الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientfiique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي- سكيكدة
Ecole Normale Supérieure d'enseignement technologique-Skikda

Département de Mathématiques et informatique | قسم الرياضيات والإعلام الآلي

مُذكّرَة تخَرج لنيَل شهَادة أُستَاذ التَّعلِيم الثانوي

متراجحات معممة من نوع Hermite-Hadamard

من إعداد :

★ بن سعدي وليد

★ بداحي محمد شرف الدين

تحت إشراف الأستاذة :

★ بن سعد مريم

من طرف لجنة المناقشة :

♦ قواسمية عقبة .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... رئيس.

♦ بن سعد مريم .... أستاذة بجامعة 08 ماي 1945 قالمة .... مشرفة.

♦ بن حيونة صالح .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... مناقشا.

♦ غمراني سارة .... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة .... مناقشة.

السنة الجامعية : 2024/2023

دفعة جوان 2024

❖ شكـــر وعرفـــان

بعد أن وفقنا الله عز وجل للقيام بهذا المجهود المتواضع.

نتوجه بفائق الشكر والتقدير وخالص إمتناناإلى الأستاذة المشرفة على هذه المذكرة بن سعد مريم على جهدها الجهيد وتوجيهها الرشيد وصبرها الجميل على نهل العلم والمعرفة على يديها.

كما يملي علينا واجب الإعتراف بالفضل أن نتقدم بالشكر الجزيل إلى كل الأساتذة الذين أشرفوا على عملية التكوين خلال هذه المرحلة لما قدموه من مجهودات معتبرة لتزويد المتمدرسين بالعلوم والمعارف كل حسب إختصاصه ولم يبخلوا عليهم بالنصائح والتوجيهات القيمة.

﴿ اللهم تقبل هذا العلم منا واجعل كل حرف وكلمة ندرسها خالصة لوجهك الكريم ﴾

❖ إهــداء

الحمد لله الذي وفقني لإنجاز هذا العمل المتواضع

أتوجه بشكري ......

إلى تلك المرأة العظيمة التي ربت وعلمت لطالما نظرت لعينيها لاستمد منها قوتي لإكمال مسيرتي العلمية تقف الكلمات عاجزة عن شكرك يا حبيبة إلى أمي الحنونة والغالية .

إلى من ساعدني ودعمني طوال مرحلتي الدراسية أبي حفظه الله ورعاه.

إلى مصدر سعادتي اخواني .

إلى أعز الأصدقاء الذي كان عونا لي في اكمال الدراسة بحلوها ومرها بداحي محمد شرف الدين .

إلى من حفروابصورهم الرقيقة على جدران قلبي ذكرى لم يمحوها غبار زملائي وأصدقائي الطيبون .

إلى جميع أساتذتي الكرام وأخص بالذكر منهم المشرفة على مذكرتي الأستاذة بن سعد مريم التي أفادتني بنصائحها وإرشاداتها القيمة .

إلى من نساه قلمي و لم ينسه قلبي أهدي ثمرة جهدي.

بن سعدي وليد

❖ إهــداء

الحمد لله و الصلاة و السلام على سيدنا محمد المصطفى الأمين و نحمد الله حمداجزيلا
الذي وفقنا في مشوار دراستنا أهدي ثمرة جهدي المتواضع
إلى من وهبوني الحياة والأمل، والنشأة على شغف الاطلاع والمعرفة، ومن علموني
أن أرتقي سُلّم الحياة بحكمة وصبر،برا وإحسانا ووفاءً لهما والدي العزيز، ووالدتي
العزيزة .
إلى من وهبني الله نعمة وجودهم في حياتي إلى العقد المتين من كانوا عونا لي في
رحلة بحثي: إخواني وأخواتي .
إلى من كاتفني ونحن نشق الطريق معا نحو النجاح في مسيرتنا العلمية رفيقي بن
سعدي وليد .
وأخيرًا إلى كل من ساعدني، وكان له دور من قريب أو بعيد في إتمام هذه الدراسة
سائلا المولى أن يجزي الجميع خير الجزاء في الدنيا والآخرة .

بداحي محمد شرف الدين

الفَهرَس

الفصل 4

متراجحات معممة من نوع Hermite-Hadamard 26

مقـــدّمة

تلعب المتراجحات دورا مهما في فروع الرياضيات الحديثة مثل نظرية فضاءات هيلبرت والإحتمالات والإحصاء والتحليل الحقيقي والتحليل المركب والتحليل العددي وكذلك النظرية النوعية للمعادلات التفاضلية والمعادلات التفاضلية وغيرها، فهي أداة قوية ولا غنى عنها.

تم إنشاء الأسس النظرية لهذه النظرية جزئيا خلال القرنين الثامن عشر والتاسع عشر من قبل علماء رياضيين بارزين مثل غوص وكوشي وتشيبيشيف .

جذب هذا الموضوع إهتمام العديد من الباحثين منهم بوانكاريه ولابونوف وجرونوال وهولدر وهادامار وبوليا وبيلمان وأوستروسكي.

كما أن التحدب وتطبيقاته والدوال المحدبة هو موضوع استحق الدراسة ومن الباحثين الذين درسوا هذا الموضوع خلال القرن العشرين V.jensen ، هيرميت، هولدر وستولز حيث كان لهم نشاط بحثي مكثف في هذا المجال وتم الحصول على نتائج مهمة في التحليل الوظيفي الهندسي، الإقتصاد الرياضي والتحليل المحدب ....

كل هذا لعب دور مهم للترويج لموضوع الدوال المحدبة ونذكر من العلماء البارزين فيه G.H.Hards، J.E.Littlewood وG.Polya

هنالك نوعان من الدوال المحدبة استخدمت على نطاق واسع في الرياضيات النظرية والتطبيقية.

حيث صدرت في السنوات الأخيرة عدة كتب بارزة ومكرسة للنظرية المحدبة وتطبيقات للدوال المحدبة من مؤلفيها نذكر L.H.Ormander الذي عرض مفاهيم التحدب من وجهة النظر الحديثة .

في هذه المذكرة تناولنا موضوع المتراجحات المعممة من نوع Hermite-Hadamard حيث تم تقسيمها إلى أربع فصول :

-الفصل الأول: تضمن هذا الفصل بعض المفاهيم والتعريفات الأساسية التي نعتمد عليها في هذا البحث.

-الفصل الثاني: تطرقنا في هذا الفصل إلى مجموعة من التعاريف حول التحدب

وأنواعه مع ذكر المصطلحات الشهيرة حول تكاملات ريمان-ليوفيل.

-الفصل الثالث :في هذا الفصل قمنا بالتذكير بمتباينة هارميد-هادامار ومتباينة دراغومير ، بالإضافة إلى إنشاء متطابقة تكاملية والبرهان على صحتها.
-الفصل الرابع: قمنا في هذا الفصل بإستخدام المتطابقة التكاملية لإستخراج مجموعة من المتراجحات المعممة من نوع Hermite-Hadamard.

الفصل 1

مفاهيم أساسية

1.1 عموميات على الفضاء $\mathbb{R}^n$

الفضاء $\mathbb{R}^n$ هو الجداء الديكارتي لـ $\mathbb{R}$ ، n مرة ، أي:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ مرة}}$$

و نكتب :

$$\mathbb{R}^n = \Big\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, \cdots, n \Big\}$$

ملاحظة

$\mathbb{R}^n$ هو فضاء شعاعي بعده n $\big(\dim \mathbb{R}^n = n\big)$ على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

◄ هناك مفهوم معرف على $\mathbb{R}^n$ يعمم مفهوم القيمة المطلقة المعرفة على $\mathbb{R}$ يسمى نظيما. لكننا في $\mathbb{R}$ نجد قيمة مطلقة واحدة في حين يمكن تعريف أكثر من نظيم على $\mathbb{R}^n$.

1.1.1 تعريف النظيم

تعريف 1.1.1

نسمي نظيما على $\mathbb{R}^n$ كل تطبيق $\|.\| : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ يحقق الشروط التالية:

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- 3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

◄ الفضاء $\mathbb{R}^n$ مزود بالنظيم يسمى فضاءا نظيميا و يرمز إليه بالثنائية $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$.

◄ النظيمات المألوفة على $\mathbb{R}^n$: من أجل كل $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ من $\mathbb{R}^n$ نضع:

- 1) نظيم القيمة المطلقة على $\mathbb{R}^n$ نعرفه بـ:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

- 2) النظيم الإقليدي على $\mathbb{R}^n$ نعرفه بـ:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- 3) نظيم الحد الأعلى على $\mathbb{R}^n$ نعرفه بـ:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|).$$

ملاحظة

هذه النظيمات متكافئة.

