الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة البحث العلمي والتعليم العالي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et

de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي-سكيكدة

École Normale Supérieure de l'enseignement technologique, Skikda

Département de Mathématiques قسم الرياضيات

مُذكِّرة تخّرج لنيّلِ شهادة أُستّاذ التَعلِيم الثانوي

دراسة فضاءات هلبرت المجردة.

من إعداد:

★ أولاد مريم ريهام

★ حجو إيناس

تحت إشراف الأستاذ:

★ كيبش خدير

من طرف لجنة المناقشة:

★ قواسمية محمد.............. أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة............رئيسا.

★ بوسنة جلال.............. أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة.............مناقشا.

★ خشمان حسام............. أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة.............مناقشا.

دورة جوان 2024

شكر وتقدير

قال الله تعالى:"وقل رَبِّ أَوْزِعْنِي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَىٰ وَالِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَالِحًا تَرْضَاهُ وَأَدْخِلْنِي بِرَحْمَتِكَ فِي عِبَادِكَ الصَّالِحِينَ "

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات في بادئ الأمر نشكر الله عزوجل الذي وفقنا لإتمام هذا العمل. "عندما تخطط لسنة ازرع قمحا، عندما تخطط لعقد اغرس شجرا وعندما تخطط لمدى الحياة فعلم إنسانا وثقفه

" نتوجه بخالص عبارات الشكر و التقدير لأستاذ القدير "كيبش خدير" الذي كان له الفضل علينا والذي قدم لنا كل التسهيلات و الدعم لتجاوز العراقييل التي وجهتنا و إتمام هدا العمل و مناقشته فلك منا جزيل الشكر.

والشكر موصول إلى رئيس قسم الرياضيات الأستاذ الفاضل فراق عزوز

و جميع أساتذة القسم كما نوجه شكرنا لمدير المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي بسكيكدة الأستاذ "جمال بوجعدار" إلى كل من لهم الفضل فيما وصلنا إليه وكل من علمنا حرفا في يوم من الأيام لكم منا جزيل الشكر وفائق الاحترام والتقدير.

الإهداء

"وآخر دعواهم أن الحمد لله رب العالمين"

الحمد لله عند البدأ ،وعند الختام فماتناهى درب ولاختم جهد ولاتناهى سعي إلا بفضله اللهم لك الحمد كله ولله الشكر كله إليك يرجى الأمر كله علانيته وسره فأهل أنت أن تحمد وأهل أنت تعبد وأنت على كل شيء قدير

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة إلى نبي الرحمة و نور العالمين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم.

إلى الذي أمن بي من أول الطريق إلى الذي أحمل إسمه ومعظم صفاته إلى من يسكن العقل والقلب الى والدي العزيز الذي وفته المنيه وأنا على مشارف اخر خطوات مسيرتي الدراسية تغمده الله برحمته الواسعة شكرا .أبي شكرا قدوتي شكرا يا روحا لا تفارقني

إلى أغلى جوهرة وأثمن لؤلؤة اتزين بها إلى أعظم واحن إنسانة في الوجود إلى ملاكي الطاهر وقدوتي بعد الله إلى أمي الحبيبة اطال الله في عمرها

إلى من كان معي في الصغيرة قبل الكبيرة إلى من شغل مكان الأب في غيابه إلى اليد الخفية التي أعانتني على هذا المشوار الى سندي وعزوتي وقدوتي أخي العزيز عبد الحق.

الى ضلعي التابث وصديق أيامي وكتفي حين أنهار الى اخي الصغير إلياس.

الى قطعة من قلبي وروحي غاليتي اختي الصغيرة سجى.

إلى من جمعتني بها مقاعد الدراسة وشاركتني هذا الدرب دمتي خير صدفة صديقتي" إناس ".

الى من جعلوني أضيء في عتمتي واضحك بالرغم من شحب وجهي صديقاتي كل باسمها أدامكم وحفظكم الله.
الى كل من علمني حرفا وأضاء لي دربا شكرا لكم جميعا.

أولاد مريم ريهام

الإهداء

"وآخر دعواهم ان الحمد لله ربي العالمين "

الحمد لله حبا وشكرا وامتنانا على البدأ والختام من قال أنا لها نالها وأنا لها وإن أبت رغما عنها اتيت بها
إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة إلى نبي الرحمة و نور العالمين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم.

إلى سكان قلبي :
إلى وردتي وإن طال الزمان حبيبتي، رفيقتي في الحزن والضحكات إلى الإنسانة التي لطالما تمنيت أن تقرع عينها برؤيتي في يوم كهذا
أمي

إلى ذلك الرجل العظيم ،قدوتي وسندي إذا ذكرت خصاله من أي فضل أبتدى دمت عزيزي و عزتي طاب بك العمر وطبت لي عمرا
أبي

إلى الحبيب النائم تحت التراب عساك بين ورد ريحان وجنات خلد عاليات المقام
أخي منصف

إلى ضلعي الثابث الذي لا يميل سندي وملاذي الأول والأخير
أخي إيهاب

إلى صديقة وجدت بها كل الرفاق والأحبة سخية المودة ،حلوة الطباع ، حبيبة الفؤاد وصديقة العمر وإن كان في صدف الأزمان خير ، فإنك خير ماحدث به
وصال

ولا أنسى من كانوا عونا وسندا في هذا الطريق ،الأصدقاء الأوفياء ،رفاق السنين وأخص بالذكر سوسو، أسماء وئام ، سرور وهبة.

إلى من سرنا سويا ونحن نشق طريق النجاح من قاسمتها هذه المذكرة صديقتي ورفيقة دربي "ريهام"

إلى من دعموني و شجعوني و آمنوا بي ،خلاتي و عمتي و أخص بالذّكر أمي الثانية "فريدة".

بارك الله فيكم و جزاكم الله كل خير أهدي لكم هذا العمل المتواضع.

إناس

ملخص

تطرقنا في هذه المذكرة إلى ثلاثة فصول ، تناولنا في الفصل الأول المفاهيم الأساسية في الفضاءات الشعاعية الناظمية والمتمثلة في النظيم والطبولوجيا الملحقة به وهذا تمهيدا للفصل الذي يليه، أما في الفصل الثاني فقد تطرقنا من خلاله إلى الجداء السلمي والفضاء الشبه الهلبرتي و التعامد وكل هذا في إطارات فضاءات هلبرت وصولا إلى الفصل الثالث والذي هو جوهر المذكرة درسنا خلاله أهم المفاهيم الأساسية في فضاءات هلبرت المجردة و التي تندرج كلها حول مفهوم الأساسات الهلبرتية.

ولم يكن هذا البحث إلا خطوة في مسيرة الألف ميل أين وضعنا بعض النقاط على الحروف ،نتمنى أن نستهل طريق كل راغب في التعرف على جوانب أخرى لها صلة بالموضوع ، فنحن لا ندعي الإلمام بجميع جوانبه ،كما نرجو بصدر رحب تقديم إقتراحاتكم وإنتقاداتكم بما يقيم منشورنا هذا ويقومه.

فهرس

مقدمة

إن أبسط الفضاءات الشعاعية الناظمية ذات البعد المنتهي هي فضاءات هلبرت لأن نظيمها ناتج عن جداء سلمي ، وهذا الأخير يمنح الفضاء الشعاعي النظيمي كثير من الخصائص الهندسية ، تماما مثل حالة البعد المنتهي.

و تلعب فضاءات Hilbert دورا كبيرا أساسيا في دراسة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية كما أنها تساهم بشكل كبير في دراسة الميكانيك الكلاسيكي (النبض الذاتي) ميكانيك الكم وذلك في حل معادلات Schrodinger , للأشكال الخطية المستمرة و لها دور أساسي في النظرية العامة لحساب المؤترات ناهيك عن دورها المهم في التحليل الرياضي وفي نظرية التوزيعات وحتى في دراسة فضاءات Hilbert في حد ذاتها إذ بفضلها يمكن تبيان أن كل فضاء Hilbert يكون isomorphe مع الثنوي الطبولوجي له.

الفصل 1

الفضاءات الشعاعية الناظمية

تطرقنا في هذا الفصل لمفهوم النظيم و الطبولوجيا الملحقة به بالإضافة إلى الفضاء الجزئي النظيمي و فضاء الجداء . كل هذا تحت مفهوم الفضاءات الشعاعية الناظمية.استعنا في هذا الفصل بكل من المراجع [1]،[3]،[7]،[8].

1.1 النظيم

1.1.1 مفهوم النظيم على فضاء شعاعي

تعريف 1.1

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$،نسمي نظيم على E كل تطبيق N من E نحو $\mathbb{R}$ يحقق الشروط التالية:

(i) $\forall x \in E \ ; N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\forall x \in E \ ; \forall \lambda \in \mathbb{K} \ ; N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

(iii) $\forall x, y \in E \ \ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

نضع: $\forall x \in E \quad , \ N(x) = \|x\|_E$ (أو اختصارا $N(x) = \|f\|$) عندئذ نسمي الثنائية $(E, \|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي.

مبرهنة 1.1

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$،عندئذ يكون لدينا:

1. $N(0_E) = 0_{\mathbb{R}}$
2. $\forall x \in E, \ \ N(x) \geq 0$

الإثبات:

1. من الشرط 2، لما $\lambda = 0_{\Bbbk}$ يكون:

$$\begin{aligned} N(0_E) &= N(0_{\Bbbk 0_E}) \\ &= |0_{\mathbb{K}|N(0_E)} \\ &= 0_{\mathbb{R}} N(0_E) \\ &= 0_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

2. ليكن $x \in E$ لدينا:

$$N(0) = N(x - x) \leq N(x) + N(-x) \leq N(x) + |-1|N(x) \leq 2N(x)$$

ومنه:

$$N(x) \geq 0$$

أمثلة 1.1

1. النظيم الإعتيادي لـ $\mathbb{R}$ معرف بـ :

$$\begin{aligned} N: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto N(x) = |x| \end{aligned}$$

2. النظيم الإعتيادي لـ $\mathbb{C}$ معرف بـ:

$$\begin{aligned} N: \ & \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ & z \mapsto N(z) = \sqrt{z\bar{z}} \end{aligned}$$

3. $\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[x]$ فضاء كثيرات الحدود ذات الدرجة أقل أو تساوي n، $\mathbb{R}_n[x]$ يتمتع ببنية فضاء

شعاعي على $\mathbb{R}$، نعرف تطبيق N كمايلي:

$$N:\ \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$$
$$P \mapsto N(P) = \sup_{k=\overline{0,n}} |a_k|$$

N يعرف نظيم على $\mathbb{R}_n[x]$

فعلا، ليكن $P \in \mathbb{R}_n[x]$ لدينا:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \forall k = \overline{0,n}$$

$$\begin{aligned} N(P) = 0 \quad &\Leftrightarrow \sup_{k=\overline{0,n}} |a_K| = 0 \\ &\Leftrightarrow |a_K| = 0; \forall k = \overline{0,n} \\ &\Leftrightarrow a_K = 0; \forall k = \overline{0,n} \\ &\Leftrightarrow p = 0 \qquad\qquad \ldots(1) \end{aligned}$$

من أجل λ حقيقي نجد:

$$N(\lambda P) = \sup_{k=\overline{0,n}} |\lambda a_k| = \sup_{k=\overline{0,n}} |\lambda||a_k| = |\lambda| \sup_{k=\overline{0,n}} |a_k| = |\lambda| N(P) \quad \ldots(2)$$

ليكن P و Q من $\mathbb{R}_n[x]$ بحيث:

$$\forall k = \overline{0.n}; \quad |a_k + b_k| \le |a_k| + |b_k|$$

ومنه: $\forall k = \overline{0.n} \ \sup_{k=\overline{0,n}} (|a_k + b_k|) \le \sup_{k=\overline{0,n}} (|a_k|) + \sup_{k=\overline{0,n}} (|b_k|)$

وإذن: $\|P + Q\| \le \|P\| + \|Q\| \quad \ldots(3)$

إذن N يعرف نظيم .

