قلب “ جدتي ”. إلى خالي
“ عماد ” الذي كان دوما قريبا، بدعمه و كلماته المشجعة. شكرا لك فقد كنت أحد
أعمدة هذا النجاح ...

إلى رفيقات الروح و الدرب، كنتن البلسم في الأوقات الصعبة، و الفرح في
اللحظات الجميلة. شكرا لصدقكن، لحبكن، لوجودكن الذي غير الكثير . صديقاتي
العزيزات “ هدى ، أنفال ، نورين ” .

إهداء



الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات
الحمد لله الذي علم بالقلم، علم الإنسان ما لم يعلم
الحمد لله الذي منهنى القوة حين ضعفت، والصبر حين اشتدّ الطريق
إلى من كان لهم في القرب مكان، وفي كل إنجاز أثر...
إلى بسمة الحياة و سر الوجود، إلى معنى الحب و الصنان، إلى الشمعة التي
تشرق لتنير طريقى إلى من كان دعاؤها سر نجاحي وحنانها بلسم جراهي

"أمي الحبيبة"

إلى أعظم رجل، رجل تحمل مرارة الأيام و قسوة الزمان من أجل إنارة دروب
التعلم لأبنائه، رمز الكفاح و العطاء، رمز التضحية و التمدي، رمز الأخلاق
و العمل، إلى من كان لي السند و العون في مساري الدراسي

"أبي العزيز"

إلى من دعمني طوال فترة دراستي، إلى زوجي الحبيب، رفيق دربي و سندي،
"زوجي الحبيب"

إلى من تربطني بهم أسمى علاقة في الوجود، إفتوتى أنتم السند الذي لا يبيل
"عبد الكريم ، زكرياء"

إلى كل الأهل والأقارب كلاً بإسمه و مقامه
لي روح من فقدناه، إلى من كان نوراً في حياتنا، إلى من سيبقى ذكره خالداً في
قلوبنا . تخليداً لذكرى خالي الحبيب "شعباني فريد"، رحمه الله و أسكنه
فسيح جناته و جعل هذا الإنجاز صدقةً جارية على روحه الطاهرة
إلى من علموني هروفاً من ذهب و كلمات من درر و عبارات من أسمى و
أجلى عبارات في العلم إلى من صاغوا لي من علمهم هروفاً و من فكرهم
منارة تنير لنا مسيرة العلم و النجاح إلى **أساتذتي الكرام**.

و فتأماً أسأل الله أن يجعل هذا العمل خالصاً لوجهه الكريم و أن يكتبه لي لا
عليّ و أن يكون لبنة خير في مسيرتي العلمية و العملية
و كفى بالله توفيقاً و سنداً

منصوري أسماء



المحتويات

10	1	تحويل لابلاس
11	1.1	تحويل لابلاس
11	1.1.1	الدالة السببية:
11	1.1.2	تحويل لابلاس:
11	1.2	الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس
11	1.2.1	الدالة المستمرة بالقطع:
12	1.2.2	الدالة ذات الرتبة الآسية
13	1.2.3	الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس
15	1.2.4	تحويلات لابلاس لبعض الدوال الشهيرة
17	1.3	خواص تحويل لابلاس
17	1.3.1	انخطية
18	1.3.2	الخاصية الأولى للإنسحاب
19	1.3.3	الخاصية الثانية للإنسحاب
20	1.3.4	خاصية تغيير السلي
21	1.3.5	تحويل لابلاس للمشتقات
23	1.3.6	تحويل لابلاس للتكامل
23	1.3.7	الضرب في t^n
25	1.3.8	القسمة على t
26	1.3.9	التفاف دالتين
27	1.4	تحويل لابلاس العكسي
27	1.4.1	خصائص تحويل لابلاس العكسي
28	1.4.2	طرق حساب تحويل لابلاس العكسي
32	2	المعادلات التفاضلية العادية و الجزئية و تحويل لابلاس
33	2.1	المعادلات التفاضلية

33	تصنيف المعادلات التفاضلية	2.1.1
33	رتبة المعادلة التفاضلية	2.1.2
34	درجة المعادلة التفاضلية	2.1.3
34	الحل العام و الحل الخاص لمعادلة تفاضلية	2.1.4
35	الشروط الابتدائية و الشروط الحدية	2.1.5
36	المعادلات التفاضلية العادية الخطية	2.2
	حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات معاملات ثابتة باستخدام تحويل لابلاس	2.3
37	المعادلات التفاضلية العادية الخطية مجهولة الشروط الابتدائية باستخدام تحويل لابلاس	2.4
40	حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات معاملات متغيرة باستخدام تحويل لابلاس	2.5
41	حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويل لابلاس	2.6

47	الحساب الكسري	3
48	تعريف أساسية	3.1
48	الفضاء $L([a, b])$	3.1.1
48	الفضاء $AC([a, b])$	3.1.2
49	بعض الدوال الخاصة	3.2
49	الدالة غاما	3.2.1
49	الدالة بيتا	3.2.2
50	دالة ميتاغ ليفلر	3.2.3
51	التكامل الكسري	3.3
51	خصائص التكامل الكسري	3.3.1
52	الإشتقاق الكسري	3.4
52	الإشتقاق الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل	3.4.1
55	الإشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو	3.4.2

57	تطبيقات تحويل لابلاس في الحساب الكسري	4
58	تحويل لابلاس للتكامل الكسري	4.1
58	تحويل لابلاس للإشتقاق الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل	4.2
59	تحويل لابلاس للإشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو	4.3
59	تحويل لابلاس لبعض الدوال	4.4

60	تطبيقات تحويل لابلاس على المعادلات التفاضلية الكسرية	4.5
	4.5.1 تطبيق تحويل لابلاس على المعادلات التفاضلية الكسرية بمفهوم	
60	ريمان ليوفيل	
	4.5.2 تطبيق تحويل لابلاس على المعادلات التفاضلية الكسرية بمفهوم	
61	كابوتو	

مقدمة

في عالم الرياضيات التطبيقية والهندسة، تقف التحويلات الرياضية كأحد أبرز الابتكارات التي أسهمت في إحداث ثورة حقيقية في منهجية حل المشكلات المعقدة. هذه التحويلات ليست مجرد أدوات حسابية، بل هي مفاهيم جوهرية تمكن من نقل الدوال والمعادلات من مجال إلى آخر، مما يسهل معالجتها وتحليلها. من بين هذه التحويلات، يبرز "تحويل لابلاس" كأداة لا غنى عنها، محتلاً مكانة محورية في العديد من الفروع العلمية والهندسية بفضل قدرته الفائقة على تبسيط العمليات الحسابية المعقدة. يعود الفضل في نشأة هذا التحويل إلى العالم الفلكي والرياضياتي الفرنسي "بيير سيمون لابلاس"، الذي قدمه لأول مرة في أواخر القرن الثامن عشر، وتحديداً في أعماله البارزة حول نظرية الاحتمالات، وأشهرها كتابه "نظرية الاحتمالات التحليلية". لم يكن ظهور تحويل لابلاس مجرد صدفة أو ابتكار نظري بحت، بل كان إستجابة ضرورية لحاجة ماسة في الرياضيات التطبيقية وعلى وجه الخصوص المعادلات التفاضلية. قبل تحويل لابلاس، كانت حلول هذه المعادلات تستغرق جهداً ووقتاً كبيرين، حيث أتاح لنا هذا التحويل استخدام التقنيات الجبرية لحل المشكلات في المجال الجديد، ثم العودة بالحل إلى المجال الأصلي باستخدام "تحويل لابلاس العكسي". شهد استخدام تحويل لابلاس نمواً هائلاً وتطبيقاً واسعاً، لا سيما مع تطور فروع جديدة في الرياضيات، مثل "المعادلات التفاضلية الكسرية". هذه المعادلات، التي تتعامل مع مشتقات بترتيب غير صحيح (كسري)، وجدت في تحويل لابلاس أداة قوية لتحليلها وحلها. على الرغم من أن لابلاس هو من وضع الأساس، إلا أن الصيغة الحديثة والمنهجية التي نعرفها اليوم لتحويل لابلاس تم تطويرها لاحقاً في القرن العشرين بفضل جهود عالم الرياضيات الألماني غوستاف دويتش الذي قام بتنظيم وتعميم التحويل، ووضع الأسس النظرية له، مما جعله أداة قوية ومنظمة للمعادلات التفاضلية. وتكريماً لمساهمات لابلاس الرائدة التي أرسى حجر الأساس لهذا التحويل، أُطلق عليه اسمه ليصبح "تحويل لابلاس"، وهو اسم يتردد صداه في أروقة الجامعات والمعاهد البحثية كرمز للإبداع والابتكار في عالم الرياضيات. تنقسم هذه المذكرة إلى أربعة فصول مترابطة، تُغطي مختلف جوانب هذا التحويل:

◀ الباب الأول: نتناول الأسس النظرية لتحويل لابلاس، حيث نعرض خصائصه الجوهرية وقواعده الرياضية، إلى جانب تقديم تحويل لابلاس العكسي .

◀ الباب الثاني: قننا بتقديم بعض المفاهيم حول المعادلات التفاضلية العادية والمعادلات التفاضلية الجزئية بالإضافة الى تطبيق تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية بمعاملات ثابتة و ذلك بشروط معلومة و اخرى مجهولة بالإضافة الى معادلات ذات معاملات متغيرة و كذلك طبقنا تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية الجزئية التالية:

$$u_t = u_x$$

حيث $x \geq 0$ و $t > 0$
الشروط الابتدائية معطاة على النحو التالي:

$$\begin{cases} u(x, 0) = x. \\ u(0, t) = -t. \end{cases}$$

◀ الباب الثالث: قدمنا التكامل الكسري و الإشتقاق الكسري بمفهومي ريمان ليوفيل و كابوتو مع بعض الخصائص .

◀ الباب الرابع: قننا بتطبيق تحويل لابلاس لحل مسائل كسرية بمفهومي ريمان ليوفيل و كابوتو التالية:

$${}^R D^{\frac{2}{3}} y(t) = ay(t).$$

حيث ${}^R D^{\frac{2}{3}}$ هي المشتقة الكسرية لريمان ليوفيل من الرتبة $\alpha = \frac{2}{3}$ و $0 \leq \alpha < 1$

$${}^R D^{\frac{4}{3}} y(t) = 0.$$

حيث ${}^R D^{\frac{4}{3}}$ هي المشتقة الكسرية لريمان ليوفيل من الرتبة $\alpha = \frac{4}{3}$ و $1 \leq \alpha < 2$

$$\begin{cases} {}^c D^2 y(t) + 2 {}^c D^{\frac{3}{2}} y(t) + 2y(t) = 8t^5, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

حيث ${}^c D$ هي المشتقة الكسرية لكابوتو .

