

Ecole Normale supérieure
D'Enseignement Technologique –
Skikda-
Département de technologie
Spécialité: Génie Civil



المدرسة العليا لأساتذة التعليم
التكنولوجي –سكيكدة
قسم التكنولوجيا
تخصص: هندسة مدنية

Polycopié du Cours

RDM III

2^{ème} Partie

Dynamique des structures

Élaboré par :

Dr. BOUSBIA Badreddine

Email :Badreddine211@hotmail.fr

Cours destiné aux étudiants de :

Niveau : 4^{ème} année PEST Génie Civil

Année scolaire : 2022/2023

Table des Matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

Chapitre I : Généralités (Comportement dynamique des structures)

I.1	Introduction	5
I.2	Mouvements	5
	I.2.1 Mouvement oscillatoire	5
I.3	Degrés de liberté	6
I.4	Rigidité de la structure	7
	I.4.1 Rigidité équivalente d'un système	8
I.5	Amortissement	8
	I.5.1 Amortissements en série et en parallèle	9
I.6	Réponse dynamique	9
I.7	Exercices avec solutions	10

Chapitre II : Notion de sismologie

II.1	Introduction	13
II.2	Naissance du séisme	13
	II.2.1 Causes des tremblements de terre	14
II.3	Les failles	14
	II.3.1 Classification des failles	15
II.4	Les caractéristiques des séismes	16
	II.4.1 Détermination de la magnitude	16
II.5	Classification des séismes	17
	II.5.1 Les séismes superficiels	17
	II.5.2 Les séismes intermédiaires	17
	II.5.3 Les séismes profonds	18
II.6	Propagation des ondes	18
	II.6.1 Sources des ondes sismiques	18
	II.6.2 Les type des ondes sismiques	18
II.7	Détermination de l'épicentre	19
	II.7.1 Détermination de l'épicentre par la méthode des cercles	19

Chapitre III : Systèmes à un degré de liberté (SSDL).

III.1	Introduction	21
III.2	Avertissement	21
III.3	Formulation de l'équation de mouvement des SSDDL	21
III.4	Vibration libre des SSDDL	23
	III.4.1 Vibration libre non amorties	23
	III.4.2 Vibrations libres amorties	24
	III.4.3 Vibrations forcées	29
	III.4.4 Réponse à une excitation quelconque	33
	III.4.5 Concept de spectre réponse	38
III.5	Exercices avec solutions	40

Chapitre IV : Systèmes à plusieurs degrés de liberté (SPDL).

IV.1	Introduction	53
IV.2	Mise en équation d'un système à plusieurs degrés de liberté (SPDL)	53
	IV.2.1 Excitation de la base	54
IV.3	Evaluation de la matrice de rigidité	55
IV.4	Evaluation de la matrice des masses	56
IV.5	Valeurs propres et vecteurs propres	56
	IV.5.1 Normalisation des modes de vibration	58
	IV.5.2 Conditions d'orthogonalité des modes de vibration	58
IV.6	Méthode de résolution des (SPDL)	59
	IV.6.1 Méthode d'analyse modale	59
IV.7	Exercices avec solutions	62

Chapitre V : Notions sur le règlement parasismique algérien (méthode statique équivalente, méthode dynamique)

V.1	Introduction	70
V.2	Classification des zones sismiques (voir modificatifs aux RPA 99)	70
V.3	Classification des ouvrages selon leur importance	71
V.4	Classification des sites	72
	V.4.1 Catégories et Critères de classification	72
V.5	Choix de la méthode de calcul	73
	V.5.1 Méthode statique équivalente	73
	V.5.2 Méthode dynamique modale spectrale	81
V.6	Exercices avec solutions	84

Conclusion générale	87
Références bibliographiques	88

Liste des figures

Fig. I.1 Oscillateur simple.	05
Fig. I.2 Charge harmonique.	06
Fig. I.3 Charge périodique quelconque.	06
Fig. I.4 Charge transitoire.	06
Fig. I.5 Deux exemples de structures à deux degrés de liberté.	07
Fig. I.6 Structure à un seul degré de liberté.	08
Fig. I.7 Ressorts en série.	08
Fig. I.8 Ressorts en parallèles.	08
Fig. I.9 Deux amortisseurs en série.	09
Fig. I.10 Deux amortisseurs en parallèle.	09
Fig. I.11 Modélisation d'un bâtiment comme un système à plusieurs degrés de liberté.	10
Fig. II.1 Couche interne de la terre.	13
Fig. II.2 Distribution des principales plaques tectoniques.	14
Fig. II.3 Mouvement des plaques tectoniques.	14
Fig. II.4 Type fondamentaux des failles.	15
Fig. II.5 : Caractéristiques des séismes.	16
Fig. II.6 Source d'un tremblement de terre.	18
Fig. II.7 Les ondes P, S, Love et Rayleigh.	19
Fig. II.8 Méthode des cercles pour localiser l'épicentre.	20
Fig. II.9 Séismogramme typique d'un séisme lointain.	20
Fig. III.1 Système à un degré de liberté.	21
Fig. III.2 Bilan de forces.	22
Fig. III.3 Bilan de système avec une vibration libre non amortie.	23
Fig. III.4 Réponse en oscillation libre non amortie.	24
Fig. III.5 Bilan de système avec une vibration libre amortie.	25
Fig. III.6 Oscillation libres sur-amorties.	26
Fig. III.7 Oscillation libres amorties amortissement critique.	27
Fig. II.8 Oscillation libres sous-amorties.	28
Fig. III.9 Excitation harmonique non amortie.	29
Fig. III.10 Facteur d'amplification dynamique.	30
Fig. III.11 Excitation harmonique amortie.	31
Fig. III.12 Facteur d'amplification dynamique.	32

Fig. III.13 Modèle de calcul.	33
Fig. III.14 Sollicitation impulsive.	34
Fig. III.15 Exemples d'impulsion.	37
Fig. III.16 Charge quelconque.	37
Fig. III.17 Excitation de la base.	38
Fig. IV.1 Système à trois degrés de liberté.	53
Fig. IV.2 Modèle pour poutres infiniment rigides.	53
Fig. IV.3 Système à deux degrés de liberté.	54
Fig. IV.4 Bilan de forces.	54
Fig. IV.5 Déplacement de la base.	55
Fig. IV.6 Procédure de construction de la matrice de rigidité.	56
Fig. IV.7 Amortissement de Rayleigh.	62
Fig. V.1 Classification sismiques des wilayas.	70
Fig. V.2 Facteur d'amplification dynamique moyen ($\xi = 5\%$).	76

Liste des tableaux

Tableau V.1 : Classification des sites.	73
Tableau V.2. : Coefficient d'accélération de zone A.	75
Tableau V.3 : Valeurs de ξ (%).	75
Tableau V.4 : Valeurs du coefficient de comportement R.	76
Tableau V.5.: Valeurs des pénalités P_q .	78
Tableau V.6 : Valeurs du coefficient de pondération β .	79
Tableau V.7 : Valeurs du coefficient C_T .	79
Tableau V.7 : Valeurs de T_1 et T_2 .	82

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La dynamique des structures constitue une connaissance de base essentielle pour les génies civils. En plus de son application évidente pour le génie parasismique, la tendance à construire des structures toujours plus légères et élancées va encore accentuer à l'avenir.

L'utilisation de l'analyse dynamique des structures est pour évaluer le comportement des systèmes soumis à des charges vibratoires. Les systèmes en génie civil sont généralement des structures complexes pouvant être simplifiées et modélisées en tant que des modèles discrets.

Dans le cas des oscillations de systèmes mécaniques conservatifs isolés, on parle d'oscillations libres ; en présence de frottement, l'amplitude des oscillations décroît et on observe des oscillations amorties. Si les oscillations sont entretenues par une action extérieure, on parle d'oscillations forcées. Dans ce dernier cas, on verra apparaître de nouveaux phénomènes tels que la résonance, qui peut avoir des conséquences catastrophiques. Cependant, la plupart des problèmes observés (mis à part les tremblements de terre) sont liés à des critères d'aptitude au service. Ceux-ci demandent une connaissance précise du comportement linéaire des structures

Il ne requiert toutefois que des connaissances de base de mécanique générale et de mécanique des structures et constitue notamment un pré requis pour les cours de génie parasismique.

Le présent polycopié intitulé Dynamique des structures, s'adresse aux étudiants de quatrième année PEST en Génie Civil (*Ecole Normale supérieure D'Enseignement Technologique – Skikda*). Ainsi, le cours a été structuré conformément au canevas pédagogique de la manière suivante :

Chapitre I : Généralités.

Chapitre II : Notion de sismologie (Tectonique, échelle de Mercali, échelle de Richter,...).

Chapitre III : Systèmes à un degré de liberté (SSDL) avec et sans amortissement.

Chapitre IV : Systèmes à plusieurs degrés de liberté (SPDL)- modes propres.

Chapitre V: Notions sur le règlement parasismique algérien (méthode statique équivalente, méthode dynamique).

I.1 Introduction

Un des mouvements les plus importants observés dans la nature est le mouvement oscillatoire, en particulier le mouvement harmonique : oscillations d'un pendule, d'une masse attachée à un ressort, d'un gratte-ciel, etc. Dans le cas des oscillations de systèmes mécaniques conservatifs isolés, on parle d'oscillations libres ; en présence de frottement, l'amplitude des oscillations décroît et on observe des oscillations amorties. Si les oscillations sont entretenues par une action extérieure, on parle d'oscillations forcées. Dans ce dernier cas, on verra apparaître de nouveaux phénomènes tels que la résonance, qui peut avoir des conséquences catastrophiques. Cependant, la plupart des problèmes observés (mis à part les tremblements de terre) sont liés à des critères d'aptitude au service. Ceux-ci demandent une connaissance précise du comportement linéaire des structures [1].

I.2 Mouvements

Une structure sollicitée par une charge subit un certain mouvement ; dans le cas d'une sollicitation uniquement en traction, le mouvement sera translationnel et, dans le cas d'une flexion, celle-ci imprimera à la structure un mouvement translationnel et rotationnel. Le mouvement oscillatoire d'une structure, dont le lieu géométrique est connu (dans un système de coordonnées déterminé) est caractérisé par un régime oscillatoire dépendant de la rigidité, de la masse et de l'amortissement de la structure [1].

I.2.1 Mouvement oscillatoire

L'étude vibratoire concerne le mouvement oscillatoire des corps et les forces associées aux mouvements. Tout corps possédant une masse et une élasticité est capable d'osciller (vibrer). Donc, la plus part des machines et des structures sont conçues en tenant compte de leur comportement vibratoire.

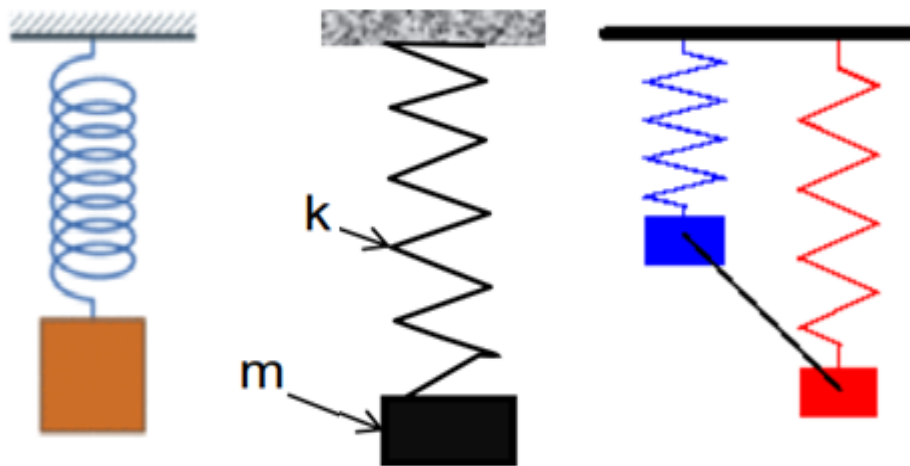


Fig. I.1 Oscillateur simple.

Les différents types de régime d'un mouvement oscillatoire sont le régime harmonique, le régime périodique et le régime transitoire.

- a) **Régime harmonique** : décrit un mouvement oscillatoire au voisinage d'une position d'équilibre stable.

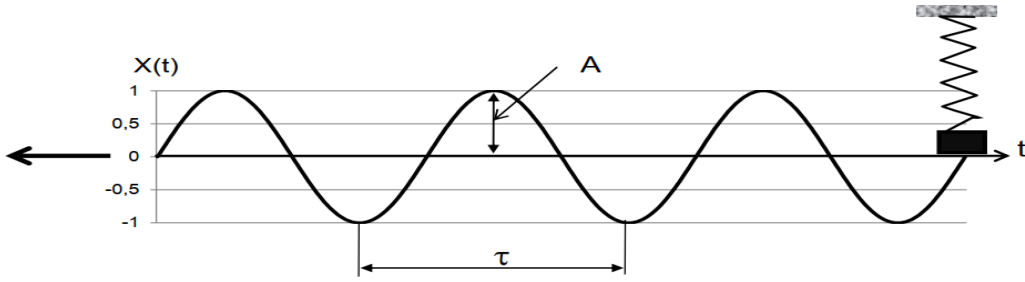


Fig. I.2 Charge harmonique.

- b) **Régime périodique** : décrit le même mouvement de manière périodique.

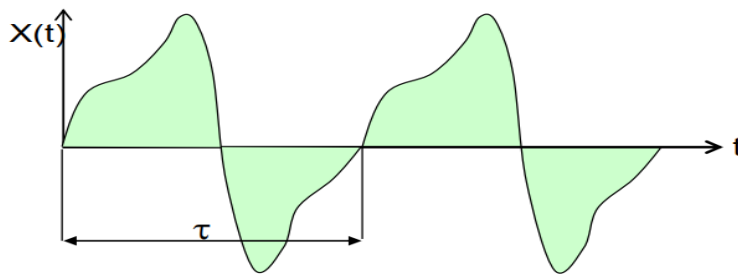


Fig. I.3 Charge périodique quelconque.

- c) **Régime transitoire** : décrit un mouvement à caractère aléatoire (ex. trafic, séisme).



Fig. I.4 Charge transitoire.

I.3 Degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté est défini comme étant le nombre minimum de coordonnées permettant de décrire les oscillations de la structure considérée. Généralement, les structures peuvent être modélisées en considérant que les masses sont concentrées dans quelques éléments particuliers, comme les dalles d'étage des bâtiments, par exemple. Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté par direction principale est égal au nombre d'étages. En effet, la connaissance des déplacements horizontaux de chaque étage permet de décrire les oscillations du bâtiment. Sur la (figure I.5) par exemple, les deux structures possèdent deux degrés de liberté. Les déplacements horizontaux des deux masses sont repérés par les coordonnées x_1 et x_2 . Le système de coordonnées est le système usuel avec l'axe x horizontal dirigé positivement de gauche à droite.

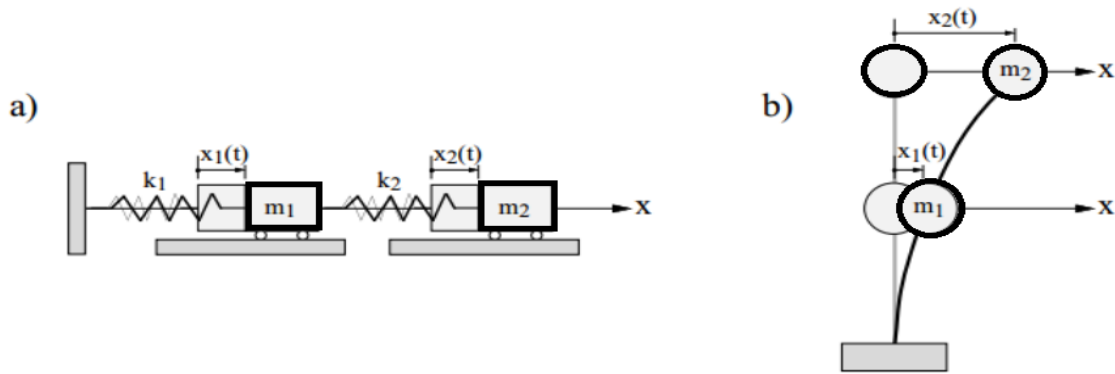


Fig. I.5 Deux exemples de structures à deux degrés de liberté.

Les oscillations sont décrites par le déplacement horizontal des masses. Les coordonnées x_1 et x_2 sont repérées sur l'axe horizontal (positives de gauche à droite).

Comme pour l'analyse statique, l'analyse dynamique des structures peut être effectuée dans le plan ou en trois dimensions.

Mouvement dans le plan : 3 degrés de liberté

- Translations selon x et y .
- Rotation autour de z (dans le plan xy).

Mouvement dans trois dimensions : 6 degrés de liberté :

- Translations selon x , y et z .
- Rotations autour de x , y et z .

I.4 Rigidité de la structure

La rigidité d'une structure, k (en $[N/m]$), dépend des dimensions géométriques de celle-ci et du module d'élasticité du matériau qui la compose. La rigidité équivaut à la force qu'il faut exercer sur l'élément pour induire un déplacement unitaire. La rigidité vaut :

$$k = \frac{F(\Delta x)}{\Delta x} \quad (I.1)$$

Où :

- Δx : est un déplacement (translation / rotation) unitaire.
- $F(\Delta x)$: est la force qui permet d'induire le déplacement unitaire Δx .

Exemple : Rigidité d'un système à un degré de liberté

Soit une colonne encastree à la base dont une masse ponctuelle est fixée à son autre extrémité.

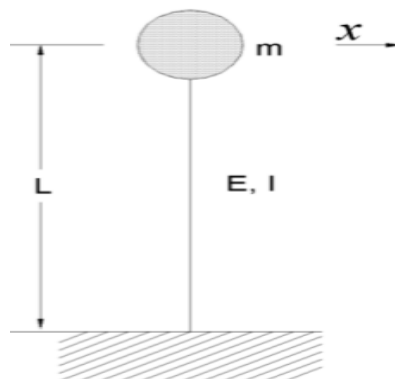


Fig. I.6 Structure à un seul degré de liberté.

La rigidité de cette structure pour un déplacement horizontal de la masse prend la valeur suivante :

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (I.2)$$

I.4.1 Rigidité équivalente d'un système

Dans le cas d'un système, une rigidité équivalente est définie comme suit :

- *Système (de ressorts) en série* : est un système dont les différents ressorts qui le composent subissent des déplacements différents (figure I.7).

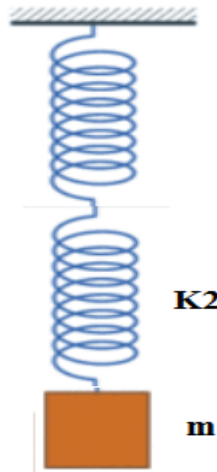


Fig. I.7 Ressorts en série.

La rigidité équivalente d'un tel système est donnée par :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \quad (I.3)$$

- *Système (de ressorts) en parallèle* : est un système dont les différents ressorts qui le composent subissent des déplacements égaux (figure I.8).

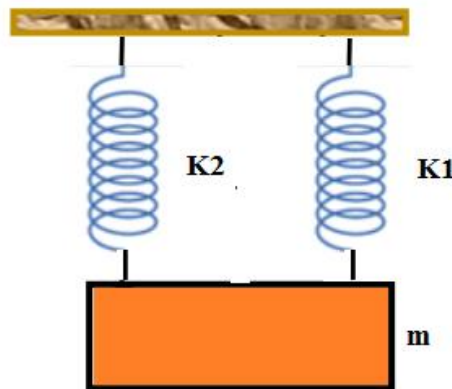


Fig. I.8 Ressorts en parallèles.

La rigidité équivalente d'un tel système est donnée par :

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (I.4)$$

I.5 Amortissement

L'amortissement regroupe les phénomènes qui atténuent l'amplitude des oscillations au cours du mouvement. Bien que son essence réelle soit beaucoup plus complexe, l'amortissement est habituellement grossièrement représenté par un amortissement de type visqueux. L'intensité de la force correspondante est alors proportionnelle à la vitesse. Cette modélisation est en fait essentiellement justifiée par les avantages analytiques (simplicité de formulation et de résolution) qu'elle procure.

I.5.1 Amortissements en série et en parallèle

Considérons une combinaison d'amortissement visqueux en série sans masse avec des coefficients d'amortissement C_1 et C_2 (figure 1.9).

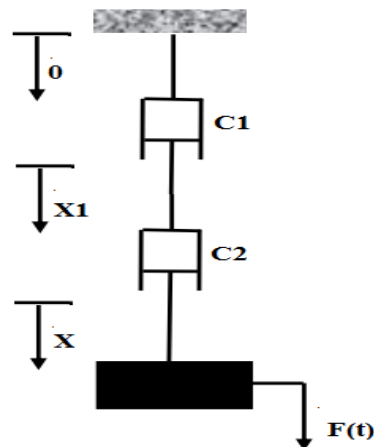


Fig. I.9 Deux amortisseurs en série.

Dans ce cas le coefficient d'amortissement pour n amortisseurs peut s'écrire :

$$\frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n} \quad (I.5)$$

Considérons une combinaison d'amortissement visqueux en parallèle sans masse avec des coefficients d'amortissement C_1 et C_2 (figure I.10).