2.1.1 النظم الأساسية على $\mathbb{R}^n$:

مبرهنة 2.1

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و $x \in \mathbb{R}^n$ بحيث: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ التطبيقات N_1 و N_∞ و N_p المعرفة على $\mathbb{R}^n$ بـ:

1. $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$
2. $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k=\overline{1,n}} |x_k|$
3. $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}; \quad p \geq 1$

تعرف نظيم على $\mathbb{R}^n$.

ملاحظة 1.1

في حالة $p = 2$ يدعى التظيم $\|.\|_2$ بالنظيم الإقليدي ،بينما يدعى النظيم $\|.\|_\infty$ بنظيم التقارب المنتظم.

2.1 الطبولوجيا الملحقة بنظيم

1.2.1 البنية الطبولوجية

مبرهنة 3.1

ليكن $(E, \|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي وليكن d التطبيق:

$$d: \quad E \times E \to R_+$$
$$(x, y) \to d(x, y) = \|x - y\|$$

إن d يعرف مسافة على E تسمى المسافة المرفقة بالنظيم $\|.\|$

الإثبات:

ليكن $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \\ &\Leftrightarrow x-y=0 \\ &\Leftrightarrow x=y \qquad \ldots(1) \end{aligned}$$

هذا من جهة و من جهة أخرى

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\| = d(y,x) \quad \ldots(2)$$

ليكن z عنصر من E إذن:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E; d(x,z) = \|x-z\| &= \|x-y+y-z\| \\ &\leq \|x-y\| + \|y-z\| \\ &\leq d(x,y) + d(x,z) \qquad \ldots(3) \end{aligned}$$

من(1)و(2)و(3) التطبيق d يعرف مسافة على E.

نتيجة 1.1

إن كل فضاء شعاعي نظيمي هو فضاء متري (مزود بالمسافة الملحقة بـ$\|.\|$)إذن فهو فضاء طبولوجي (مزود بالطبولوجيا الملحقة بالمسافة d).

ملاحظة 2.1

عموما ليس كل فضاء متري هو فضاء شعاعي نظيمي.

مبرهنة 4.1

ليكن $(E,\|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي و ليكن d معرف بـ:

$$\forall x, y \in ; d(x, y) = \|x - y\|$$

إنd صامد بالنسبة للإنسحاب إذا تحقق:

i) $\forall x, y, z \in E \quad ; d(x+z, y+z) = d(x, y).$

ii) $\forall x, y \in E \quad ; \forall \lambda \in \Bbbk \quad ; d(\lambda x . \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$

الإثبات:

ليكن x، y،z من Eو $\lambda \in \Bbbk$ لدينا من جهة:

$$d(x+z, y+z) = \|x+y-y-z\| = \|x-y\| = d(x, y)$$

ومن جهة أخرى:

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda|\|x-y\| = |\lambda| d(x, y)$$

تعريف 1.1

ليكن $(E,\|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي،$x_0 \in E$ و r عدد حقيقي موجب تماما

1. نسمي كرة مفتوحة مركزها x_0 ونصف قطرها r،ونرمز لها بالرمز $B(x_0, r)$

$$B(x_0, r) = \{x \in E, \|x - x_0\| \rangle r\}$$

2. نسمي كرة مغلقة مركزها x_0 ونصف قطرها r، ونرمز لها بالرمز $\overline{B}(x_0,r)$

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in E, \|x-x_0\|\leq r\}$$

مبرهنة 5.1

ليكن $(E,\|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي و $r\rangle 0$، لدينا:

$$\forall x\in E\ ;\overline{B(x_0,r)}=\overline{B}(x_0,r)$$

الإثبات:

ليكن $x\in E$ ، $r>0$ لدينا:

$B(x,r)\subseteq\overline{B}(x,r)$ لأن $\overline{B}(x,r)$ مجموعة مغلقة.

نعلم أن $\overline{B(x,r)}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي $B(x,r)$ إذن:

$$\overline{B(x,r)}\subseteq\overline{B}(x_0,r) \qquad ...(1)$$

وهذا من جهة،ومن جهة أخرى

ليكن $y\in\overline{B}(x,r)$ ومنه:

$$\|y-x\|\leq r$$

وليكن $\epsilon\rangle 0$ نثبت أن:

$$B(y,\epsilon)\cap B(x,r)\neq\emptyset$$

نأخذ $z=y-\frac{\epsilon}{r}(y-x)$ فيكون:

$$\begin{aligned}\|y-z\|&=\|y-y+\frac{\epsilon}{r}(y-x)\|\\&=|\frac{\epsilon}{r}|\|y-x\|\\&=\frac{\epsilon}{r}\|y-x\|<\frac{\epsilon}{r}.r=\epsilon\end{aligned}$$

إذن $\|y-z\|<\epsilon$ ومنه $z\in B(y,\epsilon)$

$$\begin{aligned}\|z-x\| = \left\|y-\frac{\epsilon}{r}(y-\epsilon)-x\right\| &= \left\|y-x-\frac{\epsilon}{r}(y-x)\right\| \\ &= \left\|(1-\frac{\epsilon}{r})(y-x)\right\| \\ &= \left|1-\frac{\epsilon}{r}\right| \|y-x\| \leq (1-\frac{\epsilon}{r}).r \leq r-\epsilon < r\end{aligned}$$

إذن $\|z-x\|<r\$$ ومنه:

$$z\in B(x,r)$$

ومنه:

$$\forall y\in \overline{B}(x,r) \implies \forall \epsilon>0; B(y,\epsilon)\cap B(x,r)\neq\emptyset$$

إذن:

$$y\in\overline{B(x,r)}$$

أي أن:

$$y\in\overline{B}(x,r)\subseteq\overline{B(x,r)} \quad ...(2)$$

من (1)و(2) تحقق المساواة.

مبرهنة 6.1

النظيم هو تطبيق مستمر بإنتظام.

الإثبات:

ليكن f تطبيق معرف بـ:

$$f:E\to\mathbb{R}_+$$

$$x\to f(x)=\|x\|$$

ومن أجل $x, y \in E$ يكون لدينا:

$$\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|y\|$$

ومنه:

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \quad ...(1)$$

$$\|y\| = \|y + x - x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

ومنه:

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \quad ...(2)$$

من (1) و(2) نجد:

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

إذن:

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

وعليه يكون f ليبتشيزي نسبته 1 ومنه f مستمرة بإنتظام.

2.2.1 المجموعات المحدودة

تعريف 2.1

ليكن $(E, \|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي $A \subseteq E$ حيث $A \neq \emptyset$.
تكون A محدودة إذا كانت محدودة بالنسبة للمسافة المرفقة بالنظيم $\|.\|$.

مبرهنة 7.1

ليكن $(E, \|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي و $A \subseteq \mathbb{E}$، تكون A محدودة إذا وفقط إذا تحقق :

$$\exists M > 0; \forall x \in A; \|x\| \leq M$$

الإثبات:

لزوم الشرط:

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من E وليكن $x \in A$ من أجل y مثبت في A يكون :

$$\|x\| = d(x,0) \leq d(x,y) + d(y,0)$$
$$\leq M' + \alpha$$

نضع:

$$M = M' + \alpha$$

وعليه:

$$\exists M = M' + \alpha > 0;\ \|x\| \leq M$$

وبما أن x كيفي من A فإنه:

$$\exists M \rangle 0;\ \forall x \in A,\ \|x\| \leq M$$

كفاية الشرط:

نفرض أنه:

$$\exists M \rangle 0; \forall x \in A, \|x\| \leq M$$

وليكن $y \in A$

$$d(x,y) \leq d(x,0) + d(0,y) \leq 2M$$

نضع:

$$M' = 2M$$

إذن:

$$\exists M' \rangle 0\ ;\ \forall x,y \in A\ ;\ d(x,y) \leq M'$$

مبرهنة 8.1

$(E,\|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي، $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط E و$x\in E$، إذا كانت $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو x فإن المتتالية $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة.

الإثبات:

بما أن: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو x إذن:

$$\exists n_0\in\mathbb{N};\forall n\geq n_0;\|x_n-x\|\rangle 1$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\forall n\geq n_0;\ \ \|x_n\| &= \|x_n-x+x\|\\ &\leq \|x_n-x\|+\|x\|\\ &\leq 1+\|x\|\end{aligned}$$

إذن:

$$\forall n\geq n_0;\|x_n\|\leq 1+\|x\|$$

$$\exists M=1+\|x\|;\forall n\in\mathbb{N}\|x_n\|\leq M$$

وعليه المتتالية $\|(x_n)\|_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة.

3.2.1 النظم المتكافئة

تعريف 3.1

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل$\mathbb{K}$، وليكن N_1 و N_2 نظيمين معرفين على E، نقول أن N_1 و

N_2 متكافئين إذا وفقط إذا:

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in E, \alpha N_1(x) \le N_2(x) \le \beta N_1(x)$$

عندئذ نكتب: $N_1 \sim N_2$

مبرهنة 9.1

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$، نضع:

$$\mathcal{N} = \{N, E \text{ نظيم على } N\}$$

ولنفرض أن $card(\mathcal{N}) \ge 2$ ولنعرف على $\mathcal{N}$ العلاقة $\mathcal{R}$ بحيث:

$$\forall N_1, N_2 \in \mathcal{N}, N_1 \mathcal{R} N_2 \Leftrightarrow N_1 \sim N_2$$

إن $\mathcal{R}$ هي علاقة تكافؤ على $\mathcal{N}$.

الإثبات:

ليكن $x \in E$ و $N \in \mathcal{N}$ لدينا:

$$N(x) = N(x) = N(x)$$

إذن:

$$\exists \mu = 1 \in \mathbb{R}_+^*, \exists \lambda = 1 \in \mathbb{R}_+^*; \lambda N(x) = N(x) = \mu N(x)$$

إذن: $N \sim N$

ليكن $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$، لدينا:

$$N_1 \mathcal{R} N_2 \Leftrightarrow N_1 - N_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \exists \mu \in \mathbb{R}_+^*; \lambda N_1(x) \le N_2(x) \le \mu N_2(x)$$

وعليه:

$$N_1(x) \le \frac{1}{\lambda} N_2(x) ...(1)$$

$$\frac{1}{\mu}N_2(x) \leq N_1(x)...(2)$$

من (1) و(2) نجد:

$$\frac{1}{\mu}N_2(x) \leq N_1(x) \leq \frac{1}{\lambda}N_2(x)$$

ومنه:

$$\exists \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}_+^*; \frac{1}{\mu}N_2(x) \leq N_1(x) \leq \frac{1}{\lambda}N_2(x)$$

إذن: $N_1 \sim N_2$

ليكن $N_1, N_2, N_3 \in \mathcal{N}$، لدينا:

$$N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in E, \lambda N_1(x) \leq N_2(x) \leq \mu N_1(x) \quad ...(1)$$

$$N_2 \sim N_3 \Leftrightarrow \exists \lambda', \mu' \in \mathbb{R}_+^*; \forall x \in E, \lambda' N_2(x) \leq N_3(x) \leq \mu' N_2(x) \quad ...(2)$$

من (1) و(2) نجد:

$$\forall x \in E\, \lambda\lambda' \leq \lambda' N(x)_2 \leq N_3(x) \leq \mu' N_2(x) \leq \mu'\mu N_1(x)$$

ومنه:

$$\exists \lambda\lambda', \mu'\mu \in \mathbb{R}_+^*; \exists x \in E\, \lambda\lambda' N_1(x) \leq N_3(x) \leq \mu'\mu N_1(x)$$

إذن: $N_1 \sim N_3$

مبرهنة 10.1

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$، N_2وN_1 نظيمين معرفين على E إذا كان N_2وN_1 متكافئان فهما متكافئان طبولوجيا.

الإثبات:

لتكن: $B_1(a,r)$ الكرة المفتوحة المتمركزة عند a وذات نصف القطر r في (E, N_1) و $B_2(a', r')$ الكرة المفتوحة المتمركزة عند a' وذات نصف القطر r' في (E, N_2)

بما أن N_1 و N_2 متكافئان يكون:

$$\forall a \in E, \forall r \rangle 0; B_1\left(a, \frac{r}{\beta}\right) \subseteq B_2(a, r) \subseteq B_1\left(a, \frac{r}{\alpha}\right)$$

وهو ما يؤدي إلى أن كل مفتوح بالنسبة N_1 يكون مفتوح بالنسبة ل N_2 و بالعكس،أي أن الطبولوجيتين الملحقتين بالنظيمين متكافئتان.