باب 1

تحويل لابلاس

يتناول هذا الباب الأساسيات النظرية لتحويل لابلاس، و تحويل لابلاس العكسي من تعريف و أهم الخصائص ، كما تُقدم مجموعة من الدوال الشهيرة التي يُطبق عليها تحويل لابلاس ، حيث إعتدنا على المراجع التالية: [5] و [8] و [12] و [2] و [4] و [6] و [1] و [14] و [11].

1.1 تحويل لابلاس

1.1.1 الدالة السببية:

تعريف 1.1.1

لتكن الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، نقول أنها سببية إذا حققت ما يلي :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ f(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

1.1.2 تحويل لابلاس :

تحويل لابلاس هو تحويل تكاملي، يحول الدوال و المعادلات من شكلها الأصلي الى شكل آخر أبسط منه.

تعريف 2.1.1

ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، حيث f دالة سببية، وليكن s متغيراً حيث $s > 0$ فإنه يمكن تعريف تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ كما يلي:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-st} f(t) dt = F(s).$$

1.2 الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس

1.2.1 الدالة المستمرة بالقطع:

تعريف 1.2.1

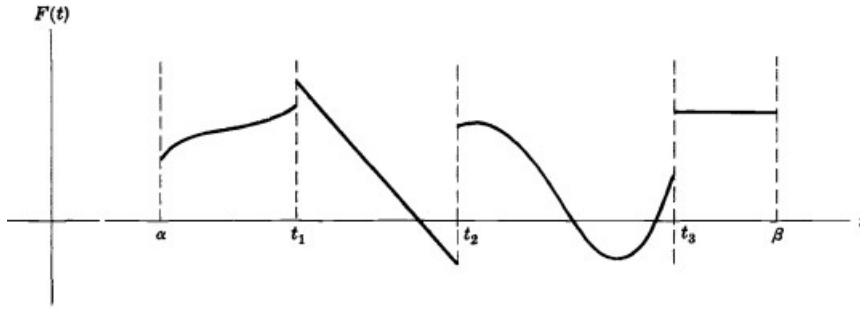
لتكن الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، نقول أنها مستمرة بالقطع على المجال $\alpha \leq t \leq \beta$ ، إذا أمكن تقسيم هذا المجال إلى عدد منتهي من المجالات الجزئية $a_i < t < b_i$ بحيث:

1- الدالة f مستمرة على المجال المفتوح $a_i < t < b_i$.

2- النهايتين $\lim_{t \rightarrow a_i^+} f(t)$ و $\lim_{t \rightarrow b_i^-} f(t)$ موجودتان.

مثال 1.2.1

الدوال الموضحة في الشكل هي تابع مستمر بالقطع على المجال $\alpha \leq t \leq \beta$.



1.2.2 الدالة ذات الرتبة الآسية

تعريف 2.2.1

لتكن الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، نقول أنها ذات رتبة آسية λ ، إذا وجد ثابت λ و $M > 0$ و $t_0 \geq 0$ ، بحيث يتحقق الشرط التالي:

$$|f(t)| \leq Me^{\lambda t}, \quad t \geq t_0.$$

مثال 2.2.1

بين ما إذا كانت الدوال التالية هي دوال ذات رتبة آسية

$$f(t) = e^t - 1$$

$$f(t) = t^3 e^{2t} - 2$$

$$f(t) = \sin(t), f(t) = \cos(t) - 3$$

الحل

$$1- \text{الدالة الآسية } f(t) = e^t$$

$$|f(t)| = e^t \leq e^t$$

$$\text{و منه } M = 1, \lambda = 1$$

إذن $f(t) = e^t$ هي دالة ذات رتبة آسية 1.

$$2- \text{الدالة } f(t) = t^3 e^{2t}$$

$$|f(t)| = |t^3 e^{2t}| \leq e^{3t} e^{2t} = e^{5t}$$

$$\text{و منه } M = 1, \lambda = 5$$

إذن $f(t) = t^3 e^{2t}$ هي دالة ذات رتبة آسية 5.

$$3- \text{الدوال الدورية } f(t) = \sin(t), f(t) = \cos(t)$$

$$|f(t)| = |\cos(t)| \leq 1 = 1e^{0t}$$

$$|f(t)| = |\sin(t)| \leq 1 = 1e^{0t}$$

و منه $M = 1, \lambda = 0$

إذن الدوال $f(t) = \sin(t), f(t) = \cos(t)$ هي دوال ذات رتبة أسية 0.

1.2.3 الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس

1.2.1 نظرية

لتكن: الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، حيث f دالة سببية، إذا تحققت الشروط التالية:

1- f مستمرة بالقطع على $[0, +\infty[$.

2- f ذات رتبة أسية λ .

3- من أجل كل $t_0 > 0$ يوجد: $\int_0^{t_0} |f(t)| dt < +\infty$.

نقول أن تحويل لابلاس $F(s)$ موجود من أجل $s > \lambda$.

البرهان

لإثبات هذه النظرية يجب أن نوضح أن التكامل $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ متقارب من أجل $s > \lambda$ لدينا:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

نجزء التكامل الى جزئين

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} f(t) dt + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

يكفي إثبات أن $\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ موجود

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right| &\leq \int_{t_0}^{+\infty} |f(t) e^{-st}| dt, \\ &\leq \int_{t_0}^{+\infty} |f(t)| |e^{-st}| dt, \\ &\leq \int_{t_0}^{+\infty} M e^{\lambda t} e^{-st} dt, \\ &= M \int_{t_0}^{+\infty} e^{(\lambda-s)t} dt, \\ &= \frac{M}{\lambda-s} [e^{(\lambda-s)t}]_{t_0}^{+\infty}. \end{aligned}$$

لما $s > \lambda$ ، فإن $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\lambda-s)t} = 0$ وبالتالي:

$$\frac{M}{\lambda-s} [e^{(\lambda-s)t_0}] < \infty.$$

وعليه فإن $\int_{t_0}^{+\infty} e^{\lambda t} e^{-st} dt$ موجود و من ثم فإن وجود $F(s)$ يعتمد على تقارب $\int_{t_0}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$.

ملاحظة 1.2.1

إذا كانت $f(t)$ مستمرة جزئياً على \mathbb{R}^+ و ذات رتبة آسية، لكل $t \geq 0$ فإن: $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$.

ملاحظة 2.2.1

توجد دوال لها تحويل لابلاس ولا تحقق شروط النظرية السابقة، أي أن هذه النظرية تعطي الشرط الكافي فقط لوجود تحويل لابلاس وليس الشرط اللازم.

مثال 3.2.1

الدالة $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ ليست مستمرة على أي مجال محدود $[0, b]$ حيث: $b > 0$ ، وذلك لأن هذه الدالة تعطي قيمة لانهاية عند $t = 0$ لكن في المقابل فإن تكامل هذه الدالة له وجود (يعطي قيمة محدودة) على أي مجال $[0, b]$ لكل $b > 0$ إذ أن:

$$\begin{aligned} \int_0^b f(t) dt &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^b f(t) dt, \\ &= 2\sqrt{t} \Big|_a^b, \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} (2\sqrt{b} - 2\sqrt{a}), \\ &= 2\sqrt{b}. \end{aligned}$$

وبالتالي يوجد تحويل لابلاس

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-st} dt, \\ &= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-st} dt, \end{aligned}$$

لحساب هذا التكامل نضع:

$$st = y \Rightarrow t = \frac{y}{s}, dt = \frac{dy}{s}$$

إذن:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s) &= s^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{s}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

و من تعريف الدالة قاما (Gamma) نجد:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

إذن:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0.$$

1.2.4 تحويلات لابلاس لبعض الدوال الشهيرة

(1) $f(t) = t^n$ من أجل n عدد طبيعي

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt, \\
&= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^n \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} n t^{n-1} dt, \quad s > 0, \\
&= 0 + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt, \quad s > 0, \\
&= \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}, \\
&= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \mathcal{L}\{t^{n-2}\}, \\
&= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \mathcal{L}\{t^{n-3}\}, \\
&= \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{s^n} \mathcal{L}\{t^0\}, \\
&= \frac{n!}{s^n} \cdot \frac{1}{s}, \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}.
\end{aligned}$$

من أجل $n = 1$ فإن:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

(2) $f(t) = c$ حيث c عدد حقيقي

تحويل لابلاس للدالة $f(t) = c$ هو $\mathcal{L}\{c\} = \frac{c}{s}$
الإثبات

$$\mathcal{L}\{c\} = \int_0^{\infty} c e^{-st} dt = c \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-st} dt = c \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-s\alpha} + \frac{1}{s} \right] = \frac{c}{s}, \quad s > 0.$$

(3) $f(t) = e^{kt}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

لدينا:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{kt}\} &= \int_0^{\infty} e^{kt} e^{-st} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-(s-k)t} dt, \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{s-k} e^{-(s-k)\alpha} + \frac{1}{s-k} \right] = \frac{1}{s-k}, \quad (s-k) > 0.
\end{aligned}$$

(4) $f(t) = \cos(at)$ حيث $a \in \mathbb{Z}$

لدينا:

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \int_0^{\infty} \cos(at) e^{-st} dt = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \cos(at) e^{-st} dt,$$

بإستخدام التكامل بالتجزئة مرتين لحساب التكامل نجد:

$$\begin{aligned}\int_0^\beta \cos(at)e^{-st} dt &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} (-s \cos(at)) + a \sin(at) \right], \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-s\beta}}{s^2 + a^2} (-s \cos(a\beta)) + a \sin(a\beta) + \frac{s}{s^2 + a^2} \right] = \frac{s}{s^2 + a^2}.\end{aligned}$$

$$a \in \mathbb{Z} \text{ حيث } f(t) = \sin(at) \quad (5)$$

لدينا:

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \int_0^\infty \sin(at)e^{-st} dt = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta \sin(at)e^{-st} dt,$$

بإستخدام التكامل بالتجزئة لحساب التكامل

$$I = \int_0^\beta \sin(at)e^{-st} dt.$$

نضع:

$$u = \sin(at), dv = e^{-st} dt \Rightarrow du = a \cos(at) dt, v = \frac{-1}{s} e^{-st}$$

و بالتالي فإن:

$$I_1 = \frac{\cos(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta - \frac{a}{s} I,$$

إذن:

$$\begin{aligned}I &= \frac{\sin(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta + \frac{a \cos(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta - \frac{a^2}{s^2} I \left(1 + \frac{a^2}{s^2} \right), \\ &= \frac{\sin(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta + \frac{a \cos(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta.\end{aligned}$$

أي أن:

$$I = \frac{s^2}{s^2 + a^2} \left(\frac{\sin(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta + \frac{a \cos(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta \right),$$

و منه

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(at)\} &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta \sin(at)e^{-st} dt, \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2 + a^2} \left(\frac{\sin(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta + \frac{a \cos(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta \right), \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2 + a^2} \left(\frac{-\sin(a\beta)}{s} e^{-s\beta} + 0 + \frac{a - \cos(a\beta)}{s} e^{-s\beta} + \frac{1}{s} \right) = \frac{a}{s^2 + a^2}.\end{aligned}$$

حيث a ثابت.