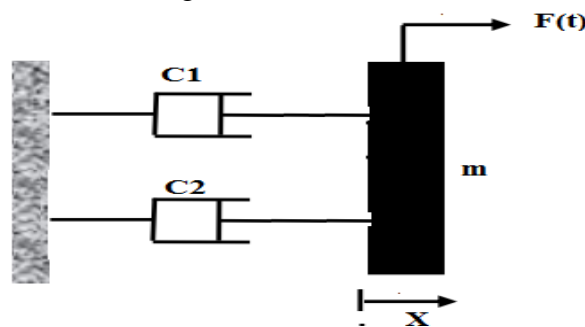


Fig. I.10 Deux amortisseurs en parallèle.

Le coefficient d'amortissement équivalent pour n amortisseurs est :

$$c_{eq} = c_1 + c_2 + \dots + c_n \quad (I.6)$$

I.6 Réponse dynamique

La masse ou l'inertie d'un élément est supposée être un corps rigide, il peut gagner ou perdre l'énergie cinétique lorsque la vitesse du corps change. De la seconde loi de Newton, le produit de la masse et son accélération est égale à la force appliquée à la masse. Le travail est égal à la force multipliée par le déplacement dans la direction de la force et le travail fait est stocké sous forme d'énergie cinétique de la masse [1].

Dans de nombreuses applications pratiques, plusieurs masses apparaissent en combinaison. Pour une analyse simple, nous pouvons remplacer ces masses en une seule masse équivalente ou effective.

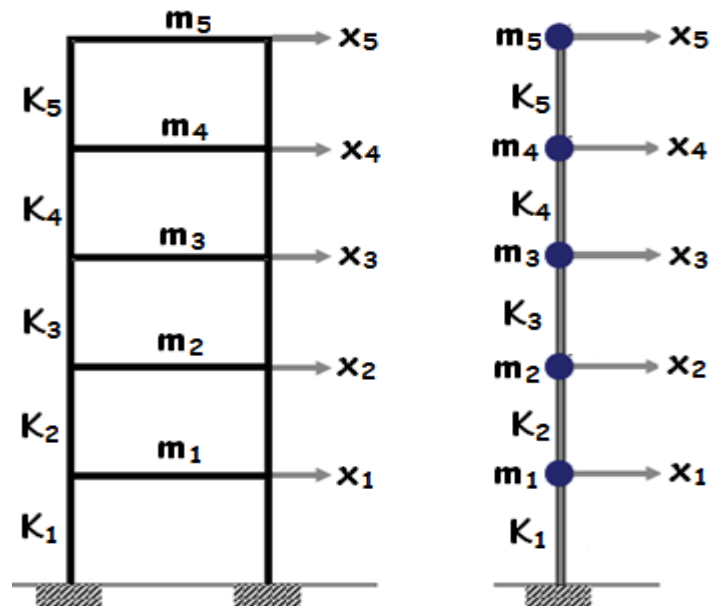


Fig. I.10 Modélisation d'un bâtiment comme un système à plusieurs degrés de liberté.

Ainsi, la réponse dynamique des structures est exprimée par une équation différentielle de deuxième ordre qui représente le phénomène physique du mouvement des constructions c'est l'équation de mouvement donnée par l'expression suivante :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(t) \quad (I.7)$$

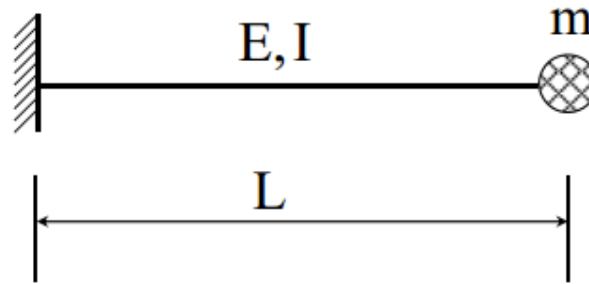
Avec :

- M : Matrice de masse (n x n).
- C : Matrice d'amortissement (n x n).
- K : Matrice de rigidité (n x n).
- \ddot{X} : Vecteur d'accélération (n x 1).
- \dot{X} : Vecteur vitesse (n x 1).
- X : Vecteur des inconnues (n x 1).
- F(t) : L'excitation extérieure (n x 1).

I.7 Exercices avec solutions

Exercice N°01 :

Déterminer le système équivalent masse-ressort du système mécanique présenté sur la figure suivante :



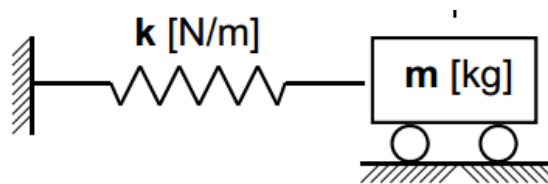
Solution :

Le déplacement à l'extrémité du porte-à-faux est donné par l'expression suivante (RDM):

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \quad \text{Avec } P=mg$$

La rigidité d'un système mécanique est définie comme étant le rapport de la force au déplacement, alors :

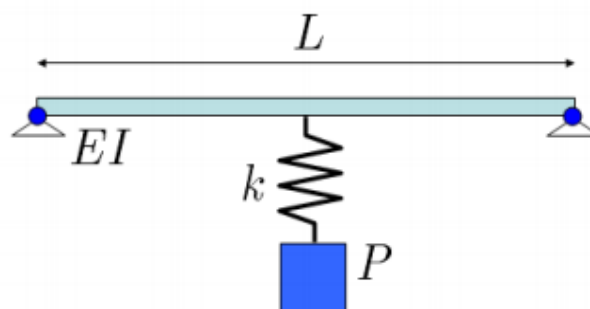
$k = \frac{P}{\Delta} = \frac{3EI}{L^3}$ Alors, le système mécanique ci-dessus peut être modélisé par un système dynamique simple illustré par une masse m , rattachée à un ressort de rigidité k :



Ce système est appelé système équivalent au système mécanique réel.

Exercice N°02 :

Déterminer le système équivalent masse-ressort du système mécanique présenté sur la figure suivante :



Solution :

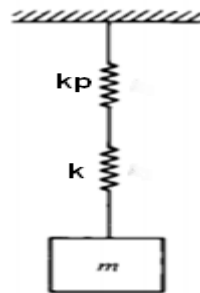
Le déplacement au milieu de la poutre est donné par l'expression suivante (RDM):

$$\Delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

La rigidité d'un système mécanique est définie comme étant le rapport de la force au déplacement, alors :

$$k_p = \frac{P}{\Delta} = \frac{48EI}{L^3}$$

Alors, le système mécanique ci-dessus peut être modélisé par un système dynamique simple illustré par une masse m , rattachée à deux ressorts montés en série de rigidités respectives k_p et k . les deux ressorts sont montés en série car le milieu de la poutre et la masse ont des déplacements différents.



La rigidité équivalente de ce système est :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_p} + \frac{1}{k}$$

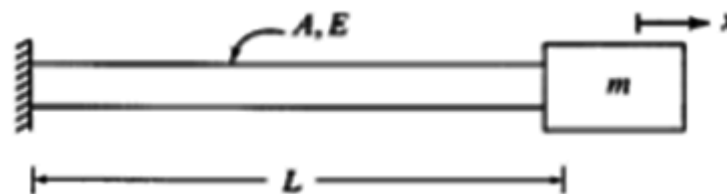
D'où

$$K_{eq} = \frac{k \times k_p}{k + k_p} = \frac{k \times 48EI}{kL^3 + 48EI}$$

Et enfin le système équivalent final peut être représenté par une masse rattachée à un ressort de rigidité K_{eq} .

Exercice N°.03

Déterminer la rigidité longitudinale de la barre avec une masse concentrée à son extrémité libre représentée sur la figure suivante.



Solution :

Le système de la figure ci-dessus, peut être modélisé comme étant un système non-amorti à un seul degré de liberté. Si on considère une force axiale, « F », appliquée à l'extrémité libre de la barre, le déplacement à ce point est calculé par :

$$\Delta = \frac{FL}{AE}$$

Ainsi, la rigidité équivalente du système est calculée par :

$$k_{eq} = \frac{F}{\Delta} = \frac{AE}{L}$$

Enfin, le système mécanique ci-dessus peut être remplacé par un système dynamique équivalent composé d'un ressort de raideur, k_{eq} , fixé à une extrémité et raccroché à l'autre extrémité à une masse m .

II.1 Introduction

Un séisme ou un tremblement de terre se traduit en surface par des vibrations du sol. Il provient de la fracturation des roches en profondeur. Cette fracturation est due à une grande accumulation d'énergie qui se libère, en créant ou en faisant rejouer des failles, au moment où le seuil de rupture mécanique des roches est atteint [2].

II.2 Naissance du séisme

Un tremblement de terre correspond à une vibration transitoire du sol provoquée par une libération soudaine de l'énergie de déformation accumulée dans la croûte terrestre ou dans la couche sous-jacente appelée manteau.

II.2.1 Causes des tremblements de terre

La cause la plus probable la théorie de la tectonique des plaques. Les séismes d'origine tectonique résultent d'un état de contrainte du sous-sol du globe terrestre, en constante évolution.

II.2.1.1 La structure interne de la terre

Le globe terrestre est constitué principalement de 04 couches concentriques qui se distinguent par des propriétés physiques et chimiques différentes qui engendrent des vitesses de propagation sismiques différentes, il s'agit de Figure. II.1:

- La croûte superficielle d'épaisseur 30-70 Km.
- Le manteau supérieur d'épaisseur moyenne 700 Km.
- Le manteau inférieur.
- Le noyau interne solide.

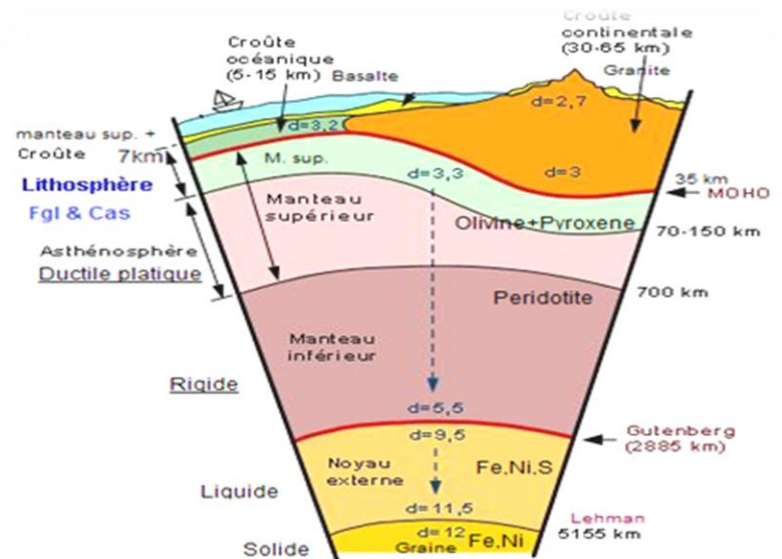


Fig. II.1 Couche interne de la terre.

II.2.1.2 Qu'est-ce qu'une plaque ?

La superficie des plaques est variable (mineurs et majeures) et d'épaisseur comprise entre 70 et 100 Km suivant qu'il s'agit d'une plaque océanique ou continentale. « Elles se caractérisent par des vitesses relatives allant d'un centimètre par an à plus d'une dizaine de centimètres par ans ». Les vitesses sont qualifiées de lentes si elles ne dépassent pas 2 cm/an, moyennes si elles ne dépassent pas 5 cm/an et élevées si elles sont supérieures à 8 cm/an [2].

II.2.1.3 Les mouvements des plaques

Les plaques peuvent s'écartier l'une de l'autre à des vitesses de quelques centimètres par an : ces mouvements dits de divergence se produisent au niveau des dorsales Figure. II.2 celles-ci sont des sortes de montagnes sous-marines qui serpentent dans les principaux bassins océaniques de la terre et dont la sommet est représenté par une sorte de vallée (rift).

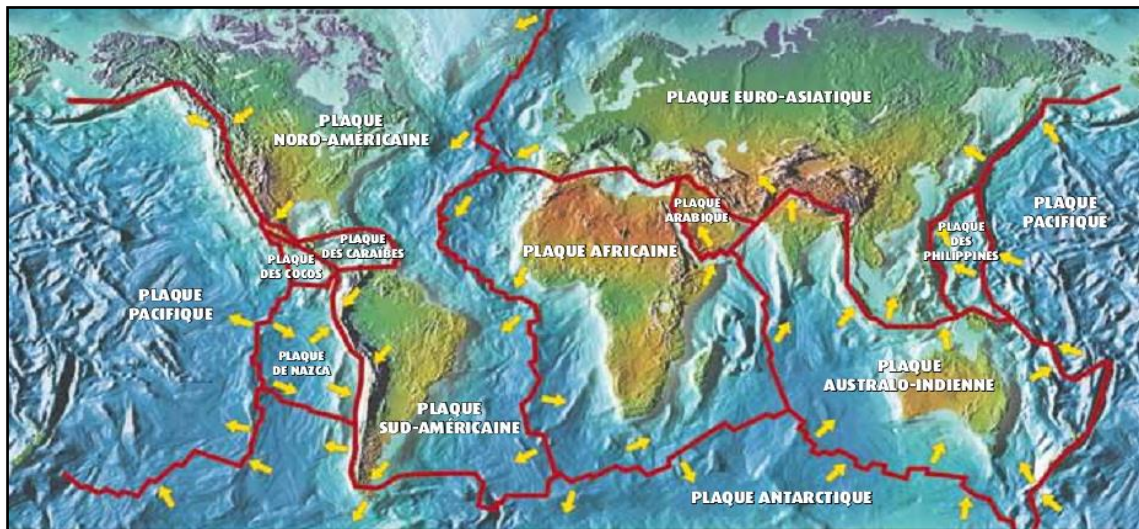


Fig. II.2 Distribution des principales plaques tectoniques.

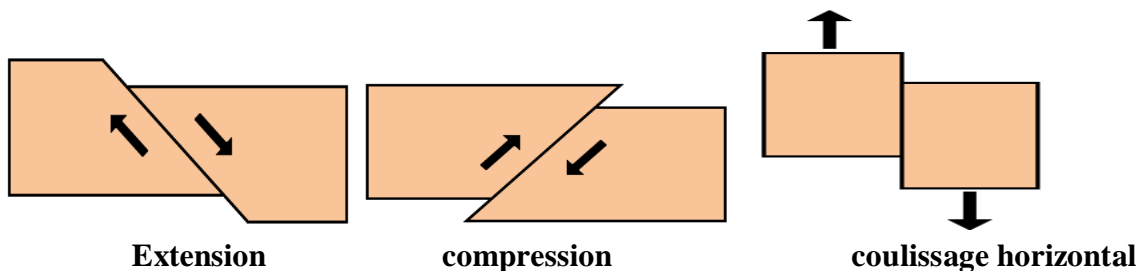


Fig. II.3 Mouvement des plaques tectoniques.

II.3 Les faille

La faille constitue une cassure de terrains géologiques suivie d'un mouvement relatif des parties séparées. En pratique, ce terme désigne le plus souvent des accidents verticaux, ou à pendage fort et n'impliquant pas de recouvrement important (chevauchement) [2].

II.3.1 Classification des failles

La classification la plus simple (selon leur rejet) se résume comme suit :

- **Les failles normales** : (failles directe, de distension), le rejet horizontal transversal correspondant à une distension. Ces failles se caractérisant par la séparation partielle des deux compartiments qui à soumis des forces d'étirements s'écartent l'un de l'autre ce qui provoque l'effondrement de l'un des blocs Figure. II.4.

○ **Les failles inverses** : (failles de compression), où le rejet horizontal transversal correspond à un raccourcissement (il y alors chevauchement du compartiment situé au-dessus du plan faille sur l'autre compartiment), ces failles qu'on appelle également chevauchantes. A l'inverse du cas précédent, les deux blocs sont poussés l'un vers l'autre par des forces de compression Figure. II.4.

Le troisième type de faille se rapporte aux failles décrochées ou tout simplement décrochement vertical. Un tel évènement provoque le coulisage horizontal des deux blocs séparés en sens contraire de part et d'autre du plan de faille.

Les failles sont classées également comme suit :

- **Faille active** : c'est une faille qui a joué pendant le régime sismotectonique actuel et par conséquent jouera de nouveau dans le futur. La majorité des séismes à l'échelle locale se produisent fort probablement le long des failles déjà existantes, car les forces tectoniques ne sont probablement pas assez importantes pour donner naissance à de nouvelles failles. Mais ces forces sont plutôt capables de réactiver des failles déjà existantes, soit le long des zones de faiblesse de la croûte terrestre.
- **Faille non active** : cette définition est relative aux failles ayant joué durant une période mais présente un caractère d'inactivité dans le régime sismotectonique actuel.

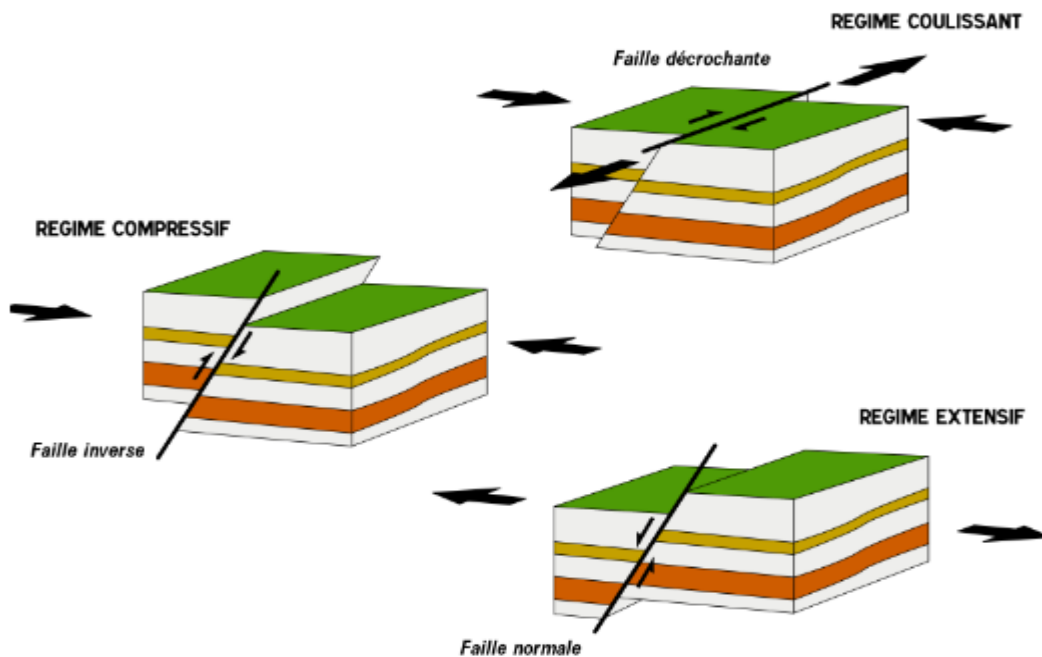


Fig. II.4 Type fondamentaux des failles.

II.4. Les caractéristiques des séismes

Un séisme correspond à un mouvement de glissement le long d'une faille. Le glissement résulte d'une libération d'énergie qui s'accumule au fonction des contraintes générées par le mouvement des plaques tectoniques. La libération d'énergie, parfois considérable, se fait sous forme de vibrations (ondes sismiques) qui peuvent parcourir de grandes distances Figure. II.5 [2].

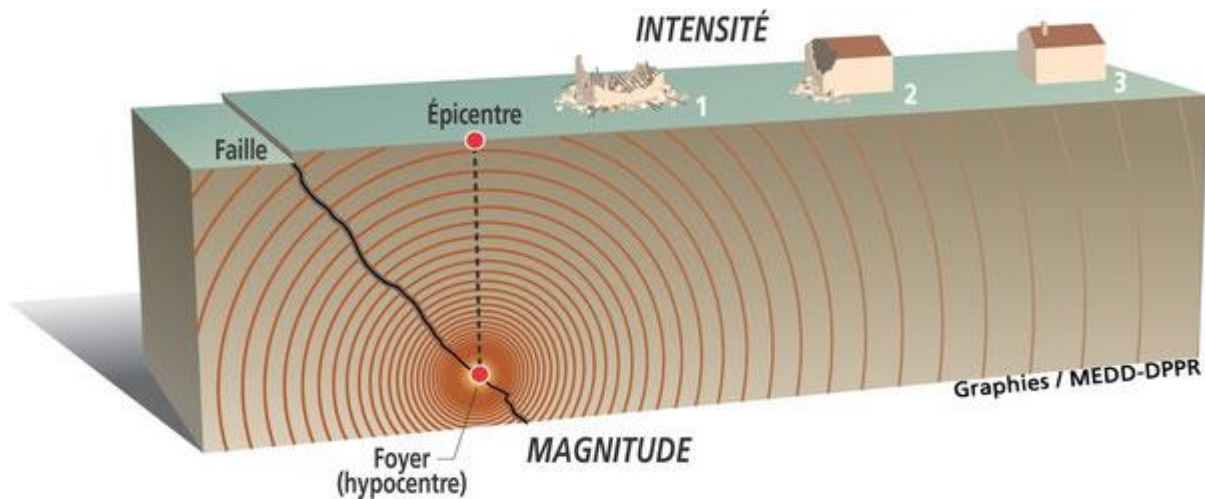


Fig. II.5 : Caractéristiques des séismes.

- **Le foyer :** (ou hypocentre) d'un séisme est l'endroit où se produit le glissement le long de la faille et d'où se propagent les ondes sismiques.
- **L'épicentre :** est le point situé en surface à la verticale du foyer, où l'intensité est la plus forte. En effet, puisque l'épicentre est le point en surface situé à la plus courte distance du foyer, les ondes sismiques générées en profondeur sont moins atténuées lorsqu'elles y arrivent.
- **La magnitude :** traduit l'énergie libérée par le séisme. Elle est calculée à partir de l'amplitude des ondes sismiques. Augmenter la magnitude d'un degré revient à multiplier l'énergie libérée par 30. Plus le glissement le long de la faille est important et plus le segment qui bouge est long et plus la magnitude du séisme est grande.