مبرهنة 11.1

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$، N_1 وN_2 نظيمين متعرفين على E يكون N_1 وN_2 متكافئان إذا وفقط إذا كان التطبيق:

$$id : (E, N_1) \longrightarrow (E, N_2)$$

هو Isomorphisme.

3.1 الفضاء الجزئي النظيمي و فضاء الجداء

1.3.1 الفضاء الجزئي النظيمي

تعريف 1.1

ليكن E فضاء شعاعي نظيمي على الحقل $\mathbb{K}$ و H فضاء شعاعي جزئي إن إقتصار $\|.\|$ على H يعرف نظيم H وعندئذ نسمي $(H, \|.\|_H)$ فضاء شعاعي نظيمي جزئي حيث $\|.\|_H$ هو نظيم.

مبرهنة 12.1

ليكن E فضاء نظيمي و ليكن H فضاء نظيمي جزئي من E إذن:

$\overline{H}$ هو فضاء شعاعي جزيء من E.

الإثبات:

ليكن $x, y \in \overline{H}$ و$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

إذا كان $\alpha = 0 \wedge \beta = 0$ فإنه لدينا بداهة $\alpha x + \beta y = 0_E \in \overline{H}$

نفرض أن $\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$ إذن $|\alpha| + |\beta| \rangle 0$

وليكن $\epsilon > 0$، نعلم أنه توجد متتاليتان $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من H حيث:

$$x_n \to x \ \wedge \ y_n \to y$$

إذن:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1; \|x - x_n\| < \frac{\epsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2; \|y - y_n\| < \frac{\epsilon}{(|\alpha| + |\beta|)}$$

نأخد:

$$n_3 = \max(n_1, n_2)$$

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_3; \|(\alpha x + \beta y) - (\alpha x_n + \beta y_n)\| &= \|\alpha(x - x_n) + \beta(y - y_n)\| \\ &\leq |\alpha| \|x - x_n\| + |\beta| \|y - y_n\| \\ &\leq \tfrac{|\alpha|\epsilon}{(|\alpha|+|\beta|)} + \tfrac{|\beta|\epsilon}{(|\alpha|+|\beta|)} \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

إذن: $$\lim_{n\to+\infty} \left\|(\alpha x_n + \beta y_n) - (\alpha x + \beta y)\right\| = 0$$

أي أن: $$\lim_{n\to+\infty} \left(\alpha x_n + \beta y_n\right) = \left(\alpha x + \beta y\right)$$

وبما أن H هو فضاء شعاعي جزئي من E، إذن:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha x_n + \beta y_n \in H$$

ومنه:

$$\alpha x + \beta y \in H$$

إذن:

$$\alpha x + \beta y \in \overline{H}$$

2.3.1 فضاء الجداء النظيمي

نعلم أنه إذا كان E و F فضائين شعاعين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ فإن $E \times F$ هو فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

مبرهنة 13.1

ليكن E و F فضائين نظيميان و التطبيق ϕ حيث:

$$\phi: \quad E \times F \to \mathbb{R}_+$$
$$(x, y) \to \phi(x, y) = \|x\|_E + \|y\|_F$$

ϕ يعرف نظيم على الفضاء الشعاعي $E \times F$

الإثبات:

i) لما $(x, y) = 0$ فإن $x = 0$ و $y = 0$ إذن:

$$\|x\|_E = 0 \wedge \|y\|_F = 0$$

وعليه:

$$\|x\|_E + \|y\|_F = 0$$

فإن:

$$\phi(x, y) = 0$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$\phi(x, y) = 0 \implies \|x\|_E + \|y\|_F = 0 \implies \|x\|_E = 0 \wedge \|y\|_F = 0$$

إذن: $(x, y) = (0, 0)$

ii) $\phi(\lambda(x, y)) = \phi(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x\|_E + \|\lambda y\|_F = |\lambda|(\|x\|_E + \|y\|_F) = |\lambda|\phi(x, y)$

iii) ليكن (x,y) و (x',y') من $E\times F$.

$$\begin{aligned}\phi(x+x',y+y') &= \|x+x'\|_E+\|y+y'\|_F \le \|x\|_E+\|x'\|_E+\|y\|_F+\|y'\|_F\\ &\le \|x\|_E+\|x'\|_E+\|y\|_E+\|y'\|_F\\ &\le \left(\|x\|_E+\|y\|_F\right)+\left(\|x'\|_E+\|y'\|_F\right)\\ &\le \phi(x+y)+\phi(x',y')\end{aligned}$$

ومنه: ϕ يعرف نظيم على $E\times F$.

ترميز 1.1

نرمز لـ ϕ على $E\times F$ بـ:

$$\forall (x,y)\in E\times F\ ;\phi(x,y)=\|(x,y)\|_{E\times F}$$

تعريف 2.1

ليكن E و F فضاءان نظيميان على نفس الحقل $\mathbb{K}$ نعرف النظيم على $E\times F$ بـ:

$$\forall (x,y)\in E\times F; \|(x,y)\|_{E\times F}=\|x\|_E+\|y\|_F$$

مبرهنة 14.1

ليكن E و F فضاءان نظيميان ، $(x,y)\in E\times F$ ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط E، $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط F عندئذ يكون لدينا:

($((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$) تتقارب نحو (x,y)) $\Leftrightarrow$ ($(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو x و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو y)

الإثبات:

لزوم الشرط:

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر E نحو تتقارب x و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر F تتقارب نحو y ومنه:

$$\|x_n\|_E \to \|x\|_E$$

$$\|y_n\|_F \to \|y\|_F$$

إذن:

$$\|x_n\|_E + \|y_n\|_F \to \|x\|_E + \|y\|_F$$

أي:

$$\|(x_n, y_n)\|_{E\times F} \to \|(x, y)\|_{E\times F}$$

و عليه $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو (x, y).

كفاية الشرط:

لتكن $((x_n, y_n))$ تتقارب نحو (x, y)، لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \|(x_n - x)\|_E \le \|x_n - x\|_E + \|(y_n - y)\|_F$$

أي: $\forall n \in \mathbb{N}; \|x_n, x\|_E \le \|(x_n, y_n) - (x, y)\|_{E\times F}$

بالمرور إلى النهاية نجد: $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\|_E = 0$

وبنفس الطريقة نجد: $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y_n - y\|_F = 0$

نظرية 1.1

ليكن $(E, +, .)$ فضاء شعاعي حيث$(+)$ هي العملية الداخلية و$(.)$هي العملية الخارجية، في فضاء شعاعي نظيمي $(E, \|.\|)$ العمليتان $(+)$،$(.)$ تطبيقات مستمرة

$$(+) : E \times E \to E$$

$$(x, y) \to x + y$$

$$(.) : \mathbb{K} \times E \to E$$

$$(\lambda, x) \to \lambda.x$$

الإثبات:

1. لتكن $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط $E \times E$ متقاربة نحو (x, y) بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ z_n = (x_n, y_n)$$

إذن:

$$x_n \xrightarrow{E} x \quad \wedge \quad y_n \quad \xrightarrow{E} y$$

$$\begin{aligned} \left\|x_n + y_n - (x + y)\right\| &= \left\|x_n - x + y_n - y\right\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \left\|y_n - y\right\| \end{aligned}$$

ومنه:

$$\left\|x_n + y_n - (x + y)\right\| \xrightarrow{E} 0$$

إذن: $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو $x + y$ في E.

وعليه: $(+)$ تطبيق مستمر.

2. لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط E و $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathbb{K}$ بحيث:

$$x_n \xrightarrow{E} x \quad \wedge \quad \lambda_n \xrightarrow{k} \lambda$$

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| \\ &\leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| \\ &\leq \|\lambda_n (x_n - x)\| + \|x(\lambda_n - \lambda)\| \\ &\leq |\lambda_n|\,|(x_n - x)\| + |\lambda_n - \lambda)|\,\|x\| \end{aligned}$$

ومنه:

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \xrightarrow{E} 0$$

إذن: $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو λx

وعليه: $(\cdot)$ مستمر.

3.3.1 فضاءات بناخ

تعريف 3.1

نقول عن متتالية أنها لـ Cauchy إذا وفقط إذا:

$$\forall \epsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}; \forall p,q \in \mathbb{N}; (p \geq m) \wedge (q \geq m) \implies d(x_p, x_q) < \epsilon$$

مبرهنة 15.1

ليكن $(E, \|.\|)$ فضاء نظيمي و $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية لـ Cauchy من نقاط E إذا كان لـ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ قيمة ملاصقة على الأقل x من E فإن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو x.

الإثبات:

ليكن $\epsilon > 0$ إذن:

$$\exists m \in \mathbb{N}; \forall p,q \in \mathbb{N}; (p \geq m) \wedge (q \geq m) \implies \|x_p - x_q\| < \frac{\epsilon}{2}$$

وبما أن x قيمة ملاصقة لـ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إذن:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; n_0 \geq m; \|x_{n_0} - x\| < \frac{\epsilon}{2}$$

ومنه:إذا كان $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq n_0$ فإن:

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - x\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

أي لما $n \geq n_0$ فإن $\|x_n - x\| < \epsilon$ وبما أن ϵ كيفي موجب تماما إذن:

$$\forall \epsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_0 \implies \|x_n - x\| < \epsilon$$

تعريف 4.1

نقول عن E أنه تام إذا وفقط إذا كانت كل متتالية لـ Cauchy من نقاطه متقاربة فيه .

تعريف 5.1

نقول عن فضاء شعاعي نظيم E أنه بناخي إذا كان تام بالنسبة للمسافة الملحقة بالنظيم.

أمثلة 2.1

$\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، $\mathbb{R}^n$ و $n \in \mathbb{N}^n$ هي فضاءات بناخ.

2.5 الفضاءات الشعاعية النظيمية ذات البعد المنته:

في كل مايأتي $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C}$

نظرية 2.1

E فضاء شعاعي نظيمي على الحقل $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C})$ إذا كان E ذو بعد منته فإن كل النظم المعرفة على E متكافئة.

ملاحظة 3.1

قد لا تحقق النظرية 1.2 إذا كان حقل الأساس غير تام.

نتيجة 2.1

ليكن E فضاء شعاعي نظيمي ذو بعد منته n $(n \in \mathbb{N}^*)$ على الحقل $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C})$ عندئذ يكون لدينا:

1.إذا كان F فضاء شعاعي نظيمي على نفس الحقل $\mathbb{K}$ فإن كل تطبيق خطي $f : E \to F$ يكون

مستمر.

2. لتكن $A \in P(E)$، A مغلقة ومحدودة $\Leftrightarrow A$ متراصة .

E.3 فضاء بناخ .

4. كل فضاء شعاعي جزئي F من E مغلق.

الإثبات:

1.ليكن $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ قاعدة ل E نزود E بالنظيم $\|.\|_1$ و F بـ $\|.\|$ وليكن $x \in E$ إذن :

$$\exists x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}; x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

ومنه:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k)$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \left\|\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k)\right\| \\ &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k |x_k| \|f(e_k)\| \\ &\leq \|x\|_l \|f(e_k)\| \end{aligned}$$

نضع:

$$\sup_{k=\overline{1,n}} \|f(e_k)\| = M$$

عندئذ نجد:

$$\|f(x)\| \leq M\|x\|_I$$

ومنه إذا كان $x_1, x_2 \in E$ فإن:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|_I$$

ومنه f بنسبة $k = M$ فهو مستمر على E بالنسبة لـ $\|.\|_I$ وبما أن النظم على E متكافئة فإن f ليبشترية على E النسبة لأي نظيم

2. لتكن A مجموعة جزئية من E.

- إذا كانت $A=\varnothing$ فإن التكافؤ بديهي.
- نفرض أن A متراصة وليست خالية ولتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط A متقاربة نحو $x\in E$، وبما أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة فهي تملك قيمة ملاصقة وحيدة.
  بما أن A متراصة فإن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تملك على الأقل قيمة ملاصقة a تنتمي إلى A $(a\in A)$.