يمكن تلخيص تحويل لابلاس لبعض الدوال الشهيرة في الجدول التالي:

$f(t)$	$F(s)$
a	$\frac{a}{s}, s > 0$
at	$\frac{a}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \dots$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, s > a$
\sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}, s > 0$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2 + w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2 + w^2}$
$t \sin(wt)$	$\frac{2ws}{(s^2 + w^2)^2}$
$t \cos(wt)$	$\frac{s^2 - w^2}{(s^2 + w^2)^2}$
$\sinh(wt)$	$\frac{s^2}{s^2 - w^2}, s > w $
$\cosh(wt)$	$\frac{s}{s^2 - w^2}, s > w $
$e^{at} \sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2 + w^2}$
$e^{at} \cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$
$e^{-at} \sin(wt)$	$\frac{w}{(s+a)^2 + w^2}$
$e^{-at} \cos(wt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + w^2}$

1.3 خواص تحويل لابلاس

1.3.1 الخطية

نظرية 1.3.1

لتكن الدالتين $f(t)$ و $g(t)$ تقبلان تحويل لابلاس، وليكن a و b عددين حقيقيين ثابتين، فإن:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

البرهان

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^{\infty} (af(t) + bg(t))e^{-st} dt, \\
&= \int_0^{\infty} (af(t)e^{-st} + bg(t)e^{-st}) dt, \\
&= a \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt + b \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt, \\
&= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.
\end{aligned}$$

مثال 1.3.1

أحسب تحويل لابلاس للدالة $f(t) = 3\sin(2t) + 5e^{3t}$.

الحل

نضع $f(t) = 3\sin(2t)$ و $g(t) = 5e^{3t}$ ، حسب خاصية الخطية فإن:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{3\sin(2t) + 5e^{3t}\} &= 3\mathcal{L}\{\sin(2t)\} + 5\mathcal{L}\{e^{3t}\} \\
&= 3 \cdot \frac{2}{s^2 + 4} + 5 \cdot \frac{1}{s - 3} \\
&= \frac{6}{s^2 + 4} + \frac{5}{s - 3}.
\end{aligned}$$

1.3.2 الخاصية الأولى للإسحاب

لتكن الدالة $f(t)$ تقبل تحويل لابلاس، حيث $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ من أجل $a \in \mathbb{R}$ ، فإن:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s + a).$$

البرهان

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}e^{-at} dt, \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt, \\
&= F(s + a).
\end{aligned}$$

مثال 2.3.1

أحسب تحويل لابلاس للدالة $f(t) = e^{3t}\cos(4t)$.

الحل

$$f(t) = e^{3t} \cos(4t) \text{ لدينا}$$

باستعمال خاصية تحويل لابلاس الأولى للإسحاب نجد:

$$\mathcal{L}\{e^{3t} \cos 4t\} = F(s-3),$$

فإن:

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos(4t)\} = \frac{s}{s^2 + 16}$$

باستبدال s ب $s-3$ نجد:

$$F(s-3) = \frac{s-3}{(s-3)^2 + 16}$$

إذن:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{3t} \cos 4t\} &= \frac{s-3}{(s-3)^2 + 16} \\ &= \frac{s-3}{s^2 - 6s + 25}. \end{aligned}$$

1.3.3 الخاصية الثانية للإسحاب

لتكن الدالة $f(t)$ ، تقبل تحويل لابلاس حيث $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ لدينا:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

حيث $u(t-a)$ دالة خطوة.

البرهان

لدينا دالة الخطوة معرفة كما يلي :

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0. \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

ومنه

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a. \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$

فإن:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} &= \int_0^{\infty} u(t-a)f(t-a)e^{-st} dt, \\ &= \int_0^a u(t-a)f(t-a)e^{-st} dt + \int_a^{\infty} u(t-a)f(t-a)e^{-st} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^{\infty} u(t-a)f(t-a)e^{-st} dt, \\
&= \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st} dt.
\end{aligned}$$

نضع $u = t - a$ ومنه $t = u + a$ إذن $dt = du$

$$\begin{aligned}
\int_a^{\infty} f(u)e^{-s(u+a)} dt &= e^{-as} \int_a^{\infty} f(u)e^{-st} du, \\
&= e^{-as} F(s).
\end{aligned}$$

مثال 3.3.1

أحسب تحويل لابلاس لـ $(t-2)^2 u(t-2)$ حيث $u(t)$ هي دالة الخطوة.
الحل

$$\mathcal{L}\{(t-2)^2 u(t-2)\} = e^{as} F(s),$$

من أجل $a = 2$, $f(t) = t^2$ نجد:

$$e^{2s} \frac{2}{s^3} = 2 \frac{e^{2s}}{s^3} = e^{2s} \mathcal{L}\{(t)^2\}.$$

1.3.4 خاصية تغيير السلي

لتكن الدالة $f(t)$ تقبل تحويل لابلاس حيث $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
فإن:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0.$$

البرهان

لدينا:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at)e^{-st} dt,$$

نضع $v = at$ وعليه $t = \frac{v}{a}$ و $dt = \frac{1}{a} dv$ ومنه

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(at)\} &= \int_0^{+\infty} f(v)e^{-\frac{sv}{a}} \frac{dv}{a} \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(v)e^{-\frac{sv}{a}} dv \\
&= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).
\end{aligned}$$

مثال 4.3.1

أحسب تحويل لابلاس للدالة $f(t) = \sin(2t)$.

الحل

لدينا:

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

حسب خاصية تحويل لابلاس للتغير السلمي نجد:

$$\mathcal{L}\{\sin(2t)\} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

1.3.5 تحويل لابلاس للمشتقات

نظرية 2.3.1

لتكن الدالة $f(t)$ تقبل تحويل لابلاس حيث $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ و $f'(t)$ موجودة مهما يكن $t \geq 0$ و $f'(t)$ دالة آسية و مستمرة بالقطع فإن:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$$

البرهان

لدينا:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt,$$

باستعمال التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s e^{-st} f(t) dt, \\ &= -f(0) + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \\ &= sF(s) - f(0). \end{aligned}$$

نظرية 3.3.1

لتكن الدالتين $f(t)$ و $f'(t)$ تقبلان تحويل لابلاس حيث $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ و $f''(t)$ موجودة مهما يكن $t \geq 0$ و $f''(t)$ دالة آسية و مستمرة بالقطع لدينا:

$$\mathcal{L}\{f^{(2)}(t)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0).$$

البرهان

باستعمال التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(2)}(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f^{(2)}(t) dt, \\ &= e^{-st} f'(t) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s e^{-st} f'(t) dt, \\ &= -f(0) + s f(t) e^{-st} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s^2 e^{-st} f(t) dt, \\ &= s^2 F(s) - s f(0) - f'(0).\end{aligned}$$

4.3.1 نظرية

لتكن الدالة $f(t)$ عبارة عن دالة آسية، رتيبة ومستمرة على مجال التعريف، لنفرض أن $F(s)$ يمثل تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ حيث أن $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ، ولتكن الدالة $f(t)$ قابلة للاشتقاق n مرة حيث:

$$\frac{df}{dt} = f'(t), \quad \frac{d^2f}{dt^2} = f''(t), \quad \dots, \quad \frac{d^n f}{dt^n} = f^{(n)}(t).$$

آسية، رتيبة و مستمرة هي كذلك على نفس مجال مجموعة تعريف الدالة $f(t)$ وعليه فإنه يمكن تحديد تحويل لابلاس للمشتقة من الرتبة n باستعمال العبارة التالية:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0).$$

5.3.1 مثال

أحسب تحويل لابلاس للدالة $f^{(n)}(t)$ حيث $f(t) = e^{-t} t^n$.

الحل

بما أن $f(0) = 0$ إذن:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s),$$

حيث:

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-t} t^n\} = \frac{n!}{(s+1)^{n+1}}$$

ومنه

$$\mathcal{L}\{(e^{-t} t^n)^n\} = \frac{s^n n!}{(s+1)^{n+1}}.$$

1.3.6 تحويل لابلاس للتكامل

إذا كان $F(s)$ هو تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ حيث $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ فإن:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

البرهان

لدينا:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(u)du\right)e^{-st}dt,$$

باستعمال التكامل بالتجزئة نجد:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(u)du\right)e^{-st}dt &= -\frac{e^{-st}}{s} \int_0^t f(u)du \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{s} f(u)du, \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, \\ &= \frac{1}{s} F(s). \end{aligned}$$

مثال 6.3.1

أحسب تحويل لابلاس للدالة $f(u) = e^{2u}$.

الحل

باستعمال خاصية تحويل لابلاس للتكامل نجد:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{2u}du\right\} = \frac{\mathcal{L}\{e^{2t}\}}{s}$$

ومنه

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{2u}du\right\} = \frac{1}{s} \frac{1}{s-2} = \frac{1}{s(s-2)}.$$

1.3.7 الضرب في t^n

نظرية 5.3.1

لتكن الدالة $f(t)$ تقبل تحويل لابلاس حيث $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ فإن:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}F(s)$$

و عموماً

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s).$$

البرهان

ليكن تعريف تحويل لابلاس كما يلي :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

نشق بالنسبة الى s فنجد:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} -te^{-st} f(t) dt,$$

وبالتالي:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s),$$

و بتعميم النتيجة على n نجد:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s),$$

وباشتقاق كلا الطرفين بالنسبة إلى s نحصل على:

$$\int_0^{\infty} t^{n+1} e^{-st} f(t) dt = (-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}} F(s),$$

إذن:

$$\mathcal{L}\{t^{n+1} f(t)\} = (-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}} F(s),$$

مثال 7.3.1

أحسب تحويل لابلاس للدالة $f(t) = t^2 e^{-3t}$.