II.4.1 Détermination de la magnitude

Il existe plusieurs échelles de magnitude :

- **Magnitude locale M_L :**

On l'utilise pour des séismes proches dits séismes locaux. Elle est définie à partir de l'amplitude maximale des ondes P.

$$M_L = \log(A) - \log(A_0) + c \log(\Delta) \quad (\text{II.1})$$

Où : A = amplitude maximale mesurée sur le sismogramme.

A_0 = est une amplitude de référence correspondant à un séisme de magnitude 0 à 100 km ($\log(A_0) = 2,48$ pour un sismographe de type Wood-Anderson).

Δ = est la distance épacentrale (km)

c = constante de calibration = 2,76 pour un sismographe de type Wood-Anderson.

- **Magnitude de durée M_D :**

On l'utilise souvent utilisée pour la micro sismicité (séismes proches) et s'obtient comme son nom l'indique en mesurant la durée en seconde du signal sur le sismogramme.

○ **Magnitude des ondes de surface M_s :**

Elle est utilisée pour les séismes lointains, dits télé séismes, dont la profondeur est inférieure à 80 km. Elle se calcule à partir de l'amplitude des ondes de surface. Introduite en 1936, cette magnitude est basée sur la mesure de l'amplitude maximale des ondes de surface (en général l'onde de Rayleigh sur la composante verticale du sismomètre) à une période de 20s.

$$M_s = \log(A_{20}) + b + c \log(\Delta) \quad (\text{II.2})$$

Où : A_{20} = amplitude mesurée, Δ = est la distance épacentrale exprimée en degré b et c = constantes de calibration (2,0 et 1,66 généralement).

○ **Magnitude des ondes de volume M_B :**

Cette magnitude est définie pour toutes les télé séismes et en particulier pour les séismes profonds. Sa mesure est calculée à partir du premier train d'onde P et permet une estimation rapide de l'importance du séisme. Sa formulation est dépendante de la période dominante T du signal. Le problème de cette mesure est la saturation rapide avec la magnitude.

$$M_B = \log(A / T) + Q(\Delta, h) \quad (\text{II.3})$$

Où : A = amplitude maximale mesurée, Δ = est la distance épacentrale exprimée en degré ($25^\circ < \Delta < 90^\circ$), h = profondeur hypo centrale, Q = fonction de calibration dépendant des deux précédents paramètres, T = période dominante (autour de 1 sec.)

II.5 Classification des séismes

Le foyer ou l'hypocentre est le lieu qui constitue l'origine de l'énergie de l'ébranlement des roches. Selon la profondeur des foyers on classe les séismes en :

II.5.1 Les séismes superficiels

La croûte terrestre étant rigide, elle peut casser. Etant donné que les plaques lithosphériques ont une épaisseur moyenne d'environ 70 Km, la majorité des séismes sont évidemment superficiels c'est à dire que les foyers ne dépassent pas une profondeur de quelques dizaines de kilomètre (0 – 70 Km environ). Ils caractérisent les zones de tension des dorsales océaniques ainsi que les mouvements le long des failles transformèrent.

II.5.2 Les séismes intermédiaires

Ce sont des ébranlements dont la profondeur des foyers est comprise entre 70 et 350 Km. Cette catégorie de séismes constitue environ 25% de la totalité des séismes.

II.5.3 Les séismes profonds

Ils sont rares que les deux catégories précédentes et ne représentent qu'environ 5%. Les séismes profonds ont des foyers qui se situent entre 350 et 700 Km et ils se produisent essentiellement le long d'une plaque lithosphérique qui plonge sous une autre plaque aussi

longtemps que les paramètres pression et température n'ont pas encore transformé les roches à un état fluide (visqueux).

II.6 Propagation des ondes

II.6.1 Sources des ondes sismiques

Les ondes sismiques sont des ondes élastiques qui traversent un milieu sans modifier durablement ce milieu.

Les ondes sismiques sont créées par un déplacement de plaques au niveau de la faille. On peut schématiser la source d'un tremblement de terre par un ensemble de 4 forces sur le milieu élastique : deux forces opposées, de part et d'autre de la faille, et un couple de forces auxiliaires créées par la réaction du milieu Figure. II.6 [2].

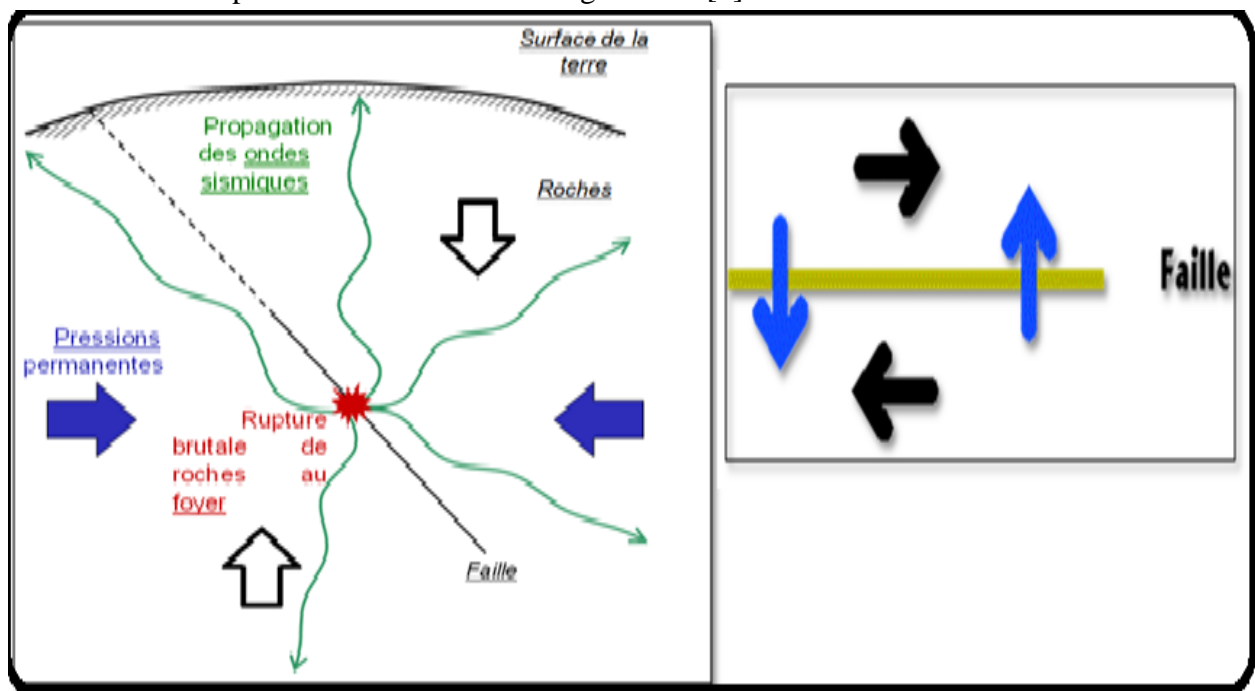


Fig. II.6 Source d'un tremblement de terre.

II.6.2 Les type des ondes sismiques

Les vibrations engendrées par un séisme se propagent dans toutes les directions. On distingue les ondes de volume qui traversent la terre et les ondes de surface qui se propagent parallèlement à sa surface Figure. II.7.

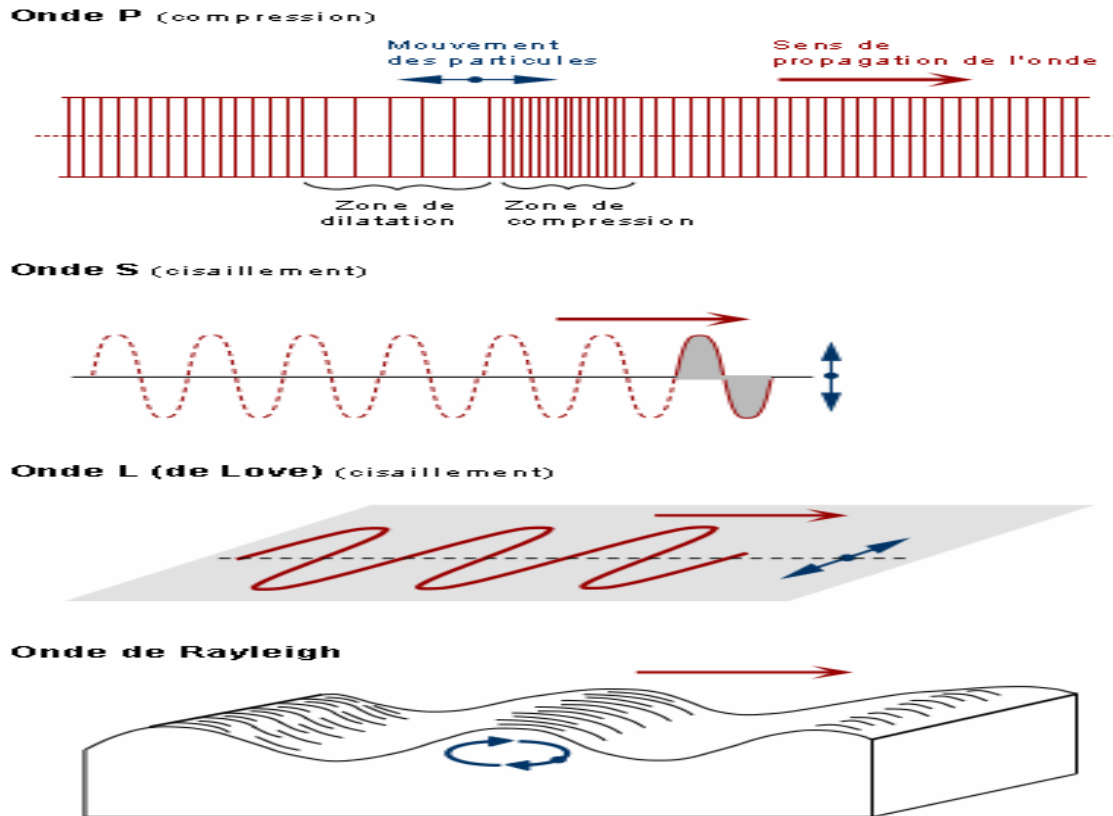


Fig. II.7 Les ondes P, S, Love et Rayleigh.

- **Les ondes P** sont des ondes de compression assimilables aux ondes sonores et qui se propagent dans tous les états de la matière. Les particules se déplacent selon un mouvement avant-arrière dans la direction de la propagation de l'onde.
- **Les ondes S** sont des ondes de cisaillement qui ne se propagent que dans les solides. Les particules oscillent dans un plan vertical, à angle droit par rapport à la direction de propagation de l'onde.
- **Les ondes de Love ou ondes L** sont des ondes de cisaillement, comme les ondes S, mais qui oscillent dans un plan horizontal. Elles impriment au sol un mouvement de vibration latéral.
- **Les ondes de Rayleigh** sont assimilables à une vague; les particules du sol se déplacent selon une ellipse, créant une véritable vague qui affecte le sol lors des grands tremblements de terre.

II.7 Détermination de l'épicentre

II.7.1 Détermination de l'épicentre par la méthode des cercles

La première méthode nécessite l'utilisation d'au moins 3 stations d'enregistrement situées en des lieux différents et qui enregistrent la composante verticale des ondes P et S. Elle consiste à évaluer les distances épicentrales associés à chaque station et de tracer sur une carte trois cercles ayant pour centre les trois stations et pour rayons respectifs les distances

épacentrales Figure. II.8. L'intersection de ces trois cercles donne la position de l'épicentre. Plus on utilise de station et plus la précision de détermination de l'épicentre s'améliore.

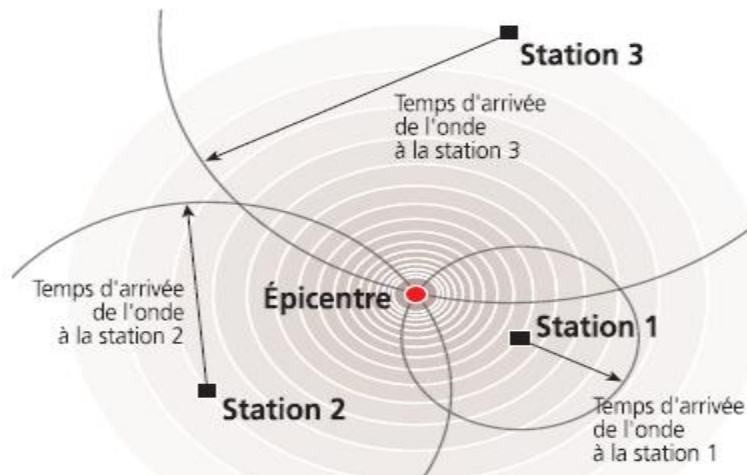


Fig. II.8 Méthode des cercles pour localiser l'épicentre.

I.7.2 Stations sismiques

Comment déterminer la distance épacentrales associées à chaque station ?

A partir des sismogrammes (enregistrements graphiques données par le sismographe) on peut évaluer de plusieurs façons la position du point géographique correspondant à l'épicentre.

Soit le sismogramme représenté par la Figure. II.9, enregistré par une station située dans une ville. L'arrivée de l'onde primaire P est très nette sur l'enregistrement de la composante verticale. La différence des temps d'arrivées entre les ondes primaire et les ondes de surface donneraient une évaluation grossière de la distance. La détermination précise de la distance se base sur une détermination précise du temps d'arrivée de l'onde secondaire S et de la différence S-P en utilisant les tableaux sur les temps de propagation des ondes en fonction des distances (hodochrones).

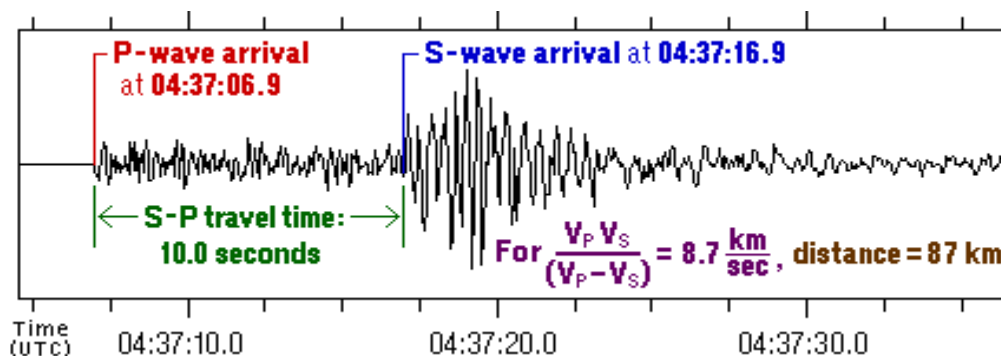


Fig. II.9 Séismogramme typique d'un séisme lointain.

III.1 Introduction

Les propriétés physiques essentielles dans tous les systèmes structurel ou mécanique linéairement élastique soumis à une source externe d'excitation ou de chargement dynamique sont sa masse, ses propriétés élastiques (souplesse ou rigidité) et son mécanisme de perte d'énergie ou d'amortissement.

Dans le modèle le plus simple d'un système, chacune de ces propriétés est supposée être concentrée dans un seul élément physique.

La réponse d'une structure soumise aux mouvements du sol appliqués à sa base est un problème de dynamique. On en rappelle ci-après quelques éléments [3][4].

III.2 Avertissement

Pour obtenir des résultats corrects dans les problèmes de dynamique, il est nécessaire de caractériser chaque grandeur physique dans son unité significative : ainsi, un plancher ou sa charge sont des masses et l'unité de masse est le **kg** (pas le kN).

Il est aussi nécessaire d'utiliser un système d'unités cohérent, **SI** (Système International) par exemple :

Masse **m** (kg) ; accélération **a** (m/s^2) ; force **F** (N) ; coefficient d'amortissement **C** (N.s/m) ; longueur **L** (m) ; temps **t** (s) ; rigidité **k** (N/m).

III.3 Formulation de l'équation de mouvement des SSDDL

La formulation de l'équation de mouvement des systèmes à un seul SSDDL peut se faire suivant trois différentes méthodes :

- Le principe de D'Alembert.
- Le principe de Hamilton.
- Le principe de déplacement virtuel.

a) Le principe de D'Alembert :

La figure III.1 définit le système à un degré de liberté $x(t)$, constitué d'une masse m , d'un ressort de raideur k , et d'un amortisseur visqueux de coefficient c . $x(t)$ est le déplacement qui définit la position de la masse m à partir de la position d'équilibre statique, déterminée par l'action de la pesanteur. $F(t)$ est la force extérieure agissant sur la masse (m).

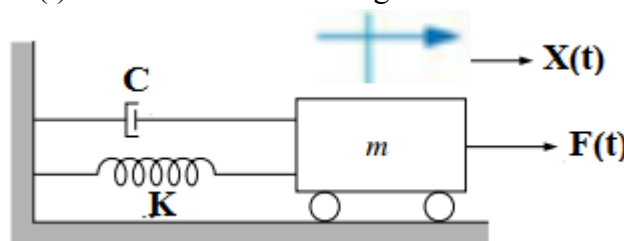


Fig. III.1 Système à un degré de liberté.

Selon le principe de d'Alembert, la force d'inertie est le produit de la masse par l'accélération :

En supposant un mécanisme d'amortissement visqueux, la force d'amortissement est le produit de la constante d'amortissement c et de la vitesse :

Enfin, la force élastique est le produit de la raideur du ressort et du déplacement :

L'équation du mouvement de la masse m est obtenue en appliquant deux méthodes : la loi de Newton et les équations de Lagrange.

❖ **Loi de Newton**

$$\sum \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} \quad (\text{III.1})$$

Le bilan des forces appliquées à la masse m suivant le principe d'Alembert est illustré sur la figure suivante :

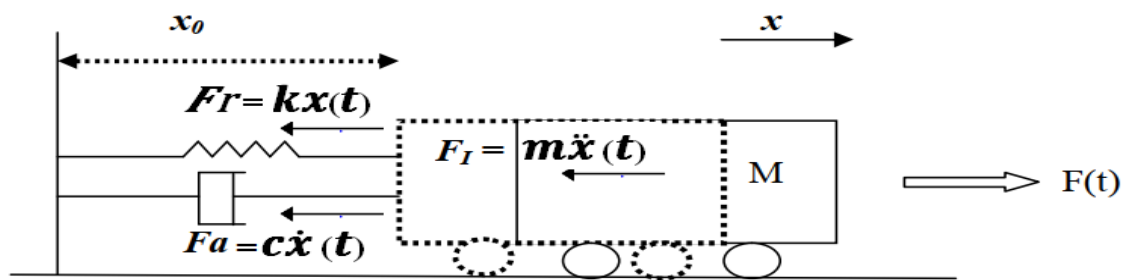


Fig. III.2 Bilan de forces.

En résumé, la masse est soumise à l'action des forces suivantes s'opposant à son mouvement:

- La force de rappel du ressort : $-\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$
- La force d'amortissement : $-\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{x}}$
- La force d'inertie : $-\mathbf{m} \cdot \ddot{\mathbf{x}}$

En appliquant la deuxième loi de Newton à ce système, on aura :

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) + c\dot{\mathbf{x}}(t) + k\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (\text{III.2})$$

Où :

\mathbf{m} : masse.

\mathbf{c} : coefficient d'amortissement.

\mathbf{k} : coefficient de rigidité.

$\ddot{\mathbf{x}}$: accélération.

$\dot{\mathbf{x}}$: vitesse.

\mathbf{x} : déplacement.

$\mathbf{F}(t)$: L'excitation extérieure.

Cette équation est l'équation de mouvement de base pour un système à un seul degré de liberté.

III.4 Vibration libre des SSDDL

Nous avons présenté précédemment les techniques différentes pour dériver l'équation de mouvement d'un SSDDL, et, nous avons vu que l'équation de mouvement d'un système linéaire est de la forme:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (III.3)$$

Avant de commencer l'étude de la réponse d'un tel système excité par un chargement dynamique $F(t)$, il serait instructif de considérer le cas où l'excitation $F(t)$ est nulle. Il en découle alors un comportement intrinsèque ou naturel de système appelé **oscillation libre**. Une masse déplacée puis soudainement relâchée représente un exemple d'oscillation libre [3].

L'équation (1) devient alors :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (III.4)$$

III.4.1 Vibration libre non amorties

En absence de l'amortissement et de la force extérieure, le mouvement libre non amortie se traduit par : $C=0$ et $F(t)=0$.

C'est le cas où $C=0$

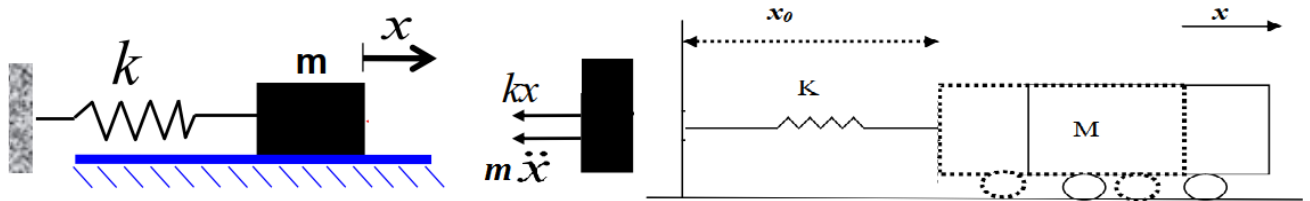


Fig. III.3 Bilan de système avec une vibration libre non amortie.