2.1 التوابع متعددة المتغيرات الحقيقية

تعريف 1.2.1

ليكن D جزء غير خالي من $\mathbb{R}^n$. نقول أن f تابعا ذو n متغير حقيقيا إذا كان يرفق بكل عنصر $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ قيمة حقيقية وحيدة $y \in \mathbb{R}$، و نرمز لها بـ: $f(x)$. و نكتب:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

◄ حالات خاصة:

◄ الحالة الأولى : من أجل $n = 2$

تعريف 2.2.1

نقول أن f تابعا ذو متغيرين حقيقيين، إذا كان يرفق بكل ثنائية $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ قيمة حقيقية وحيدة ، نرمز لها بـ: $f(x, y)$. و نكتب:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to f(x, y).$$

◄ الحالة الثانية : من أجل $n = 3$

تعريف 3.2.1

نقول أن f تابعا ذو ثلاث متغيرات حقيقية، إذا كان يرفق بكل ثلاثية $(x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$ قيمة حقيقية وحيدة ، نرمز لها بـ: $f(x, y, z)$. و نكتب:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \to f(x, y, z).$$

3.1 فضاءات L^p

تعريف 1.3.1

ليكن Ω مفتوح من R^n و $p \in [1; +\infty[$ ، نعرف فضاءات $L^p(\Omega)$ ب:

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{قيوسة}; \int_\Omega |f(x)|^p dx \right\}.$$

وهو فضاء بناخي مزود بالنظيم المعرف ب:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.3.1 متراجحة هولدار

قبل التطرق إلى متراجحة هولدار نذكر بالمبرهنة التالية:

مبرهنة 1.3.1

مبرهنة يونغ: ليكن $a, b > 0$ و $1 < p, q < +\infty$
و منه : $ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

مبرهنة 2.3.1

مبرهنة هولدار: ليكن $f \in L^p(\Omega)$ و $g \in L^q(\Omega)$ مع $1 \leq p < \infty$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
عندئذ:
$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}.\|g\|_{L^q(\Omega)}, fg \in L^1(\Omega)$

برهان 1- إذا كان $p = 1$ و $q = \infty$ نجد:
$\|f.g\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f||g|_{L^\infty(\Omega)}du = \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |f|du = \|f\|_{L^1(\Omega)}\|g\|_{L^\infty(\Omega)}$
2- إذا كان $p = \infty$ و $q = 1$ نفس الشيئ
3- إذا كان $1 < p ,q < \infty$ نضع أولا $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^q(\Omega)} = 1$ حسب نظرية يونغ لدينا :

$$\begin{aligned}\|fg\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |f||g|du \leq \int_\Omega (\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q})du \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega |f|^p du + \frac{1}{q}\int_\Omega |g|^q du = \frac{1}{p}\|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\|g\|^q_{L^q(\Omega)} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}\end{aligned} \tag{1.1}$$

في الحالة العامة :
1- لما $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ أي $f = 0$ ومنه $\int |fg|du = 0$ و نستطيع الإستنتاج
2- نفس العمل لما $\|g\|_p = 0$

3- نستطيع أن نفرض $\|g\|_{L^q(\Omega)} > 0$;$\|f\|_{L^p(\Omega)} > 0$

في هذه الحالة إذا كان $\|f\|_{L^p(\Omega)} = +\infty$ أو $\|g\|_{L^q(\Omega)} = +\infty$ فإن $\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)} = \infty$

4- $0 < \|f\|_{L^p(\Omega)}, \|g\|_{L^q(\Omega)} < \infty$ فإن:

$\|\frac{g}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}\|_{L^q(\Omega)} = 1$ ،$\|\frac{f}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}\|_{L^p(\Omega)} = \frac{\|f\|_{L^p(\Omega)}}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} = 1$

و منه

$\|fg\|_{L^1} = \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}\|\frac{f}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}.\frac{g}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}\| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.1 = \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$

■

2.3.1 متراجحة كوشي شوارتز

نظرية 1.3.1. لتكن f و g من $L^2(\Omega)$، لدينا

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

الفصل 2

أنواع التحدب و تكاملات ريمان-ليوفيل

التحدب هو مفهوم رياضي يعبر عن كيفية انحناء الدالة ويعتبر من الخصائص الهامة التي تؤثر بشكل كبير على دراسة وتحليل الدوال الرياضية. فهم التحدب يساعد في تحديد الخصائص المثلى للدوال، ويساهم في تشكيل وحل المتراجحات بكفاءة. يعتبر التحدب أداة قوية في تحليل المتراجحات حيث يساعد على تبسيطها وإيجاد حلول دقيقة لها. سنستعرض بعض أنواع التحدب للدوال ذات متغير و كذلك لذات متغيرين.

فيما يلي , نعتبر I مجال من R , K مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$

$\eta : K\times K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ دالة مستمرة، Δ مجال من $[0;\infty)^2$ حيث $\Delta =: [a,b]\times[c,d]$ مع $a<b$, $c<d$.

1.2 التحدب من أجل دوال ذات متغير

تعريف 1.1.2

نقول عن دالة $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ أنها محدبة إذا وفقط إذا كان

$$\forall x,y\in I, \forall t\in[0,1] : f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y).$$

1.1.2 التحدب اللوغاريتمي

تعريف 2.1.2

نقول عن الدالة الموجبة تماما $f\ :I\longrightarrow\mathbb{R}$ أنها محدبة لوغاريتمية إذا وفقط إذا كان

$$\forall x,y\in I,\forall t\in[0,1]:f(tx+(1-t)y)\leq[f(x)]^{t}[f(y)]^{1-t}.$$

تعريف 3.1.2

نقول عن الدالة الموجبة تماما $f\ :I\subset[0;\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ أنها محدبة لوغاريتمية من النوع الثاني لعدد ثابت معين $s\in(0,1]$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall x,y\in I,\forall t\in[0,1]:f(tx+(1-t)y)\leq t^{s}f(x)+(1-t)^{s}f(y).$$

أو يمكن تحقيق ما يلي

$$\forall x,y\in I,\forall t\in[0,1]:f(tx+(1-t)y)\leq[f(x)]^{(t)^{s}}[f(y)]^{(1-t)^{s}}.$$

تعريف 4.1.2

نقول عن الدالة الموجبة تماما $f\ :I\longrightarrow\mathbb{R}$ أنّها $r-$ محدبة على I، حيث $r\geq 0$ ، إذا وفقط إذا كان

$$\forall x,y\in I,\forall t\in[0,1]:f(tx+(1-t)y)\leq\begin{cases}[tf^{r}(x)+(1-t)\,f^{r}(y)]^{\frac{1}{r}}, & r\neq 0\\ [f(x)]^{1-t}[f(y)]^{t}. & r=0,\end{cases}$$

2.1.2 التحدب godunova-levin

تعريف 5.1.2

نقول عن الدالة $f \ :I \longrightarrow \mathbb{R}$ أنها تحدب من نوع godunova-levin أو $Q-$ محدبة إذا وفقط إذا كان

$$\forall x,y\in I, \forall t\in(0,1): f(tx+(1-t)y)\leq \frac{f(x)}{t}+\frac{f)(y)}{1-t}.$$

تعريف 6.1.2

نقول عن الدالة الموجبة تماما $f \ :I \longrightarrow \mathbb{R}$ أنها $Q-$ محدبة إذا وفقط إذا كان

$$\forall x,y\in I, \forall t\in(0,1): f(tx+(1-t)y)\leq [f(x)]^{\frac{1}{t}}[f(y)]^{\frac{1}{1-t}}$$

تعريف 7.1.2

نقول عن الدالة الموجبة تماما $f \ :I \longrightarrow \mathbb{R}$ أنها $s-$ godunova-levin محدبة من النوع الثاني بالنسبة للعدد الثابت $s\in(0,1]$، إذا وفقط إذا كان

$$\forall x,y\in I, \forall t\in(0,1): f(tx+(1-t)y)\leq \frac{f(x)}{t^s}+\frac{f(y)}{(1-t)^s}.$$

تعريف 8.1.2

نقول عن الدالة الموجبة تماما $f \ :I \longrightarrow \mathbb{R}$, أنها لوغاريتمية $-Q-s$ محدبة من النوع الثاني بالنسبة للعدد الثابت $s\in[0,1]$، إذا وفقط إذا كان

$$\forall x,y\in I, \forall t\in(0,1): f(tx+(1-t)y)\leq [f(x)]^{\frac{1}{t^s}}[f(y)]^{\frac{1}{(1-t)^s}}.$$

3.1.2 التحدب بإستعمال الوسيط m

تعريف 9.1.2

نقول عن الدالة $f: [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$، $(b>0)$، أنها $m-$ محدبة، حيث $m \in (0,1]$، إذا وفقط إذا كان

$$\forall x, y \in [0,b], \forall t \in [0,1] : f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y).$$

تعريف 10.1.2

نقول عن الدالة $f: [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$، $(b>0)$، أنها $(s,m)-$ محدبة، حيث $(s,m) \in (0,1]^2$، إذا وفقط إذا كان

$$\forall x, y \in [0,b], \forall t \in [0,1] : f(tx + m(1-t)y) \leq t^s f(x) + m(1-t^s)f(y).$$

2.2 التقعر من أجل دوال ذات متغير

تعريف 1.2.2

نقول عن المجموعة k أنها مقعرة عند النقطة x بالنسبة إلى η، إذا كان

$$x + t\eta(y,x) \in K,$$

محققة من أجل كل $x, y \in K$ و $t \in [0,1]$.