الحل

لدينا:

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$$

إذن:

$$F(s) = \frac{1}{s+3}, \quad n=2, \quad f(t) = e^{-3t}$$

و منه

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+3} \right) = -\frac{1}{(s+3)^2} \\ \frac{d^2}{ds^2} F(s) &= \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s+3} \right) = \frac{2}{(s+3)^3}. \end{aligned}$$

1.3.8 القسمة على t

نظرية 6.3.1

لتكن الدالة $f(t)$ تقبل تحويل لابلاس حيث $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
فإن:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{+\infty} F(u)du,$$

• علما أن $\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = 0$

البرهان

لدينا

$$F(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ut} f(t) dt,$$

بأخذ

$$\int_s^{+\infty} F(u) du = \lim_{s \rightarrow k} \int_k^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-ut} f(t) du \right) dt$$

بما أن $\int_0^{+\infty} e^{-ut} f(t) dt$ متقارب من أجل $s \leq u \leq k$
نجد:

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} F(u) du &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \left(\int_s^k e^{-ut} f(t) du \right) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \left[\frac{e^{-ut} f(t)}{-t} \right]_s^k dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-kt} \frac{f(t)}{t} dt, \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}. \end{aligned}$$

مثال 8.3.1

أحسب تحويل لابلاس للدالة $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

الحل

لدينا:

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

و

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

و منه

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2 + 1} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right).$$

1.3.9 التفاف الدالتين

تعريف 1.3.1

لتكن الدالتين $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ إلتفاف الدالتين $f(t)$ و $g(t)$ يكتب من الشكل $f * g$ ، ويعرف ب:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du.$$

تأثير تحويل لابلاس على الإلتفاف

خاصية 1.3.1

$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ من أجل $t < 0$ فإن $f(t) = g(t) = 0$

نضع:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du, = \int_0^t f(u)g(t-u)du,$$

فإن:

$$\mathcal{L}\{h\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}h(t)dt = \int_0^{+\infty} \int_0^t e^{-st}f(u)g(t-u)dudt,$$

$$\mathcal{L}\{h\}(s) = \int_0^{+\infty} \int_u^{+\infty} e^{-st}f(u)g(t-u)dtdu,$$

بوضع $v = t - u$ نجد:

$$\mathcal{L}\{h\}(s) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(u) \int_0^{+\infty} e^{-s(v+u)}g(v)dvdu = \int_0^{+\infty} e^{-su}f(u)du \int_0^{+\infty} e^{-sv}g(v)dv,$$

إذن:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}.$$

مثال 9.3.1

$$\sin t * t^2 = \int_0^t (\sin u)(t-u)^2 du$$

بتطبيق الخاصية $f * g = g * f$ نجد:

$$\begin{aligned}
 \sin t * t^2 &= \int_0^t (\sin u)(t-u)^2 du, \\
 &= [-(t-u)^2 \cos u]_0^t - \int_0^t 2(t-u) \cos u du, \\
 &= t^2 - 2[(t-u) \sin u]_0^t - \int_0^t \sin u du, \\
 &= t^2 - 2[0 + [-\cos u]_0^t], \\
 &= t^2 + 2 \cos t - 2.
 \end{aligned}$$

1.4 تحويل لابلاس العكسي

1.4.1 تعريف

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ، فإن تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s)$ والذي نرسم له بـ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ معرف بـ:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t).$$

1.4.1 مثال

أحسب تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

الحل

لدينا:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

وبالتالي، تحويل لابلاس العكسي لهذه الدالة هو:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n.$$

1.4.1 خصائص تحويل لابلاس العكسي

خاصية الخطية

من أجل دالتين $F(s)$ و $G(s)$ فإن:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} &= a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}, \\
 &= af(t) + bg(t).
 \end{aligned}$$

حيث a و b عددين حقيقيين ثابتين.

الخاصية الأولى للإنسحاب

إذا كان

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t),$$

فإن:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s+a)\} = e^{-at}f(t).$$

الخاصية الثانية للإنسحاب

إذا كان

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t),$$

فإن:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a).$$

حيث $a \geq 0$ و $t > a$.

خاصية تغيير السلمي

لدينا:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t),$$

فإن:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right).$$

حيث $a > 0$.

1.4.2 طرق حساب تحويل لابلاس العكسي

في الكثير من الحالات تكون الدالة على شكل كسر من الصعب إيجاد تحويل لابلاس العكسي لها، لهذا يتم اللجوء إلى تحليلها إلى كسور جزئية بسيطة.

نشر تحويل لابلاس العكسي إلى مجموع كسور جزئية

لإيجاد تحويل لابلاس العكسي لدالة من الشكل التالي:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}.$$

حيث $P(s)$ و $Q(s)$ كثيرتا حدود، ودرجة $Q(s)$ أكبر من درجة $P(s)$.
هناك طريقتين مختلفتين من الكسور الجزئية نذكر:

1-الكسور التي تحتوي مقامها على عوامل خطية مختلفة:

بما أن $Q(s)$ كثيرة حدود من الدرجة m فإنها يمكن أن تكتب على الصورة

$$Q(s) = (s + b_1)(s + b_2) \dots (s + b_m)$$

وبالتالي يمكن تحليل الكسر الجزئي على الشكل التالي:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{(s + b_1)} + \frac{A_2}{(s + b_2)} + \dots + \frac{A_n}{(s + b_n)}$$

حيث أن A_1, A_2, \dots, A_n ثوابت يتم إيجادها باستخدام العلاقة:

$$A_n = | (s + b_n)(F(s)) |_{s=-b_n}$$

أي أن:

$$A_1 = | (s + b_1)(F(s)) |_{s=-b_1}$$

$$A_2 = | (s + b_2)(F(s)) |_{s=-b_2}$$

$$A_n = | (s + b_n)(F(s)) |_{s=-b_n}$$

في هذه الحالة فإن تحويل لابلاس العكسي ل $F(s)$ هو:

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s)] = A_1 e^{-b_1 t} + A_2 e^{-b_2 t} + \dots + A_n e^{-b_n t}.$$

مثال 2.4.1

لتكن

$$F(s) = \frac{2}{(s + 1)(s + 2)}$$

نحلل الكسر الجزئي

$$\frac{2}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{s + 2}$$

نجد القيم A_1 و A_2 كما يلي:

$$A_1 = | (s + 1)(F(s)) |_{s=-1} = \left(\frac{2}{s + 2} \right)_{s=-1} = \frac{2}{-1 + 2} = 2$$

$$A_2 = | (s + 2)(F(s)) |_{s=-2} = \left(\frac{2}{s + 1} \right)_{s=-2} = \frac{2}{-2 + 1} = -2$$

و منه

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s+2}\right] \\ &= 2e^{-t} - 2e^{-2t}.\end{aligned}$$

2-الكسور التي تحتوي مقامها على عوامل خطية مكررة:

تكون من الشكل:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_r}{(s+b_1)} + \frac{A_{r-1}}{(s+b_2)} + \dots + \frac{A_1}{(s+b_1)}.$$

لإيجاد قيم الثوابت $A_1, A_2, \dots, A_{r-1}, A_r$ تتبع الخطوات التالية:

$$\begin{aligned}A_r &= ((s+b_1)^r F(s)) \Big|_{s=-b_1} \\ A_{r-1} &= \frac{d}{ds} ((s+b_1)^r F(s)) \Big|_{s=-b_1} \\ A_{r-k} &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} ((s+b_1)^r F(s)) \Big|_{s=-b_1}.\end{aligned}$$

مثال 3.4.1

ليكن

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2(s-1)}$$

نحلل الكسر الجزئي:

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{A_r}{s^2} + \frac{A_{r-1}}{s} + \frac{A_{r-2}}{s-1} \\ A_r &= (s^2 F(s)) \Big|_{s=0} = \left(\frac{s+1}{s-1}\right) \Big|_{s=0} = -1 \\ A_{r-1} &= \frac{d}{ds} (s^2 F(s)) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\frac{s+1}{s-1}\right) \Big|_{s=0} = \left(\frac{-2}{(s-1)^2}\right) \Big|_{s=0} = -2 \\ A_{r-2} &= (s-1)F(s) \Big|_{s=1} = \frac{s+1}{s^2} \Big|_{s=1} = 2\end{aligned}$$

و منه:

$$F(s) = -\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s-1}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}F(s) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-1}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{s^2}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)\end{aligned}$$

و منه نجد:

$$\mathcal{L}^{-1}F(s) = -t - 2 + 2e^t.$$

باب 2

المعادلات التفاضلية العادية و الجزئية و
تحويل لابلاس

تطرقنا في هذا الباب الى دراسة المعادلات التفاضلية العادية والجزئية و كيفية تطبيق تحويل لابلاس في حل هذه المعادلات حيث اعتمدنا على المراجع التالية: [13] و [14] و [15] و [16] و [?].

2.1 المعادلات التفاضلية

تعريف 1.1.2

المعادلة التفاضلية هي كل معادلة تحتوي على تفاضلات أو مشتقات لتابع أو أكثر و ذلك بالنسبة لمتغير مستقل أو أكثر .

2.1.1 تصنيف المعادلات التفاضلية

تصنف المعادلات التفاضلية كالاتي:

كل معادلة تفاضلية تحتوي على التفاضلات أو المشتقات العادية لتابع أو أكثر بالنسبة لمتغير واحد أو أكثر تدعى معادلة تفاضلية عادية، و تكون على الصورة التالية:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

كل معادلة تحتوي على المشتقات الجزئية لتابع بالنسبة لمتغيرين مستقلين أو أكثر تدعى معادلة تفاضلية جزئية، تكون على الصورة التالية:

$$F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0.$$

مثال 1.1.2

$$1. y' = x + \sin(x)$$

$$2. xy'' + y' = x$$

هي معادلات تفاضلية عادية.

$$3. \frac{\partial z}{\partial x} + xz^2 = 0$$

$$4. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

هي معادلات تفاضلية جزئية.

2.1.2 رتبة المعادلة التفاضلية

رتبة معادلة تفاضلية هي أعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية .
مثلا :

المعادلة $y'' + 3y' + 2y = 0$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية .

2.1.3 درجة المعادلة التفاضلية

درجة معادلة تفاضلية هي (أس) أكبر مشتقة في المعادلة شرط أن تكون المشتقة الأعلى خالية من الأسس الكسرية.
مثلا :

المعادلة $(y'')^2 + 4y' + 2y = 0$ ، هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

مثال 2.1.2

(أ) المعادلة

$$(y''')^2 + (y') = 1.$$

هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة 3 و الدرجة 2.
(ب) المعادلة

$$[1 + (y')^2]^3 = (y'')^{\frac{1}{3}}.$$

أولا يجب التخلص من الكسر لتحديد درجة هذه المعادلة

$$[1 + (y')^2]^9 = (y'').$$

و منه فهي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة 2 و الدرجة 1.

2.1.4 الحل العام و الحل الخاص لمعادلة تفاضلية

الحل العام:

إذا كان حل معادلة تفاضلية من الرتبة n يحتوي على n من الثوابت الإختيارية المستقلة يسمى بالحل العام .

الحل الخاص:

هو حل المعادلة التفاضلية من الرتبة n الذي نحصل عليه من الحل العام بإعطاء قيم خاصة ل n ثابت .