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (III.5)$$

L'équation (II.3) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants, dont la solution s'écrit sous la forme suivante :

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \quad (III.6)$$

A et B sont des constantes qui peuvent être exprimées en fonction des conditions initiales (à $t = 0$), c'est-à-dire le déplacement x_0 et la vitesse \dot{x}_0 :

À $t=0$:

$$\bullet \quad B = x_0 \quad (III.7)$$

$$\bullet \quad A = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \quad (III.8)$$

D'où :

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t) \quad (III.9)$$

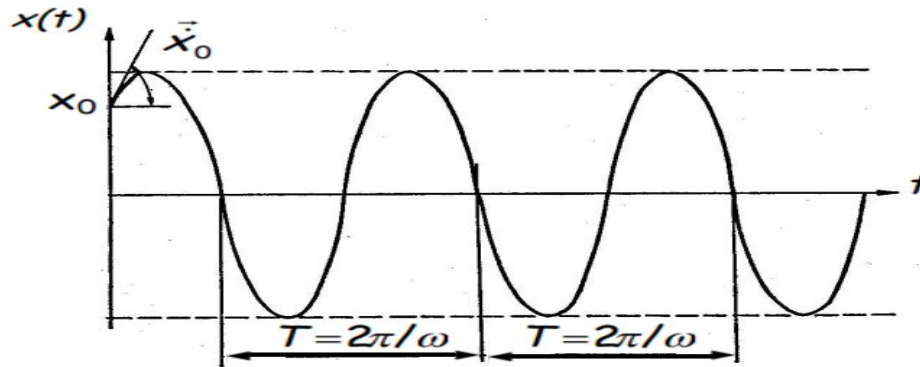


Fig. III.4 Réponse en oscillation libre non amortie.

En utilisant les formules des transformations trigonométriques, l'équation (III.9) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$x(t) = C \cos(\omega t - \varphi) \tag{III.10}$$

Où :

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \tag{III.11}$$

- φ : l'angle de déplacement

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right) \tag{III.12}$$

- C : l'amplitude de la vibration libre

$C = X_{\max}$: est le déplacement maximal de la masse m .

- La fréquence naturelle (pulsation propre) :

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{III.13}$$

- La fréquence propre du système en cycle /s ou Hertz (hz) est donnée par :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{III.14}$$

- La période propre du système en (s) est donnée par :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{III.15}$$

III.4.2 Vibrations libres amorties

On parle d'oscillations amorties quand l'amortissement n'est pas nul, c'est-à-dire quand le coefficient $c \neq 0$. En présence de l'amortissement et en absence de la force extérieure, le mouvement libre se traduit par [4]:

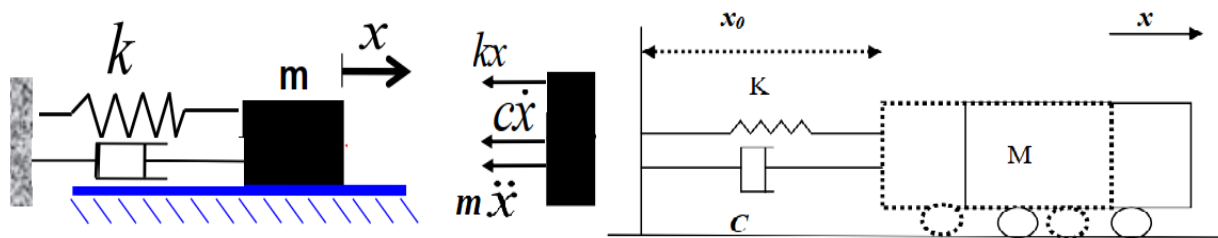


Fig. III.5 Bilan de système avec une vibration libre amortie.

L'équation de ce système est :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (\text{III.16})$$

En divisant par m, on aura :

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad (\text{III.17})$$

On pose : $\omega^2 = k/m$; D'où : $\omega = \sqrt{k/m}$

La fraction d'amortissement est défini par :

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} \quad (\text{III.18})$$

En reportant ω et ξ dans (III.17), on aura :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0 \quad (\text{III.19})$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont la solution s'écrit sous la forme :

$$x(t) = Ee^{rt} \quad (\text{III.20})$$

En dérivant et en reportant (III.20) dans (III.19), on obtient l'équation caractéristique :

$$(r^2 + 2\xi\omega r + \omega^2) Ee^{rt} = 0 \quad (\text{III.21})$$

Les racines de cette équation sont :

$$r = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (\text{III.22})$$

D'après cette équation, la forme de la solution dépend du signe de la racine carrée. Alors, on doit distinguer trois cas possibles :

- Système sur amorti : $\zeta > 1$; $C^2 > (2m.\omega)^2 = 4Km$.
- Système à amortissement critique : $\zeta = 1$; $C^2 = (2m.\omega)^2 = 4Km$.
- Système sous amorti : $\zeta < 1$; $C^2 < (2m.\omega)^2 = 4Km$.

On doit distinguer les cas suivants :

a- Système sur amorti $\zeta > 1$; $C^2 > (2m.\omega)^2 = 4Km$:

Dans ce cas, la solution de l'équation de mouvement (III.19) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$x(t) = c_1 e^{(-\xi\omega + \omega_s)t} + c_2 e^{(-\xi\omega - \omega_s)t} \quad (\text{III.23})$$

Ou bien :

$$x(t) = (c_1 e^{\omega_s t} + c_2 e^{-\omega_s t}) e^{-\xi\omega t} \quad (\text{II.24})$$

Dans ce cas, les racines sont négatives et réelles

$$r_1 = -\xi\omega + \omega_s \text{ et } r_2 = -\xi\omega - \omega_s \quad (\text{II.25})$$

Avec : $\omega_s = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$

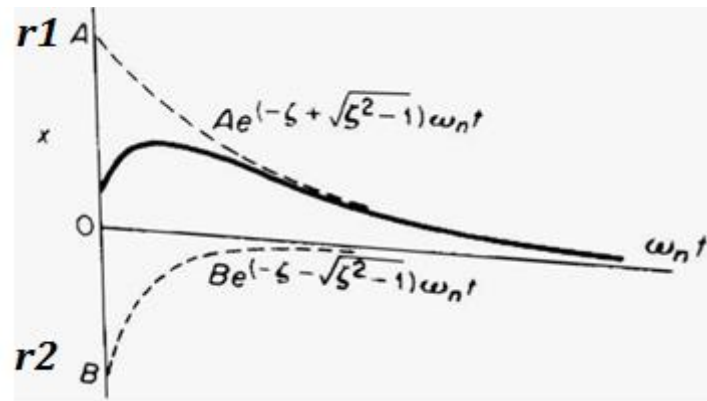


Fig. III.6 Oscillation libres sur-amorties.

b- Système à amortissement critique $\zeta=1$; $C^2=(2m.\omega)^2=4Km$:

Dans ce cas, la solution de l'équation de mouvement (III.19) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega t} \quad (II.26)$$

En utilisant les conditions initiales x_0 et \dot{x}_0 à $t=0$, l'équation (II.26) peut être réécrite sous la forme :

$$x(t) = (x_0 + (\omega x_0 + \dot{x}_0)t)e^{-\omega t} \quad (III.27)$$

Dans ce cas, nous avons deux racines égales, et la solution générale devient :

$$r_1 = r_2 = -\xi\omega \quad (III.28)$$

On constate qu'aucune vibration n'est possible. Mais ce cas représente la limite entre une réponse oscillatoire et une réponse monotone (sans vibration), on définit pour ce cas :

La fraction d'amortissement critique :

$$\xi_{cr} = \frac{c}{c_{cr}} \quad (III.29)$$

Le coefficient d'amortissement critique :

$$c_{cr} = 2m\omega \quad (III.30)$$

Le cas de l'amortissement critique ne possède pas de valeurs pratiques. On considère toujours les structures de génie civil comme des systèmes sous amortis avec un amortissement visqueux équivalent inférieur à 20% critique.

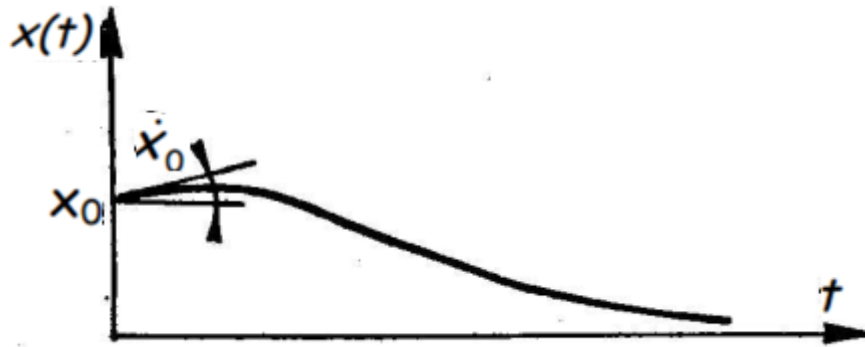


Fig. III.7 Oscillation libres amorties amortissement critique.

c- Système sous amorti $\zeta < 1$; $C^2 < (2m \cdot \omega)^2 = 4Km$:

C'est le seul cas intéressant en pratique pour le calcul dynamique des structures, celles-ci ayant toujours un amortissement inférieur à l'amortissement critique.

Alors, la solution de l'équation (II.19) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$x(t) = (A \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t)) e^{-\xi \omega t} \quad (\text{III.31})$$

Dans ce cas, les racines sont des valeurs complexes :

$$r_1 = -\xi \omega + i \omega_d \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi \omega - i \omega_d \quad (\text{III.32})$$

Avec :

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (\text{III.33})$$

ω_d : Pulsation propre amortie.

Les constantes A et B sont déduites à partir des conditions initiales (à $t=0$) :

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (\text{III.34})$$

En substituant (II.33) dans (II.31), on obtient :

$$A = \frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_d} \quad (\text{III.35})$$

$$B = x_0 \quad (\text{III.36})$$

D'où :

$$x(t) = \left[\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d t) + x_0 \cos(\omega_d t) \right] e^{-\xi \omega t} \quad (\text{III.37})$$

L'équation (II. 37) peut être aussi réécrite sous une autre forme :

$$x(t) = \sin(\omega_d t + \varphi) E e^{-\xi \omega t} \quad (\text{III.38})$$

Avec :

$$E = \frac{1}{\omega_d} \sqrt{(x_0 \omega_d)^2 + (\dot{x}_0 + \xi \omega x_0)^2} \quad (\text{III.39})$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{x_0 \omega_d}{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0} \right) \quad (\text{III.40})$$

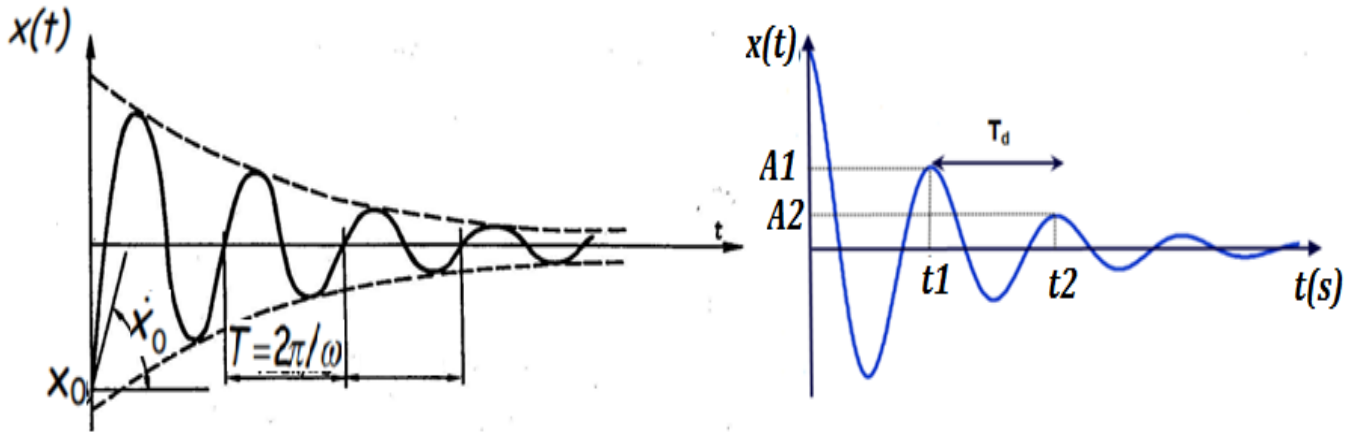


Fig. II.8 Oscillation libres sous-amorties.

On note que le mouvement est harmonique avec une fréquence circulaire ω_d , l'amplitude va en décroissant à cause du terme exponentiel. On définit :

❖ La fréquence naturelle amortie.

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} \quad (III.41)$$

❖ La période naturelle amortie.

$$T_d = \frac{1}{f_d} \quad (III.42)$$

III.4.2.1 Décrément logarithmique

Le décrément logarithmique est le logarithme du rapport de 2 amplitudes successives des oscillations amorties [4].

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x(t_n)}{x(t_{n+1})} = e^{\omega(t_n - t_{n+1})} = e^{\xi\omega T_d} \quad (III.43)$$

Avec $t_{n+1} = t_n + T_d$

Le logarithme naturel de ce rapport se nomme " décrément logarithmique ", noté, « δ ».

$$\delta = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \xi\omega T_d = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (III.44)$$

Pour lequel on détermine la fraction d'amortissement critique par :

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}} \quad (III.45)$$

Dans le cas où les crêtes sont séparées par p cycles, l'expression du décrément logarithmique peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{x_n}{x_{n+p}} = \frac{x(t_n)}{x(t_{n+p})} = e^{\omega(t_n - t_{n+p})} = e^{p\xi\omega T_d} \quad (III.46)$$

Avec $t_{n+p} = t_n + pT_d$

$$\delta = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+p}}\right) = p\xi\omega T_d = \frac{2\pi\xi p}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (III.47)$$

III.4.3 Vibrations forcées

Dans ce titre nous avons présentées différentes méthodes de dérivation des équations de mouvement d'un système à un seul degré de liberté. Ce titre traite de la solution d'une telle équation différentielle pour le cas particulier des oscillations libres. C'est-à-dire dans le cas où il n'y a pas de force d'excitation, nous allons de essayer commencer à étudier des mouvements forcés et particulièrement les SSDDL amortis et non amortis assujettis à une excitation harmonique. Cette étude est important pour deux raisons [4];

- ❖ Plusieurs systèmes sont sujets à ce genre d'excitation en pratique.
- ❖ Les résultats de ce titre peuvent être étendus pour traiter la réponse de structures complexes à plusieurs degrés de liberté à des excitations spéciales.

III.4.3.1 Réponse des systèmes non amortis à une force harmonique

L'équation du mouvement pour un oscillateur harmonique non amorti soumis à une force extérieure $F(t)$ s'écrit :

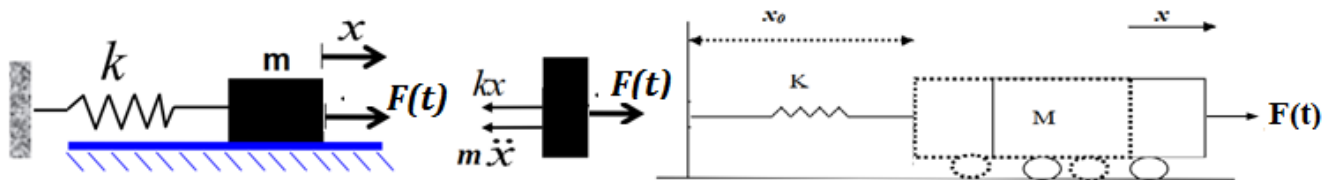


Fig. III.9 Excitation harmonique non amortie.

$C=0$ et $F(t) \neq 0$.

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (III.48)$$

Une excitation est harmonique si la force $F(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps :

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \quad (III.49)$$

$F(t)$: est une excitation harmonique d'amplitude F_0 et de pulsation ω .

En reportant (III.49) dans (III.48), on obtient :

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0 \sin(\omega t)}{m} \quad (III.50)$$

La solution générale de cette équation (III.50), est la somme d'une solution homogène de vibration libre (équation sans second membre) et d'une solution particulière représentant l'effet de la force périodique appliquée sur la structure dont la forme dépend du second membre.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (III.51)$$

L'expression de la solution homogène est donnée par:

$$x_h(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) \quad (III.52)$$

L'expression de la solution particulière est donnée par:

$$x_p(t) = A \sin(\omega t) \quad (III.53)$$

En reportant (III.52) dans (III.50), on aura :

$$-A\omega^2 \sin(\omega t) + \omega^2 A \sin(\omega t) = \frac{F_0 \sin(\omega t)}{m} \quad (III.54)$$

D'où :

$$A = \frac{F_0}{m\omega^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (\text{III.55})$$

Le rapport de fréquence (β) est défini comme étant le rapport de la fréquence de l'excitation à la fréquence propre du système.

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (\text{III.56})$$

Alors :

$$A = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (\text{III.57})$$

L'expression finale de la solution générale est donnée par :

$$x(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} \sin(\omega t) \quad (\text{III.58})$$

Le premier terme de cette équation constitue la réponse transitoire de l'oscillateur et le second la réponse forcée ou stationnaire (permanente) de celui-ci. En pratique, la réponse transitoire disparaît rapidement et ne restera que la réponse en régime permanent qui caractérisera le mouvement du système.

Le déplacement statique « Δ_{st} » est le déplacement de la masse produit par une force constante F_0 .

$$\Delta_{st} = F_0/k \quad (\text{III.59})$$

Le facteur d'amplification dynamique « FAD » c'est un facteur qui exprime l'amplification de l'action dynamique sur le système.

$$FAD = \left| \frac{1}{1 - \beta^2} \right| \quad (\text{III.60})$$

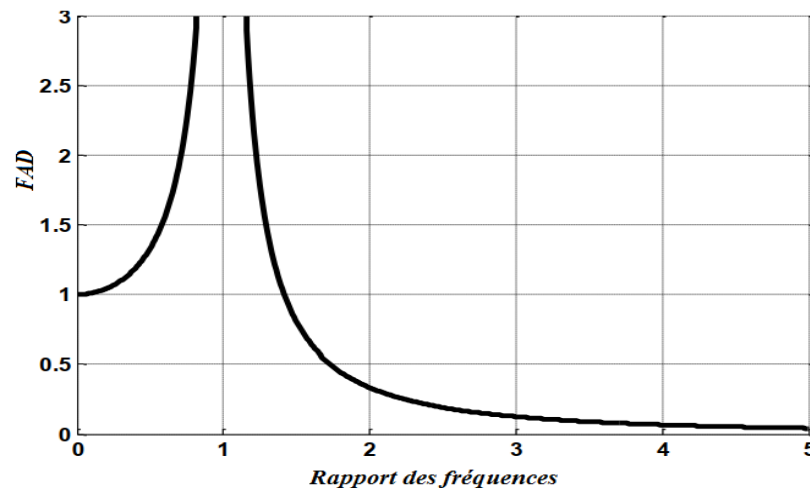


Fig. III.10 Facteur d'amplification dynamique.

Ce graphique montre que la réponse du système devient infinie lorsque le rapport des fréquences est égal à 1. Cette situation correspond à un cas critique à éviter dans la pratique qui est le cas de résonance qui a lieu lorsque les fréquences d'excitation et propre deviennent égales.

Le déplacement maximal de la masse est donné par :

$$|x_{max}| = \Delta_{st} \cdot FAD \quad (\text{III.61})$$

La force transmise aux fondations est donné par :

$$|F_{trmax}| = F_0 \cdot FAD \quad (III.62)$$

III.4.3.2 Réponse amortie à une excitation harmonique

L'équation du mouvement pour un oscillateur harmonique non amorti soumis à une force extérieure $F(t)$ s'écrit [4]:

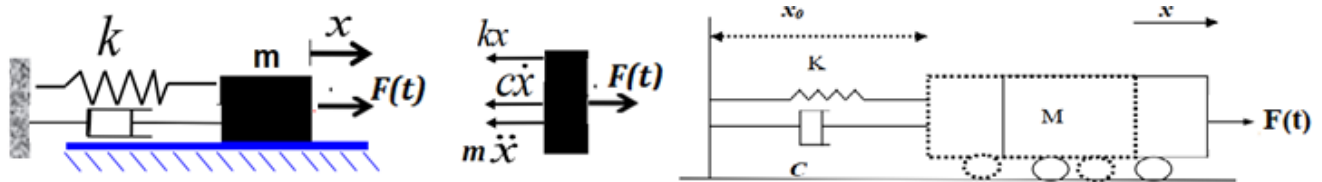


Fig. III.11 Excitation harmonique amortie.