إذن: $a=x$ ومنه $x\in A$ إذن A مغلقة.
نفرض أن A ليست محدودة إذن:

$$\forall a\in\mathbb{R},\exists x_a\in A;\|x_a\|>a$$

إذن

$$\forall n\in\mathbb{N},\exists x_n\in A;\|x_n\|\rangle n$$

وبالتالي فإن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست محدودة من الأعلى و منه توجد متتالية مستخرجة $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ من $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث:

$$\lim_{k\to+\infty}\left(x_{n_k}\right)=+\infty$$

وبالتالي $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ لا تملك قيمة ملاصقة وهذا تناقض مع كون A متراصة إذن A محدودة.
العكس :
نفرض A مجموعة مغلقة و محدودة على E، نعلم أنه يوجد Ismorphisme ϕ من E نحو$\mathbb{K}^n$ حسب النتيجة 2.1 -1 ϕ و ϕ^{-1} مستمران ومنه ϕ هو عبارة عن homéomorphisme للفضاءان المتريان E،$\mathbb{K}^n$ ومنه $\phi(A)$ هي مجموعة مغلقة ومحدودة في$\mathbb{K}^n$ فهي متراصة في $\mathbb{K}^n$ وبما أن:

$$A=\phi^{-1}(\phi(A))$$

إذن A متراصة E.
3. لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متالية لـ Cauchy من نقاط E.
بما أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة إذن:

$$\exists r>0;\{U_n,n\in\mathbb{N}\}\subseteq\overline{B}(0,r)$$

بما أن $\overline{B}(0,r)$ مغلقة ومحدودة إذن حسب النتيجة 2.1 -2 فإن $\overline{B}(0,r)$ متراصة في E وبالتالي للمتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ قيمة ملاصقة على الأقل $a\in E$ إذن حسب المبرهنة 17.2 فإن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بـ Eومنه E تام.

4. ليكن F فضاء شعاعي جزئي من E، إذن F ذو بعد منته وبالتالي فهو تام حسب النتيجة 2.1-3 لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط F متقاربة نحو x من E إذن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية لكوشي من نقاط F وبما أن هذا الأخير تام إذن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة في F أي:

$$x\in F$$

إذن F مغلق.

نظرية 3.1: (أساسية)

ليكن $(E,\|.\|)$ فضاء شعاعي نظيمي عندئذ يكون:

$\overline{B}(0,1)$ متراصة $\Leftrightarrow$ E ذو بعد منته

الإثبات:

نفرض أن E ذو بعد منته إذن حسب النتيجة 2.1 2-$\overline{B}(0,1)$ متراصة.

عكسيا :

نفرض أن $\overline{B}(0,1)$ في E و E ذو بعد منته. لدينا:

$$\overline{B}(0,1)\subseteq\bigcup_{x\in\overline{B}(0,1)}B(x,1)$$

ومنه:

$$\exists x_1,x_2,\dots,x_n\in\overline{B}(0,1);\overline{B}(0,1)\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}\overline{B}(x_k,1)\dots(*)$$

نضع:

$$F=vect\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$$

إن F فضاء شعاعي جزئي من E ذو بعد منته وبالتالي:

$$\exists x \in E, x \notin F$$

بما أن F تام ومحدب حسب نظرية الإسقاط (الفصل 3) فإن:

$$\exists y \in F; \|x-y\| = d(x,F)$$

لدينا: $\|x-y\|\rangle 0$

ومنه نضع:

$$x_0 = \frac{x-y}{\|x-y\|}$$

فيكون:

$$x_0 \in \overline{B}(0,1)$$

بماأن: $0 \in F$ فإن:

$$d(x_0,F) \leq \|x_0 - 0\|$$

ومنه:

$$d(x_0,F) \leq 1 \quad ...(1)$$

لكن نلاحظ أنه إذا كان: $z \in F$ فإن:

$$\begin{aligned}\|x_0 - z\| &= \left\| \tfrac{x-y}{\|x-y\|} - z \right\| \\ &= \tfrac{1}{\|x-y\|} \|x-y- \|\|x-y\|z\| \\ &= \tfrac{1}{\|x-y\|} \left\|x-(y+\| \left\|x-y\right\| \|z)\right\|\end{aligned}$$

إذن:

$$\frac{1}{\|x-y\|} d(x,F) \leq \|x_0 - z\|$$

ومنه:

$$1 \leq \|x_0 - z\|$$

لكن z كيفي من F إذن:

$$\forall z \in F \;\; 1 \leq \|x - z_0\|$$

وبالتالي:

$$d(x_0, F) \geq 1 \quad ...(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن:

$$d(x_0, F) = 1$$

ومنه:

$$\forall k = \overline{1, n}; \|x_0 - x_k\| \geq 1$$

$$\forall k = \overline{1, n}; x_0 \notin B(x_k, 1)$$

إذن:

$$x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} (x_k, 1)$$

وهذا تناقض مع (*) إذن $\overline{0,1}$ غير متراصة،

ومنه E ذو بعد منته.

الفصل 2

فضاءات Hilbert

قمنا في هذا الفصل بدراسة فضاءات هيلبرت، بدأ بتعريف الجداء السلمي ثم الفضاء الشبه هلبرتي، التعامد، الفضاءات الهلبرتية و أخيرا التقارب الضعيف استعنا في هذا الفصل بكل من المراجع [2]،[6]،[7]،[8].

1.2 الجداء السلمي

تعريف 1.2

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k}=\mathbb{C}$ أو $\mathbb{k}=R$) نسمي جداء سلمي على E كل تطبيق ϕ حيث: $\phi: E\times E\longrightarrow \mathbb{k}$ يحقق:

لكل y من E يكون

1. $\forall x_1,x_2\in E;\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{k};\phi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)=\lambda_1\phi(x_1,y)+\lambda_2\phi(x_2,y)$
2. $\forall x,y\in E\phi(x,y)=\overline{\phi(y,x)}$
3. $\forall x\in E;\phi(x,x)\geq 0$
4. $\forall x\in E;\phi(x,x)=0\implies x=0$

ملاحظة 1.2

من أجل كل x من E يكون

$$\forall y_1,y_2\in E\ ;\ \forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}\ ;\ \phi(x,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)=\overline{\lambda_1}\phi(x,y_1)+\overline{\lambda_2}\phi(x,y_2)$$

الإثبات:

$$\begin{aligned}\phi(x,\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2) = & \overline{\phi(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2,x)}\\ &=\overline{\lambda_1\phi(y_1,x)+\lambda_2\phi(y_2,x)}\\ &=\overline{\lambda_1}\ \overline{\phi(y_1,x)}+\ \overline{\lambda_2}\ \overline{\phi(y_2,x)}\\ &=\overline{\lambda_1}\phi(x,y_1)+\overline{\lambda_2}\phi(x,y_2)\end{aligned}$$

أمثلة 1.2

1. نعرف على $\mathbb{K}^n$ التطبيق ϕ

$$\phi:\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\longrightarrow\mathbb{K}$$
$$(x,y)\longmapsto\phi(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}$$

إن ϕ يعرف جداء سلمي على $\mathbb{K}^n$ يسمى الجداء السلمي القانوني.

الإثبات:

ليكن: $x,x',y\in\mathbb{K}^n$ و $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}$ حيث

$$x=(x_1,x_2,...,x_n)$$

$$x'=(x'_1,x'_2,...,x'_n)$$

$$y=(y_1,y_2,...,y_n)$$

فيكون:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda_1 x+\lambda_2 x', y) &= \sum_{k=1}^{n}(\lambda_1 x_k+\lambda_2 x'_k)\overline{y_k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\lambda_1 x_k\overline{y_k}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_2 x'_k\overline{y_k}\\ &= \lambda_1\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}+\lambda_2\sum_{k=1}^{n}x'_k\overline{y_k}\\ &= \lambda_1\phi(x,y)+\lambda_2\phi(x',y) \qquad ...i)\end{aligned}$$

$$\phi(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}=\overline{\sum_{k=1}^{n}\overline{x_k}y_k}=\overline{\sum_{k=1}^{n}y_k\overline{x_k}}=\overline{\phi(x,y)} \qquad ...ii)$$

$$\phi(x,x)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{x_k}=\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2=0\Rightarrow x_k=0,\forall k=\overline{1,n}$$

$$\Rightarrow x=0 \qquad ...ii)$$

$$\phi(x,x)=\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\geq 0 \qquad ...iv)$$

ومنه ϕ يعرف جداء سلمي.

2.لتكن $l^2(\mathbb{K})$ المعرفة بالشكل التالي:

$$l^2(\mathbb{K})=\left\{(x_n)_{n\in N}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}},\sum_{n\geq 0}|x_n|^2 cv\right\}$$

إن التطبيق المعرف بـ:

$$\phi: l^2(\mathbb{K})\times l^2(\mathbb{K})\longrightarrow\mathbb{K}$$

$$(x,y)\mapsto\phi(x,y)=\sum_{n\geq 0}x_n\overline{y_n}$$

يعرف جداء سلمي على $l^2(\mathbb{K})$

نثبت أن $l^2(\mathbb{K})$ فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$

ليكن $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l^2(k)$ و$\lambda\in\mathbb{K}$، لدينا:

$$\sum_{n\geq 0}|\lambda x_n|=\sum_{n\geq 0}|\lambda x|^2=\sum_{n\geq 0}|\lambda|^2|x|^2=|\lambda|^2\sum_{n\geq 0}|x|^2$$

ومنه: $\sum\limits_{n\geq 0}|\lambda x|^2$ متقاربة إذن:

$$\lambda x\in l^2(\mathbb{K})$$

حتى نثبت أن $x+y\in l^2(\mathbb{K})$ نحتاج الى التوطئة التالية:

توطئة 1.2

من أجل كل $x,y\in\mathbb{K}$ لدينا:

$$(|x|+|y|)^2\leq 2(|x|^2+|y|^2)$$

الإثبات:

من أجل كل $x,y\in\mathbb{K}$ لدينا:

$$(|x|+|y|\geq 0)$$

$$|x|^2+|y|^2-2|x||y|\geq 0$$

$$|x|^2+|y|^2\geq 2|x||y|$$

$$2(|x|^2+|y|^2)\geq(|x|+|y|)^2$$

ومنه:

$$(|x|+|y|)^2\leq 2(|x|^2+|y|^2)$$

لتكن $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l^2(\mathbb{K})\ ;\ y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l^2(\mathbb{K})$

نضع:

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ S_n=\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^2$$

لدينا:

$$\forall k \in \{1,2,...,n\}\ ; |x_k + y_k|^2 \leq (|x_k| + |y_k|)^2 \leq 2\left(|x_k|^2 + |y_k^2|\right)$$

ومنه:

$$\forall N \in \mathbb{N}; S_n \leq 2(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2)$$

بما أن المتتاليتان $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2$ و $\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^2$ متقاربتان فهما محدودتان إذن:

$$\exists M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+^*\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ 2\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right) \leq 2(M_1 + M_2)$$

يوضع:

$$2\,(M_1 + M_2) = M \in \mathbb{R}_+^*$$

نجد:

$$\forall n \in \mathbb{N}; S_n \leq M$$

إذن : s_n متقاربة أي السلسلة $\sum\limits_{n\leq 0} |x_n + y_n|^2$ متقاربة.