مثال 3.1.2

لتكن المعادلة $y' - 2y = 0$ ، حيث $y(0) = 3$
أوجد الحل العام و الحل الخاص

الحل

إيجاد الحل العام و الحل الخاص
الحل العام :

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = 2dx,$$

أي أن :

$$\ln(|y|) = 2x + c,$$

إذن:

$$y = e^{2x+c},$$

و منه :

$$y = ke^{2x}.$$

الحل الخاص :

$$\text{لما } y = 3 \text{ و } x = 0 \text{، فإن } k = 3$$

ومنه

$$y = 3e^{2x}.$$

2.1.5 الشروط الابتدائية و الشروط الحدية

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية تعطى بعض الشروط التي يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية، و هذه الشروط هي التي تمكننا من تحديد الثوابت الإختيارية التي تظهر في الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام. المعادلة التفاضلية المقرونة بشروط تشتمل على قيم الحل و مشتقاته عند الصفر، تسمى هذه الشروط بالشروط الابتدائية.

المعادلة التفاضلية المقرونة بشروط تشتمل على قيم الحل و مشتقاته عند نقطتين أو أكثر، تسمى هذه الشروط بالشروط الحدية.

مثال 4.1.2

$$1. \quad y'' = x$$

حيث $y(0) = 1$ و $y'(0) = -1$ ، تسمى هذه الشروط بالشروط الابتدائية .

$$2. \quad y'' = 6x + 2$$

حيث $y(0) = 2$ و $y(2) = 8$ ، في هذه الحالة تسمى هذه الشروط بالشروط الحدية .

2.2 المعادلات التفاضلية العادية الخطية

1.2.2 تعريف

المعادلة التفاضلية $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ ، تسمى خطية إذا كانت f دالة خطية في المتغيرات $y, y', \dots, y^{(n)}$ ، وبالتالي تكون الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n على النحو التالي

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{(n)}y = g(x). \quad (2.1)$$

حيث $a_i(x), i = \overline{0:n}$ و $g(x)$ دوال معرفة و مستمرة .
والصورة العامة للمعادلة التفاضلية العادية الخطية ذات الرتبة الأولى هي:

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ دوال تتعلق بـ x و يكون معامل y' يساوي الواحد .

1.2.2 مثال

هل المعادلة $xy' + 2y = x^3$ هي معادلة تفاضلية خطية ؟

الحل:
لدينا:

$$xy' + 2y = x^3,$$

تصبح من الشكل:

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2.$$

و هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى.

- إذا كانت المعاملات $a_i(x)$ في المعادلة 2.1 ثابتة لا تتعلق بالمتغير x فإننا نقول عن المعادلة التفاضلية الخطية أنها ذات معاملات ثابتة .

-إذا كانت المعاملات $a_i(x)$ في المعادلة 2.1 تتعلق بالمتغير x أي أنها غير ثابتة فإننا نقول عن المعادلة التفاضلية الخطية أنها ذات معاملات متغيرة .

2.2.2 مثال

$$1. \text{ المعادلة } y' - y = e^{3x}$$

هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات ثابتة.

$$2. \text{ المعادلة } (1 + e^x)y' + e^xy = 0$$

هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات متغيرة.

2.3 حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات معاملات ثابتة باستخدام تحويل لابلاس

لتكن المعادلة :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = g(x). \quad (2.2)$$

- حيث $g(x)$ دالة مستمرة و تقبل تحويل لابلاس و $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$
- لحل المعادلة 2.2 باستخدام تحويل لابلاس نقوم ب:
- أ. تطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة التفاضلية 2.2

$$a_0 \mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} + a_1 \mathcal{L}\{y^{(n-1)}(t)\} + \dots + a_n \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

- ب. تبسيط المعادلة إلى عبارة من الشكل $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$.
- ت. حساب تحويل لابلاس العكسي $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$
- حيث يتم إستعمال الطرق المختلفة لإيجاد تحويل لابلاس العكسي بما فيها خصائص الخطية، السلمي، الإنسحاب و النشر على شكل كسور جزئية .

مثال 1.3.2 حل المسألة التالية بإستعمال تحويل لابلاس

$$\begin{cases} y' + y = e^t, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

الحل

بتطبيق تحويل لابلاس للمعادلة و حسب خاصية الخطية نجد:

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^t\}, \quad (2.3)$$

لدينا :

$$\mathcal{L}\{y'\} = SF(s) - y(0), \quad (2.4)$$

و

$$\mathcal{L}\{y\} = F(s), \quad (2.5)$$

و

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1} \quad (2.6)$$

بتعويض 2.4 و 2.5 و 2.6 في المعادلة 2.3 نجد:

$$SF(s) - y(0) + F(s) = \frac{1}{s-1}$$

و بما أن $y(0) = 0$ فإننا نحصل على :

$$(s+1)F(s) = \frac{1}{s-1}$$

و منه

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)}.$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية للتحليل نجد:

$$\frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1},$$

حيث :

$$A = ((s-1)F(s))|_{s=1} = \frac{1}{s+1} = \frac{1}{2}$$

$$B = ((s+1)F(s))|_{s=-1} = \frac{1}{s-1} = \frac{-1}{2}$$

عندئذ نجد :

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} \end{aligned}$$

و منه

$$y(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

مثال 2.3.2 حل المسألة التالية بإستعمال تحويل لابلاس

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}, \\ y(0) = -3, \quad y'(0) = 5. \end{cases}$$

الحل:

بتطبيق تحويل لابلاس للمعادلة و حسب خاصية الخطية نجد:

$$\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = 4\mathcal{L}\{e^{2t}\}. \quad (2.7)$$

لدينا :

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2F(s) - sy(0) - y'(0). \quad (2.8)$$

و

$$3\mathcal{L}\{y'\} = 3(sF(s) - y(0)). \quad (2.9)$$

و

$$2\mathcal{L}\{y\} = 2F(s). \quad (2.10)$$

و

$$4\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{4}{s-2} \quad (2.11)$$

بتعويض 2.8 و 2.9 و 2.10 و 2.11 في 2.7 نجد :

$$s^2F(s) - sy(0) - y'(0) - 3(sF(s) - y(0)) + 2F(s) = \frac{4}{s-2}$$

أي:

$$s^2F(s) + 3s - 14 - 3sF(s) + 2F(s) = \frac{4}{s-2}$$

ومنه

$$F(s) = \frac{4}{(s^2 - 3s + 2)(s - 2)} + \frac{14 - 3s}{s^2 - 3s + 2} = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s - 1)(s - 2)^2}$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية للتحليل نجد:

$$F(s) = \frac{-3s^2 + 20s - 24}{(s - 1)(s - 2)^2} = \frac{A}{(s - 1)^2} + \frac{B}{s - 2} + \frac{C}{s - 1}$$

حيث :

$$A = ((s - 2)^2F(s)) |_{s=2} = 4$$

$$B = \frac{d}{ds}((s - 2)^2F(s)) |_{s=2} = 4$$

$$C = (s - 1)F(s) |_{s=1} = -7$$

ومنه

$$F(s) = \frac{-7}{(s - 1)} + \frac{4}{s - 2} + \frac{4}{(s - 2)^2}$$

بتطبيق لابلاس العكسي نجد :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s - 1} + \frac{4}{s - 2} + \frac{4}{(s - 2)^2}\right\}$$

و منه

$$y(t) = -7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + 4\frac{1}{s-2} + 4\frac{1}{(s-2)^2}\right\}$$

$$= -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}.$$

2.4 حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية مجهولة الشروط الابتدائية باستخدام تحويل لابلاس

بصفة عامة، يمكن حساب تحويل لابلاس بدون معرفة الشروط الابتدائية.

مثال 1.4.2 حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 2e^{3t}, \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1, y''(0) = y_2. \end{cases} \quad (2.12)$$

الحل:

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة 2.12 نجد:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y'(t)\} - 6\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{2e^{3t}\},$$

أي:

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + [sY(s) - sy(0)] - 6Y(s) = \frac{2}{s-3}$$

و منه

$$(s^2 + s - 6)Y(s) - sy_0 - y_0 - y_1 = \frac{2}{s-3}$$

أي أن:

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)(s^2+s-6)} + \frac{s+1}{s^2+s-6}y_0 + \frac{1}{s^2+s-6}y_1$$

$$= \frac{2}{(s-3)(s+3)(s-2)} + \frac{s+1}{(s+3)(s-2)}y_0 + \frac{1}{(s+3)(s-2)}y_1$$

و بعد التبسيط نحصل على:

$$Y(s) = \frac{1}{15} \left(\frac{5}{s-3} + \frac{1}{s+3} - \frac{6}{s-2} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{s+3} + \frac{3}{s-2} \right) y_0 + \frac{1}{5} \left(\frac{-1}{s+3} + \frac{1}{s-2} \right) y_1$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$y(t) = \frac{1}{15}(5e^{3t} + e^{-3t} - 6e^{2t}) + \frac{1}{5}(2e^{-3t} + 3e^{2t})y_0 + \frac{1}{5}(-e^{-3t} + e^{2t})y_1$$

$$= \frac{1}{3}e^{3t} + \left(\frac{1}{15} + \frac{2}{5}y_0 - \frac{1}{5}y_1\right)e^{-3t} + \left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{5}y_0 + \frac{1}{5}y_1\right)e^{2t}.$$

يمكن إعادة كتابة الحل $y(t)$ كما يلي:

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{3t} + c_0e^{-3t} + c_1e^{2t}.$$

حيث أن c_0 ، c_1 ثابت معطاة بدلالة الشروط الابتدائية y_0 ، y_1 .