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = \frac{F_0\sin(\omega t)}{m} \quad (III.63)$$

La solution générale de cette équation (III.63), est la somme d'une solution homogène de vibration libre (équation sans second membre) et d'une solution particulière représentant l'effet de la force périodique appliquée sur la structure dont la forme dépend du second membre.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (III.64)$$

L'expression de la solution homogène est donnée par:

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega t} [B_1\sin(\omega_d t) + B_2\cos(\omega_d t)] \quad (III.65)$$

L'expression de la solution particulière est donnée par:

$$x_p(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \quad (III.66)$$

En reportant (III.65) et (III.66) dans (III.64), on aura :

$$-A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) + 2\xi\omega A\omega\cos(\omega t) - 2\xi\omega B\omega\sin(\omega t) + \omega^2 A\sin(\omega t) + \omega^2 B\cos(\omega t) = \frac{F_0\sin(\omega t)}{m} \quad (III.67)$$

$$\diamond (\omega - \omega^2)A - 2\xi\omega\omega B = \frac{F_0}{m} \Rightarrow (1 - \beta^2)A - 2\xi\beta B = \frac{F_0}{k} \quad (III.68)$$

$$\diamond 2\xi\omega\omega A + (\omega - \omega^2) = 0 \Rightarrow 2\xi\beta A + (1 - \beta^2)B = 0 \quad (III.69)$$

D'où :

$$A = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad (III.70)$$

$$B = -\frac{F_0}{k} \cdot \frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad (III.71)$$

L'équation (III.66) peut être réécrite sous la forme :

$$x_p(t) = C\sin(\omega t + \varphi) \quad (III.72)$$

Où :

$$C = \sqrt{A + B} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (\text{III.73})$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right) \quad (\text{III.74})$$

L'expression finale de la solution générale est donnée par :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)] + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{III.75})$$

Ou bien :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)] + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} [(1 - \beta^2) \sin(\omega t) - 2\xi\beta \cos(\omega t)] \quad (\text{III.76})$$

Le premier terme de cette équation constitue la réponse transitoire de l'oscillateur et le second la réponse forcée ou stationnaire (permanente) de celui-ci. En pratique, la réponse transitoire disparaît rapidement à cause du terme $e^{-\xi\omega t}$ et ne restera que la réponse en régime permanent qui caractérisera le mouvement du système.

Le facteur d'amplification dynamique « FAD » est donné par :

$$FAD = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (\text{III.77})$$

La figure suivante illustre l'influence de l'amortissement sur la variation du facteur d'amplification dynamique.

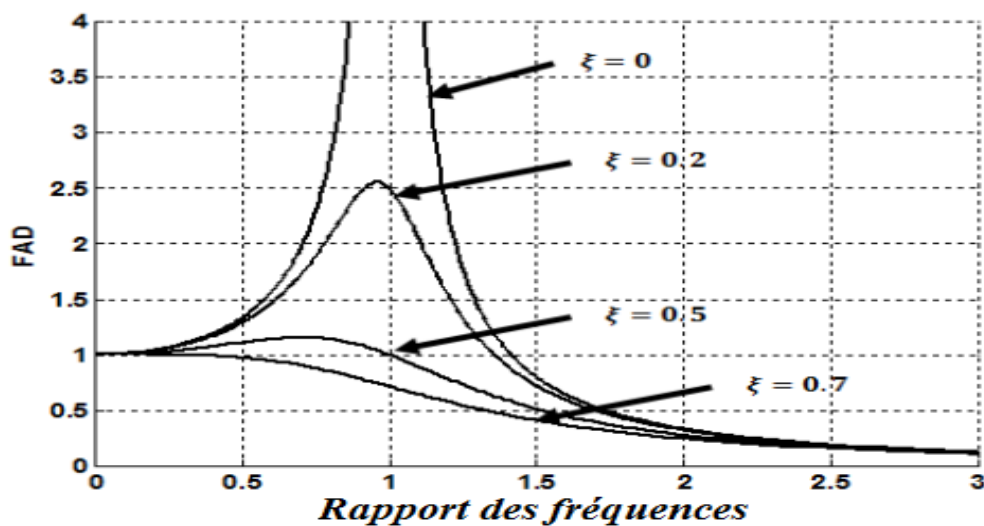


Fig. III.12 Facteur d'amplification dynamique.

III.4.3.2.1 Transmittance

La transmittance, désignée par R_f , représente la fraction de la force appliquée qui est transmise au support à travers le système.

La force transmise au support selon la loi de Newton, est exprimée par :

$$F_{tr} = c\dot{x}(t) + kx(t) \quad (III.78)$$

D'où :

$$|F_{trmax}| = \sqrt{c^2 \dot{x}_{max}^2 + k^2 x_{max}^2} \quad (III.79)$$

Avec :

$$\dot{x}_{max} = \omega x_{max} \quad (III.80)$$

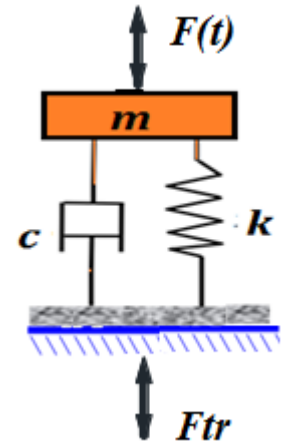


Fig. III.13 Modèle de calcul.

En reportant (II.80) dans (II.79), on trouve :

$$|F_{trmax}| = \sqrt{c^2 \omega^2 + k^2} \quad (III.81)$$

Sachant que :

$$m^2 = \frac{k^2}{\omega^2} \quad \text{et} \quad c^2 = 4m^2 \omega^2 \xi^2 = \frac{4m^2 \xi^2}{\omega^2}$$

$$|F_{trmax}| = kx_{max} \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad (III.82)$$

$$x_{max} = \Delta_{st.} FAD = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (III.83)$$

D'où :

$$|F_{trmax}| = F_0 \cdot \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (III.84)$$

III.4.4 Réponse à une excitation quelconque

a)- Réponse à une excitation périodique

La différence entre une sollicitation périodique quelconque et une autre harmonique se trouve au niveau de l'allure de la courbe $F=f(t)$. L'excitation harmonique est une fonction sinus ou cosinus qui conserve son évolution dans le temps, alors que l'excitation périodique quelconque est une fonction périodique qui se conserve dans le temps mais avec une forme quelconque.

Toute sollicitation périodique de période, T , peut être décomposée en série de Fourier, et la réponse d'un système linéaire à une sollicitation périodique quelconque se ramène à une superposition de réponses à des sollicitations harmoniques selon le principe de superposition.

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (III.85)$$

Avec :

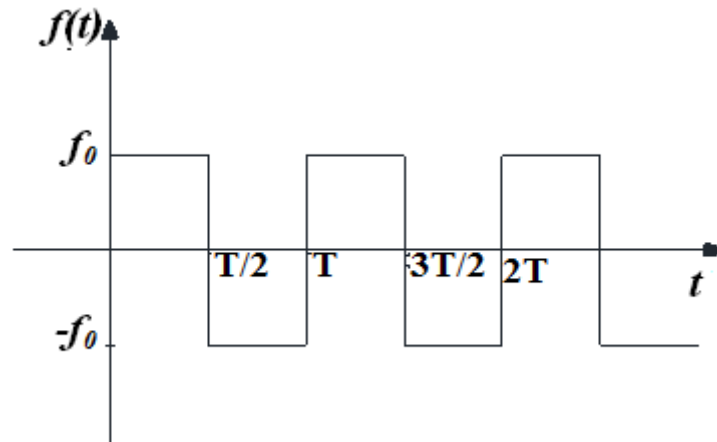
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T^0 F(t) dt \quad (\text{III.86})$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_T^0 (t) dt \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad (a_n = 0 \text{ si } F(t) \text{ est impaire}) \quad (\text{III.87})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T^0 (t) dt \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad (b_n = 0 \text{ si } F(t) \text{ est paire}) \quad (\text{III.88})$$

Exemple :

Calculer la réponse forcée de l'oscillateur soumis à un chargement périodique dont l'allure est celle de la fonction créneau présentée sur la figure suivante :



De l'observation de la fonction créneau, on déduit rapidement que quelque soit n, la valeur de $a_n=0$, car la fonction est impaire.

$$a_0 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} F_0 dt + \int_{T/2}^T -F_0 dt \right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} F_0 \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \int_{T/2}^T -F_0 \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \right]$$

$$b_n = \frac{2F_0}{T} \left[-\frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]_0^{T/2} + \frac{2F_0}{T} \left[\frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]_{T/2}^T$$

$$b_n = \frac{2F_0}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)]$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \frac{4F_0}{\pi n} & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases}$$

Seules les composantes impaires sont non nulles :

$$b_{2p+1} = \frac{4F_0}{(2p+1)\pi}$$

Soit :

$$F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(2p+1)t\right)$$

On considère une solution particulière de l'ordre p, sous la forme :

$$x_{2p+1}(t) = c_{2p+1} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(2p+1)t\right)$$

$$c_{2p+1} = \frac{4F_0}{\pi} \cdot \frac{1}{(2p+1)} \cdot \frac{1}{k - m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (2p+1)^2}$$

La solution d'ordre p vérifie donc l'équation :

$$m\ddot{x} + kx = \frac{4F_0}{\pi} \cdot \frac{1}{(2p+1)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(2p+1)t\right)$$

On écrit alors, la solution générale en utilisant le théorème de superposition :

$$x(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}(2p+1)t\right)}{k - m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (2p+1)^2}$$

Généralement, la réponse d'un système non amorti à 1DDLD en neigeant la réponse transitoire est donnée par :

$$F(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \left[\frac{a_n}{k} \cos(n\omega t) + \frac{b_n}{k} \sin(n\omega t) \right] \quad (\text{III.88a})$$

Avec:

$$\beta_n = n \frac{\omega}{\omega_n} \quad (\text{III.88b})$$

b)- Réponse à une excitation impulsive

La sollicitation consiste en une impulsion appliquée soudainement à l'instant $t=\tau$ (figure III.14).

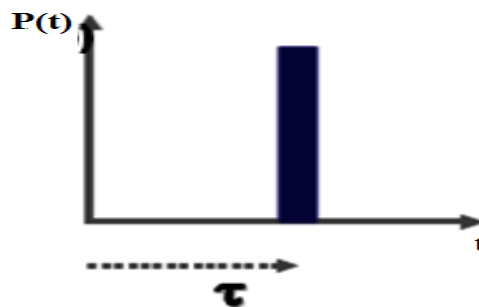


Fig. III.14 Sollicitation impulsive.

La sollicitation impulsive constitue la solution fondamentale élémentaire de la réponse de l'oscillateur, toute sollicitation générale pouvant être considérée comme une succession d'impulsions élémentaires. Mathématiquement, la sollicitation impulsive est représentée par la fonction de Dirac δ égale à l'infini au temps $t=\tau$ et nulle pour les autres valeurs du temps, mais dont l'intégrale, appelée impulsion, est égale à l'unité :

$$P(t) = (t - \tau) \quad (\text{III.89})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = 1 \quad (III.90)$$

D'après l'équation fondamentale de la dynamique, la variation de la quantité de mouvement de la masse m est égale à la résultante des forces appliquées, soit :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = p(t) - kx(t) - c\dot{x}(t) \quad (III.91)$$

Si la force $p(t)$ agit pendant une durée infiniment petite, le ressort et l'amortisseur n'ont pas le temps de développer des forces et les deux derniers termes du membre de droite de l'équation (III.91) sont nuls. Par intégration de l'équation (III.91), on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = m\Delta\dot{x} \quad (III.92)$$

Où : $\Delta\dot{x}$ représente la variation de vitesse communiquée à la masse m .

Pour un système initialement au repos ($\dot{x} = 0$), tenant compte de (III.90) :

$$\dot{x}(\tau) = \frac{1}{m} \quad (III.93)$$

Par ailleurs, pour $t \leq \tau$, le déplacement est nul, soit :

$$x(\tau) = 0 \quad (III.94)$$

Ces deux dernières relations constituent les conditions initiales de la réponse vibratoire de l'oscillateur soumis à une impulsion unité à l'instant $t = \tau$. Pour les temps $t > \tau$ la réponse de l'oscillateur correspondra à sa vibration libre (voir section III.3). Son déplacement $x(t)$ sera régi par l'équation (II.28) dans laquelle les conditions initiales sont introduites :

$$x(t) = h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t - \tau)] \quad (III.95)$$

Cette équation est valable pour $t \geq \tau$.

$h(t-\tau)$ constitue la solution élémentaire pour une impulsion unité intervenant à l'instant $t = \tau$. Physiquement, une impulsion de durée nulle n'existe pas et toute impulsion a une durée finie t_1 , très courte. Sa variation temporelle pendant la durée t , peut être, par exemple sinusoïdale, triangulaire ou être représentée par un créneau (figure III.15). Ces situations se rencontrent par exemple dans le cas d'un choc mou, d'une explosion ou d'un choc dur.

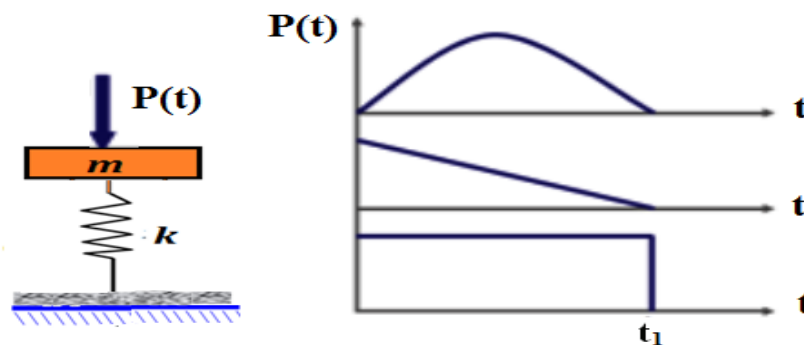


Fig. III.15 Exemples d'impulsion.

Pour ces sollicitations, une solution analytique explicite peut être obtenue pour la réponse de l'oscillateur. Cependant il est plus important de s'intéresser à la réponse maximale de l'oscillateur. Cette réponse peut se produire pendant la durée de l'impulsion ou pendant la phase de vibration libre après la fin de l'impulsion.

c)- Réponse à une excitation non périodique

Toute sollicitation quelconque $p(t)$ peut être considérée comme égale à la somme d'impulsions $P(\tau) d\tau$ agissant à l'instant $t = \tau$ (figure III.16). Cette impulsion produit la réponse dont la solution élémentaire est donnée par l'équation (III.91). Le déplacement incrémental vaut donc

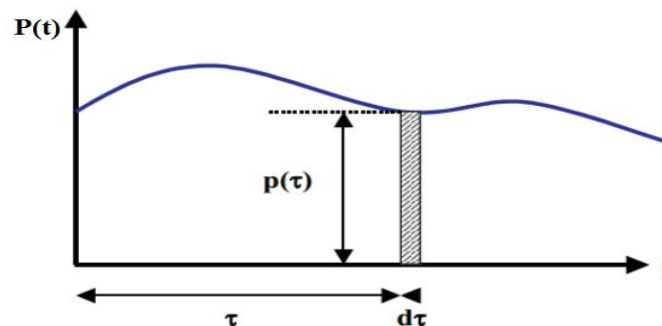


Fig. III.16 Charge quelconque.

La réponse à l'instant t est la somme des réponses aux impulsions produites aux temps $\tau < t$, soit :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (\text{III.96})$$

Cette intégrale de convolution est connue sous le nom de « **l'intégral de Duhamel** » caractérisant la réponse d'un oscillateur simple initialement au repos à une sollicitation quelconque $P(t)$. Si $P(t)$ n'est pas connue analytiquement, ou est représentée par une fonction compliquée, l'intégrale de Duhamel doit être évaluée numériquement. Cette intégration numérique ne se révèle pas particulièrement compétitive et il est souvent préférable d'intégrer directement l'équation différentielle régissant l'équilibre dynamique de l'oscillateur.

Si le système n'est pas au repos à $t=0$, on doit superposer la solution en vibration libre:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{x_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + x_0 \cos(\omega_d t) \right] + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (\text{III.97})$$

d)- Excitation de la base

Lorsque la structure est soumise à un séisme, la sollicitation dynamique ne découle pas d'une force explicite appliquée au système, mais d'une force implicite

d'inertie causée par le mouvement de la base. Pour déduire l'équation de mouvement pour le problème sismique, considérons un système à un seul degré de liberté soumis à un déplacement, $x_s(t)$, de sa base.

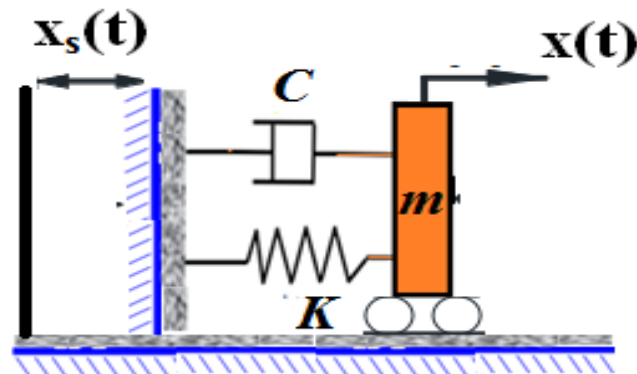


Fig. III.17 Excitation de la base.

$x_s(t)$, représente le déplacement relatif de la masse par rapport à la base. Ainsi, la force générée par la rigidité est proportionnelle à $x(t)$ et celle générée par l'amortisseur est proportionnelle à $\dot{x}(t)$, tandis que la force d'inertie engendrée par la masse est proportionnelle à l'accélération totale du système, $\ddot{x}(t) + \ddot{x}_s(t)$.

En appliquant la deuxième loi de Newton (principe d'Alembert) au modèle, on aura :

$$m(\ddot{x}_s(t) + \ddot{x}(t)) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (\text{III.98})$$

D'où :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_s(t) \quad (\text{III.99})$$

Ce résultat montre que le problème sismique (translation de la base) est identique au problème

dynamique à base fixe. La charge dynamique est simplement remplacée par : $-m\ddot{x}_s(t)$.

III.4.5 Concept de spectre réponse

La réponse d'un système à 1 DDL sollicité par une accélération à sa base, $\ddot{x}_s(t)$, générée par un tremblement de terre s'obtient simplement en remplaçant la charge dynamique, $F(t)$, par une charge fictive, $-m\ddot{x}_s(t)$.

$$x(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (\text{III.100})$$

On ne peut généralement pas exprimer l'accélérogramme par une formule mathématique. Cette équation demande toujours une intégration numérique.

Pour un système à 1 DDL existents plusieurs spectres de réponse :

- ❖ Spectre de déplacement relatif

$$S_d = |x|_{max} \quad (\text{III.101})$$

- ❖ Spectre de vitesse relative (vitesse spectrale)

$$S_v = |\dot{x}|_{max} \quad (III.102)$$

❖ Spectre d'accélération relative

$$S_{ar} = |\ddot{x}|_{max} \quad (III.103)$$

❖ Spectre de déplacement absolu

$$S_{ds} = |x + x_s|_{max} \quad (III.104)$$

❖ Spectre de vitesse absolue

$$S_{vs} = |\dot{x} + \dot{x}_s|_{max} \quad (III.105)$$

❖ Spectre d'accélération absolue

$$S_a = |\ddot{x} + \ddot{x}_s|_{max} \quad (III.106)$$

Un spectre de réponse est caractérisé par les propriétés suivantes :

- Donne les valeurs maximales des réponses d'un système à un seul degré de liberté sollicité par un séisme.
- Donne les réponses maximales d'un système à plusieurs degrés de liberté pour chaque mode de vibration.

Un spectre de réponse est caractérisé par les propriétés suivantes :

- Donne les valeurs maximales des réponses d'un système à un seul degré de liberté sollicité par un séisme.
- Donne les réponses maximales d'un système à plusieurs degrés de liberté pour chaque mode de vibration.

III.4.5.1 Calcul de la réponse spectrale

Le spectre de déplacement relatif s'obtient directement par l'intégral de Duhamel.

$$S_D = |x(t)|_{max} = \left| -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \right|_{max} \quad (III.107)$$

Le spectre de vitesse relative est donné par :

$$S_v = |\dot{x}|_{max} \quad (III.108)$$

Où :

$$\dot{x}(t) = -\int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos[\omega_d(t-\tau)] d\tau + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (III.109)$$

Le spectre d'accélération absolue est donné par :

$$S_a = |\ddot{x} + \ddot{x}_s|_{max} \quad (III.110)$$

Où :

$$\ddot{x}(t) = 2\xi\omega \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos[\omega_d(t-\tau)] d\tau + \frac{\omega(1-2\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (III.111)$$

III.4.5.2 Pseudo-spectre de réponse

Généralement, une structure de génie civil possède un faible amortissement (<20%), alors, on peut poser les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \xi \ll 1, \xi^2 \approx 0 \text{ et } \omega_d \approx \omega \\ \cos[\omega_d(t - \tau)] \text{ est remplacé par } \sin[\omega_d(t - \tau)] \end{cases} \quad (\text{III.112})$$

On aura donc :

$$\dot{x}(t) = - \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t - \tau)] d\tau = \omega x(t) \quad (\text{III.113})$$

Le pseudo-spectre de vitesse est donné par :

$$S_v = \omega S_D \quad (\text{III.114})$$

Avec les mêmes hypothèses, on aura :

$$\ddot{x}(t) + \ddot{x}_s(t) = \omega \int_0^t \ddot{x}_s(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t - \tau)] d\tau = -\omega^2 x(t) \quad (\text{III.115})$$

Le pseudo-spectre d'accélération absolue peut être exprimé par :

$$S_a = \omega^2 S_D = \omega S_v \quad (\text{III.116})$$

III.4.5.3 Spectre de réponse de calcul du RPA2003

Conformément au règlement parasismique Algérien, le spectre de réponse de calcul est donné par :

$$\frac{S_a}{g} = \begin{cases} 1.25A \left[1 + \frac{T}{T_1} \left(2.5\eta \frac{Q}{R} - 1 \right) \right] & 0 \leq T \leq T_1 \\ 2.5\eta \left(1.25A \frac{Q}{R} \right) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta \left(1.25A \frac{Q}{R} \right) \left(\frac{T_2}{T} \right)^{\frac{2}{3}} & T_2 \leq T \leq 3s \\ 2.5\eta (1.25A) \left(\frac{T_2}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{T} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{Q}{R} \right) & T > 3s \end{cases} \quad (\text{III.117})$$

Où :

A : Coefficient d'accélération de la zone (tableau 4.1 RPA).