ملاحظة **2. 1.2..** نقول عن المجموعة K أنها مقعرة بالنسبة إلى η، إذا كانت مقعرة عند كل نقطة x من K.

تعريف 2.2.2

نقول عن الدالة f في المجموعة المقعرة K أنها شبه مقعرة بالنسبة إلى η، إذا كانت المتراجحة

$$f(x+t\eta(y,x)) \leq (1-t)f(x)+tf(y),$$

محققة من أجل كل $x,y \in K$ و $t \in [0,1]$.

تعريف 3.2.2

نقول عن الدالة f الموجبة تماما على المجموعة المقعرة k أنها شبه مقعرة لوغاريتميا بالنسبة إلى η، إذا كانت المتراجحة

$$f(x+t\eta(y,x)) \leq [f(x)]^{(1-t)}[f(y)]^{t},$$

محققة من أجل كل $x,y \in K$ و $t \in [0,1]$.

تعريف 4.2.2

نقول عن الدالة الموجبة f على المجموعة المقعرة $k \subseteq [0,\infty)$ أنها $s-$ شبه مقعرة من النوع الثاني بالنسبة إلى η، حيث $s \in (0,1]$ عدد ثابت معين إذا كانت المتراجحة

$$f(x+t\eta(y,x)) \leq (1-t)^{s}f(x)+t^{s}f(y),$$

محققة من أجل كل $x,y \in K$ و $t \in [0,1]$.

تعريف 5.2.2

نقول عن الدالة الموجبة تماما f على المجموعة المقعرة $k \subseteq [0,\infty)$ أنها $s-$ شبه مقعرة لوغاريتميا من المعنى الثاني بالنسبة إلى η لعدد ثابت معين $s \in (0,1]$، إذا كانت المتراجحة

$$f(x+t\eta(y,x)) \leq [f(x)]^{(1-t)^{s}}[f(y)]^{t^{s}},$$

محققة من أجل كل $x, y \in K$ و $t \in [0,1]$.

تعريف 6.2.2

نقول عن الدالة $f : K \longrightarrow (0,\infty)$، أنها دالة $Q-$ شبه مقعرة بالنسبة إلى η، إذا كانت المتراجحة

$$f(x+t\eta(y,x)) \leq \frac{f(x)}{1-t} + \frac{f(y)}{t}$$

محققة من أجل كل $x, y \in K$ و $t \in (0,1)$.

تعريف 7.2.2

نقول عن الدالة $f : K \longrightarrow (0,\infty)$، أنها دالة $Q-$ شبه مقعرة لوغاريتميا بالنسبة إلى η، إذا كانت المتراجحة

$$f(x+t\eta(y,x)) \leq f(x)]^{\frac{1}{1-t}}[f(y)]^{\frac{1}{t}},$$

محققة من أجل كل $x, y \in K$ و $t \in (0,1)$.

تعريف 8.2.2

نقول عن الدالة $f : K \longrightarrow (0,\infty)$، أنها دالة $Q-$ شبه مقعرة لوغاريتميا بالنسبة إلى η، حيث $s \in (0,1]$ عدد ثابت معين ، إذا كانت المتراجحة

$$f(x+t\eta(y,x)) \leq \frac{f(x)}{(1-t)^s} + \frac{f(y)}{t^s},$$

محققة من أجل كل $x, y \in K$ و $t \in (0,1)$.

تعريف 9.2.2

نقول عن الدالة $f:K\longrightarrow(0,\infty)$، أنها دالة $Q-s-$ شبه مقعرة من النوع الثاني بالنسبة إلى η، حيث $s\in(0,1]$ عدد ثابت معين ، إذا كانت المتراجحة

$$f(x+t\eta(y,x))\leq[f(x)]^{\frac{1}{(1-t)^s}}[f(y)]^{\frac{1}{t^s}},$$

محققة من أجل كل $x,y\in K$ و $t\in(0,1)$.

تعريف 10.2.2

نقول عن الدالة f الموجبة تماما على المجموعة المقعرة K، أنها $r-$ شبه مقعرة بالنسبة إلى η ، أو $r\geq0$ ، إذا كانت المتراجحة

$$f(x+t\eta(y,x))\leq\begin{cases}[(1-t)\,f^r(x)+tf^r\,(y)]^{\frac{1}{r}}, & r\neq0\\ [f(x)]^{1-t}[f(y)]^t, & r=0,\end{cases}$$

محققة من أجل كل $x,y\in K$ و $t\in[0,1]$.

3.2 التحدب من أجل الدوال ذات متغيرين

تعريف 1.3.2

نقول عن الدالة $f:\Delta\longrightarrow\mathbb{R}$ أنها محدبة على Δ، إذا كانت المتراجحة

$$f(\lambda x+(1-\lambda)z,\lambda y+(1-\lambda)w)\leq\lambda f(x,y)+(1-\lambda)f(z,w),$$

محققة من أجل كل $(x,y),(z,w)\in\Delta$ و $\lambda\in[0,1]$.

تعريف 2.3.2

نقول عن الدالة $f: \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$، أن لها إحداثيات محدبة على Δ، إذا كانت المتراجحة

$$f(\lambda x+(1-\lambda)t, \alpha y+(1-\alpha)v) \leq \lambda\alpha f(x,y)+\lambda(1-\alpha)f(x,v) + (1-\lambda)\alpha f(t,y)+(1-\lambda)(1-\alpha)f(t,v),$$

محققة من أجل كل $\lambda, \alpha \in [0,1]$ و $(x,y),(x,v),(t,y),(t,v) \in \Delta$.

تعريف 3.3.2

نقول عن الدالة الموجبة تماما $f: \Delta \subseteq [0,\infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$، أنها $s-$ محدبة من النوع الثاني على Δ، لعدد ثابت معين $s \in (0,1]$، إذا كانت المتراجحة

$$f(\lambda x+(1-\lambda)z, \lambda y+(1-\lambda)w) \leq \lambda^s f(x,y)+(1-\lambda)^s f(z,w)$$

,

محققة من أجل كل $(x,y),(z,w) \in \Delta$ و $\lambda \in [0,1]$.

تعريف 4.3.2

نقول عن الدالة $f: \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$، أن لها إحداثيات $s-$ محدبة من النوع الثاني على Δ، لعدد ثابت معين $s \in (0,1]$، إذا كانت المتراجحة

$$f(\lambda x+(1-\lambda)t, \alpha y+(1-\alpha)v) \leq \lambda^s\alpha^s f(x,y)+\lambda^s(1-\alpha)^s f(x,v) + (1-\lambda)^s\alpha^s f(t,y)+(1-\lambda)^s(1-\alpha)^s f(t,v),$$

محققة من أجل كل $\lambda, \alpha \in [0,1]$ و $(x,y),(x,v),(t,y),(t,v) \in \Delta$.

تعريف 5.3.2

لتكن $h: J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، دالة موجبة تماما ، لتكن $f: \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$، نقول عن f أنها $h-$ محدبة على Δ ، إذا كانت المتراجحة

$$f(\alpha x+(1-\alpha)t, \alpha y+(1-\alpha)v) \leq h(\alpha)f(x,y)+h(1-\alpha)f(t,v)$$

محققة من أجل كل $(x,y),(t,v) \in \Delta$ و $\alpha \in (0,1)$.