2.5 حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية ذات معاملات متغيرة باستخدام تحويل لابلاس

مثال 1.5.2

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$ty'(t) - y(t) = 1$$

الحل

باستعمال خاصية تحويل لابلاس للمشتقة نجد:

$$\mathcal{L}\{ty'(t)\} - \mathcal{L}\{y(t)\} = (-sY'(s) - Y(s)) - Y(s) = \frac{1}{s}$$

أي أن:

$$-sY'(s) - 2Y(s) = \frac{1}{s}$$

ومنه

$$Y'(s) + \frac{2}{s}Y(s) = -\frac{1}{s^2}. \quad (2.13)$$

والتي تمثل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى من الشكل:

$$\frac{dY}{ds} + a(s)Y = b(s). \quad (2.14)$$

و يتم حل المعادلة بحساب معامل التكميل حيث يعطى معامل التكميل بالصيغة التالية: $e^{\int a(s)ds}$ ، بالعودة إلى المعادلة التفاضلية 2.13 فإن معامل التكميل يكون على النحو التالي:

$$e^{\int a(s)ds} = e^{\int \frac{2}{s}ds} = s^2.$$

لإيجاد الحل، نقوم بضرب طرفي المعادلة التفاضلية 2.13 بمعامل التكميل s^2 نجد:

$$s^2Y'(s) + 2sY(s) = -1,$$

أي أن:

$$\frac{d}{ds}[s^2Y(s)] = -1,$$

ومنه

$$s^2Y(s) = -\int ds = -s + c,$$

حيث أن c عبارة عن ثابت التكامل يتم إيجاد قيمته من خلال الشروط الابتدائية. بعبارة أخرى

$$Y(s) = \frac{-1}{s} + \frac{c}{s^2}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد

$$y(t) = -1 + ct.$$

مثال 2.5.2

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية باستعمال تحويل لابلاس

$$ty''(t) + (t+1)y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \quad (2.15)$$

الحل

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة 2.15 نجد:

$$t\mathcal{L}\{y''(t)\} + (t+1)\mathcal{L}\{y'(t)\} + 2\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\},$$

ومنه

$$[-s^2Y'(s) - 2sy(s) + y(0)] + [-sY'(s) - Y(s)] + [sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

بعد التبسيط نجد:

$$(-s^2 - s)Y'(s) - (s-1)Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

ومنه:

$$Y'(s) + \frac{s-1}{s(s+1)}Y(s) = \frac{-1}{s(s+1)^2}.$$

ويكون معامل التكميل كما يلي:

$$e^{\int \frac{s-1}{(s+1)s} ds} = e^{\int (\frac{2}{s+1} - \frac{1}{s}) ds} = \frac{(s+1)^2}{s}.$$

نجد أن حل المعادلة السابقة يصبح حل معادلة من الرتبة الأولى حيث:

$$Y(s) \frac{(s+1)^2}{s} = \int -\frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{s} + C,$$

ومن

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + C \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^2} + C \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right)$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نحصل على:

$$y(t) = te^{-t} + C(e^{-t} - te^{-t}).$$

من خلال الشروط الابتدائية، نعلم أن $y(0) = 0$ ومنه

$$y(0) = 0 + C(1 - 0) \implies C = 0.$$

في الأخير، نحصل على الحل التالي:

$$y(t) = te^t.$$

2.6 حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويل لابلاس

إيجاد حلول المعادلات التفاضلية الجزئية يكون أكثر صعوبة مما هو عليه في المعادلات التفاضلية العادية. في هذه الحالة، يمكن تطبيق تحويل لابلاس لتبسيط المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية عادية.

لتكن $u = u(x, t)$ عبارة عن معادلة تفاضلية جزئية بدلالة المتغيرين x و t لنفرض أن الدالة $U(x, s)$ تمثل تحويل لابلاس للدالة $u(x, t)$ ومنه يعطى تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية الجزئية على النحو التالي:

$$U(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t)\} = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt.$$

حيث يكون المتغير x عبارة عن ثابت ولا يتعلق بعبارة التكامل.

مثال 1.6.2 أحسب تحويل لابلاس للمعادلة التالية:

$$u(x, t) = x \sin(t)$$

الحل:

لدينا:

$$U(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t)\} = \mathcal{L}\{x \sin(t)\} = x \mathcal{L}\{\sin(t)\},$$

ومن

$$U(x, s) = \frac{x}{s^2 + 1}.$$

خاصية 1.6.2

لحساب تحويل لابلاس لمشتقة الدالة $u(x, t)$ بدلالة المتغير x نجد:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} e^{-st} dt,$$

بما أن التكامل يكون بالنسبة للمتغير t ، يمكننا إخراج التفاضل الجزئي بالنسبة للمتغير x خارج التكامل تصبح:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}\{u(x, t)\}.$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right\} = \frac{\partial U(x, s)}{\partial x}.$$

ومنه، يمكن القول أن تحويل لابلاس للمشتقة بدلالة المتغير x تمثل اشتقاق تحويل لابلاس بدلالة نفس المتغير .

بنفس الطريقة نجد تحويل لابلاس للمشتقة الثانية للدالة $u(x, t)$ بدلالة المتغير x

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right\} &= \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-st} dt, \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt, \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{u(x, t)\}, \end{aligned}$$

ومنه

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2}.$$

خاصية 2.6.2

لحساب تحويل لابلاس لمشتقة الدالة $u(x, t)$ بدلالة المتغير t نجد:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right\} &= s\mathcal{L}\{u(x, t)\} - u(x, 0), \\ &= sU(x, s) - u(x, 0). \end{aligned}$$

وذلك من خلال نظرية الاشتقاق لتحويل لابلاس .
بنفس الطريقة نجد أن:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\right\} &= s^2 \mathcal{L}\{u(x, t)\} - su(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}, \\ &= s^2 U(x, s) - su(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}. \end{aligned}$$

◁ إن حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستعمال تحويل لابلاس يرجع إلى تطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة، و ينتج عنه معادلة تفاضلية عادية بدلالة المتغير x

◁ نرمر للتفاضلات على النحو التالي:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = u_x$$

بالنسبة للمعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$$

بالنسبة للمعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية.

مثال 2.6.2 حل المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى التالية:

$$u_t = u_x \quad (2.16)$$

حيث $x \geq 0$ و $t > 0$.

الشروط الابتدائية معطاة على النحو التالي:

$$\begin{cases} u(x, 0) = x. \\ u(0, t) = t. \end{cases}$$

الحل:

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة 2.16 نجد:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$$

و باستعمال الخاصيتين السابقين ينتج عنه:

$$\frac{d}{dx} U(x, s) = sU(x, s) - u(x, 0),$$

بتعويض قيمة الشرط الابتدائي الأول نجد:

$$\frac{d}{dx} (U(x, s)) - sU(x, s) = -x, \quad (2.17)$$

الناجى عبارة عن معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.

معامل التكميل فى هذه الحالة هو $e^{\int -s dx} = e^{-sx}$ و منه

$$e^{-sx} \frac{d}{dx} U(x, s) - se^{-sx} U(x, s) = -xe^{-sx},$$

أي أن:

$$\frac{d}{dx}[e^{-sx}U(x, s)] = -xe^{-sx},$$

ومنه

$$e^{-sx}U(x, s) = - \int xe^{-sx}dx,$$

لحساب التكامل الناتج نستعمل طريقة التكامل بالتجزئة فنجد:

$$\int xe^{-sx}dx = -\frac{x}{s}e^{-sx} + \frac{1}{s} \int e^{-sx}dx,$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد:

$$\begin{aligned} e^{-sx}U(x, s) &= \frac{x}{s}e^{-sx} - \frac{1}{s} \int e^{-sx}dx, \\ &= \frac{x}{s}e^{-sx} + \frac{1}{s^2}e^{-sx} + c. \end{aligned}$$

حيث أن c يمثل ثابت التكامل.

باختزال معامل التكميل e^{-sx} من الطرفين يصبح الحل من الشكل:

$$U(x, s) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2} + ce^{sx} \quad (2.18)$$

من خلال الشرط الابتدائي الثاني لدينا $u(0, t) = t$ بتطبيق تحويل لابلاس نجد:

$$U(0, s) = \mathcal{L}\{u(0, t)\} = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

من جهة أخرى ومن خلال المعادلة 2.18 المتحصل عليها فإن:

$$U(0, s) = \frac{1}{s^2} + c,$$

بالمطابقة بين النتيجتين الأخيرتين نجد أن $c = 0$ ومنه

$$U(x, s) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}$$

بحساب تحويل لابلاس العكسي

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(x, s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}\right\},$$

بما أن x مستقلة عن المتغير t ، ومنه نجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية كما يلي:

$$u(x, t) = x + t.$$

باب 3

الحساب الكسري

يُركز هذا الباب على أساسيات التكامل والاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل و كابوتو، مع التطرق الى بعض الدوال الخاصة المستخدمة في هذا المجال .حيث اعتمدنا على المراجع التالية: [9] و [10] و [7].

3.1 تعاريف أساسية

3.1.1 الفضاء $L([a, b])$

1- نرسم بالرمز $L_p(I, \mathbb{R})$ ، حيث $1 \leq p < \infty$ ، لمجموعة جميع الدوال القيوسة ل $x(t)$ lesbegue، ذات القيم الحقيقية بشكل عام، والتي تحقق:

$$\int_I |x(t)|^p dt < \infty.$$

مزودة بالنظيم:

$$\|x\|_p = \left(\int_I |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2- بالنسبة ل $p = 1$ ، يتم تعريف الفضاء $L_1(I, \mathbb{R})$ على أنه جميع الدوال القيوسة ل $x(t)$ lesbegue ذات النظيم المحدود:

$$\|x\|_{L_1} = \int_I |x(t)| dt.$$

3.1.2 الفضاء $AC([a, b])$

1- ليكن $AC([I, \mathbb{R}])$ هو فضاء الدوال المستمرة بشكل مطلق على $K[a, b]$ من المعروف أن $AC([a, b])$ يتطابق مع فضاء الدوال الأصلية لدوال القابلة للعد:

$$x \in AC([a, b]) \iff x(t) = c + \int_a^t \varphi(s) ds \quad (\varphi \in L_1[a, b]),$$

2- لكل $n \in \mathbb{N}$ ، نرسم بالرمز $AC^n([a, b])$ لفضاء الدوال ذات القيم الحقيقية x التي لها مشتقات مستمرة حتى الرتبة $(n-1)$ على $[a, b]$ ، أي أن $x^{(n-1)} \in AC[a, b]$:

$$AC^n([a, b]) = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x^{(n-1)} \in AC([a, b])\}.$$

يتكون الفضاء $AC^n([a, b])$ من الدوال التي يمكن كتابتها بالصيغة التالية:

$$x(t) = (I_a^n \varphi)(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i.$$

حيث $\varphi \in L_1([a, b])$ و $c_i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ هي ثوابت اختيارية.