η : Facteur de correction de l'amortissement.

$$\eta = \sqrt{\frac{7}{2+\xi}} \geq 0.7 \quad (\text{III.118})$$

ξ : Pourcentage d'amortissement (tableau 4.2 RPA)

R : Coefficient de comportement de la structure (tableau 4.3 RPA)

T_1, T_2 : Périodes caractéristiques (tableau 4.7 RPA)

Q : Facteur de qualité (tableau 4.4 RPA)

III.5 Exercices avec solutions

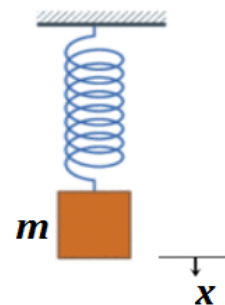
Exercice N°01 :

En considérant un système de vibrations non amorties (voir Figure). Avec une masse $m=8,75 \times 10^5$ Kg, et une rigidité $K = 3,5 \times 10^8$ N/m.

Déterminer:

- 1) la pulsation propre du système.
- 2) l'amplitude x_{\max} du mouvement.
- 3) Le déplacement à l'instant $t = 2,4$ s.

Avec les conditions initiales suivantes: $x(t=0) = 4.5$ mm et une vitesse initiale



$$\dot{x}_0 = 5 \text{ m/s.}$$

Solution :

a- la pulsation propre du système est donnée par :

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3.5 \times 10^8}{8.75 \times 10^5}} = 20 \text{ rad/s}$$

b- l'amplitude x_{\max} du mouvement est donnée par:

$$x_{\max} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$$

$$x_{\max} = \sqrt{(4.5 \times 10^{-3})^2 + \left(\frac{5}{20}\right)^2} = 0.25 \text{ m}$$

c- Le déplacement à l'instant $t = 2.4 \text{ s}$.

Le déplacement à tout instant est donné par :

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos(\omega t)$$

$$x(t) = 0.25 \sin(20t) + 4.5 \times 10^{-3} \cos(20t)$$

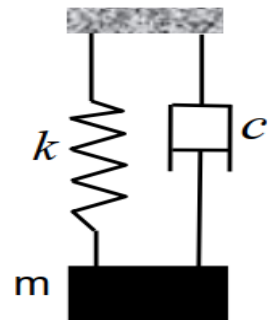
A $t = 2.4 \text{ s}$ le déplacement vaut : -0.194 m

Exercice N°02 :

Une masse (m) $m = 20 \text{ kg}$ est reliée à un ressort de rigidité (k) $k = 20 \text{ kN/m}$ et un amortisseur de coefficient d'amortissement (C) est en vibration libre (voir figure).

- 1) Ecrire l'équation horaire du mouvement et déterminer l'accélération subie par le système à $t = 0$ et le décrétement logarithmique entre deux amplitudes successives.

Sachant qu'à $t = 0$, la masse passe par sa position d'équilibre avec une vitesse $\dot{x}_0 = 4.43 \text{ m/s}$ avec $\zeta = 0.05$.



Solution :

Il s'agit d'un système amorti à 1 DDLD en vibration libre dont la forme de la solution générale est :

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} \left[\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d t) + x_0 \cos(\omega_d t) \right]$$

$$A = \frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_d}, \quad B = x_0 \quad \text{et} \quad \omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

D'après les conditions initiales :

$$x(0) = 0, \quad \Rightarrow B = 0 \quad \text{et} \quad A = \frac{\dot{x}_0}{\omega_d}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20000}{20}} = 31.62 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = 31.62 \sqrt{1 - 0.05^2} = 31.58 \text{ rad/s}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{31.58} = 0.2s$$

$$A = \frac{4.43}{31.58} = 0.14$$

D'où, l'équation horaire du mouvement peut s'écrire :

$$x(t) = 0.14e^{-1.58t} \sin(31.58t)$$

La valeur instantanée de l'accélération peut être obtenue en dérivant $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = e^{-1.58t} [-0.22 \sin(31.58t) + 4.42 \cos(31.58t)]$$

$$\ddot{x}(t) = e^{-1.58t} [-13.93 \cos(31.58t) - 139.23 \sin(31.58t)]$$

La valeur de l'accélération subie à $t=0$ est :

$$\ddot{x}(0) = -13.93 \approx -14m/s^2$$

Le décrément logarithmique entre deux amplitudes successives est donné par :

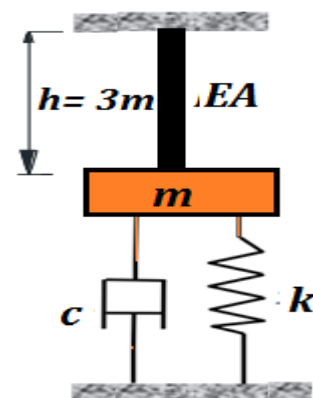
$$\delta = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \xi \omega T_d = 0.05 \times 31.62 \times 0.2 = 0.31$$

Exercice N°03 :

Soit une masse (m) $m=812.5kg$ fixée à l'extrémité d'une barre verticale sans masse et repose sur un ressort de rigidité (K) $k=75000 N/m$ et un amortisseur de coefficient d'amortissement (C) (voir figure). Sachant qu'à $t=0$, la masse passe par sa position d'équilibre avec une vitesse $\dot{x}_0=4m/s$.

- 1) On demande d'écrire l'équation horaire du mouvement vibratoire amorti du système pour les cas suivants :

$\zeta=0.2$; $\zeta=1$; $\zeta=2$. On donne : $m=812.5kg$, $k=75000 N/m$, $EA=750000N$, $h=3m$



Solution :

Il s'agit d'un système amorti à 1 DDL en vibration libre $C \neq 0$ et $F(t)=0$.

L'équation de mouvement de ce système est : $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$.

Avant de formuler l'équation du mouvement du système, il est indispensable d'abord de déterminer le système dynamique simplifié qui équivaut à ce système mécanique. A cet effet, il faut trouver la rigidité du ressort équivalent qui remplacera la barre verticale. Comme la barre travaille en traction, le déplacement engendré par le poids de la masse m est donné

$$\text{par : } \Delta = \frac{Ph}{EA}$$

La rigidité (raideur) est définie comme étant la force qu'il faut appliquée pour avoir un déplacement unitaire et est donnée par : $k_b = \frac{P}{\Delta} = \frac{EA}{h}$

Alors, la barre peut être remplacée par un ressort équivalent de raideur k_b , et comme l'ensemble barre et ressort inférieur subissent le même déplacement, le ressort équivalent de la barre sera monté en parallèle avec le ressort inférieur de raideur k conformément à la figure suivante.

Alors, la rigidité équivalente du système peut être obtenue en sommant les raideurs des deux ressorts k et k_b .

$$k_{eq} = k_b + k = \frac{EA}{h} + k$$

a)- $\zeta=0.2$

La solution de cette équation dépend la valeur de ξ : $\zeta=0,2 < 1$

$$x(t) = (A \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t)) e^{-\xi \omega t}$$

$$x(t) = \left[\left(\frac{\dot{x}_0 + \omega \xi x_0}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d t) + x_0 \cos(\omega_d t) \right] e^{-\xi \omega t}$$

$$A = \frac{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0}{\omega_d} ; B = x_0 ; \omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}.$$

D'après les conditions initiales :

- À $t=0$ $x_0=0$ et $\dot{x} = 4\text{m/s}$,

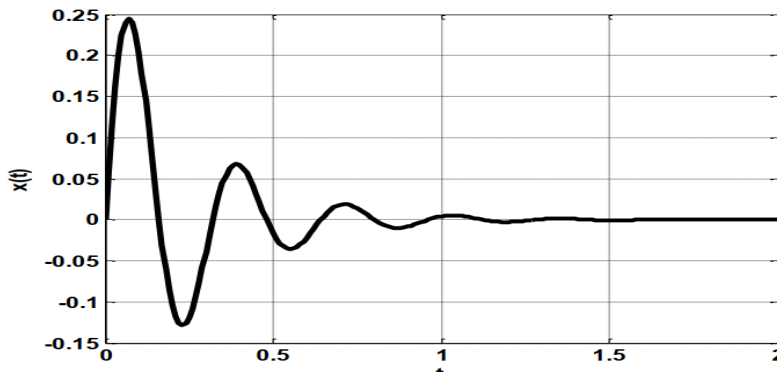
- la pulsation propre du système est : $\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{750000}{3} + 75000}{812,5}} = 20 \text{ rad/s}$.

- La pulsation amortie est donnée par : $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 20 \sqrt{1 - 0,2^2} = 19.6 \text{ rad/s}$.

- $x(t) = e^{-0.2 \times 20 t} \left[\left(\frac{4 + 0.2 \times 20 \times 0}{19.6} \right) \sin(19.6 t) + 0 \cdot \cos(19.6 t) \right]$

- $x(t) = 0.33 e^{-4t} \sin(19.6 t)$.

La représentation graphique de cette équation est illustrée sur la figure suivante :



b)- $\zeta=1$

La solution de cette équation dépend la valeur de ξ : $\zeta= 1$

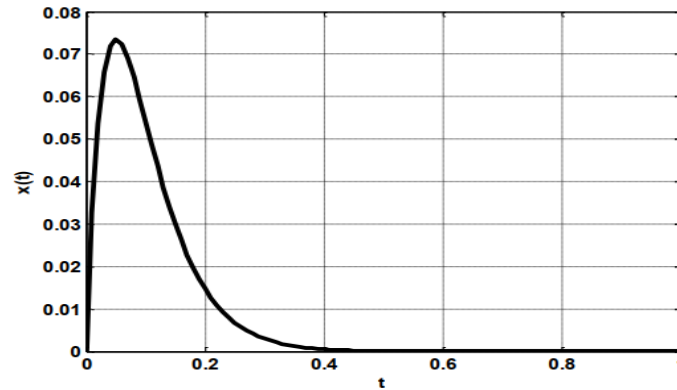
On est dans un système à amortissement critique dont l'équation du mouvement est exprimée par :

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega t} ; x(t) = (x_0 + (\omega x_0 + \dot{x}_0) t) e^{-\omega t}$$

$$x(t) = (0 + (20x_0 + 4) t) e^{-20t} ;$$

$$x(t) = 4t e^{-20t}$$

La représentation graphique de cette équation est illustrée sur la figure suivante :



c)- $\zeta=2$

La solution de cette équation dépend la valeur de ξ : $\zeta=2 > 1$

On est dans un système sur amorti dont l'équation du mouvement est exprimée par :

$$x(t) = (C_1 e^{\omega_s t} + C_2 e^{-\omega_s t}) e^{-\xi \omega t}$$

Les coefficients C_1 et C_2 sont déterminés à partir des conditions initiales. Et afin de pouvoir les déterminer, il y a lieu d'écrire l'expression de la vitesse instantanée du système.

$$\dot{x}(t) = e^{-\xi \omega t} (C_1 (-\xi \omega + \omega_s) e^{\omega_s t} + C_2 (\xi \omega + \omega_s) e^{-\omega_s t})$$

D'après les conditions initiales :

- À $t=0$ $x_0=0$ et $\dot{x} = 4\text{m/s}$,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ (C_1 (-\xi \omega + \omega_s) - C_2 (\xi \omega + \omega_s)) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

- D'où :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\dot{x}_0}{2\omega_s} \\ C_2 = -\frac{\dot{x}_0}{2\omega_s} \end{cases}$$

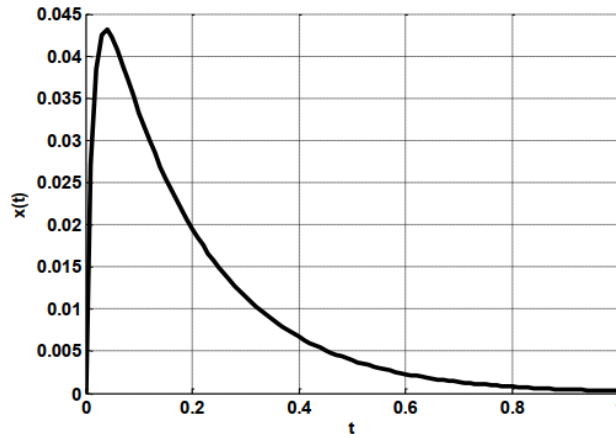
- $\omega_s = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} = 20 \sqrt{2^2 - 1} = 34.64 \text{ rad/s}$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{4}{2 \times 34.64} = -0.057 \\ C_2 = \frac{4}{2 \times 34.64} = 0.057 \end{cases}$$

- D'où :

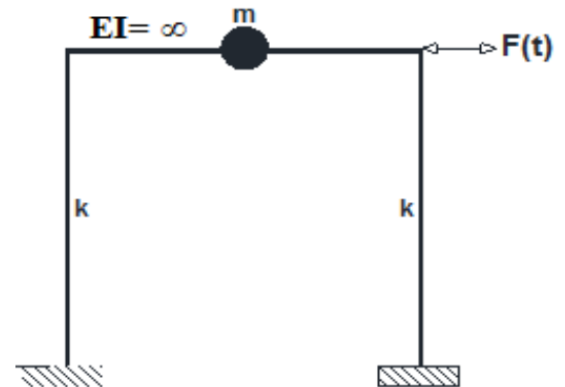
$$x(t) = 0.057 e^{-40t} (e^{34.64t} - e^{-34.64t})$$

- La représentation graphique de cette équation est illustrée sur la figure suivante :



Exercice N°04 :

Le cadre représenté sur la figure ci-dessous est soumis à une force sinusoïdale avec une fréquence de 80HZ et une amplitude de 50KN appliquée au niveau du toit. On mesure un déplacement maximal en tête de la colonne de 2.7mm. On considère que l'amortissement est négligeable ($\zeta=0$) et que la rigidité de chacune des deux colonnes est $k=3.1 \times 10^6$ N/m.



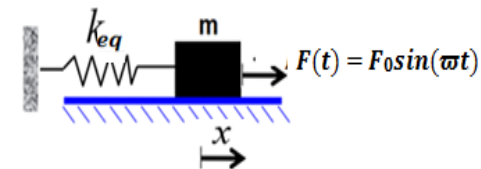
- 1) Déterminer la fréquence propre f_0 du système.
- 2) écrire l'équation horaire du mouvement, sachant qu'à $t=0$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.
- 3) Déterminer la force maximale transmise au pied de chaque colonne.

Solution :

- 1- fréquence propre f_0 du système :

Ce système mécanique peut être modélisé par un système dynamique équivalent simple de la manière suivante :

- Comme les deux colonnes subissent le déplacement horizontal, alors, ils peuvent être remplacés par deux ressorts montés en parallèle et supportant la masse m .
- La rigidité équivalente du système masse+deux ressorts en parallèle peut être exprimée par :



$$k_{eq} = 2k = 6.2 \times 10^6 \text{ N/m}$$

Ainsi, le système dynamique équivalent au système mécanique étudié est illustré sur la figure suivante :

- La pulsation de l'excitation est donnée par :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 80 = 502.7 \text{ rad/s}$$

- Le déplacement statique est :

$$\Delta_{st} = F_0/k_{eq} = 50000/6.2 \times 10^6 = 0.0081 \text{ m}$$

- Le facteur d'amplification dynamique est exprimé par :

$$FAD = \left| \frac{1}{1-\beta^2} \right| = \frac{1}{1-2^2} = 0.333 ; \text{ et } \beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{502.7}{251.4} = 1.999 \approx 2 ;$$

- Le déplacement maximal de la masse est donné par :

$$|x_{max}| = \Delta_{st} \cdot FAD = \Delta_{st} \cdot \left| \frac{1}{1-\beta^2} \right| = \Delta_{st} \cdot \left| \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right|$$

$$\left| \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right| = \frac{x_{max}}{\Delta_{st}} \Rightarrow \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = -\frac{|x_{max}|}{\Delta_{st}}$$

D'où :

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\frac{\Delta_{st}}{|x_{max}|}}} ; \omega = \frac{502,7}{\sqrt{1+\frac{0,0081}{0,0027}}} = 251,4 \text{ rad/s.}$$

Et enfin :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{251,4}{2\pi} = 39,8 \text{ HZ}$$

2- L'équation horaire du mouvement :

- Il s'agit d'un système non amorti à 1 DDL en vibration f $C = 0$ et $F(t) \neq 0$.
- L'équation de mouvement de ce système est : $m\ddot{x}(t) + k(t) = F(t)$.
- La solution générale est donnée par : $x(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} \sin(\omega t)$.
- La vitesse se déduit par dérivation de cette équation :

$$\dot{x}(t) = B_1 \omega \cos(\omega t) - B_2 \omega \sin(\omega t) + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} \omega \cos(\omega t)$$

D'après les conditions initiales : à $t=0$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$\Rightarrow B_2 = 0, B_1 = -\frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} \beta$$

$$\Rightarrow B_1 = -\frac{50000}{6,2 \times 10^6} \cdot \frac{1}{1-2^2} \times 2 = 0,0054$$

$$\Rightarrow A = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{50000}{6,2 \times 10^6} \cdot \frac{1}{1-2^2} = -0,0027$$

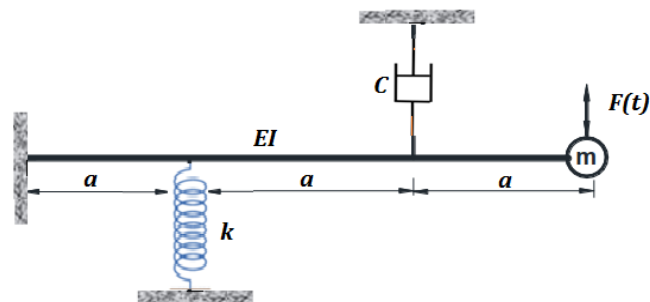
D'où, l'équation horaire est : $x(t) = 0,0054 \sin(251,4t) - 0,0027 \sin(502,7t)$

3- force maximale transmise au pied de chaque colonne :

$$|F_{trmax}| = F_0 \cdot FAD/2 \Rightarrow |F_{trmax}| = 50000 \times 0,333/2 = 8,3 \text{ KN.}$$

Exercice N°05 :

Soit une poutre sans masse de rigidité à la flexion, EI , et supporte une masse m à son extrémité. Un ressort et un amortisseur sont rattachés à la poutre en des points tels que définis sur la figure ci-dessous. Une charge harmonique $F(t) = 20 \sin(30t)$ KN est appliquée verticalement au centre de la masse m . On donne : $EI = 4 \times 10^6 \text{ Nm}^2$, $a = 2\text{m}$, $l = 6\text{m}$, $m = 200\text{kg}$, $c = 20\text{Ns/m}$ et $k = 20000\text{N/m}$. La déflexion à l'extrémité de la poutre est exprimée par : $\Delta = Pl^3/3EI$

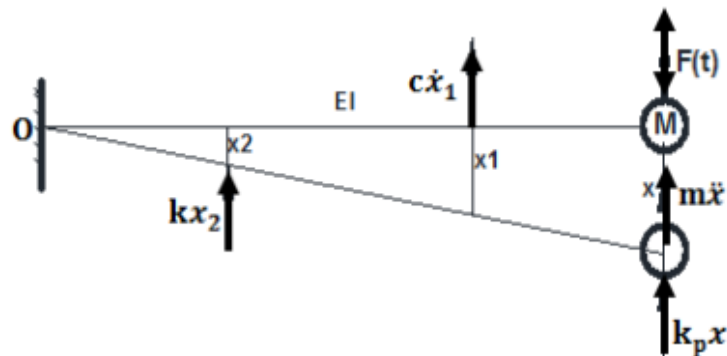


- 1) écrire l'équation horaire du mouvement sachant qu'à $t=0$ $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$.
- 2) Calculer la force transmise à la fondation.

Solution :

1- l'équation horaire du mouvement :

Au premier lieu, il est nécessaire de déterminer le système dynamique équivalent au système mécanique étudié en vu de faciliter l'évaluation de la réponse dynamique. Pour une poutre en porte-à-faux, la rigidité équivalente peut être exprimée par :



Comme le déplacement maximal de la poutre est atteint à son extrémité, alors, la poutre flexible peut être remplacée par un ressort vertical de rigidité « k_p » placé à son extrémité tout en remplaçant la poutre flexible par une poutre infiniment rigide ($EI=\infty$) afin de ne pas négliger l'effet de l'amortisseur et l'autre ressort sur le système.

Le bilan des forces appliquées est représenté sur la figure suivante :

La somme des moments par rapport au point « O », donne :

$$\sum M/O = 0$$

$$m\ddot{x}.3a + cx_1.2a + kx_2.a + k_px.3a = F.3a$$

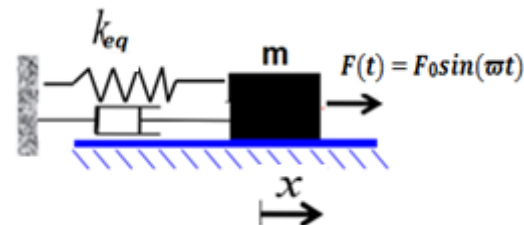
Avec : $x_1 = \frac{2x}{3}$ et $x_2 = \frac{x}{3}$

En reportant ces expressions dans l'équation, on trouve :

$$m\ddot{x}.3a + cx \cdot \frac{4a}{3} + kx \cdot \frac{a}{3} + k_px.3a = F.3a$$

D'où : $m\ddot{x} + \frac{4c}{9}\dot{x} + (\frac{k}{9} + k_p)x = F(t)$

On pose : $c_{eq} = \frac{4c}{9}$ et $k_{eq} = (\frac{k}{9} + k_p)$



Par substitution, la forme finale de l'équation devient :

$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = F(t)$$

Avec :

$$c_{eq} = \frac{4c}{9} = \frac{4 \times 20}{9} = 8.88 \text{Ns/m} \quad \text{et} \quad k_{eq} = (\frac{k}{9} + k_p) = \frac{20000}{9} + 55.56 \times 10^3 = 57.78 \times 10^3 \text{N/m}$$

C'est une équation différentielle qui exprime le mouvement d'un oscillateur simple en vibration forcée équivalent au système mécanique étudié dont le modèle est illustré sur la figure suivante.