ومنه: $x + y \in l^2$

وعليه $l^2(\mathbb{K})$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

نعرف على $l^2(\mathbb{K}) \times l^2(\mathbb{K})$ التطبيق ϕ بحيث لكل $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$ و $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$

نضع:

$$\phi(x, y) = \sum_{n\geq 0} x_n \overline{y_n}$$

إن ϕ معرف جيدا، فعلا إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن:

$$\overline{y} = \overline{(y_n)}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$$

وعليه:

$$\forall k = \overline{0, n}\ ;\ (|x_k| + |\overline{y_k}|) \geq 0$$

وبالتالي:

$$|x_k \overline{y_k}| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_n|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\overline{y_k}|^2\right)$$

ومنه:

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \ ; \ \sum_{k=1}^{n} |x_k \overline{y_k}| \leq M$$

إذن السلسلة $\sum_{n\leq 0} x_n \overline{y_n}$ متقاربة مطلقا فهي متقاربة

ϕ جداء سلمي لأن:

من أجل كل y من $\mathbb{K}$ لدينا:

$$\begin{aligned}
\forall x_1 = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , x_2 = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K}); \phi(x_1 + x_2, y) &= \sum_{n\geq 0} (x_n + \omega_n)\overline{y_n} \\
&= \sum_{n\geq 0} x_n + \overline{y_n} + \sum_{n\geq 0} \omega_n \overline{y_n} \\
&= \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \Bbbk, \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \in l^2(\mathbb{K}) \ ; \ \phi(\lambda x, y) &= \sum_{n\geq 0} \lambda x_n \overline{y_n} \\
&= \lambda \sum_{n\geq 0} \lambda x_n \overline{y_n} \\
&= \lambda \phi(x, y) ...i)
\end{aligned}$$

من أجل كل $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $l^2(\mathbb{K})$ لدينا:

$$\begin{aligned}
\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K}) \ ; \ \phi(x, y) &= \sum_{n\geq 0} x_n \overline{y_n} \\
&= \overline{\sum_{n\geq 0} \overline{x_n} y_n} \\
&= \overline{\sum_{n\geq 0} y_n \overline{x_n}} \\
&= \overline{\phi(x, y)} \quad ...ii)
\end{aligned}$$

من أجل كل $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$ لدينا:

$$\phi(x, x) = 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 = 0 \Rightarrow x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0 \quad ...iii)$$

ولدينا أيضا:

$$\phi(x, x) = \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 \geq 0$$

ترميز 1.2

إذا كان E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R} \vee \mathbb{K}=\mathbb{C})$ فاننا نرمز للجداء السلمي على E بالرمز $\langle,\rangle$ ونكتب:

$$\langle,\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$
$$(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$$

2.2 الفضاء الشبه هلبرتي

تعريف 1.2

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R} \vee \mathbb{K}=\mathbb{C})$ مزود بجداء سلمي $\langle,\rangle$، نسمي E فضاء شبه هلبرتي ونرمز له بـ: $(H,\langle,\rangle)$.

ملاحظة 2.2

- نسمي فضاء شبه هلبرتي حقيقي (على الحقل $\mathbb{R}$) ذو بعد منته فضاء إقليديا.
- نسمي فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{C}$ ذو بعد منته فضاء هرميتي.

مبرهنة 1.2

ليكن $(H,\langle,\rangle)$ فضاءا شبه هلبرتي عندئذ التطبيق ϕ حيث:

$$\phi : H \mapsto \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \phi(x) = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

يعرف نظيم على H (يسمى النظيم الملحق بالجداء السلمي).

الإثبات:

- إن ϕ معرف جيدا انطلاقا من الخاصية (iv) للجداء السلمي.
- واضح أن $\phi(0) = 0$.

ليكن $x \in H$ بحيث $\phi(x) = 0$ فان $\langle x, x\rangle = 0$ ومنه $x = 0$ (من الخاصية (iii) للجداء السلمي)

- ليكن $\lambda \in \mathbb{K}, x \in H$ فإن:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x) &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} \\ &= \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle} \\ &= |\lambda|\phi(x)\end{aligned}$$

- نثبت أن: $\phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y)$

لإثبات ذلك نحتاج إلى التوطئة التالية:

توطئة 2.2: (متراجحة Cauchy-Schwartz)

ليكن $(H, \langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي و ليكن التطبيق ϕ حيث :

$$\begin{aligned}\phi \ : \ H &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \phi(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}\end{aligned}$$

عندئذ يكون: $\forall x, y \in H \ ; \ |\langle x, y\rangle| \leq \phi(x)\phi(y)$

الإثبات:

نلاحظ أنه:

إذا كان $\langle x, y\rangle = 0$ فإن التوطئة 2.2 محققة بداهة.

نفرض أن $\langle x,y\rangle \neq 0$، ولتكن $x,y\in H$، لدينا من جهة $\phi^2(x+\lambda y)\geq 0$ ومن جهة أخرى لكل $\lambda\in\mathbb{K}$ لدينا:

$$\begin{aligned}\phi^2(x+\lambda y) &= \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle\\ &= \langle x, x+\lambda y\rangle + \lambda\langle y, x+\lambda y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle + \overline{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y,y\rangle\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\phi^2(x+\lambda y) &= \phi^2(x) + \overline{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\overline{\langle y,x\rangle} + |\lambda|^2 + \phi^2(y)\\ &= \phi^2(x) + 2Re(\lambda\overline{\langle x,y\rangle}) + |\lambda|^2\phi^2(y)\end{aligned}$$

ومنه:

$$\forall\lambda\in k\ ;\ |\lambda|^2\phi^2(y) + 2Re(\lambda\overline{\langle x,y\rangle}) + \phi^2(x)\geq 0$$

إذا كان $\phi(y)=0$ فإن $y=0$ وعندئذ التوطئة 2.2 محققة بداهة.

نفرض أن $\phi(y)\neq 0$ وبأخذ $\lambda = t\langle x,y\rangle$ حيث $t\in\mathbb{R}$ فنجد:

$$|\lambda|^2 = t^2|\langle x,y\rangle|^2$$

ومنه:

$$\forall t\in\mathbb{R}\ ;\ |\langle x,y\rangle|^2\phi^2(y)t^2 + 2|\langle x,y\rangle|^2 t + \phi^2(x)\geq 0$$

إذن:

$$|\langle x,y\rangle|^4 - |\langle x,y\rangle|^2\phi^2(x)\phi^2(y)\leq 0$$

ومنه:

$$|\langle x,y\rangle|^4 \leq |\langle x,y\rangle|^2\phi^2(x)\phi^2(y)$$

إذن:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \phi(x)\phi(y)$$

إذن التوطئة 2.2 محققة.

ومنه:

$$\phi^2(x+y) = \phi^2(x) + 2Re\langle x,y\rangle + \phi^2(y)$$

$$\phi^2(x+y) \leq \phi^2(x) + 2|Re\langle x, y\rangle| + \phi^2(y)$$

$$\leq \phi^2(x) + 2|\langle x, y\rangle| + \phi^2(y)$$

وحسب التوطئة 2.2 نجد:

$$\phi^2(x+y) \leq \phi^2(x) + 2\phi(x)\phi(y) + \phi^2(y)$$

$$\phi^2(x+y) \leq (\phi(x)+\phi(y))^2$$

$$\phi(x+y) \leq \phi(x)+\phi(y)$$

ومنه ϕ يعرف نظيم على H.

مبرهنة 2.2

ليكن H فضاء شبه هلبرتي و $x \in H$ عندئذ يكون لدينا:

$$\|x\| = \sup\{|\langle y, x\rangle|; y \in H; \|y\| \leq 1\}$$

الإثبات:

ليكن $x \in H$ إذا كان $x = 0$ فإنه:

$$\forall y \in H\ ,\ \|y\| \leq 1\ ;\ |\langle y, x\rangle| = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \sup\{|\langle y, x\rangle|; \|y\| \leq 1\} = \sup\{0\} = 0 = |x|$$

نفرض أن $x \neq 0$، وليكن $y \in H$ حيث $\|y\| \leq 1$

باستعمال توطئة **(Cauchy-Schwartz)** نجد:

$$|\langle y, x\rangle| \leq \|y\|\|x\| \leq \|x\|$$

إذن:

$$\sup\{|\langle y, x\rangle|; y \in H; \|y\| \leq 1|\} \leq \|x\| \quad ...(1)$$

بما أن $\|x\| \geq 0$ وبوضع: $\frac{1}{\|x\|}.x = y_0$

نجد $\|y_0\| = 1$ ومنه:

$$|\langle y_0, x\rangle| \leq \sup\{|\langle y, x\rangle| \ ; \ y \in H; \|y\| \leq 1\}$$

لكن:

$$\begin{aligned} |\langle y_0, x\rangle| = & \left|\left\langle \frac{1}{\|x\|}x, x\right\rangle\right| \\ & = \frac{1}{\|x\|}|\langle x, x\rangle| \\ & = \|x\| \end{aligned}$$

إذن:

$$\|x\| \leq \sup\{|y, x|; y \in H, \|y\| \leq 1\} \quad ...(2)$$

من (1) و (2) نجد:

$$|x| = \sup\left\{|\langle y, x\rangle| \ ; \ y \in H, |y| \leq 1\right\}$$

نتيجة 1.2

كل فضاء شبه هلبرتي هو فضاء نظيمي.

مبرهنة 2.2: مساواة متوازي الأضلاع

ليكن $(H, \langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي لدينا:

$$\forall x, y \in H; \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

الإثبات:

لدينا:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = & \ \langle x+y, x+y\rangle \\ = & \ \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle \quad ...(1) \end{aligned}$$

ولدينا أيضا:

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x,y\rangle - \langle x,y\rangle - \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2Re\langle x,y\rangle \quad ...(2)\end{aligned}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

ملاحظة 3.2

عكس النتيجة 1.2 السابقة غير صحيح في الحالة العامة.

نظرية 1.2

ليكن $(E, \|.\|)$ فضاء نظيمي على الحقل $\mathbb{R}$ إذا كان:

$$\forall x, y \in E; \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

فإن التطبيق المعرف على $E \times E$ بـ:

$$\forall (x,y) \in E \times E; \phi(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

يعرف جداء سلمي حقيقي على $E \times E$.

للإثبات ذلك نحتاج إلى التوطئة التالية:

توطئة 3.2

ليكن E فضاء نظيمي على حقل $\mathbb{K}$، $a \in E$ عندئذ التطبيق f حيث:

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{K} &\longrightarrow E \\ \lambda &\mapsto \lambda a \end{aligned}$$

مستمر

الإثبات:

ليكن $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ فإن:

$$\| f(\lambda) - f(\mu) \| = \|\lambda a - \mu a\| = |\lambda - \mu| \|a\|$$

إذن فان f ليبتشيزي نسبته $k = \|a\|$ إذن فهو مستمر
وعليه وحسب التوطئة السابقة فان ϕ مستمر بالنسبة للمركبة الأولى إذن:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ ;\ \phi(\lambda x, y) = \lambda \phi(x, y)$$

مبرهنة 3.2

ليكن $(H, \langle , \rangle)$ فضاء شبه هلبرتي، التطبيقان ϕ_2, ϕ_1 حيث:

$$\phi_2 : H \longrightarrow \mathbb{k} \qquad \phi_1 : H \longrightarrow \mathbb{k}$$

و

$$y \mapsto \phi_2(y) = \langle x, y\rangle \qquad x \mapsto \phi_1(x) = \langle x, y\rangle$$

مستمران بانتظام و التطبيق ϕ حيث:

$$\phi : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(x, y) \mapsto \phi(x, y) = \langle x, y\rangle$$

مستمر.

الإثبات:

ليكن H فضاء شبه هلبرتي ،لتكن x_1, x_2, y من H، لدينا:

$$|\phi_1(x_1) - \phi_1(x_2)| = |\langle x_1, y\rangle - \langle x_2, y\rangle| = |\langle x_1 - x_2, y\rangle| \leq \|y\| \|x_1 - x_2\|$$

ومنه ϕ_1 ليبتشيزي نسبته $k = \|y\|$ إذن فهو مستمر بانتظام.

ولتكن x, y_1, y_2 من H.

إذن:

$$|\phi_2(y_1) - \phi_2(y_2)| = |\phi_(x, y_1) - \phi(x, y_2)| = |\phi(x, y_1 - y_2)| \leq \|x\| \|y_1 - y_2\|$$

ومنه ϕ_2 ليبتشيزي نسبته $k = \|x\|$ إذن فهو مستمر بانتظام.

لتكن $(x, y) \in H \times H$ و $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط $H \times H$ متقاربة نحو (x, y) إذن:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو x و$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو y.

ومنه: $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ و $\|y_n - y\| \longrightarrow 0$

بما أن:

$$\begin{aligned}\|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle\| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x_n, y_n - y\rangle - \langle x_n - x, y_n - y\rangle| \\ &\leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y_n - y\| \\ &\leq \|x_n - x\|\|y_n - y\| + \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y_n - y\| + \\ &\|x_n - x\|\|y\| + \|x_n - x\|\|y_n - y\|\end{aligned}$$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \to 0$$

ومنه ϕ (الجداء السلمي) مستمر.