تعريف 6.3.2

نقول عن الدالة $f: \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$، أن لها إحداثيات $(h_1,h_2)-$ محدبة على Δ إذا كانت المتراجحة

$$\begin{aligned} f\left(\lambda x+(1-\lambda)t, \alpha y+(1-\alpha)v\right) \leq & h_1(\lambda)h_2(\alpha)f(x,y)+h_1(\lambda)h_2\left(1-\alpha\right)f(x,v) \\ & + h_1\left(1-\lambda\right)h_2(\alpha)f(t,y) \\ & + h_1\left(1-\lambda\right)h_2\left(1-\alpha\right)f(t,v), \end{aligned}$$

محققة من أجل كل $\lambda, \alpha \in [0,1]$ و $(x,y),(x,v),(t,y),(t,v) \in \Delta$.

تعريف 7.3.2

نقول عن الدالة $f: \Delta_0 \longrightarrow \mathbb{R}$، أن لها إحداثيات $(s_1,m_1)-(s_2,m_2)$ محدبة على Δ_0 إذا كانت المتراجحة

$$\begin{aligned} f(tx+m_1(1-t)u, \alpha y+m_2(1-\alpha)w) \leq & t^{s_1}\alpha^{s_2}f(x,y)+m_2t^{s_1}(1-\alpha^{s_2})f(x,w) \\ & + m_1(1-t^{s_1})\alpha^{s_2}f(u,y) \\ & + m_1m_2(1-t^{s_1})(1-\alpha^{s_2})f(u,w), \end{aligned}$$

محققة من أجل كل $t,\alpha \in [0,1]$، $s_1,m_1,s_2,m_2 \in [0,1]$ و $(x,y),(x,w),(u,y),(u,w) \in \Delta_0$.

4.2 التقعر من أجل دوال ذات متغيرين

تعريف 1.4.2

لتكن K_1, K_2 مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من $\mathbb{R}^n$، $(u,v) \in K_1 \times K_2$. نقول عن $K_1 \times K_2$ أنها مقعرة عند النقطة (u,v) بالنسبة إلى η_1 و η_2، إذا كان لكل $(x,y) \in K_1 \times K_2$ و $t,s \in [0,1]$, يكون لدينا

$$(u + t\eta_1(x,u), v + s\eta_2(y,v)) \in K_1 \times K_2,$$

ملاحظة 2. 1.4.. نقول عن المجموعة $K_1 \times K_2$ أنها مقعرة بالنسبة إلى η_1 و η_2، إذا كانت مقعرة عند كل نقطة $(u,v) \in K_1 \times K_2$.

تعريف 2.4.2

لتكن $K_1 \times K_2$ مجموعة مقعرة بالنسبة إلى $\eta_1 \ :K_1 \times K_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $\eta_2 \ :K_2 \times K_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و لتكن الدالة $f \ :K_1 \times K_2 \longrightarrow \mathbb{R}$. نقول عن f أنها شبه مقعرة، إذا كانت المتراجحة

$$f\left(u + t\eta_1\left(x,u\right), v + t\eta_2\left(y,v\right)\right) \leq (1-t) f(u,v) + \ t f(x,y),$$

محققة من أجل كل $(x,y),(u,v) \in K_1 \times K_2$ و $t \in [0,1]$.

تعريف 3.4.2

لتكن $K_1 \times K_2$ مجموعة مقعرة بالنسبة إلى $\eta_1 \ :K_1 \times K_1 \to \mathbb{R}^n$ و $\eta_2 \ :K_2 \times K_2 \to \mathbb{R}^n$ و لتكن الدالة $f \ :K_1 \times K_2 \longrightarrow \mathbb{R}$. نقول عن f أنها ذات إحداثيات شبه مقعرة، إذا كانت المتراجحة

$$\begin{aligned} f\left(u + \lambda\eta_1\left(x,u\right), v + t\eta_2\left(y,v\right)\right) \leq &(1-\lambda)(1-t) f(u,v) + (1-\lambda) t f(u,y) \\ &+ (1-t)\lambda f(x,v) + \lambda t f(x,y), \end{aligned}$$

محققة من أجل كل $(x,y),(x,v),(u,y),(u,v) \in K_1 \times K_2$ و $\lambda, t \in [0,1]$.

5.2 تكاملات ريمان-ليوفيل

تعريف 1.5.2

لتكن $f \in L^1[a,b]$ تكاملات ريمان-ليوفيل $J_{a+}^{\alpha} f$ $J_{b-}^{\alpha} f$ من الرتبة $\alpha > 0$ حيث $a \geq 0$ تعرف بالعلاقات التالية

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x > a$$

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad b > x$$

حيث $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ هي دالة جاما و $J_{a+}^{0} f(x) = J_{b-}^{0} f(x) = f(x)$.

تعريف 2.5.2

لتكن $f \in L^1([a,b] \times [c,d])$. تكاملات ريمان-ليوفيل $J_{a^+,c^+}^{\alpha,\beta}$, $J_{a^+,d^-}^{\alpha,\beta}$, $J_{b^-,c^+}^{\alpha,\beta}$, و $J_{b^-,d^-}^{\alpha,\beta}$ من الرتبة $\alpha, \beta > 0$ حيث $a, c \geq 0$, $a < b$ و $c < d$ تعرف بالعلاقات التالية

$$J_{a^+,c^+}^{\alpha,\beta} f(b,d) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b \int_c^d (b-x)^{\alpha-1} (d-y)^{\beta-1} f(x,y)\, dydx, \tag{2.1}$$

$$J_{a^+,d^-}^{\alpha,\beta} f(b,c) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b \int_c^d (b-x)^{\alpha-1} (y-c)^{\beta-1} f(x,y)\, dydx, \tag{2.2}$$

$$J_{b^-,c^+}^{\alpha,\beta} f(a,d) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b \int_c^d (x-a)^{\alpha-1} (d-y)^{\beta-1} f(x,y)\, dydx, \tag{2.3}$$

$$J_{b^-,d^-}^{\alpha,\beta} f(a,c) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^b \int_c^d (x-a)^{\alpha-1} (y-c)^{\beta-1} f(x,y)\, dydx, \tag{2.4}$$

حيث

$$J_{a^+,c^+}^{0,0} f(b,d) = J_{a^+,d^-}^{0,0} f(b,c) = J_{b^-,c^+}^{0,0} f(a,d) = J_{b^-,d^-}^{0,0} f(a,c) = f(x,y).$$

تعريف 3.5.2

لتكن $f \in L^1([a,b]\times[c,d])$. **تكاملات ريمان-ليوفيل** $J^{\alpha}_{b-}f(a,c)$, $J^{\alpha}_{a+}f(b,c)$, $J^{\beta}_{d-}f(a,c)$, و $J^{\alpha}_{c+}f(a,d)$ من الرتبة $\alpha,\beta>0$ مع $a,c\geq 0$, $a<b$, و $c<d$ تعرف بالعلاقات التالية

$$J^{\alpha}_{b-}f(a,c)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (x-a)^{\alpha-1}f(x,c)\,dx, \tag{2.5}$$

$$J^{\alpha}_{a+}f(b,c)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}f(x,c)\,dx, \tag{2.6}$$

$$J^{\beta}_{d-}f(a,c)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_c^d (y-c)^{\beta-1}f(a,y)\,dy, \tag{2.7}$$

$$J^{\alpha}_{c+}f(a,d)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_c^d (d-y)^{\beta-1}f(a,y)\,dy. \tag{2.8}$$

الفصل 3

المتطابقة التكاملية

قبل التطرق إلى إنشاء متطابقة تكاملية سنقوم أولا بالتذكير بأهم المتباينات الأكثر شهرة في الرياضيات للدوال المحدبة

1.3 متباينة هارميد-هادمار و متباينة دراغومير

إحدى المتباينات الأكثر شهرة في الرياضيات للدوال المحدبة هي ما يسمى بمتباينة هيرميت-هادامارد، والتي يمكن ذكرها على النحو التالي:

نظرية 1.1.3. لكل دالة محدبة f على المجال المحدود $[a,b]$ لدينا

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3.1}$$

كذلك إحدى أشهر المتباينات هي متباينة دراغومير التي استعمل فيها الدوال ذات متغيرين والتي يمكن ذكرها على النحو التالي:

نظرية 2.1.3. لكل دالة محدبة f على المجال المحدود $[a,b]\times[c,d]$ لدينا

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,\tfrac{c+d}{2})dx + \frac{1}{d-c}\int_c^d f(\tfrac{a+b}{2},y)dy\right)\\
&\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx\\
&\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,c)dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,d)dx\right.\\
&\quad\left. + \frac{1}{d-c}\int_c^d f(a,y)dy + \frac{1}{d-c}\int_c^d f(b,y)dy\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}. \tag{3.2}$$

وقد استقطبت المتباينتان (3.1) و (3.2) العديد من الباحثين المختلفين وقد ظهرت التعميمات والتحسينات والإضافات والمتغيرات في مختلف الأبحاث.