Alors, pour écrire l'équation horaire du mouvement pour ce système, il suffit d'utiliser la relation suivante.

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)] + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

La vitesse instantanée est donnée par :

$$\dot{x}(t) = e^{-\xi\omega t} [-(B_1\omega + B_2\xi\omega)\sin(\omega t) + (B_2\omega - B_1\xi\omega)\cos(\omega t)] + \frac{F_0}{k_{eq}}$$

$$\cdot \frac{1-\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \omega \cos(\omega t + \varphi).$$

Les constantes B_1 et B_2 sont déterminés à partir des conditions initiales :

- $(0) = 0 \Rightarrow B_2 + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\varphi)$
- $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B_1\omega_d - B_2\xi\omega + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \varpi \cos(\varphi)$.

En déduisant $\sin(\varphi)$ et $\cos(\varphi)$, on trouve :

- $(0) = 0 \Rightarrow B_2 + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = 0$
- $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B_1\omega_d - B_2\xi\omega + \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{(1-\beta^2)\varpi}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = 0$

D'où :

- $B_2 = - \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$
- $B_1 = - \frac{F_0}{k_{eq}} \cdot \left[\frac{2\xi^2\beta + (1-\beta^2)\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right] \frac{\omega}{\omega_d}$

La pulsation propre est donnée par : $\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{57.78 \cdot 10^3}{200}} = 16.99 \approx 17 \text{ rad/s}$

Rapport des fréquences : $\beta = \frac{\varpi}{\omega} = \frac{30}{17} = 1.76$

Coefficient d'amortissement critique : $c_{cr} = 2m\omega = 2 \times 200 \times 17 = 6800 \text{ Ns/m}$

La fraction d'amortissement : $\xi_{cr} = \frac{c_{eq}}{c_{cr}} = \frac{8.88}{6800} = 0.0013$

La pulsation amortie : $\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 17 \sqrt{1 - 0.0013^2} = 16.99 \text{ rad/s}$

L'angle de phase : $\varphi = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right) = \arctan\left(\frac{2 \times 0.0013 \times 1.76}{1 - 1.76^2}\right) = -0.0022$

- $B_2 = - \frac{20000}{57.78 \times 10^3} \cdot \frac{2 \times 0.0013 \times 1.76}{(1 - 1.76^2)^2 + (2 \times 0.0013 \times 1.76)^2} = -3.6 \times 10^{-4}$
- $B_1 = - \frac{20000}{57.78 \times 10^3} \cdot \left[\frac{2 \times 0.0013^2 \times 1.76 + (1 - 1.76^2) \times 1.76}{(1 - 1.76^2)^2 + (2 \times 0.0013 \times 1.76)^2} \right] \frac{17}{16.99} = 0.29$

$$x(t) = e^{-0.022t} [0.29 \sin(16.99t) - 3.6 \times 10^{-4} \cos(16.99t)] + 0.165 \sin(30t - 0.0022)$$

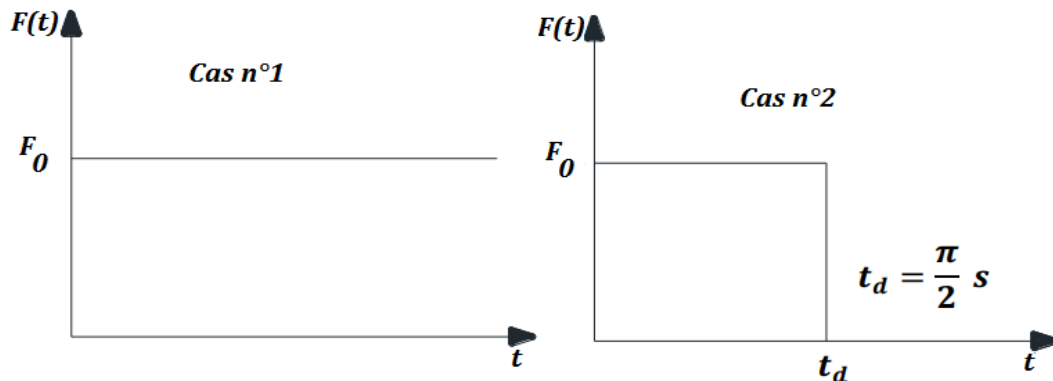
2- force transmise à la fondation :

$$|F_{trmax}| = F_0 \cdot \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 20000 \cdot \frac{\sqrt{1 + (2 \times 0.0013 \times 1.76)^2}}{\sqrt{(1 - 1.76^2)^2 + (2 \times 0.0013 \times 1.76)^2}} = 9.53 \times 10^3 \text{ N}$$

Exercice N°06 :

Soit un système à 1 DDLD, modélisé par une masse $m = 100 \text{ Kg}$ et un ressort de rigidité $k = 10000 \text{ N/m}$. ce système est excité par une charge constante $F_0 = 100 \text{ N}$ représentée sur la figure ci dessous. Le système est en vibration forcée non amortie ($\xi = 0$).

- 1) écrire l'équation horaire du mouvement sachant qu'à $t=0$, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, dans des cas.
- 2) Calculer le temps au bout duquel la masse atteint son déplacement maximal dans des cas.



Solution :

a)- Cas n°1 :

1- l'équation horaire du mouvement

En tenant compte des conditions initiales nulles, l'équation horaire est directement donnée par l'intégral de Duhamel :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau$$

Comme l'amortissement est nul $\xi = 0$, le terme exponentiel disparaît et la pulsation amortie devient égale à la pulsation propre.

$$\omega_d = \omega\sqrt{1 - 0^2} = \omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{10000}{100}} = 10 \text{ rad/s}$$

Le déplacement prend la forme suivante :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F_0 \sin[\omega(t-\tau)] d\tau$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega} \frac{1}{\omega} \cos \omega(t-\tau) \Big|_0^t = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

D'où :

$$x(t) = 0.01(1 - \cos 10t)$$

2- Temps au bout duquel la masse atteint son déplacement maximal.

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) = \frac{2F_0}{m\omega^2} [\sin(\omega t/2)]^2$$

Le déplacement maximal est atteint lorsque :

$$|\sin(\omega t/2)| = 1$$

D'où :

$$\frac{\omega t}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega}$$

b)- Cas n°2 :

Il existe deux phases :

- 1) Phase n°1: $0 < t < t_d$.
- 2) Phase n°2: $t > t_d$.

Phase n°1: $0 < t < t_d$.

- Le système est forcé non amortie $C = 0$ et $F(t) \neq 0$.

- L'équation de mouvement de ce système est : $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$.
- La solution de cette équation est : $x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F_0 \sin[\omega(t - \tau)] d\tau$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega} \frac{1}{\omega} \cos \omega(t - \tau) \Big|_0^t = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

D'où :

$$x(t) = 0.01(1 - \cos 10t)$$

1- Temps au bout duquel la masse atteint son déplacement maximal.

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) = \frac{2F_0}{m\omega^2} [\sin(\omega t/2)]^2$$

Le déplacement maximal est atteint lorsque :

$$|\sin(\omega t/2)| = 1$$

D'où :

$$\frac{\omega t}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega} \leq t_d$$

Phase n°2: $t > t_d$.

- Le système est libre non amortie $C = 0$ et $F(t) = 0$.
- L'équation de mouvement de ce système est : $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$.
- La solution de cette équation est : $x(t) = \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) \sin \omega(t - t_d) + x_0 \cos \omega(t - t_d)$

Les conditions initiales de cette phase sont définies par les valeurs de la vitesse et le déplacement à $t=t_d$ qui caractérisent la fin de la phase1 et le début de la phase2.

$$x_0 = x_1(t_d) = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t_d)$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1(t_d) = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t_d$$

$$x_0 = x_1(t_d) = 0.01(1 - \cos 10\pi/2) = 0.02m$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1(t_d) = 0.1 \sin 10\pi/2 = 0$$

D'où :

$$x_2(t) = 0.02 \cos 10(t - t_d)$$

2)- temps au bout duquel la masse atteint son déplacement maximal.

Le déplacement maximal est atteint lorsque :

$$|\sin(\omega t/2)| = 1$$

D'où :

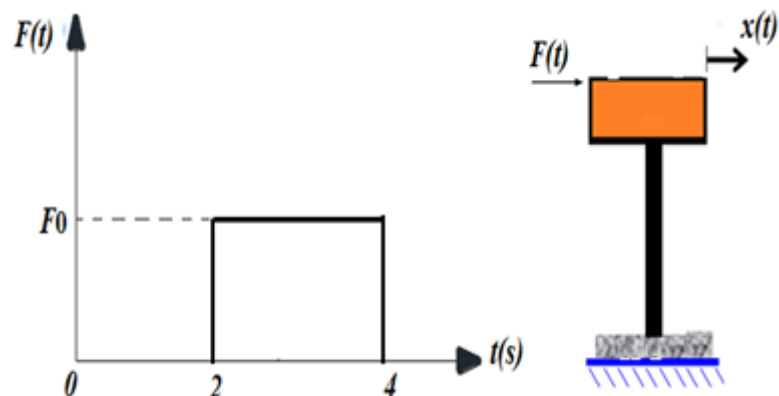
$$\omega(t - t_d) = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega} + t_d$$

Exercice N°07 :

Soit le système suivant que et soumis à une excitation rectangulaire, les conditions initiale sont : $x(t=0) = 2$ cm et une vitesse initiale $\dot{x}_0 = 1$ cm/s.

Avec : la masse $m = 1000$ kg ; $k = 1$ kN/cm ; $c = 0$; $F_0 = 1$ Kn.

- Déterminer le déplacement à $t = 1$ s, $t = 3$ s et $t = 5$ s.



Solution :

Il existe trois phases :

- 1) Phase n°1: $t < 2s$.
- 2) Phase n°2: $2s \leq t \leq 4s$.
- 3) Phase n°3: $t > 4s$.

Phase n°1: $t < 2s$ (Force nulle entre 0-2s).

- Le système est libre non amortie $C = 0$ et $F(t) = 0$.
- L'équation de mouvement de ce système est : $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$.
- La solution de cette équation est : $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$;

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)$$

Calculer **A** et **B** à partir de condition initiale

- $\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t)$

On utilise les conditions initiales :

- $x(0) = A\sin(\omega 0) + B\cos(\omega 0) = 2$; $A = 2$
- $\dot{x}(0) = A\omega \cos(\omega 0) - B\omega \sin(\omega 0) = 1$; $B = \frac{1}{\omega}$; $\omega = \sqrt{\frac{1 \times 10^5}{1 \times 10^3}} = 10 \frac{rad}{s}$.
- $x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)$.
- $x(1) = \frac{1}{10} \sin(10 \cdot 1) + 2\cos(10 \cdot 1) = 1,98 \text{ cm}$.

Phase n°2: $2s \leq t \leq 4s$.

- Le système est forcé non amortie $C = 0$ et $F(t) \neq 0$.
- L'équation de mouvement de ce système est : $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$.
- La solution de cette équation est : $x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F \sin[\omega(t - \tau)] d\tau$

Phase n°3: $t > 4s$.

- Le système est libre non amortie $C = 0$ et $F(t) = 0$.
- L'équation de mouvement de ce système est : $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$.
- La solution de cette équation est : $x(t) = \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) \sin\omega(t - t_d) + x_0 \cos\omega(t - t_d)$

Les conditions initiales de cette phase sont définies par les valeurs de la vitesse et le déplacement à $t=t_d$ qui caractérisent la fin de la phase 1 et le début de la phase 3.

Exercice N°08

Considérons un système à un seul degré de liberté composé d'une masse, $m = 2 \times 10^3 \text{ kg}$, d'un ressort de rigidité, $k = 60 \text{ kN/m}$ et un amortisseur de coefficient, $c = 0.44 \text{ kN.sec/m}$. en utilisant le spectre de réponse du RPA2003, calculer :

- 1) Le déplacement relatif maximal.
- 2) l'effort maximal développé par le ressort.
- 3) l'effort maximal développé par l'amortisseur.

On donne : $T_1 = 0.15s$, $T_2 = 0.5s$, $R = 3.5$, $Q = 1.4$

Solution :

1) Le déplacement relatif maximal:

Comme le spectre de réponse du RPA2003 fournit les valeurs maximales de l'accélération en fonction de la période, T , le déplacement relatif maximal peut être obtenu à partir de la valeur maximale de l'accélération correspondante en utilisant les relations relatives au pseudo-spectre:

$$S_a = \omega^2 S_D \Rightarrow S_D = \frac{S_a}{\omega^2}$$

La pulsation propre (naturelle) est donnée par :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{60000}{2000}} = 5.48 \text{ rad/s}$$

La période propre (naturelle) est exprimée en fonction de la pulsation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.48} = 1.15 \text{ rad/s}$$

La valeur de la fraction d'amortissement est :

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{0.44 \times 10^3}{2 \times 2 \times 10^3 \times 5.48} = 0.02$$

La valeur du facteur de correction de l'amortissement est :

$$\eta = \sqrt{\frac{7}{2+\xi}} = \sqrt{\frac{7}{2+2}} = 1.33$$

Comme $T_2 \leq T \leq 3s$

$$\frac{S_a}{g} = 2.5\eta \left(1.25A \frac{Q}{R}\right) \left(\frac{T_2}{T}\right)^{\frac{2}{3}} = 2.5 \times 1.33 \times \left(1.25 \times 0.25 \times \frac{1.4}{3.5}\right) \left(\frac{0.5}{1.15}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.24$$

$$S_a = 0.24 \times 9.81 = 2.35 \text{ m/s}^2$$

D'où le déplacement relatif maximal est

$$\Rightarrow S_D = \frac{S_a}{\omega^2} = \frac{2.35}{5.48^2} = 0.08 \text{ m}$$

La valeur de la vitesse relative maximale est donnée par :

$$\Rightarrow S_v = \frac{S_a}{\omega} = \frac{2.35}{5.48} = 0.43 \text{ m/s}$$

2) l'effort maximal développé par le ressort

$$F_R = kS_D = 60000 \times 0.08 = 4.80 \text{ N}$$

3) l'effort maximal développé par l'amortisseur.

$$F_C = cS_v = 0.44 \times 10^3 \times 0.43 = 189.2 \text{ N}$$

IV.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, on a vu qu'il était possible de réduire l'étude dynamique d'une structure à celle d'un système à 1 degré de liberté, dont l'équilibre dynamique est régi par une équation différentielle du second ordre. Cette configuration se rencontre lorsque le mouvement de la structure réelle est contraint par des conditions aux limites permettant de décrire sa cinématique par le mouvement d'un seul point.

Cependant, en règle générale, une structure possède plusieurs degrés de liberté et la réduction à un degré de liberté, obtenue en se donnant a priori la déformée de la structure, ne permet l'obtention que d'une solution approchée de la réponse. La difficulté réside alors dans l'évaluation de la qualité de l'approximation. Si les conditions aux limites et le chargement de la structure qui, rappelons-le, est induit par les forces d'inerties dépendant de la distribution des masses, sont tels que le mouvement de la structure s'effectue effectivement de façon préférentielle suivant cette déformée, alors l'approximation sera acceptable, et utile pour l'obtention d'une solution rapide.

Un système réel comprend généralement plusieurs masses reliées entre elles par des éléments de types ressort et amortisseur. Le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour déterminer la position relative de chaque masse est appelé « nombre de degrés de liberté » ; un système comportant N masses susceptibles de se déplacer dans un plan possède donc 2N degrés de liberté. Pour chaque degré de liberté, on établira les conditions d'équilibre, comportant les effets dus à l'accélération et ceux dus aux autres actions extérieures du système, au point considéré. La figure (IV.1) présente un exemple d'un système à plusieurs degrés de liberté. La figure (IV.2) illustre le modèle de ce système pour des poutres infiniment rigides [5].

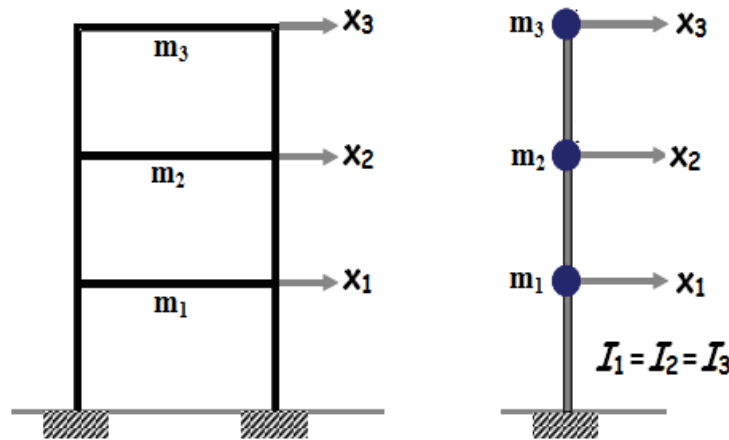


Fig. IV.1 Système à trois degrés de liberté.

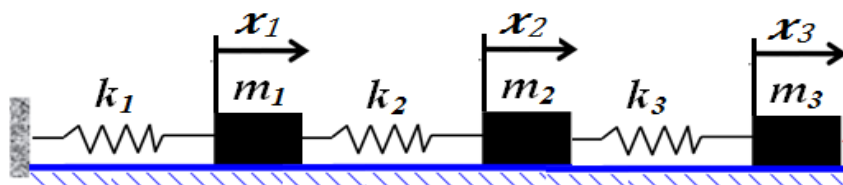


Fig. IV.2 Modèle pour poutres infiniment rigides.

IV.2 Mise en équation d'un système à plusieurs degrés de liberté (SPDL)

Considérons le système amorti à deux degrés de liberté représenté sur la figure (IV.3) suivante[6].

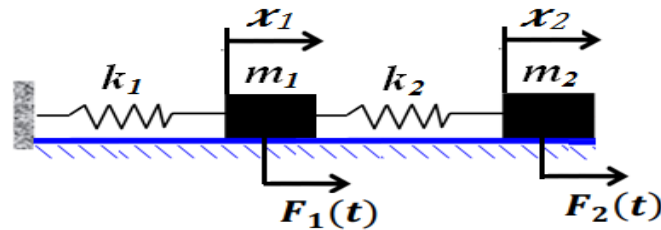


Fig. IV.3 Système à deux degrés de liberté.

Le bilan de forces appliquées est représenté sur la figure (IV.4) suivante :

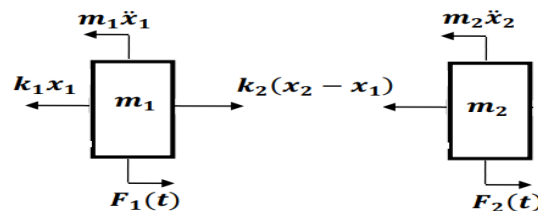


Fig. IV.4 Bilan de forces.

En appliquant la deuxième loi de Newton, ou bien les équations de Lagrange, aux deux masses, on aboutit à :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = F_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = F_2(t) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

L'écriture matricielle de ce système d'équations différentielles est exprimée par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \quad (\text{IV.3})$$

Si on intègre l'amortissement visqueux au modèle, on aura :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \quad (\text{IV.4})$$

Avec :

- $[m]$: Matrice des masses.
- $[c]$: Matrice d'amortissement globale.
- $[k]$: Matrice de rigidité globale.
- $\{F(t)\}$: Vecteur de chargement dynamique.
- $\{x\}$, $\{\dot{x}\}$, $\{\ddot{x}\}$: Vecteurs, déplacement, vitesse et accélération des DDL par rapport à la base.

IV.2.1 Excitation de la base

Pour déduire l'équation de mouvement pour le problème sismique, considérons un système à deux degrés de liberté soumis à un déplacement, $x_s(t)$, de sa base.

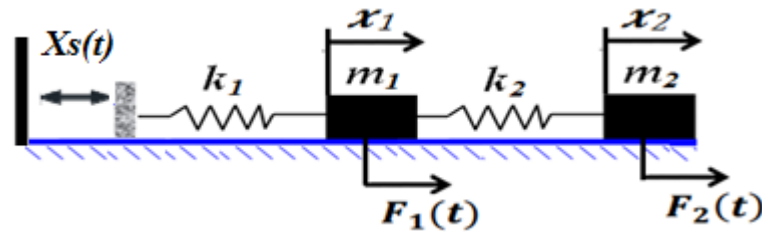


Fig. IV.5 Déplacement de la base.

En appliquant la deuxième loi de Newton (principe d'Alembert) au modèle, on aura :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{x}_s \quad (IV.5)$$

Ce système peut s'écrire sous la forme :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = -[m]\{r\}\ddot{x}_s \quad (IV.6)$$

Avec l'amortissement, on aura :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = -[m]\{r\}\ddot{x}_s \quad (IV.7)$$

Avec :

- $\{r\}$: Vecteur de couplage dynamique.
- $\{\ddot{x}_s\}$: Accélération absolue à la base.