3.2 التعامد

تعريف 1.2

ليكن H فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ و لتكن x و y من H ، نقول عن x و y أنهما متعامدان إذا كان: $\langle x, y\rangle = 0$ و نضع $x \perp y$

أي:

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$$

تعريف 2.2

ليكن H فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ و لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من H، نعرف عمودي المجموعة A بـ:

$$A^{\perp} = \{y \in H \ ; \ \forall x \in A \ ; \ \langle x, y\rangle = 0\}$$

خواص 1.2

ليكن H فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ و لتكنAوB مجموعتان جزئيتان من H

1. $\{0\}^{\perp} = H$
2. $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$

الإثبات:

1. ليكن $x \in H$ لدينا:

$$\langle x, 0\rangle = 0$$

ومنه : $x \in \{0\}^{\perp}$

إذن:

$$H \subseteq \{0\}^{\perp} \ldots(1)$$

ولدينا:

$$\{0\}^{\perp} \subseteq H \quad \ldots(2)$$

من (1) و (2) نجد:

$$\{0\}^{\perp} = H$$

2.ليكن $x \in B^{\perp}$ إذن:

$$\forall y \in B \; ; \; \langle x, y\rangle = 0$$

ولدينا $A \subseteq B$ إذن:

$$\forall y \in A \; ; \; \langle x, y\rangle = 0$$

إذن: $x \in A^{\perp}$

وعليه: $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$

مبرهنة 4.2

ليكن H فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية من H، عندئذ يكون $A^{\perp}$ فضاء شعاعي جزئي مغلق من H ويكون لدينا:

$$\forall x \in H; x \in A \cap A^{\perp} \Rightarrow x = 0$$

الإثبات:

ليكن H فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ وA مجموعة جزئية غير خالية من H

لدينا: $\forall x \in H\ ;\ \langle x, 0\rangle = 0$

إذن:

$$\forall x \in A; \langle x, 0\rangle = 0$$

ومنه: $0 \in A^{\perp}$ إذن $A^{\perp} \neq \emptyset$

لتكن $x, y \in A^{\perp}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ وليكن $z \in A$

$$\langle \alpha x + y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 0$$

إذن:

$$\forall z \in A; \langle \alpha x + y, z\rangle = 0$$

ومنه: $\alpha x + y \in A^{\perp}$

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $A^{\perp}$ متقاربة نحو x من H وليكن $y \in A$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}; |\langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y\rangle + \langle x - x_n, y\rangle| \\ &= |\langle x - x_n, y\rangle| \\ &\leq \|\langle x - x_n\rangle\| \|y\|\end{aligned}$$

بالمرور إلى النهاية نجد: $\langle x, y\rangle = 0$

إذن $x \in A^{\perp}$ ومنه $A^{\perp}$ مجموعة مغلقة.

مبرهنة 5.2

ليكن $(H, \langle , \rangle)$ فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ وA مجموعة محدبة وتامة من H عندئذ:

$$\exists ! a \in A;\ \|a\| = \inf\{\|x\|; x \in A\}$$

الإثبات:

الوجود:

بما أن $A \neq \emptyset$ فإن $\{\ \|x\|\ ; x\ \in A\}$ و بما أن:

$$\forall x \in A; |x| \geq 0$$

فإن $\{\|x\|; x \in A\}$ محدودة من الأسفل و بالتالي فهي تملك حدا أسفل وليكن a

ومنه:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \exists x_n \in A\ ;\ \|x_n\| < \alpha + \frac{1}{n}$$

وبالتالي $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هي متتالية من نقاط A بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \|x_n\| < \alpha + \frac{1}{n}$$

إذن:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n\| = \alpha$$

ليكن $n, p \in \mathbb{N}$ وبتوظيف المبرهنة (مساواة متوازي الأضلاع) نجد:

$$\begin{aligned} \left\|\tfrac{1}{2}x_n + \tfrac{1}{2}x_p\right\|^2 + \left\|\tfrac{1}{2}x_n - \tfrac{1}{2}x_p\right\|^2 &= 2\left(\left\|\tfrac{1}{2}x_n\right\|^2 + \left\|\tfrac{1}{2}x_p\right\|^2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\|x_n\|^2 + \left\|x_p\right\|^2\right) \end{aligned}$$

ومنه:

$$\frac{1}{4}\left\|x_n - x_p\right\| = \frac{1}{2}\left(\|x_n\|^2 + \left\|x_p\right\|^2\right) - \left\|\frac{1}{2}(x_n + x_p)\right\|^2$$

إذن:

$$\left\|x_n - x_p\right\| = 2\left(\|x_n\|^2 + \left\|x_p\right\|^2\right) - 4\left\|\frac{1}{2}(x_n + x_p)\right\|^2$$

بما أن A محدبة فإن: $\frac{1}{2}(x_n + x_p) \in A$ ومنه:

$$\alpha \leq \left\|\frac{1}{2}(x_n + x_p)\right\|$$

وعليه:

$$\alpha^2 \leq \left\|\frac{1}{2}(x_n + x_p)\right\|^2$$

وبالتالي:

$$-4\alpha^2 \geq -4\left\|\frac{1}{2}(x_n + x_p)\right\|^2$$

إذن:

$$\left\|x_n - x_p\right\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\left\|x_p\right\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(x_n + x_p)\right\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\left\|x_p\right\|^2 - 4\alpha^2$$

بالمرور إلى النهاية لما $n, p \to \infty$ نجد:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to\infty}} \|x_n - x_p\| = 0$$

ومنه $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية لـCauchy وبما أن A تامة إذن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو a بماأن $\|.\|$ مستمر إذن:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n| = \|a\|$$

ومنه:

$$\|a\| = \alpha$$

الوحدانية:

نفرض أنه:

$$\exists a, b \in A \quad ; \quad \|a\| = \|b\| = \alpha$$

لدينا:

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\|a\|^2 + \frac{1}{2}\|b\|^2$$

وحسب مساواة متوازي الأضلاع:

$$\alpha^2 = \left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|a-b\|^2 \geq \alpha^2 + \frac{1}{4}\|a-b\|^2$$

ومنه:

$$\|a-b\|^2 = 0$$

إذن:

$$a = b$$

مبرهنة 6.2

ليكن H فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ و F فضاء شعاعي من H، عندئذ يكون لدينا:

$$F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$$

الإثبات:

ليكن H فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ و F فضاء شعاعي جزئي من H ، لدينا حسب المبرهنة (2.4) أن $(F^{\perp})^{\perp}$ مجموعة مغلقة وبالتالي لإثبات (6.2) يكفي أن نبرهن أن:

$$\overline{F} \subset (F^{\perp})^{\perp}$$

ليكن $x \in F$ لدينا :

$$\forall y \in F^{\perp}; \langle x, y\rangle = 0$$

تعريف 3.2

ليكن H فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ ولتكن $(e_1)_{i\in I}$ عائلة منتهية من H ، نقول عن $(e_1)_{i\in I}$ انها متعامدة اذا كانت عناصرها متعامدة مثنى مثنى أي:

$$\forall i, j \in I; i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0$$

نظرية 2.2: نظرية فيثاغورس

لتكن $(x_1 + x_2 ... + x_n)$ عائلة متعامدة من H لدينا:

$$\|x_1 + x_2 ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_n\|^2$$

الإثبات:

ليكن $(H, \langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ ولتكن $(x_1, x_2, ..., x_n)$ عائلة متعامدة من H

$$\|x_1 + x_2 ... + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |X_k\|^2 + \left(\sum_{I\leq i,j\leq n} \langle x_i, y_j\rangle \right)$$

وكون: $\sum_{I\leq i,j\leq n}\langle x_i, y_j\rangle = 0$ إذن:

مبرهنة 7.2

ليكن $(H, \langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ ولتكن $(x_1, x_2, ..., x_p)$ عائلة متعامدة تحوي اشعة كلها ليست معدومة عندئذ تكون $(x_1, x_2, ..., x_p)$ عائلة مستقلة .

الإثبات:

ليكن $(H,\langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ ولتكن $(x_1,x_2,...,x_p)$ عائلة متعامدة تحوي اشعة كلها ليست معدومة

نضع: $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i=0$

لدينا:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i, x_j\right\rangle=\lambda_j\|x_j\|^2=0$$

وكون: $x_j\neq 0$ فان $\lambda_j=0$ إذن:

$$\forall i=\overline{1,p};\lambda_i=0$$

إذن: $(x_1,x_2,...,x_p)$ مستقلة.

تعريف 4.2

ولتكن $(e_i)_{i\in I}$ عائلة منتهية من H نقول عن $(e_i)_{i\in I}$ أنها متعامدة ومتجانسة إذا كان:

$$\forall i,j\in I;\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}0 & ;\ i\neq j\\ 1 & ;\ i=j\end{cases}$$

مبرهنة 8.2

ولتكن $(e_1,e_2,\dots,e_n)$عائلة متعامدة ومتجانسة من Hو

$v\in vect(e_1,e_2,\dots,e_n)$

عندئذ يكون:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i$$

الإثبات:

لتكن $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ عائلة متعامدة ومتجانسة و ليكن $v \in vect(e_1, e_2, ..., e_n)$

عندئذ:

$$\exists (v_1, v_2, ..., v_p) \; ; \; v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

إذن:

$$\langle v, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} v_i e_i, e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} v_i e_i = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, e_i \rangle = v_i$$

نتيجة 2.2

ليكن $(H, \langle , \rangle)$ فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ ولتكن $(e_1, e_2, ..., e_n)$ عائلة متعامدة ومجانسة من H و $(x, y) \in vect(e_1, e_2, ..., e_n)$ يكون لدينا:

$$\forall x, y \in H; \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$$

الإثبات:

لدينا $(x, y) \in vect(e_1, e_2, ..., e_n)$ إذن:

$$\exists (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{K}; x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \wedge y = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

نعلم أن الجداء السلمي القانوني معرف بـ:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_1 \overline{y_i}$$

وحسب المبرهنة السابقة لدينا:

$$\langle x,e_1\rangle = x_i \wedge \langle y,e_i\rangle = y_i$$

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_1\rangle\overline{\langle y,e_1\rangle}$$

نظرية 3.2: الإسقاط العمودي

ليكن $(H,\langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R}\vee\mathbb{K}=\mathbb{C})$ و ليكن E فضاء شعاعي جزئي تام من H، وليكن $x\in E$ عندئذ:

$$\exists! y\in E; \left\|x-y\right\| = \inf\{\|x-z\|, z\in E\}$$

الإثبات:

A محدبة ، فعلا:

ليكن $u,v\in A$ بحيث $A=E-x$

$$\exists y,z\in E \quad ; u=y-x$$
$$v=z-x$$

وليكن $\alpha\in[0,1]$ ، إذن :

$$\alpha u+(1-\alpha)v=\alpha y+(1-\alpha)z-\alpha x-(1-\alpha)x$$

$$=(\alpha y+(1-\alpha)z)-x$$

لدينا $(\alpha y+(1-\alpha)z)\in E$ من كون E محدب

ومنه من أجل $\alpha\in[0,1]$ يكون:

$$\alpha u+(1-\alpha)v\in A$$

ومن جهة أخرى لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية لـ Cauchy من نقاط A إذن توجد متتالية $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من نقاط E بحيث:

$$\forall n\in\mathbb{N}\ , U_n = y_n - x \quad ...(1)$$

ليكن $\epsilon > 0$ فإنه:

$$\begin{aligned}\exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n, m\in\mathbb{N}; (n\geq n_0)\wedge(m\geq n_0) &\Rightarrow \ \|U_n - U_m\| < \epsilon\\ &\Rightarrow \ \|(U_n + x) - (U_m + x)\| < \epsilon\\ &\Rightarrow \ \|y_n - y_m\| < \epsilon\end{aligned}$$

إذن $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لـ Cauchy لكن E تام إذن:

$$\exists y\in E, \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = y$$

بالمرور إلى النهاية في(1) نجد:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} U_n = y - x$$

إذن A تامة

ومنه حسب المبرهنة 5.2 فإنه:

$$\exists! a\in A\ ;\ \|a\| = \inf\{\|z\|\ ,\ z\in A\}$$

وبما أن: $a\in A$ فإنه:

$$\exists y\in E \quad ; \quad a = y - x$$

تعريف 5.2

ليكن $(H,\langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}(\mathbb{K}=\mathbb{R}\vee\mathbb{K}=\mathbb{C})$ و ليكن E فضاء شعاعي جزئي تام من H ، التطبيق الذي يرفق بكل شعاع x من H الشعاع y الوحيد من E المعرف في النظرية السابقة يسمى الإسقاط العمودي على E ويرمز له بالرمز P_E ونكتب: $y = P_E(x)$

مبرهنة 9.2

ليكن $(H, \langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C})$ و ليكن E فضاء شعاعي جزئي تام من H و P الإسقاط العمودي على E عندئذ يكون لدينا:

1. $E = \{x \in H; P_E(x) = x\}$.
2. $\forall y \in E; (x-y) \in E^{\perp} \Leftrightarrow y = P_E(x)$
(أي أن $P_E(x)$ هو الشعاع الوحيد من E بحيث $(x - P_E(x)) \in E^{\perp}$.
3. $H = E \oplus E^{\perp}; \forall x \in H; x = P_E(x) + (I - P_E)(x)$
حيث I هو التطبيق المطابق ل H
4. $\forall x \in H; \|x\|^2 = \|P_E(x)\|^2 + \|(I-P_E)(x)\|^2$
5. P_E خطي ومستمر.
6. $E^{\perp} = ker P_E$.