2.3 إنشاء المتطابقة التكاملية

سنقوم بإنشاء متطابقة تكاملية و البرهان على صحتها حيث تكمن أهميتها أنها من خلالها نستطيع إستخراج مجموعة من المتراجحات المهمة و التي سنتطرق اليهم في الفصول القادمة

عبارة المتطابقة التكاملية ليكن لدينا مايلي

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(f,a,b,c,b,\alpha,\beta,A,J\right) \\
&= \tfrac{(b-a)(d-c)}{4}\left(\int_0^1\int_0^1 kh\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+(1-t)\,b,\lambda c+(1-\lambda)\,d\right)dtd\lambda\right. \\
&-\int_0^1\int_0^1\left((1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right)\left((1-\lambda)^{\beta}-\lambda^{\beta}\right) \\
&\left.\times\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+(1-t)\,b,\lambda c+(1-\lambda)\,d\right)dtd\lambda\right),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

حيث

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left(f,a,b,c,b,\alpha,\beta,A,J\right) \\
&= f\left(\tfrac{a+b}{2},\tfrac{c+d}{2}\right)-\frac{f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)}{2}+A \\
&-\tfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4(b-a)^{\alpha}(d-c)^{\beta}} \\
&\times\left(J^{\alpha,\beta}_{a^+,c^+}f\left(b,d\right)+J^{\alpha,\beta}_{b^-,c^+}f\left(a,d\right)+J^{\alpha,\beta}_{a^+,d^-}f\left(b,c\right)+J^{\alpha,\beta}_{b^-,d^-}f\left(a,c\right)\right),
\end{aligned}$$

$$(3.4)$$

$$k=\begin{cases} 1 & \text{لما} \quad 0\leq t<\frac{1}{2}, \\ -1 & \text{لما} \quad \frac{1}{2}\leq t<1, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$h=\begin{cases}1 & \text{لما} \quad 0\leq\lambda<\frac{1}{2},\\ -1 & \text{لما} \quad \frac{1}{2}\leq\lambda<1,\end{cases} \tag{3.6}$$

و

$$\begin{aligned}A&=\tfrac{\Gamma(\beta+1)}{4(d-c)^{\beta}}\left(J_{d-}^{\beta}f\left(a,c\right)+J_{d-}^{\beta}f\left(b,c\right)+J_{c+}^{\alpha}f\left(a,d\right)+J_{c+}^{\alpha}f\left(b,d\right)\right)\\&+\tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}}\left(J_{b-}^{\alpha}f\left(a,c\right)+J_{b-}^{\alpha}f\left(a,d\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(b,c\right)+J_{a+}^{\alpha}f\left(b,d\right)\right).\end{aligned} \tag{3.7}$$

برهان من أجل برهان العلاقة (3.3) سنقوم أولا بوضع العبارة التالية

$$I=\tfrac{(b-a)(d-c)}{4}\left(I_{1}-I_{2}\right), \tag{3.8}$$

حيث

$$I_{1}=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}kh\tfrac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+\left(1-t\right)b,\lambda c+\left(1-\lambda\right)d\right)dtd\lambda,$$

و

$$\begin{aligned}I_{2}=&\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\left(\left(1-t\right)^{\alpha}-t^{\alpha}\right)\left(\left(1-\lambda\right)^{\beta}-\lambda^{\beta}\right)\\&\times\tfrac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+\left(1-t\right)b,\lambda c+\left(1-\lambda\right)d\right)dtd\lambda.\end{aligned}$$

سنقوم أولا بتبسيط العبارة I_1 فإننا نتحصل على ما يلي

$$\begin{aligned}I_{1}=&\int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\tfrac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+\left(1-t\right)b,\lambda c+\left(1-\lambda\right)d\right)dtd\lambda\\&-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\tfrac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+\left(1-t\right)b,\lambda c+\left(1-\lambda\right)d\right)dtd\lambda\\&-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\tfrac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+\left(1-t\right)b,\lambda c+\left(1-\lambda\right)d\right)dtd\lambda\\&+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\tfrac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+\left(1-t\right)b,\lambda c+\left(1-\lambda\right)d\right)dtd\lambda\\=&\tfrac{1}{(b-a)(d-c)}\left(f\left(\tfrac{a+b}{2},\tfrac{c+d}{2}\right)-f\left(b,\tfrac{c+d}{2}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2},d\right)+f\left(b,d\right)\right.\\&-f\left(a,\tfrac{c+d}{2}\right)+f\left(\tfrac{a+b}{2},\tfrac{c+d}{2}\right)+f\left(a,d\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2},d\right)\\&-f\left(\tfrac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,c\right)+f\left(\tfrac{a+b}{2},\tfrac{c+d}{2}\right)-f\left(b,\tfrac{c+d}{2}\right)\\&\left.+f\left(a,c\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2},c\right)-f\left(a,\tfrac{c+d}{2}\right)+f\left(\tfrac{a+b}{2},\tfrac{c+d}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{(b-a)(d-c)}\left(\left(f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\right)+\frac{f(b,d)+f(a,d)+f(b,c)+f(a,c)}{4}\right.$$
$$\left.-\frac{f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)}{2}\right). \quad (3.9)$$

أما بخصوص I_2 نقوم بإستعمال التكامل بالتجزئة فنتحصل على ما يلي

$$I_2=\int_0^1\left((1-\lambda)^\beta-\lambda^\beta\right)$$
$$\times\left(\int_0^1\left((1-t)^\alpha-t^\alpha\right)\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d\right)dt\right)d\lambda$$

$$=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\left(f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)\right)$$
$$-\frac{\beta}{(b-a)(d-c)}\left(\int_0^1(1-\lambda)^{\beta-1}f(a,\lambda c+(1-\lambda)d)\,d\lambda\right.$$
$$+\int_0^1\lambda^{\beta-1}f(a,\lambda c+(1-\lambda)d)\,d\lambda+\int_0^1\lambda^{\beta-1}f(b,\lambda c+(1-\lambda)d)\,d\lambda$$
$$\left.+\int_0^1(1-\lambda)^{\beta-1}f(b,\lambda c+(1-\lambda)d)\,d\lambda\right)$$
$$-\frac{\alpha}{(b-a)(d-c)}\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b,c)\,dt\right.$$
$$+\int_0^1 t^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b,c)\,dt+\int_0^1 t^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b,d)\,dt$$
$$\left.+\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b,d)\,dt\right)$$
$$+\frac{\alpha\beta}{(b-a)(d-c)}\left(\int_0^1\int_0^1 t^{\alpha-1}\lambda^{\beta-1}f(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d)\,d\lambda dt\right.$$
$$+\int_0^1\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}\lambda^{\beta-1}f(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d)\,d\lambda dt$$
$$+\int_0^1\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-\lambda)^{\beta-1}f(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d)\,d\lambda dt$$

$$+\int_0^1\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}(1-\lambda)^{\beta-1} f(ta+(1-t)b, \lambda c+(1-\lambda)d)\, d\lambda dt \Bigg) \quad (3.10)$$

بتعويض العلاقة $(3,9)$و$(3,10)$ في العلاقة $(3,8)$، و بوضع

$$x = ta+(1-t)b, \qquad y = \lambda c+(1-\lambda)d$$

نحصل على مايلي

$$\begin{aligned}
I &= f\left(\tfrac{a+b}{2}, \tfrac{c+d}{2}\right) - \frac{f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)}{2} \\
&\quad + \tfrac{\beta}{4(d-c)^\beta}\Bigg(\int_c^d (y-c)^{\beta-1} f(a,y)\,dy + \int_c^d (y-c)^{\beta-1} f(b,t)\,dy \\
&\quad + \int_c^d (d-y)^{\beta-1} f(a,y)\,dy + \int_c^d (d-y)^{\beta-1} f(b,y)\,dy\Bigg) \\
&\quad + \tfrac{\alpha}{4(b-a)^\alpha}\Bigg(\int_0^1 (x-a)^{\alpha-1} f(x,c)\,dx + \int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x,d)\,dx \\
&\quad + \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} f(x,c)\,dx + \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} f(x,d)\,dx\Bigg) \\
&\quad - \tfrac{\alpha\beta}{4(b-a)^\alpha(d-c)^\beta}\Bigg(\int_a^b\int_c^d (b-x)^{\alpha-1}(d-y)^{\beta-1} f(x,y)\,dydx \\
&\quad + \int_a^b\int_c^d (x-a)^{\alpha-1}(d-y)^{\beta-1} f(x,y)\,dydx \\
&\quad + \int_a^b\int_c^d (b-x)^{\alpha-1}(y-c)^{\beta-1} f(x,y)\,dydx \\
&\quad + \int_a^b\int_c^d (x-a)^{\alpha-1}(y-c)^{\beta-1} f(x,y)\,dydx\Bigg). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