3.2 بعض الدوال الخاصة

3.2.1 الدالة غاما

1.2.3 تعريف

من أجل كل $x > 0$ ، نعرف الدالة غاما كما يلي:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx, \quad \forall n \in \mathbb{R}.$$

1.2.3 مثال

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{-1/2} dx,$$

بتغيير المتغير نضع $x = \frac{1}{2}t^2$ نحصل على $dx = t dt$ و التكامل بالتجزئة نجد

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

خواص الدالة غاما

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!, \quad \forall n > 0. \quad .1$$

$$\Gamma(1) = 1. \quad .2$$

3.2.2 الدالة بيتا

2.2.3 تعريف

من أجل $p, q > 0$ ، نعرف الدالة بيتا بالشكل التالي:

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

2.2.3 مثال

$$\beta(3, 4) = \int_0^1 t^{3-1} (1-t)^{4-1} dt, \quad \text{لحساب } \beta(3, 4) \text{ نقوم بـ :}$$

$$= \int_0^1 t^2 (1-t)^3 dt,$$

$$= \int_0^1 t^2 (1 - 3t + 3t^2 - t^3) dt,$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^4}{4} + \frac{3t^5}{5} - \frac{t^6}{6} \right]_0^1,$$

$$= \frac{1}{60}.$$

خواص الدالة بيتا

- $\beta(p, q) = \beta(q, p)$.1
- $\beta(p, q + 1) = \frac{q}{p} \beta(p + 1, q)$.2
- $\beta(p + 1, q) = \frac{p}{p+q} \beta(p, q)$.3

1.2.3 خاصية

علاقة الدالة بيتا مع الدالة غاما هي:

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad \beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

3.2.3 دالة ميتاغ ليفلر

3.2.3 تعريف

يطلق على الدالة ميتاغ ليفلر ذات المعلم الواحد الدالة المعرفة ب:

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, x \in \mathbb{R}.$$

مثال 3.2.3 لحساب $E_1(x)$ نقوم ب:

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

4.2.3 تعريف

يطلق على الدالة ميتاغ ليفلر ذات المعلمين الدالة المعرفة ب:

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, x, \beta \in \mathbb{R}.$$

4.2.3 مثال

لحساب $E_{1,2}(x)$ نقوم ب:

$$\begin{aligned} E_{1,2}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{e^{x-1}}{x}. \end{aligned}$$

3.2.1 ملاحظات

1- إذا كانت $\alpha = 1$ و $\beta = 1$ فإن: $E_{1,1}(x) = E_1(x)$

2- إذا كان $\beta = 1$ فإن $E_{\alpha,1}(x) = E_\alpha(x)$

3.3 التكامل الكسري

1.3.3 تعريف

لتكن $f \in L^1([a, b])$ ، تكامل الدالة f من الرتبة الكسرية α حيث $\alpha > 0$ بمفهوم ريمان ليوفيل يرمز لها بـ $I_a^\alpha f$ ، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a.$$

1.3.3 مثال

1. لدينا:

$$f(x) = (x-a)^\beta, \quad \beta > -1.$$

$$I_a^\alpha f(x) = I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt,$$

نضع: $t = a + (x-a)y$ ومنه $y = \frac{t-a}{x-a}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1} (1-y)^{\alpha-1} (x-a)^{\beta+1} y^\beta dy, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha+\beta} (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy, \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1), \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta} \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}. \end{aligned}$$

3.3.1 خصائص التكامل الكسري

خاصية 01

إذا كان $\alpha > 0$ و f, g دالتين قابلتين للتكامل فإن:

$$I_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 I_a^\alpha f(x) + c_2 I_a^\alpha g(x).$$

برهان

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(c_1f(x) + c_2g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-t}(c_1f(t) + c_2g(t)) dt, \\
&= c_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-t} f(t) dt + c_2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-t} g(t) dt, \\
&= c_1 I_a^\alpha f(x) + c_2 I_a^\alpha g(x).
\end{aligned}$$

خاصية 02

من أجل $\alpha > 1$ ، لدينا:

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-1} f(x).$$

برهان

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} I_a^\alpha f(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right), \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dx} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t) dt,
\end{aligned}$$

بما أن:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1),$$

فإن:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t) dt &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t) dt, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt, \\
&= I_a^{\alpha-1} f(x).
\end{aligned}$$

3.4 الإشتقاق الكسري

3.4.1 الإشتقاق الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل

تعريف 1.4.3

لتكن الدالة $f \in L^1([a, b])$ ، المشتق الكسري من الرتبة $\alpha > 0$ للدالة f بمفهوم ريمان ليوفيل و الذي يرمز له بالرمز ${}^R D_a^\alpha$ ، يعطى بالصيغة:

$$\begin{aligned}
{}^R D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \\
&= \left(\frac{d}{dx} \right)^n [I_a^{n-\alpha} f(x)].
\end{aligned}$$

حيث: $n = [\alpha] + 1$

3.4.1 ملاحظات

1. إذا كان α عددا صحيحا موجبا و $\alpha = n$ حيث فإن:

$$({}^R D_a^\alpha f)(x) = f^{(n)}(x).$$

2. إذا كان $0 < \alpha \leq 1$ ، فإن $n = 1$ ومنه

$$({}^R D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt.$$

3. المشتقة الكسرية بمفهوم ريمان ليوفيل للثابت هي

$$\forall C \in R, {}^R D_a^\alpha C = \frac{Cx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

حيث $0 < \alpha < 1$

1.4.3 مثال

لتكن الدالة

$$f(x) = (x-a)^\beta, \beta > -1$$

المشتق الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل للدالة $f(t)$ من أجل $n-1 \leq \alpha < n$ هو

$${}^R D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^\beta dt.$$

بما أن:

$$I_a^{n-\alpha} (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} (x-a)^{\beta+n-\alpha-1},$$

فإن:

$$\begin{aligned} {}^R D_a^\alpha f(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} (x-a)^{\beta+n-\alpha} \right], \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} (x-a)^{\beta+n-\alpha} \right], \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1) \dots (\beta-\alpha+1) (x-a)^{\beta-\alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}, \end{aligned}$$

بالتالي:

$${}^R D_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}.$$

خواص الاشتقاق الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل

خاصية 01

من أجل الدالتين $f, g \in L^1([a, b])$ والثابتين c_1, c_2 فإن:

$${}^R D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 {}^R D_a^\alpha f(x) + c_2 {}^R D_a^\alpha g(x).$$

برهان:

$$\begin{aligned} {}^R D_a^\alpha (c_1 f(x) + c_2 g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} (c_1 f(t) + c_2 g(t)) dt, \\ &= c_1 \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f(t) dt, \\ &\quad + c_2 \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} g(t) dt, \\ &= c_1 {}^R D_a^\alpha f(x) + c_2 {}^R D_a^\alpha g(x). \end{aligned}$$

خاصية 02

لدينا الدالة $f \in L^1([a, b])$ حيث $\alpha > 0$ فإن:

$${}^R D_a^\alpha \circ I_a^\alpha (f(x)) = f(x).$$

برهان

$$\begin{aligned} {}^R D_a^\alpha \circ I_a^\alpha (f(x)) &= {}^R D_a^\alpha (I_a^\alpha f(x)), \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^{n - \alpha} (I_a^\alpha f(x)), \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_a^{n - \alpha + \alpha} f(x)), \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^n f(x), \\ &= f(x) \end{aligned}$$

حالة عامة

1. من أجل $f \in L^1([a, b])$ حيث $\alpha, \beta \geq 0$ فإن:

$${}^R D_a^\alpha \circ I_a^\beta f(x) = {}^R D_a^{\alpha - \beta} f(x).$$

2. إذا كان $0 < \alpha \leq \beta$ فإن:

$$({}^R D_a^\alpha \circ {}^R D_a^\beta) f(x) = (I_a^{\beta - \alpha}) f(x).$$

3.4.2 الاشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو

2.4.3 تعريف

لتكن الدالة $f \in AC^1([a, b], R)$ ، المشتق الكسري من الرتبة $\alpha > 0$ للدالة f بمفهوم كابوتو و الذي يرمز له بالرمز ${}^c D_a^\alpha$ هو:

$${}^c D_a^\alpha f(x) = \left(D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (x).$$

حيث $n = [\alpha] + 1$

حيث D_a^α هي المشتق الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل ويمكن أيضا كتابته على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \\ &= I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dx} f(x) \right)^n. \end{aligned}$$

حيث: $n = [\alpha] + 1$

3.4.2 ملاحظات

1. إذا كان α عددا صحيحا موجبا و $\alpha = n$ حيث فإن:

$$({}^c D_a^\alpha f)(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a).$$

2. إذا كان $0 < \alpha < 1$ فإن:

$$({}^c D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha} f'(t) dt.$$

مثال 2.4.3 لتكن الدالة:

$$f(x) = (x-a)^\beta, \beta > -1$$

لدينا:

$$f^{(n)}(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x (x-a)^{n-\alpha-1},$$

إذن:

$${}^c D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha+1} (t-a)^{\beta-n},$$

بوضع $t = a + s(t - a)$ نجد:

$$\begin{aligned}
{}^c D_a^\alpha (x - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha + 1} (t - a)^{\beta - n} dt, \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha} \int_0^1 (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^{\beta - \alpha}, \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)\beta(n - \alpha, \beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}, \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}, \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha}.
\end{aligned}$$

ملاحظة 1.4.3

المشتقة الكسرية بمفهوم كابوتو للثابت هي الصفر $\forall C \in R, {}^c D_a^\alpha C = 0$

باب 4

تطبيقات تحويل لابلاس في الحساب
الكسري

درسنا في هذا الباب تطبيق تحويل لابلاس على الحساب الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل و كابوتو مع حل مسائل كسرية من أجل $0 \leq \alpha < 1$ و $1 \leq \alpha < 2$, وذلك بالإعتماد على المراجع التالية: [3] و [7] و [10].

4.1 تحويل لابلاس للتكامل الكسري

التكامل الكسري، يمكن كتابته على شكل إلتفاف الدالتين $g(x) = x^{\alpha-1}$ و $f(x)$ حيث:

$${}^R I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = (x^{\alpha-1} * f(x)), \quad \alpha > 0.$$

لدينا تحويل لابلاس للدالة $x^{\alpha-1}$ من [8] هو:

$$G(s) = \mathcal{L}\{x^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}.$$

أخيراً، بإستعمال علاقة تحويل لابلاس للإلتفاف، نتحصل على تحويل لابلاس للتكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل

$$\mathcal{L}\{I^\alpha f(x)\} = s^{-\alpha} F(s).$$

4.2 تحويل لابلاس للإشتقاق الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل

من أجل الحصول على تحويل لابلاس للمشتق الكسري ذي رتبة صحيحة بمفهوم ريمان ليوفيل للدالة $f(x)$ نفرض

$${}^R D_a^\alpha f(x) = g^{(n)}(x),$$

و منه

$$g(x) = {}^R D_a^{-(n-\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f(t) dt,$$

حيث $n-1 \leq \alpha < n$ بإستعمال تحويل لابلاس للمشتقات نجد:

$$\mathcal{L}\{{}^R D_a^\alpha f(x)\} = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0), \quad (4.1)$$

حيث:

$$G(s) = F(s)s^{-(n-\alpha)}, \quad (4.2)$$

و من تعريف مشتقة ريمان ليوفيل الكسرية نحصل على:

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{(n-k-1)}}{dt^{(n-k-1)}} {}^R D_a^{-(n-\alpha)} f(t) = {}^R D_a^{-(\alpha-k-1)} f(t), \quad (4.3)$$

بتعويض 4.2 و 4.3 في 4.1 نجد الصيغة النهائية لتحويل لابلاس للمشتقة الكسرية لريمان ليوفيل من الرتبة $0 < \alpha$

$$\mathcal{L}\{{}^R D_a^\alpha f(x)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}^R D_a^{\alpha-k-1} f(t)]|_{t=0}.$$

نتيجة 1.2.4

من أجل $n = 1$ و $n = 2$ نجد:

$$\mathcal{L}\{{}^R D^\alpha f(x)\} = s^\alpha F(s) - {}^R D^{(\alpha-1)} f(0), \quad 0 \leq \alpha < 1. \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}\{{}^R D^\alpha f(x)\} = s^\alpha F(s) - {}^R D^{(\alpha-1)} f(0) - s {}^R D^{(\alpha-2)} f(0), \quad 1 \leq \alpha < 2. \quad (4.5)$$