مبرهنة 9.2: (Gram-Schemidt)

ليكن $(H, \langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي على الحقل $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{K} = \mathbb{C})$ و $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أسرة حرة من H عندئذ يمكن إنشاء أسرة متعامدة ومتجانسة $(b_n)_{n\geq 0}$ تولد الفضاء الذي تولده $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

الإثبات:

تشير في البداية إلى أن الأمر يتعلق بإنشاء أسرة متعامدة $(b_n)_{n\geq 0}$، فإن لم تكن هذه الأخيرة متجانسة أخذت بدالها الأسرة المتجانسة $\left(\frac{b_n}{\|b_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ التي تولد بدورها و بوضوح نفس الفضاء الذي تولده $(b_n)_{n\leq 0}$.

نعرف الأسرة $(b_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة التدريجية التالية:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_n = a_n - P_{E_{n-1}}(a_n) \end{cases}$$

حيث: E_{n-1} الفضاء الشعاعي المولد ب $(a_k)_{0\leq k\leq n-1}$

و: $P_{E_{n-1}}$ هو تابع الإسقاط على E_{n-1}

بالفعل الأسرة متعامدة، من أجل $n\geq m$ لدينا:

$$\begin{aligned} \langle b_n, b_m\rangle &= \langle a_n, P_{E_{n-1}}(a_n), a_m - P_{E_{n-1}}(a_m)\rangle \\ &= \langle a_n, P_{E_{n-1}}(a_n), a_m\rangle - \langle a_n, P_{E_{n-1}}(a_n), P_{E_{n-1}}(a_m)\rangle \end{aligned}$$

و حسب مبرهنة الإسقاط فان:

$$\langle a_n - P_{E_{n-1}}(a_n), a_m\rangle = 0 \wedge \langle a_n - P_{E_{n-1}}(a_n), P_{E_{n-1}}(a_m)\rangle = 0$$

إذن :

$$\forall n \neq m \; ; \; \langle b_n, b_m\rangle = 0$$

4.2 الفضاءات الهلبرتية

تعريف 1.2

ليكن $(H, \langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي، نقول عن H أنه فضاء هلبرتي إذا كان تاما بالنسبة للنظيم المرفق بالجداء السلمي.

أمثلة 2.2

- كل فضاء اقليديا أو هرميتا هو تام إذن فهو فضاء هلبرتي.

• بالعودة إلى المثال 2 في أمثلة الجداء السلمي فان $l^2(\mathbb{K})$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R}\vee\mathbb{K}=\mathbb{C})$ هو فضاء Hilbert.

الإثبات:

لتكن $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية لـCauchy من عناصر $l^2(\mathbb{K})$ نضع:

$$\forall k\in\mathbb{N}; x^k=(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$$

وليكن $\epsilon>0$ إذن:

$$\exists n_0\in\mathbb{N};\forall p,q\in\mathbb{N};(p\geq n_0)\wedge(q\geq 0)\Rightarrow\|x^p-x^q\|<\epsilon$$

$$\exists n_0\in\mathbb{N};\forall p,q\in\mathbb{N};(p\geq n_0)\wedge(q\geq 0)\Rightarrow\sum_{n\geq 0}|x^p-x^q|^2<\epsilon^2$$

بما أنه لدينا:

$$\forall N\in\mathbb{N};\left|x_n^p-x_n^q\right|\langle\sum_{n\geq 0}\left|x_n^p-x_n^q\right|^2$$

إذن:

$$\exists n_0\in\mathbb{N};\forall p,q\in\mathbb{N};(p\geq n_0)\wedge(q\geq 0)\Rightarrow\left|x_n^p-x_n^q\right|<\epsilon$$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فان المتتالية $(x_n^K)_{n\in\mathbb{N}}$ هي ل Cauchy في $\mathbb{K}$ نضع:

$$\forall n\in\mathbb{N};\lim_{k\to\infty}x_n^k=x_n$$

ولتكن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$، إذا كان $p,q\in\mathbb{N}$ حيث $(p\geq n_0)\wedge(q\geq 0)$ فإن:

$$\forall m\in\mathbb{N};\sum_{n\longrightarrow 0}^{n}\left|x_n^p-x_n^q\right|^2<\epsilon^2...(*)$$

بالمرور إلى النهاية في $(*)$ لما $q\longrightarrow+\infty$ نجد:

$$\forall m\in\mathbb{N};\sum_{n\longrightarrow 0}^{n}|x_n^p-x_n^q|<\epsilon^2...(**)$$

بالمرور إلى النهاية في $(**)$ نجد:

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\to 0}^{m} |x_n^p - x_n^q| < \epsilon^2$$

لدينا :

$$\sum_{n\geq 0} |x_n|^2 \leq \sum_{n\leq 0} \left|x_n^{n_0} - x_n\right|^2 + \sum_{n\geq 0} \left|x_n^{n_0}\right|^2 < \infty$$

إذن: $x_n \in l^2(\mathbb{k})$

ومنه:

$$\left\|x_n^p - x_n\right\|^2 < \epsilon^2$$

وبما أن ϵ كيفي موجب تماما إذن:

$$\forall \epsilon >; \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall p \in \mathbb{N}; p \geq n_0 \Rightarrow \left\|x_n^p - x_n\right\| < \epsilon$$

إذن المتتالية $(x^k)_{k\in\mathbb{K}}$ متقاربة وبما أن $l^2(\mathbb{k})$ فضاء هلبرتي فان $l^2(\mathbb{k})$ فضاء Hilbert .

ملاحظة 4.2

الفضاء الهلبرتي هو حالة خاصة من فضاءات بناخ.

مبرهنة 10.2

ليكن H فضاء هلبرتي و F فضاء شعاعي جزئي من H لدينا القضايا التالية متكافئة:

(i) F مغلق

(ii) $H = F^{\perp} \oplus F$

(ii) $(F^{\perp})^{\perp} = F$

الإثبات:

ليكن H فضاء هلبرتي و F فضاء شعاعي جزئي من H

$(i) \Rightarrow (ii)$

بما أن F ف ش ج مغلق من H إذن فهو تام وحسب نظرية الإسقاط فان:

$$H = F^{\perp} \oplus F$$

$(iii) \Leftarrow (ii)$

ليكن: $x \in (F^{\perp})^{\perp}$ وبالتالي $x \in H$ إذن:

$$\exists ! y \in F \wedge \exists ! z \in F^{\perp}; x = y + z$$

ولدينا:

$$\langle x, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle y, z\rangle + \|z\|^2 = 0$$

ولدينا: $\langle y, z\rangle = 0$ إذن $\|z\|^2 = 0$ وعليه $z = 0$

إذن: $x = y$ وبما أن $y \in F$ فان $x \in F$

إذن :

$$(F^{\perp})^{\perp} F \subseteq \ ...(2)$$

و حسب المبرهنة (6.2) لدينا:

$$\overline{F} \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$$

وبما أن F مغلق فان:

$$\overline{F} = F \subseteq (F^{\perp})^{\perp} ...(2)$$

من (1) و (2) نجد:

$$(F^{\perp})^{\perp} = F$$

$(i) \Leftarrow (iii)$

لدينا: $(F^{\perp})^{\perp} = F$ و $(F^{\perp})^{\perp}$ مجموعة مغلقة اذن F مغلق.

نظرية 4.2

ليكن H فضاء هلبرتي و ف ش ج من H لدينا:

$$\overline{F} = (F^{\perp})^{\perp}$$

الإثبات:

ليكن H فضاء هلبرتي و F ف ش ج من H

حسب المبرهنة (6.2) لدينا:

$$\overline{F} \subseteq (F)^{\perp} \qquad (1)$$

و حسب المبرهنة السابقة لدينا:

$$\left(\overline{F}^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{F}$$

و لدينا $F \subseteq \overline{F}$ إذن $\left(\overline{F}^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq F^{\perp}$ وعليه:

$$(\overline{F}^{\perp})^{\perp} \subseteq \left(\overline{F}^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{F}$$

ومنه:

$$(F^{\perp})^{\perp} \subseteq F \qquad ...(2)$$

إذن

$$\overline{F} = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$$

5.2 التقارب الضعيف

تعريف 1.2

ليكن H فضاء هلبرت، $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط H،$x \in H$ نقول عن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها تتقارب بضعف نحو x ونرمز لذلك ب $x_n \rightharpoonup x$
إذا وفقط إذا تحقق مايلي :

$$\forall y \in H \quad ; \quad \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle ...(*)$$

تسمى x التي تحقق $(*)$ بالنهاية الضعيفة للمتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ملاحظة 5.2

ليكن H فضاء هلبرت، $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية نقاط H،$x \in H$ إذا كان: $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$
فإننا نقول عن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها متقاربة بقوة نحو x.

نظرية 5.2

ليكن H فضاء هلبرت ، كل متتالية من نقاط H تملك على الأكثر نهاية ضعيفة واحدة (النهاية الضعيفة ان وجدت فهي وحيدة).

نظرية 6.2

ليكن H فضاء هلبرت، $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط H، إذا كانت $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة تقاربا ضعيفا فإنها محدودة.

نظرية 7.2

ليكن H فضاء هلبرت $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط H،$X \in H$ لدينا:

$$X_n \mapsto X \Rightarrow X_n \rightharpoonup X$$

نظرية 8.2

ليكن H فضاء هلبرت ،$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط H،$X \in H$، إذا كان H ذو بعد منته فإن :

$$X_n \rightharpoonup X \Rightarrow X_n \mapsto X$$

الفصل 3

الأساسات الهلبرتية

يدور محتوى هذا الفصل حول الأساسات الهلبرتية بدأ بتعريف العائلات الكلية ثم قابلية الفصل وفي الختام مفهوم الأساس الهلبرتي. استعنا في هذا الفصل بالمراجع [4]،[5]،[6].

1.3 العائلات الكلية

تعريف 1.3

ليكن H فضاء هلبرتي وA مجموعة جزئية غير خالية من H، نقول عن H أنها مجموعة كلية اذا وفقط اذا كان:

$$\overline{vect(A)} = H$$

(حيث $vect(A)$ هو الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بواسطة A).