أخيرا إذا استخدمنا العلاقتين (2.1)-(2.8) في العلاقة $(3,11)$ تحصل على النتيجة المطلوبة . ■

الفصل 4

متراجحات معممة من نوع Hermite-Hadamard

بعد التطرق إلى المتطابقة التكاملية المعممة سنقوم بإستخدامها لإستخراج مجموعة من المتراجحات التي سنتطرق إليها في هذا الفصل
لإستخراج المتراجحات سنقوم بإستعمال تعريف التحدب التالي

تعريف 1.0.4

نقول عن الدالة $f:\Delta_0=[a,b]\times[0,\frac{d}{m}]\ \rightarrow(0,+\infty)$ $(log,(s,m))$-محدبة على $\Delta_0,$ إذا و فقط إذا كان

$$\begin{aligned}&f\left(tx+(1-t)\,u,\lambda y+m\,(1-\lambda)\,v\right)\\ &\leq\left[\lambda^s f(x,y)++m(1-\lambda)^s f(x,v)\right]^t\left[\lambda^s f(u,y)+m(1-\lambda)^s f(u,v)\right]^{1-t}\end{aligned}$$

من أجل كل $t,\lambda\in[0,1],s,m\in(0,1]$ و $(x,u),(y,v)\in\Delta_0$.

1.4 متراجحات من أجل $|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}|$ محدبة

فيمايلي نفرض أن الدالة $f:\Delta\rightarrow\mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق جزئيا و كذلك نفرض أن $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\right|\in L^1(\Delta)$

نظرية

إذا كان $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\right|$ $(log,(s,m))$- محدب و $s,m\in(0,1]$ ثابتين فإن

$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{4}\left(\left(\frac{1}{2(s+1)}+\frac{1}{\alpha+1}\left(B\left(s+1,\beta+1\right)+\frac{1}{\beta+s+1}\right)\right)\right.$$
$$\left.\times\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|+m\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|+m\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|\right)\right),$$

حيث F معرف بالعلاقة (3.4) و

$$B(s,\beta)=\int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{\beta-1}$$

برهان بإستعمال علاقة المتطابقة التكاملية وكذلك بإستعمال أن $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\right|$ $(log,(s,m))$ - محدب فنتحصل على

$$\begin{aligned}
&|F\,(f,a,b,c,b,\alpha,\beta,A,J)|\\
&\leq \frac{(b-a)(d-c)}{4}\left(\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+(1-t)\,b,\lambda c+(1-\lambda)\,d\right)\right|dtd\lambda\right.\\
&+\int_0^1\int_0^1\left((1-t)^{\alpha}+t^{\alpha}\right)\left((1-\lambda)^{\beta}+\lambda^{\beta}\right)\\
&\left.\times\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+(1-t)\,b,\lambda c+(1-\lambda)\,d\right)\right|dtd\lambda\right)\\
&\leq \frac{(b-a)(d-c)}{4}\left(\int_0^1\int_0^1\left[\lambda^s\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|+m\,(1-\lambda)^s\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|\right]^t\right.\\
&\times\left[\lambda^s\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|+m\,(1-\lambda)^s\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|\right]^{1-t}dtd\lambda\\
&+\int_0^1\int_0^1\left((1-t)^{\alpha}+t^{\alpha}\right)\left((1-\lambda)^{\beta}+\lambda^{\beta}\right)\\
&\times\left[\lambda^s\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|+m\,(1-\lambda)^s\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|\right]^t\\
&\left.\times\left[\lambda^s\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|+m\,(1-\lambda)^s\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|\right]^{1-t}dtd\lambda\right).
\end{aligned}\qquad(4.1)$$

وبتطبيق متراجحة يونغ نحصل على

$$\begin{aligned}
&|F\,(f,a,b,c,b,\alpha,\beta,A,J)|\\
&\leq \frac{(b-a)(d-c)}{4}\\
&\times\left(\int_0^1\int_0^1 t\left[\lambda^s\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|+m\,(1-\lambda)^s\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|\right]dtd\lambda\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1\int_0^1 (1-t)\left[\lambda^s\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right| + m(1-\lambda)^s\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|\right] dtd\lambda\\
&+\int_0^1\int_0^1 \left((1-t)^\alpha + t^\alpha\right)\left((1-\lambda)^\beta+\lambda^\beta\right)\\
&\times\left[t\lambda^s\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right| + m(1-\lambda)^s\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|\right] dtd\lambda\\
&+\int_0^1\int_0^1 \left((1-t)^\alpha + t^\alpha\right)\left((1-\lambda)^\beta+\lambda^\beta\right)(1-t)\\
&\times\left[\lambda^s\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right| + m(1-\lambda)^s\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|\right]^{1-t} dtd\lambda\Bigg)\\
&=\tfrac{(b-a)(d-c)}{4}\left(\left(\int_0^1 tdt\right)\right.\\
&\times\left(\int_0^1\left[\lambda^s\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right| + m(1-\lambda)^s\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|\right] d\lambda\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_0^1 (1-t)\,dt\right)\\
&\times\left(\int_0^1\left[\lambda^s\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right| + m(1-\lambda)^s\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|\right] d\lambda\right)\\
&+\left(\int_0^1 \left(t(1-t)^\alpha + t^{\alpha+1}\right)dt\right)\\
&\times\left(\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|\int_0^1 (\lambda^s(1-\lambda)^\beta+\lambda^{\beta+s})d\lambda\right.\\
&\left.+m\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|\int_0^1 ((1-\lambda)^{\beta+s}+\lambda^\beta(1-\lambda)^s)d\lambda\right)\\
&+\left(\int_0^1 \left((1-t)^{\alpha+1} + t^\alpha(1-t)\right)dt\right)\\
&\times\left(\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|\int_0^1 (\lambda^s(1-\lambda)^\beta+\lambda^{\beta+s})d\lambda\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ m\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right| \int_0^1 ((1-\lambda)^{\beta+s} + \lambda^{\beta}(1-\lambda)^{s})d\lambda\Bigg)\Bigg) \\
&= \tfrac{(b-a)(d-c)}{4}\left(\tfrac{1}{2(s+1)}\left(\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c)\right| + m\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|\right)\right. \\
&+\tfrac{1}{2(s+1)}\left(\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c)\right| + m\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|\right) \\
&+\tfrac{1}{\alpha+1}\left(B(s+1,\beta+1) + \tfrac{1}{\beta+s+1}\right)\left(\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c)\right| + m\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|\right) \\
&\left.+ \tfrac{1}{\alpha+1}\left(B(s+1,\beta+1) + \tfrac{1}{\beta+s+1}\right)\left(\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c)\right| + m\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|\right)\right) \\
&= \tfrac{(b-a)(d-c)}{4}\left(\tfrac{1}{2(s+1)} + \tfrac{1}{\alpha+1}\left(B(s+1,\beta+1) + \tfrac{1}{\beta+s+1}\right)\right) \\
&\times\left(\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c)\right| + m\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right| + \left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c)\right| + m\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|\right),
\end{aligned}
$$

وهي النتيجة المطلوبة.