4.3 تحويل لابلاس للإشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو

لإثبات صيغة تحويل لابلاس لمشتقة كابوتو الكسرية لدينا:

$${}^c D_a^\alpha f(x) = I^{(n-\alpha)}(x),$$

$$g(x) = f^{(n)}(x), \quad n-1 < p \leq n,$$

بإستخدام صيغة تحويل لابلاس للتكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل نحصل على:

$$\mathcal{L}\{{}^c D_a^\alpha f(x)\} = s^{-(n-\alpha)} G(s), \quad (4.6)$$

حيث:

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \quad (4.7)$$

بتعويض 4.7 في 4.6 نجد صيغة تحويل لابلاس لمشتقة كابوتو الكسرية

$$\mathcal{L}\{{}^c D_a^\alpha f(x)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

4.4 تحويل لابلاس لبعض الدوال

نلخص في الجدول التالي تحويل لابلاس لبعض الدوال ذات القوى الكسرية حيث $a \neq b$ و $\alpha, \beta \neq 0$

$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-at}$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s^\alpha(s^\alpha + a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s^\alpha(s^\alpha + a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s^\alpha - a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$

4.5 تطبيقات تحويل لابلاس على المعادلات التفاضلية الكسرية

4.5.1 تطبيق تحويل لابلاس على المعادلات التفاضلية الكسرية بمفهوم ريمان ليوفيل

مثال 1.5.4

نعتبر المعادلة التفاضلية الكسرية التالية:

$${}^R D^{\frac{2}{3}} y(t) = ay(t). \quad (4.8)$$

حيث ${}^R D^{\frac{2}{3}}$ هي المشتقة الكسرية لريمان ليوفيل من الرتبة $\alpha = \frac{2}{3}$ و $0 \leq \alpha < 1$ و a عدد ثابت. باستعمال النتيجة 4.4 و بإدخال تحويل لابلاس على طرفي المعادلة نجد:

$$\mathcal{L}\{{}^R D^{\frac{2}{3}}\} = a\mathcal{L}\{y(t)\},$$

ومنهُ

$$s^{\frac{2}{3}} Y(s) - {}^R D^{-(1-\frac{2}{3})} y(0) = aY(s),$$

الثابت ${}^R D^{-(1-\frac{2}{3})} y(0) = {}^R D^{-\frac{1}{3}} y(0)$ هو القيمة ${}^R D^{-\frac{1}{3}} y(t)$ عند $t = 0$ إذا افترضنا أن هذه القيمة موجودة، و هي c_1 فإن:

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}$$

ومنهُ نجد:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a} \right\}, \\ &= c_1 t^{-\frac{1}{3}} E_{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}}(at^{\frac{2}{3}}). \end{aligned}$$

مثال 2.5.4

لتكن المعادلة التفاضلية الكسرية التالية:

$${}^R D^{\frac{4}{3}} y(t) = 0.$$

حيث ${}^R D^{\frac{4}{3}}$ هي المشتقة الكسرية لريمان ليوفيل من الرتبة $\alpha = \frac{4}{3}$ و $1 \leq \alpha = \frac{4}{3} < 2$ بإستعمال 4.5 و بتطبيق تحويل لابلاس نجد:

$$\mathcal{L}\{{}^R D^{\frac{4}{3}} y(t)\} = 0$$

ومنهُ

$$s^{\frac{4}{3}} Y(s) - s^R D^{-(2-\frac{4}{3})} y(0) - {}^R D^{-(1-\frac{4}{3})} y(0) = 0$$

بفرض أن ${}^R D^{-(1-\frac{4}{3})} y(0)$ و ${}^R D^{-(2-\frac{4}{3})} y(0)$ ثابت نضعها c_1, c_2 على التوالي نجد أن:

$$s^{\frac{4}{3}} Y(s) - s c_1 - c_2 = 0$$

ومنهُ

$$Y(s) = \frac{c_1 s}{s^{\frac{4}{3}}} + \frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}}$$

و عليه:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{c_1}{s^{\frac{4}{3}}} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}} \right\}, \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(\frac{1}{3})} t^{-\frac{2}{3}} + \frac{c_2}{\Gamma(\frac{4}{3})} t^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

4.5.2 تطبيق تحويل لابلاس على المعادلات التفاضلية الكسرية بمفهوم كابوتو

مثال 3.5.4

حل باستعمال تحويل لابلاس ما يلي:

$$\begin{cases} {}^c D^2 y(t) + 2 {}^c D^{\frac{3}{2}} y(t) + 2y(t) = 8t^5, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

حيث ${}^c D$ هي المشتقة الكسرية لكابوتو .

لحل المسألة نحتاج إلى التوطئة التالية :

توطئة 1.5.4

$$|s^\alpha + a s^\beta| > |b|, |s^{\alpha-\beta}| > |a|, a \in \mathbb{R}, \alpha > \gamma, \alpha \geq \beta$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^\gamma}{s^\alpha - a s^\beta + b} \right\} = t^{\alpha-\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^n (-a)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k(\alpha-\beta) + (n+1)\alpha - \gamma)} t^{k(\alpha-\beta) + n\alpha}. \quad (4.9)$$

الحل

ندخل تحويل لابلاس على طرفي المعادلة فنجد:

$$\mathcal{L}\{ {}^c D^2 y(t) + 2 {}^c D^{\frac{3}{2}} y(t) + 2y(t) \} = \mathcal{L}\{8t^5\},$$

باستعمال خاصية المشتقة للابلاس:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2 \left(\frac{s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)}{s^{\frac{1}{2}}} \right) + 2Y(s) = \frac{8 \times 5!}{s^6}$$

من الشروط الابتدائية فإن:

$$s^2 Y(s) + 2 \frac{s^2 Y(s)}{s^{\frac{1}{2}}} + 2Y(s) = \frac{8 \times 5!}{s^6}$$

أي:

$$Y(s)(s^2 + 2s^{\frac{3}{2}} + 2) = \frac{8 \times 5!}{s^6}$$

ومنه

$$Y(s) = \frac{8 \cdot 5!}{s^6(s^2 + 2s^{\frac{3}{2}} + 2)}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{8 \times 5!}{s^6(s^2 + 2s^{\frac{3}{2}} + 2)} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^6(8 \times 5!)}{(s^2 + 2s^{\frac{3}{2}} + 2)} \right\}$$

بتطبيق التوطئة 4.9 و بأخذ $\alpha = 2$, $\beta = \frac{3}{2}$, $\gamma = -6$ نجد:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{8 \times 5! s^{-6}}{(s^2 + 2s^{\frac{3}{2}} + 2)} \right\} = 8 \times 5! t^7 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^n (2) \binom{n+k}{k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k + 2(n+1) + 6)} t^{\frac{1}{2}k + 2n}.$$

خاتمة

يعد تحويل لابلاس إستجابة ضرورية لحاجة ماسة في الرياضيات التطبيقية وهو يعتبر أداة فعالة في حل المعادلات التفاضلية، حيث كانت حلول هذه المعادلات تستغرق جهد ووقت كبيرين، لهذا حاولنا في مذكرتنا تسليط الضوء على تطبيق تحويل لابلاس في حل بعض المعادلات التفاضلية. حيث قدمنا في الباب الأول مفاهيم عامة حول تحويل لابلاس و تحويله العكسي، أما في الباب الثاني سلطنا الضوء على المعادلات التفاضلية العادية والجزئية و تطبيق تحويل لابلاس في حلها، و بالنسبة للباب الثالث فقد عرضنا بعض المفاهيم الخاصة بالحساب الكسري مثل التكامل الكسري و كذلك الإشتقاق الكسري بمفهومي ريمان ليوفيل و كابوتو، و أخيرا في الباب الرابع تطرقنا فيه لحل المعادلات التفاضلية الكسرية باستخدام تحويل لابلاس .

المصادر

- [1] O. S. Adewale, Laplace Transform Method for Solving Differential Equations, Academia.edu, 2009.
- [2] R. P. Agarwal and D. O'Regan, Ordinary and Partial Differential Equations: With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems, New York: Springer, 2009.
- [3] K. Bekaddour, Transformée de Laplace et Applications aux Équations Différentielles Fractionnaires, Mémoire de Master, Université de Saïda, 2017.
- [4] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 9th ed., New York: John Wiley Sons, 2009.
- [5] G. Demengel, Transformation de Laplace : Théorie et illustrations par les exemples, Paris: Éditions Ellipses, 2002.
- [6] P. Dyke, An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series, 2nd ed., London: Springer, 2014.
- [7] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 2006.
- [8] A. Lesfari, Distributions, Analyse de Fourier et Transformation de Laplace, Casablanca: Imprimerie El Maarif Al Jadida, 2016.
- [9] C. Milici, G. Drăgănescu, and J. Tenreiro Machado, Introduction to Fractional Differential Equations. Cham: Springer, 2019.
- [10] I. Podlubny, Fractional Differential Equations. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1999.
- [11] M. R. Spiegel, Laplace Transforms, New York: McGraw-Hill, 1965.

- [12] ح. م. العويضي، ع. و. ع. رجب، وس. ع. زارع، المعادلات التفاضلية - الجزء الأول، الرياض: مكتبة الرشد، 2006.
- [13] ز. الأمير، م. بسوت ليش، و م. كردي، المعادلات التفاضلية - الجزء الأول، حلب: منشورات جامعة حلب، سنة النشر غير محددة.
- [14] س. أ. سحاب، مقدمة في المعادلات التفاضلية، جدة: مركز النشر العلمي، جامعة الملك عبد العزيز، 1992.
- [15] د. عبد الكريم بوعكاك، نظرية وتطبيقات تحويل لابلاس، الطبعة الثانية، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
- [16] م. أ. كتيبي و م. أ. كتيبي، المرشد لحل المعادلات التفاضلية العادية، الرياض: كنوز المعرفة، 1999.

الملخص:

قنا في هذه المذكرة بدراسة الأسس النظرية لتحويل لابلاس وتحويله العكسي و خصائصه، إضافة الى ذلك تم التطرق الى المعادلات التفاضلية العادية و المعادلات التفاضلية الجزئية ، كما شملت هذه المذكرة التكامل الكسري و الإشتقاق الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل و كابوتو الى جانب تطبيق تحويل لابلاس على المعادلات التفاضلية و الحساب الكسري .

كلمات مفتاحية:

تحويل لابلاس، تحويل لابلاس العكسي، المعادلات التفاضلية العادية، المعادلة التفاضلية الخطية، المعادلة التفاضلية الجزئية، الحساب الكسري، المعادلات التفاضلية الكسرية.