مبرهنة 1.3

ليكن H فضاء هلبرت، $F = \{e_i\}_{i\in I}$ أسرة أشعة من H تكون F عائلة كلية ، إذا و فقط إذا كان :

$$\forall x \in \mathbb{H}; \forall \epsilon > 0; \exists n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad \exists\ e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{in} \in \mathbb{F}$$

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \quad ; \quad \|x - \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda_k e_{ik}\| < \epsilon$$

مبرهنة 2.3

ليكن H فضاء هلبرتي وA مجموعة جزئية غير خالية منH،تكون A كلية اذا وفقط اذا كان:

$$A^{\perp} = \{0\}$$

الإثبات:

ليكن $(H,\langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي و $\emptyset \neq A \subseteq H$

نفرض أن A كلية

ليكن $x \in A^{\perp}$ و $z \in vect(A)$ إذن:

$$\exists y_1, y_2, ..., y_n \in A \ ; \ \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}; z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\langle z, x\rangle &= \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k, x\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle y_k, x\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

إذن:

$$\forall z \in vect(A); \langle z, x\rangle = 0$$

ومنه:

$$x \in (vect(A))^{\perp}$$

إذن:

$$A^{\perp} \subseteq (vect(A))^{\perp} \quad (p)$$

هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا $\overline{vect(A)} = H$ إذن توجد متتالية من نقاط $vect(A)$ تتقارب نحو x ومنه:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \langle x_n, x\rangle = 0$$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$\langle x, x\rangle = 0$$

إذن $\|x\|^2 = 0$ ومنه $x = 0$ إذن:

$$A^{\perp} \subseteq \{0\} \qquad (1)$$

ولدينا:

$$\{0\} \subseteq A^{\perp} \qquad (2)$$

من (1) و(2) نجد:

$$A^{\perp} = \{0\}$$

لإثبات العكس نحتاج إلى التوطئة التالية:

توطئة 1.3

ليكن H فضاء هلبرتي و A مجموعة جزئية غير خالية من Hعندئذ يكون لدينا:

$$A^{\perp} = (vect(A))^{\perp}$$

الإثبات:

ليكن $\langle H, \langle,\rangle \rangle$ فضاء شبه هلبرتي و $\emptyset \neq A \subseteq H$ لدينا:

$$A \subseteq vect(A)$$

إذن:

$$(vect(A))^{\perp} \subseteq A^{\perp} \qquad (1)$$

ومما سبق وحسب (p) لدينا:

$$A^{\perp} \subseteq (vect(A))^{\perp} \qquad (2)$$

ومن (1)و(2) نجد :

$$A^{\perp} = (vect(A))^{\perp}$$

إذا كان $A^{\perp}=\{0\}$ فإن: $(A^{\perp})^{\perp}=H$ وحسب التوطئة السابقة لدينا:

$$\left((vect(A))^{\perp}\right)^{\perp}=H$$

ومنه حسب النتيجة:

$$\overline{vect(A)}=H$$

إذن A كلية.

نظرية 1.3

ليكن $(H,\langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي و F فضاء شعاعي جزئي من H عندئذ يكون لدينا:

$$\overline{F}=H \Leftrightarrow F^{\perp}=\{0\}$$

الإثبات:

ليكن $(H,\langle,\rangle)$ فضاء شبه هلبرتي و F فضاء جزئي من H

نفرض أن $F^{\perp}=\{0\}$ إذن:

$$(F^{\perp})=\{0\}=H$$

ولدينا حسب النتيجة(2.2) $\overline{F}=(F^{\perp})^{\perp}$ إذن $\overline{F}=H$

العكس:

بما أن F فضاء شعاعي جزئي فإن:

$$vect(F)=F$$

وعليه:

$$\overline{vect(F)}=H$$

إذن A كلية وحسب المبرهنة (1.12) فإن:

$$F^{\perp}=\{0\}$$

2.3 قابلية الفصل

ليكن H فضاء هلبرت.

تعريف 1.3

نقول عن H أنه قابل للفصل إذا و فقط إذا وجدت مجموعة جزئية D من H تحقق:

1. D قابل للعد.
2. $\overline{D} = H$ (أي D كثيفة في H).

مبرهنة 3.3

يكون H قابل للفصل إذا وفقط إذا وجدت متتالية $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر H بحيث:

$$\forall x \in H \quad , \quad \forall \epsilon > 0 \quad , \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad ; \quad \|x - e_{n_0}\| < \epsilon$$

نظرية 2.3

ليكن H فضاء هلبرت.إذا وجد $F \subseteq H$ بحيث :

1. $\overline{vect(F)} = H$ (F كلية في H) .
2. F قابلة للعد .

فإن H قابل للفصل .

3.3 الأساس الهلبرتي

ليكن H فضاء هلبرت ، $(e_i)_{i\in I}$ عائلة من أشعة H.

تعريف 1.3

نقول عن $(e_i)_{i\in I}$ أنها أساس هلبرتي لـ H إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

(i) $\overline{vect(\{e_i, i\in I\})} = H$

(ii) $\forall (i,j)\in I^2 \quad , \quad i\neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0$

(iii) $\forall i\in I \quad , \quad \|e_i\| = 1$

نظرية 3.3

ليكن H فضاء هلبرت ذو بعد منته ،إذا كان H قابل للفصل فإنه يملك على الأقل أساس هلبرتي قابل للعد.

الإثبات :

لتكن $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر H بحيث :

$$\left\{\overline{(e_n)_{n\in\mathbb{N}}}\right\} = H$$

- ليكن F الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بـ $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$
- إن $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية متزايدة من فضاءات جزئية ذات أبعاد منتهية بحيث $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ كيفي في H.
-نختار قاعدة ناظمية التعامد في F_1 ثم نتممها إلى قاعدة ناظمية التعامد في F_2، وهكذا نحصل بالتالي على أساس هلبرتي قابل للعد في H.

نظرية 4.3: (متراجحة bessel)

ليكن H فضاء هلبرت ذو بعد منته، $(e_i)_{i\in I}$ عائلة متعامدة و متجانسة قابلة للعد من أشعة H، عندئذ يكون لدينا :

$$\forall x \in H \quad ; \quad \sum_{i\in I} |x, e_i|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty \quad ...(*)$$

ملاحظة 1.3

في حالة $(e_i)_{i\in I}$ أساس هلبرتي لـ H، تصبح المتراجحة (*) مساواة وتسمى متطابقة Planchevel.

نظرية 5.3: (مساواة Parsevel)

ليكن $(E, \langle . \rangle)$ فضاء شبه هلبرتي و $(e_i)_{i\in I}$ عائلة متعامدة ومتجانسة في E ، القضايا التالية متكافئة:

1. $(e_i)_{i\in I}$ أساس هلبرتي على E.
2. من أجل كل $x \in E$ ، العائلة $(\|x, e_i\|^2)_{i\in I}$ قابلة للجمع في $\mathbb{R}_+$ ولدينا :

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |(\langle x, e_i \rangle|^2$$

3. من أجل كل $x \in E$، العائلة $(\langle x, e_i \rangle e_i)_{i\in I}$ قابلة للجمع في E ولدينا :

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i \rangle e_i$$

4. من أجل كل $x, y \in E$، العائلة $(\langle x, e_i \rangle \langle \overline{y, e_i} \rangle)_{i\in I}$ قابلة للجمع في $\mathbb{K}$ ولدينا :

$$\langle x.y \rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i \rangle \langle \overline{y, e_i} \rangle$$

مبرهنة 4.3

ليكن H فضاء هلبرت، ولتكن $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أساس هلبرتي لـ H عندئذ التطبيق المعرف بـ:

$$Q : H \longleftarrow l^2(\mathbb{C})$$

$$x \longleftarrow Q(x) = (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

هو تقايس.

الإثبات:

أولا نبين أن Q خطي.

1. ليكن $x, y \in H$ لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$\begin{aligned}\phi(x+y) &= (\langle x+y, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (\langle x, e_n\rangle + \langle y, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} + (\langle y, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \phi(x) + \phi(y)\end{aligned}$$

2. ليكن $x \in H$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ لدينا:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x) &= (\langle \lambda_x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (\lambda\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \lambda(\langle x, e_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= \lambda\phi(x)\end{aligned}$$

إذن: $\phi(x)$ خطي.

-ليكن $x \in H$ من مساواة بارسفال نجد:

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$$

ومنه $\|\phi(x)\|_{l^2(\mathbb{C})} = \|x\|$

إذن $\phi(x)$ تقايس.

نظرية 6.3

ليكن H فضاء هلبرت قابل للفصل ، عندئذ كل عائلة $(e_{i\, i \in I})$ متعامدة و متجانسة من أشعة H تكون قابلة للعد.

البرهان

نلاحظ أولا أنه إذا كان $i_1, i_2 \in I$ فإن:

$$\begin{aligned}
\|e_{i_1} - e_{i2}\|^2 &= \langle e_{i_1} - e_{i_2}, e_{i_1} - e_{i_2} \rangle \\
&= \|e_{i_1}\|^2 - \langle e_{i_1}, e_{i_2} \rangle - \langle e_{i2}, e_{i1} \rangle + \|e_{i_2}\|^2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

إذن:

$$\|e_{i1} - e_{i2}\| = \sqrt{2}$$

بما أن H قابل للفصل إذن حسب المبرهنة (3.3) توجد متتالية $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من أشعة H كثيفة في H بحيث :

$$\forall i \in I \quad , \quad \exists n_i \in \mathbb{N} \quad ; \quad \|e_i - h_{n_i}\| < \frac{\sqrt{2}}{3} \quad ...*;$$

لكل $i \in I$ نختار عدد طبيعي واحد n_i من بين كل الأعداد الطبيعية التي تحقق $(*)$ وعندئذ نعرف التطبيق ϕ بـ:

$$\phi : I \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$i \longrightarrow \phi(i) = n_i$$

ليكن $i_1, i_2 \in I$، بحيث $i_1 \neq i_2$، لدينا:

$$\begin{aligned} \|e_{i_1} - e_{i_2}\| &\leq \|e_{i_1} - h_{n_{i_1}}\| + \|h_{n_{i_1}} - h_{n_{i_2}}\| + \|h_{n_{i_2}} - e_{i_2}\| \\ &\leq \|h_{n_{i_1}} - h_{n_{i_2}}\| + 2\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\sqrt{2} < \|h_{n_{i_1}} - h_{n_{i_2}}\| + 2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

أي:

$$\|h_{n_{i_1}} - h_{n_{i_2}}\| > \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

ومنه

$$h_{n_{i_1}} \neq h_{n_{i_2}}$$

إذن: $n_{i_1} \neq n_{i_2}$ ومنه $\phi(i_1) \neq \phi(i_2)$

وبالتالي ϕ متباين.

ومنه $(e_i)_{i\in I}$ قابلة للعد.

نتيجة 1.3

ليكن H فضاء هلبرت إذا كان H قابل الفصل فإن كل الأساسات الهلبرتية قابلة للعد.

خاتمة

وفي الأخير، عملنا هذا ليس إلا جزءا صغيرا من ميدان التحليل الدالي ،إذ تطرقنا فيه إلى الفضاءات الهلبرتية والشبه هلبرتية وكل المفاهيم اللازمة لتعريف الأساسات الهلبرتية بإستعمال كل من مفهوم التعامد والعائلات الكلية وقابلية الفصل. ويبقى المجال مفتوح لدراسة التجريد في فضاءات هلبرت.

المصادر

المصادر العربية

[1] م.حازي, "المختصر في الطبولوجيا," ديوان المطبوعات الجامعية، الساحة المركزية-بن عكنون - الجزائر, 1994.

[2] م-بن حراث, "دروس في الجبر الخطي," 2008-2009.

المصادر الفرنسية

[3] H. Brezis, "Analyse fonctionnelle."

[4] C. Baba Hranced, K. Benhabib, "Algébre L, Rappels de cours et exercices avec solutions," OP4, .1992

[5] Danili, "cours d'analyses fonctionnelle," avec 200 exercices avec corrigés.

[6] https://webusers.imj.prg.fr/

[7] R. Danich, "cours de topologie et d'analyse fonctionnelle," .2007-2006

[8] H. Hazi, "Espaces topologiques général et espaces métriques en particulier," O.pu, .1993

الرموز

$\mathbb{K}$: حقل تبديلي

$\mathbb{R}$: مجموعة الأعداد الحقيقية

$\mathbb{N}$: مجموعة الأعداد الطبيعية

$\mathbb{C}$: مجموعة الأعداد العقدية

$\cdot$: الجداء

$+$: المجموع

$\int$: التكامل

$\bigcap$: التقاطع

$\bigcup$: الاتحاد

$\|.\|$: النظيم

$|.|$: القيمة المطلقة

$\langle .,. \rangle$: الجداء السلمي

$d(x,y)$: المسافة بين x و y

$\sup A$: الحد الأعلى لـA

$\inf A$: الحد الادنى لـA

$\Re(z)$: الجزء الحقيقي لـz

$\Im(z)$: الجزء التخيلي لـz