■

2.4 نتائج حول متراجحات من أجل $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}\right|$ محدبة

نتيجة

لدينا النتائج التالية التي يمكن إستخراجها من النظرية السابقة

1. إذا كان $m = 1$ فإن

$$\begin{aligned}
&|F\left(f, a, b, c, b, \alpha, \beta, A, J\right)| \\
&\leq \tfrac{(b-a)(d-c)}{4}\left(\left(\tfrac{1}{2(s+1)} + \tfrac{1}{\alpha+1}\left(B\left(s+1, \beta+1\right) + \tfrac{1}{\beta+s+1}\right)\right)\right. \\
&\left.\times\left(\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c)\right| + \left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,d)\right| + \left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c)\right| + \left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,d)\right|\right)\right).
\end{aligned}$$

2. إذا كان $s = 1$ فإن

$$\begin{aligned}
&|F\left(f, a, b, c, b, \alpha, \beta, A, J\right)| \\
&\leq \tfrac{(b-a)(d-c)}{4}\left(\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\right)\right. \\
&\left.\times\left(\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c)\right| + m\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(a, \frac{d}{m}\right)\right| + \left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c)\right| + m\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(b, \frac{d}{m}\right)\right|\right)\right).
\end{aligned}$$

3. إذا كان $m = s = 1$ فإن

$$\begin{aligned}
&|F\left(f, a, b, c, b, \alpha, \beta, A, J\right)| \\
&\leq \tfrac{(b-a)(d-c)}{4}\left(\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\right)\right. \\
&\left.\times\left(\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c)\right| + \left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,d)\right| + \left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c)\right| + \left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,d)\right|\right)\right).
\end{aligned}$$

4. إذا كان $\alpha = \beta = 1$ فإن

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}, \tfrac{c+d}{2}\right) - \tfrac{f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)}{2} + A \right. \\
&\left. - \tfrac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \right| \\
&\leq \tfrac{(b-a)(d-c)}{4(s+1)} \\
&\times\left(\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c)\right| + m\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(a, \frac{d}{m}\right)\right| + \left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c)\right| + m\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\left(b, \frac{d}{m}\right)\right|\right).
\end{aligned}$$

5. إذا كان $\alpha = \beta = s = 1$ فإن

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}, \tfrac{c+d}{2}\right) - \tfrac{f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)}{2} + A \right.$$

$$- \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \Bigg|$$
$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{8}$$
$$\times \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c) \right| + m \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \left(a, \frac{d}{m} \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c) \right| + m \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \left(b, \frac{d}{m} \right) \right| \right).$$

6. إذا كان $\alpha = \beta = m = 1$ فإن

$$\Bigg| f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - \frac{f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)}{2} + A$$
$$- \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \Bigg|$$
$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{4(s+1)}$$
$$\times \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,d) \right| \right).$$

7. إذا كان $\alpha = \beta = s = m = 1$ فإن

$$\Bigg| f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) - \frac{f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)}{2} + A$$
$$- \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \Bigg|$$
$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{8}$$
$$\times \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(a,d) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,c) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(b,d) \right| \right),$$

حيث

$$A = \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b \left(f(x,c) + f(x,d) \right) dx + \frac{1}{2(d-c)} \int_c^d \left(f(a,y) + f(b,y) \right) dy.$$

3.4 متراجحات من أجل $|\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}|^q$ محدبة

نظرية

إذا كان $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}\right|^q$
$((s,m),log)$- محدب و $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ و $s, m \in (0,1]$ ثابتين فإن

$$|F(f,a,b,c,b,\alpha,\beta,A,J)| \leq \frac{(b-a)(d-c)}{2^{4+\frac{2}{q}+\frac{s}{q}}(s+1)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\left(\left(\frac{\Upsilon_1+\left(2^{s+1}-1\right)m\Psi_{1,m}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left(2^{s+1}-1\right)\Upsilon_1+m\Psi_{1,m}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$+\left(\frac{\Upsilon_2+\left(2^{s+1}-1\right)m\Psi_{2,m}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left(2^{s+1}-1\right)\Upsilon_2+m\Psi_{2,m}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left.+\frac{16\times 2^{\frac{s}{q}+\frac{1}{q}}\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q+m\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,\frac{d}{m})\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,\frac{d}{m})\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}(\beta p+1)^{\frac{1}{p}}}\right),$$

حيث

$$\Upsilon_1=\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+3\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q, \tag{4.2}$$

$$\Psi_{1,m}=\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^q+3\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^q, \tag{4.3}$$

$$\Upsilon_2=3\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q, \tag{4.4}$$

$$\Psi_{2,m}=3\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^q, \tag{4.5}$$

وكذلك لدينا F معرفة بالعلاقة (3.4).

برهان بإستعمال علاقة المتطابقة التكاملية و متراجحة هولدر لدينا

$$\left|F\left(f,a,b,c,b,\alpha,\beta,A,J\right)\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)(d-c)}{4}$$
$$\times\left(\left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}dtd\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right|^q dtd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right.\right.$$
$$+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}dtd\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right|^q dtd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{\frac{1}{2}}dtd\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right|^q dtd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}dtd\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right|^q dtd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$+\left(\left(\int_0^1\int_0^1 (1-t)^{\alpha p}(1-\lambda)^{\beta p}\,dtd\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$+\left(\int_0^1\int_0^1 t^{\alpha p}(1-\lambda)^{\beta p}\,dtd\lambda\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^1\int_0^1 (1-t)^{\alpha p}\lambda^{\beta p}dtd\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left.+\left(\int_0^1\int_0^1 t^{\alpha p}\lambda^{\beta p}dtd\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\left.\times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d)\right|^q dtd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$=\tfrac{(b-a)(d-c)}{4^{1+\frac{1}{p}}}\left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d)\right|^q dtd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d)\right|^q dtd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d)\right|^q dtd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d)\right|^q dtd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{4^{1+\frac{1}{p}}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}(\beta p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\left.\times\left(\int_0^1\int_0^1\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(ta+(1-t)b,\lambda c+(1-\lambda)d)\right|^q dtd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

باستخدام كل من متراجحة يونغ و $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\right|^q$ محدب $(log(s,m))$- نحصل على مايلي

$$|F(f,a,b,c,b,\alpha,\beta,A,J)|$$

$$\leq\tfrac{(b-a)(d-c)}{4^{1+\frac{1}{p}}}\left(\left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} t\left[\lambda^s\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+m(1-\lambda)^s\left|\tfrac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^q\right]dtd\lambda\right.\right.\right.$$

$$+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-t)\left[\lambda^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^{q}+m((1-\lambda)^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^{q}\right]dtd\lambda\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}t\left[\lambda^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^{q}+m\left(1-\lambda\right)^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^{q}\right]dtd\lambda$$

$$+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left[\lambda^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^{q}+m((1-\lambda)^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^{q}\right]dtd\lambda\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{2}}t\left[\lambda^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|+m\left(1-\lambda\right)^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|\right]dtd\lambda$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-t)\left[\lambda^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^{q}+m((1-\lambda)^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^{q}\right]dtd\lambda\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}t\left[\lambda^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^{q}+m\left(1-\lambda\right)^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^{q}\right]dtd\lambda$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\left[\lambda^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^{q}+m((1-\lambda)^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^{q}\right]dtd\lambda\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{4^{1+\frac{1}{p}}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}(\beta p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\times\Bigg(\Bigg(\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}t\left[\lambda^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^{q}+m\left(1-\lambda\right)^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^{q}\right]dtd\lambda$$

$$+\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(1-t)\left[\lambda^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^{q}+m((1-\lambda)^{s}\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^{q}\right]dtd\lambda\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$=\frac{(b-a)(d-c)}{2^{4+\frac{2}{q}+\frac{s}{q}}(s+1)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\times\left(\left(\frac{\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^{q}+3\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^{q}+\left(2^{s+1}-1\right)m\left(\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^{q}+3\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^{q}\right)}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\frac{\left(2^{s+1}-1\right)\left(\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^{q}+3\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^{q}\right)+m\left(\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^{q}+3\left|\frac{\partial^{2}f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^{q}\right)}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{3\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q+\left(2^{s+1}-1\right)m\left(3\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^q\right)}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{\left(2^{s+1}-1\right)\left(3\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q\right)+m\left(3\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^q\right)}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{16\times 2^{\frac{s}{q}+\frac{1}{q}}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}(\beta p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\times\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q+m\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg),$$

وهي النتيجة المطلوبة. ■

4.4 نتائج حول متراجحات من أجل $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\right|^q$ محدبة

نتيجة

لدينا النتائج التالية التي يمكن إستخراجها من النظرية السابقة

1. إذا كان $m=1$ فإن

$$|F(f,a,b,c,b,\alpha,\beta,A,J)|\leq\frac{(b-a)(d-c)}{2^{4+\frac{2}{q}+\frac{s}{q}}(s+1)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\Bigg(\left(\frac{\Upsilon_1+\left(2^{s+1}-1\right)\Psi_{1,1}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left(2^{s+1}-1\right)\Upsilon_1+\Psi_{1,1}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{\Upsilon_2+\left(2^{s+1}-1\right)\Psi_{2,1}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left(2^{s+1}-1\right)\Upsilon_2+\Psi_{2,1}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{16\times 2^{\frac{s}{q}+\frac{1}{q}}\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,d)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}(\beta p+1)^{\frac{1}{p}}}\Bigg).$$

2. إذا كان $s=1$ فإن

$$|F(f,a,b,c,b,\alpha,\beta,A,J)|\leq\frac{(b-a)(d-c)}{2^{4+\frac{4}{q}}}$$

$$\Bigg(\left(\frac{\Upsilon_1+3m\Psi_{1,m}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\Upsilon_1+m\Psi_{1,m}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\Upsilon_2+3m\Psi_{2,m}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\Upsilon_2+m\Psi_{2,m}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{16\times 2^{\frac{2}{q}}\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q+m\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}(\beta p+1)^{\frac{1}{p}}}\Bigg).$$

3.. إذا كان $m=s=1$ فإن

$$|F(f,a,b,c,b,\alpha,\beta,A,J)| \leq \frac{(b-a)(d-c)}{2^{4+\frac{4}{q}}}$$
$$\left(\left(\frac{\Upsilon_1+3\Psi_{1,1}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\Upsilon_1+\Psi_{1,1}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\Upsilon_2+3\Psi_{2,1}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\Upsilon_2+\Psi_{2,1}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\frac{16\times 2^{\frac{2}{q}}\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q+m\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,d)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,d)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}(\beta p+1)^{\frac{1}{p}}}\right).$$

4.. إذا كان $\alpha=\beta=1$ فإن

$$\left|f\left(\tfrac{a+b}{2},\tfrac{c+d}{2}\right)-\frac{f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)}{2}+A\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{2^{4+\frac{2}{q}+\frac{s}{q}}(s+1)^{\frac{1}{q}}}\left(\left(\frac{\Upsilon_1+(2^{s+1}-1)m\Psi_{1,m}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(2^{s+1}-1)\Upsilon_1+m\Psi_{1,m}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$+\left(\frac{\Upsilon_2+(2^{s+1}-1)m\Psi_{2,m}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(2^{s+1}-1)\Upsilon_2+m\Psi_{2,m}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left.+\frac{16\times 2^{\frac{s}{q}+\frac{1}{q}}\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q+m\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}}{(p+1)^{\frac{2}{p}}}\right).$$

5.. إذا كان $\alpha=\beta=m=1$ فإن

$$\left|f\left(\tfrac{a+b}{2},\tfrac{c+d}{2}\right)-\frac{f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)}{2}+A\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)(d-c)}{2^{4+\frac{2}{q}+\frac{s}{q}}(s+1)^{\frac{1}{q}}}\left(\left(\frac{\Upsilon_1+(2^{s+1}-1)\Psi_{1,1}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(2^{s+1}-1)\Upsilon_1+\Psi_{1,1}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$+\left(\frac{\Upsilon_2+(2^{s+1}-1)\Psi_{2,1}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(2^{s+1}-1)\Upsilon_2+\Psi_{2,1}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left.+\frac{16\times 2^{\frac{s}{q}+\frac{1}{q}}\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,d)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}}{(p+1)^{\frac{2}{p}}}\right).$$

6.. إذا كان $\alpha=\beta=s=1$ فإن

$$\left|f\left(\tfrac{a+b}{2},\tfrac{c+d}{2}\right)-\frac{f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)}{2}+A\right.$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx\Bigg|\\
&\leq \frac{(b-a)(d-c)}{2^{4+\frac{4}{q}}}\left(\left(\tfrac{\Upsilon_1+3m\Psi_{1,m}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{3\Upsilon_1+m\Psi_{1,m}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&+\left(\frac{\Upsilon_2+3m\Psi_{2,m}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\Upsilon_2+m\Psi_{2,m}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\left.+\frac{16\times 2^{\frac{2}{q}}\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q+m\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(a,\frac{d}{m}\right)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}\left(b,\frac{d}{m}\right)\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}}{(p+1)^{\frac{2}{p}}}\right).
\end{aligned}
$$

7.. إذا كان$1 = \alpha=\beta=m=s$ فإن

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|f\left(\tfrac{a+b}{2},\tfrac{c+d}{2}\right)-\frac{f\left(a,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},c\right)+f\left(b,\frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2},d\right)}{2}+A\\
&-\tfrac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx\Bigg|\\
&\leq \frac{(b-a)(d-c)}{2^{4+\frac{4}{q}}}\left(\left(\tfrac{\Upsilon_1+3\Psi_{1,1}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{3\Upsilon_1+\Psi_{1,1}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&+\left(\frac{\Upsilon_2+3\Psi_{2,1}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\Upsilon_2+\Psi_{2,1}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\left.+\frac{16\times 2^{\frac{2}{q}}\left(\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,c)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(a,d)\right|^q+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial\lambda}(b,d)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}}{(p+1)^{\frac{2}{p}}}\right),
\end{aligned}
$$

حيث يتم تعريف $\Psi_{2,m}$ Υ_2 $\Psi_{1,m}$ Υ_1 كما في (4،3)-(4,5) على التوالي، و

$$A=\tfrac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left(f(x,c)+f(x,d)\right)dx+\tfrac{1}{2(d-c)}\int_c^d\left(f(a,y)+f(b,y)\right)dy.$$

خـاتمة

نأمل أننا من خلال الفصول الأربعة التي أنجزناها نكون قد تمكننا من تقديم دراسة وافية للمتراجحات المعممة من نوع Hermite-Hadamard .

ونظرا لأهمية هذا النوع من المتراجحات المعممة ومداها الواسع في علم الرياضيات اخترنا هذا البحث الذي قمنا بتقسيمه إلى أربع فصول حيث تضمن الفصل الأول مجموعة من المفاهيم الأساسية التي ساعدتنا في الفهم والوصول إلى الهدف المنشود ، أما الفصل الثاني فقد تطرقنا فيه إلى بعض التعريفات والمصطلحات الشهيرة حول أنواع التحدب وتكاملات ريمان- ليوفيل التي تم توظيفها في بعض البراهين. وفي الفصل الثالث قمنا بذكر أهم المتباينات الأكثر شهرة في الرياضيات للدوال المحدبة وإنشاء متطابقة تكاملية والبرهان على صحتها لما لها من أهمية في إستخراج مجموعة من المتراجحات المهمة ، أما الفصل الأخير فقد تضمن دراسة متراجحات معممة من نوع هيرميت-هادامارد والنتائج المستخرجة منها.

وفي الختام نأمل أن يكون هذا البحث المتواضع لبنة جديدة في مجال البحوث الخاصة بعلم الرياضيات كما نرجو أن يكون بداية لمن أراد التعمق والدراسة أكثر في هذا الميدان من أجل التوصل إلى معارف ونتائج جديدة.

قائمة المراجع

[1] A. Alomari and M. Darus, The Hadamard's inequality for s-convex function of 2-variables on the co-ordinates. Int. J. Math. Anal. (Ruse) 2 (2008), no. ,629-638 .13–16.

[2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[3] A. Barani, A. G. Ghazanfari and S. S. Dragomir, Hermite-Hadamard inequality for functions whose derivatives absolute values are preinvex, J. Inequal. Appl. 2012, 2012 :247, 9 pp Hadamard type. Soochow J. Math. 21 (1995), no. 3, 335 341.

[4] A.O. Akdemir, M. Tunc, On some integral inequalities for s- logarithmically convex functions and their applications, arXiv : 1212v1[math.FA].1584 7 Dec 2012.

[5] B. Meftah and M. Merad, Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose nth order of derivatives are s-convex in the second sense. Revista De Matemáticas De la Universidad del Atlántico Páginas. 4 (2017), no. 2, 87–99.

[6] B.-Y. Xi and F. Qi, Some new integral inequalities of Hermite-Hadamard type for $(log, (\alpha, m))$-convex functions on co-ordinates. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 60 (2015), no. 4, 509-525.

[7] J. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[8] M. Merad, B. Meftah and N. Ouanas, Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for n-times r-convex functions. Proc. Jangjeon Math. Soc. 21 (2018), no. 2, 253–292.

[9] S.-P. Bai and F. Qi, Some inequalities for (s_1, m_1)-(s_2, m_2)-convex functions on the co-ordinates. Global Journal of Mathematical Analysis, 1 (2013), no 1, 22-28.

[10] S. P. Bai and F. Qi, Some inequalities for (s1, m1)-(s2, m2)-convex func- tions on the co-ordinates. Global Journal of Mathematical Analysis, 1(1) (2013), 22–28.

[11] S. S. Dragomir, On Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane, Taiwanese Journal of Mathematics, 4 (2001), 775–788.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة المتراجحات المعممة من نوع Hermite-Hadamard حيث تطرقنا إلى بعض التعريفات حول أنواع التحدب وتكاملات ريمان-ليوفيل مع التذكير بأهم المتباينات الأكثر شهرة في الرياضيات (متباينة هارميد-هادامارومتباينة دراغومير)ثم قمنا بتوظيف المتطابقة التكاملية التي من خلالها استخرجنا مجموعة من المتراجحات المعممة في الفصل الأخير.

كلمات مفتاحية

الدالة المحدبة ، المتطابقة التكاملية ، متراجحة هارميد-هادامار.