IV.3 Evaluation de la matrice de rigidité

Les coefficients de la matrice de rigidité sont appelés, k_{ij} , et sont définis comme étant la force nécessaire qu'il faut appliquer à un DDL, i , pour obtenir un déplacement unitaire au DDL, j , (tous les autres DDL ont un déplacement nul) [6].

Pour formuler la matrice de rigidité, on pose trois hypothèses.

- La masse totale de la structure est supposée concentrée au niveau du plancher
- Les planchers sont infiniment rigides dans leurs plans.
- Les planchers se déplacent horizontalement.

La matrice de rigidité est définie par :

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \Rightarrow \{p\} = [k]\{x\} \quad (IV.8)$$

Pour construire la matrice de rigidité, $[k]$, on bloque les déplacements de tous les degrés de liberté et on ne laisse que celui au niveau duquel la force est appliquée. La rigidité élémentaire est définie comme étant la force qui engendre un déplacement égale à l'unité. Alors, la matrice $[k]$ peut être construite colonne par colonne de la manière suivante :

On impose un déplacement unitaire au DDL 1, et on calcule la force qui l'a causé au niveau du même DDL. Cette force vaut, $k_{11} = k_1 + k_2$, ensuite, on calcule les valeurs des réactions au niveau de tous les autres DDL bloqués qui sont toutes nulles à l'exception du DDL 2 qui succède le DDL dont on a imposé le déplacement unitaire qui vaut $k_{21} = -k_2$ (cf figure IV.6). Ainsi, à la fin de cette phase, on constate bien que la première colonne de la matrice rigidité est construite avec les éléments : $k_{11}, k_{21}, k_{31}, \dots, k_{n1}$. On reprend la même procédure avec les autres DDL, 2, 3, 4, ..., n pour construire toutes les colonnes restantes de la matrice $[k]$.

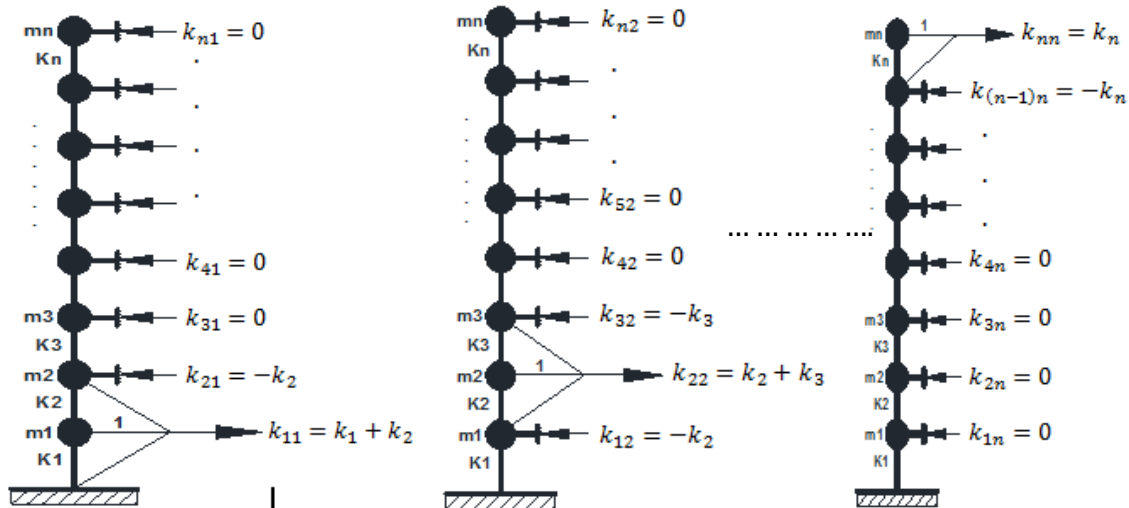


Fig. IV.6 Procédure de construction de la matrice de rigidité.

A l'issue de cette procédure, la matrice de rigidité aura la forme suivante :

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -k_n & k_n \end{bmatrix} \quad (IV.9)$$

La matrice de rigidité est tri-diagonale et symétrique.

$$[k] = [k]^T \Rightarrow k_{ij} = k_{ji} \quad (IV.10)$$

IV.4 Evaluation de la matrice des masses

La méthode la plus simple pour évaluer la matrice des masses d'un système repose sur l'hypothèse que toute la masse est concentrée aux points des degrés de liberté. Pour un système à N degrés de liberté de translation, la matrice des masses sera diagonale et d'ordre N x N.

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & m_{N-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & m_N \end{bmatrix} \quad (IV.11)$$

IV.5 Valeurs propres et vecteurs propres

Pour n degrés de liberté, le système d'équations gouvernant les vibrations libres des systèmes non-amorti s'écrit sous la forme différentielle suivante :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (IV.12)$$

Où [m] et [k] sont respectivement les matrices de masse et de rigidité. On suppose que la solution prend la forme :

$$x(t) = Ae^{i\omega_n t} \quad (IV.13)$$

- ω_n est la fréquence de vibrations dite aussi fréquence naturelle ou fréquence propre. A est un vecteur de dimension n nomme Mode propre ou vecteur propre.

Chaque fréquence propre correspond à un mode de vibration. La solution générale est une superposition de l'ensemble des modes propres de vibrations.

En substituant l'équation (IV.13) dans (IV.12), on trouve :

$$-\omega_n^2[m]\{A\} + [k]\{A\} = \{0\} \quad (IV.14)$$

D'où :

$$[-\omega_n^2[m] + [k]]\{A\} = \{0\} \quad (IV.15)$$

Pour que ce système admet des solutions non nulles, il faut que :

$$|-\omega^2[m] + [k]| = 0 \quad (IV.16)$$

Cette forme est appelée équation caractéristique. La racine carrée d'une valeur propre réelle positive a deux valeurs possibles, l'une positive et une autre négative. Bien que les deux sont utilisés pour développer la solution générale, la racine carrée positive est identifiée comme une fréquence naturelle ou valeurs propres. Le mode de vibration est le vecteur propre correspondant.

La forme développée de (IV.16) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} & \dots & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m_2 & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & \dots & \dots & \dots & k_{nn} - \omega^2 m_n \end{vmatrix} = 0 \quad (IV.17)$$

Les vecteurs propres ou modes de vibration sont obtenus en substituant les valeurs propres correspondantes dans la relation (IV.15). Alors, pour chaque valeur, ω_i correspond un vecteur propre, $A^{(i)}$. Les vecteurs propres assemblés en colonnes forment la matrice modale [A].

$$[A] = [A^{(1)} \ A^{(2)} \ \dots \ A^{(n)}] = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^n \end{bmatrix} \quad (IV.18)$$

Les fréquences naturelles (valeurs propres), peuvent être positionnées par ordre ascendant, $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_n^2$ pour construire la matrice des fréquences ou matrice spectrale.

La plus petite valeur des pulsations propres est appelée « pulsation fondamentale ».

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \omega_2^2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

IV.5.1 Normalisation des modes de vibration

Comme les modes de vibration ne possèdent pas de valeurs absolues, on doit toujours les normaliser. On peut poser le premier (ou le dernier) élément de chaque mode égale à l'unité. Une autre façon de normaliser un mode de vibration, $\{A^{(i)}\}$, réside dans la matrice de masse, on normalise chaque élément de sorte que [5][6]:

$$\{A^{(i)}\}^T [m] \{A^{(i)}\} = 1 \quad (\text{IV.20})$$

Si cette expression diffère de 1, c'est-à-dire :

$$\{A^{(i)}\}^T [m] \{A^{(i)}\} = x \quad (\text{IV.21})$$

Alors, pour normaliser de mode, $\{A^{(i)}\}$, on doit diviser chacun de ses éléments par \sqrt{x} .

IV.5.2 Conditions d'orthogonalité des modes de vibration

Pour chaque mode de vibration, nous avons :

$$[-\omega_i^2 [m] + [k]] \{A^{(i)}\} = \{0\} \quad (\text{IV.22})$$

Ou bien :

$$[k] \{A^{(i)}\} = \omega_i^2 [m] \{A^{(i)}\} \quad (\text{IV.23})$$

On pose cette équation pour deux modes différents, $A^{(s)}$ et $A^{(r)}$ ($r \neq s$) :

$$\begin{cases} [k] \{A^{(r)}\} = \omega_r^2 [m] \{A^{(r)}\} \\ [k] \{A^{(s)}\} = \omega_s^2 [m] \{A^{(s)}\} \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

$$\Rightarrow \{A^{(s)}\}^T [k] \{A^{(r)}\} = \omega_r^2 \{A^{(s)}\}^T [m] \{A^{(r)}\} \quad (\text{IV.25})$$

$$\Rightarrow [k] \{A^{(s)}\} \{A^{(r)}\} = \omega_s^2 [m] \{A^{(s)}\} \{A^{(r)}\} \quad (\text{IV.26})$$

Et comme les matrices de masse et rigidité sont symétriques :

$$[k] = [k]^T \text{ et } [m] = [m]^T$$

$$\Rightarrow [k]^T \{A^{(s)}\} \{A^{(r)}\} = \omega_s^2 [m]^T \{A^{(s)}\} \{A^{(r)}\} \quad (\text{IV.27})$$

$$\Rightarrow \{A^{(s)}\}^T [k] \{A^{(r)}\} = \omega_s^2 \{A^{(s)}\}^T [m] \{A^{(r)}\} \quad (\text{IV.28})$$

En soustrayant les équations (IV.25) et (IV.28), on obtient :

$$\mathbf{0} = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \{A^{(s)}\}^T [m] \{A^{(r)}\} \quad (\text{IV.29})$$

Et comme les modes sont différents ($\omega_r \neq \omega_s$), on doit conclure que pour $r \neq s$:

$$\begin{cases} \{\mathbf{A}^{(s)}\}^T [\mathbf{m}] \{\mathbf{A}^{(r)}\} = \mathbf{0} \\ \{\mathbf{A}^{(s)}\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{A}^{(r)}\} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{IV.30})$$

Cette équation exprime les conditions d'orthogonalité des modes de vibration. On dit alors que les modes de vibration sont normaux (ou orthogonaux) par rapport aux matrices de masse et de rigidité.

IV.6 Méthode de résolution des (SPDL)

Il existe plusieurs méthodes de résolution des systèmes à plusieurs degrés de liberté :

IV.6.1 Méthode d'analyse modale

IV.6.1.1 Découplage des équations du mouvement

Le mouvement est régi par l'équation générale (IV.4):

$$[\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{c}]\{\dot{\mathbf{x}}\} + [\mathbf{k}]\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{F}(t)\}$$

Du fait de la structure non diagonale de la matrice K, et bien que la matrice m puisse souvent être considérée comme diagonale, il existe un couplage entre les degrés de liberté du système : l'équation de rang i du système (IV.4) fait intervenir non seulement le degré de liberté x_i mais également des degrés de liberté x_k ($k \neq i$).

Afin de découpler les équations (IV.4), on utilise la propriété d'orthogonalité des modes propres. La base des modes propres constitue une base orthogonale complète qui permet d'exprimer tout déplacement \mathbf{x} sur cette base par :

$$\{\mathbf{x}(t)\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{u}(t)\} \quad (\text{IV.31})$$

Où :

- $[\mathbf{A}]$: est la matrice modale.
- $\mathbf{u}(t)$: coordonnées normales ou généralisées.

En remplaçant (IV.31) dans (IV.4), on obtient :

$$[\mathbf{m}][\mathbf{A}]\{\ddot{\mathbf{u}}(t)\} + [\mathbf{c}][\mathbf{A}]\{\dot{\mathbf{u}}(t)\} + [\mathbf{k}][\mathbf{A}]\{\mathbf{u}(t)\} = \{\mathbf{F}(t)\} \quad (\text{IV.32})$$

En pré multipliant l'équation par, $\{\mathbf{A}^{(i)}\}^T$, on trouve :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{A}^{(i)}\}^T [\mathbf{m}][\mathbf{A}]\{\ddot{\mathbf{u}}(t)\} + \{\mathbf{A}^{(i)}\}^T [\mathbf{c}][\mathbf{A}]\{\dot{\mathbf{u}}(t)\} + \{\mathbf{A}^{(i)}\}^T [\mathbf{k}][\mathbf{A}]\{\mathbf{u}(t)\} \\ = \{\mathbf{A}^{(i)}\}^T \{\mathbf{F}(t)\} \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Et tenant compte des conditions d'orthogonalité, nous avons :

$$\{\mathbf{A}^{(i)}\}^T [\mathbf{m}] \{\mathbf{A}^{(r)}\} = \{\mathbf{A}^{(i)}\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{A}^{(r)}\} = \mathbf{0}$$

Et en supposant que :

$$\{\mathbf{A}^{(i)}\}^T [\mathbf{c}] \{\mathbf{A}^{(r)}\} = \mathbf{0} \quad (\text{IV.34})$$

On aura une seule relation en u_i , ou autrement dit, un système de N équations élémentaires indépendantes dont chacune peut être résolue indépendamment des autres :

$$\mathbf{M}_i \ddot{u}_i + \mathbf{C}_i \dot{u}_i + \mathbf{K}_i u_i = \mathbf{P}_i(t) \quad (\text{IV.35})$$

Où :

- M_i : est la masse généralisée du mode i .

Exprimée par :

$$\mathbf{M}_i = \{\mathbf{A}^{(i)}\}^T [\mathbf{m}] \{\mathbf{A}^{(i)}\} \quad (\text{IV.36})$$

- C_i : est le coefficient d'amortissement généralisé du mode i .

Exprimée par :

$$\mathbf{C}_i = \{\mathbf{A}^{(i)}\}^T [\mathbf{c}] \{\mathbf{A}^{(i)}\} \quad (\text{IV.37})$$

- K_i : est le coefficient de rigidité généralisé du mode i , exprimée par :

$$\mathbf{K}_i = \{\mathbf{A}^{(i)}\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{A}^{(i)}\} \quad (\text{IV.38})$$

- P_i : est la charge généralisée du mode i , exprimée par :

$$\mathbf{P}_i(t) = \{\mathbf{A}^{(i)}\}^T \{\mathbf{F}(t)\} \quad (\text{IV.39})$$

L'équation (IV.35), traduit la forme d'un système à un seul degré de liberté dont la solution peut être aisément obtenue à l'aide de l'intégral de Duhamel :

$$\mathbf{u}_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_{d_i}} \int_0^t \mathbf{p}_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin[\omega_{d_i} (t-\tau)] d\tau \quad (\text{IV.40})$$

Avec :

$$\omega_i = \sqrt{K_i / M_i} \quad (\text{IV.41})$$

$$\xi_i = \frac{C_i}{2M_i \omega_i} \quad (\text{IV.42})$$

$$\omega_{d_i} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (\text{IV.43})$$

Après avoir trouver la solution de chacune des coordonnées normales, u_i ($i=1,2,\dots,N$), on peut déterminer la réponse de chaque degré de liberté en utilisant la transformation linéaire illustrée par l'équation (IV.31), $\{\mathbf{x}(t)\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{u}(t)\}$.

La réponse d'un DDLD particulier, $x_i(t)$, s'obtient par :

$$\mathbf{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{N_m} \mathbf{A}_i^{(j)} \mathbf{u}_j(t) \quad (\text{IV.44})$$

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{N_m} \frac{1}{M_j \omega_{d_j}} \int_0^t \mathbf{p}_j(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin[\omega_{d_j} (t-\tau)] d\tau \quad (\text{IV.45})$$

IV.6.1.2 Calcul des efforts

Une fois les déplacements déterminés, les efforts dans la structure s'obtiennent par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (\text{IV.46})$$

Soit pour chaque mode propre :

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{K}\mathbf{x}_j = \mathbf{K}\mathbf{A}^{(j)} \mathbf{u}_j(t) \quad (\text{IV.47})$$

Tenant compte du fait que $\mathbf{A}^{(j)}$ est un vecteur propre (eq. IV.15) :

$$\mathbf{K}\mathbf{A}^{(j)} = \omega_i^2 [\mathbf{m}]\mathbf{A}^{(j)} \quad (\text{IV.48})$$

L'équation (IV.47) peut s'écrire :

$$F_j = \omega_j^2 [m] A^{(j)} u_j(t), \quad j = 1, \dots, N \quad (IV.49)$$

Sous cette forme on reconnaît que la force F_j est le produit d'une masse par une quantité qui a la dimension d'une accélération. Du fait de la structure diagonale de la matrice $[m]$, la formulation (IV.49) est préférable à la formulation (IV.46) car elle nécessite moins d'opérations : la force au degré de liberté i dans le mode j s'écrit simplement :

$$f_{ij} = \omega_j^2 \left[\sum_{k=1}^N m_{ik} a_{kj} \right] u_j(t) = \omega_j^2 m_{ii} a_{ij} u_j(t) \quad (IV.50)$$

La résultante globale des efforts résulte de la superposition de tous les modes :

$$F = \sum_{j=1}^N F_j = \sum_{j=1}^N \omega_j^2 [m] A^{(j)} u_j(t) \quad (IV.51)$$

IV.6.1.2 Conditions nécessaires pour la matrice d'amortissement

Etant donné que les modes de vibrations sont déjà orthogonaux par rapport aux matrices de masse et de rigidité, on peut assurer l'existence des modes normaux en spécifiant la matrice d'amortissement comme une combinaison linéaire des matrices de masse et rigidité [6].

$$[c] = \alpha [m] + \beta [k] \quad (IV.52)$$

L'amortissement donné par l'équation (IV.52) se compose de deux termes, l'un proportionnel à la pulsation et l'autre inversement proportionnel à celle-ci. Généralement, il est souhaitable de présenter la dissipation d'énergie dans le système par un amortissement indépendant de la fréquence, un choix approprié des valeurs de α et β permet de satisfaire, de façon approximative, cette condition. Ce type d'amortissement s'appelle, l'amortissement de « **Rayleigh** ». Dans ce cas, la fraction d'amortissement critique dans un mode quelconque, i , s'obtient en substituant $[c]$ dans l'équation du mouvement :

$$\xi_i = \frac{c_i}{2\omega_i M_i} = \frac{\{A^{(i)}\}^T [c] \{A^{(i)}\}}{2\omega_i \{A^{(i)}\}^T [m] \{A^{(i)}\}} \quad (IV.53)$$

$$\xi_i = \alpha \frac{\{A^{(i)}\}^T [m] \{A^{(i)}\}}{2\omega_i \{A^{(i)}\}^T [m] \{A^{(i)}\}} + \beta \frac{\{A^{(i)}\}^T [k] \{A^{(i)}\}}{2\omega_i \{A^{(i)}\}^T [m] \{A^{(i)}\}} \quad (IV.54)$$

En simplifiant, on obtient :

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (IV.55)$$

En pratique, on obtient les coefficients, α et β , en spécifiant les fractions d'amortissement critiques dans deux modes de vibration, i et j :

$$\begin{cases} \alpha = 2\omega_i\omega_j \left[\frac{\xi_j\omega_i - \xi_i\omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \right] \\ \beta = 2 \left[\frac{\xi_i\omega_i - \xi_j\omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \right] \end{cases} \quad (IV.56)$$

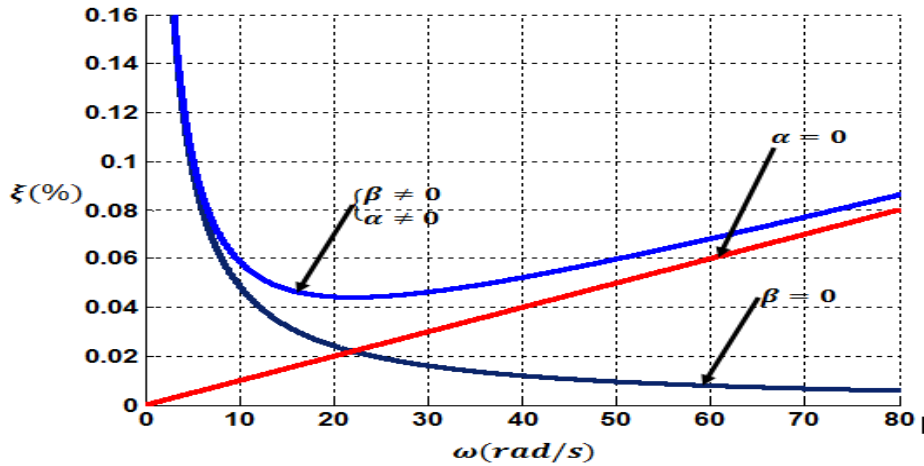
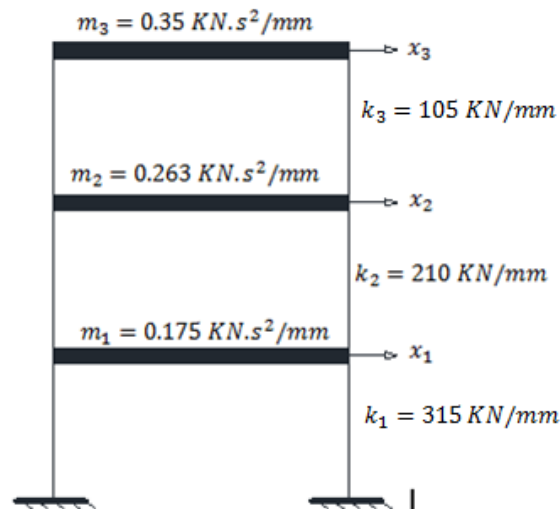


Fig. IV.7 Amortissement de Rayleigh.

IV.7 Exercices avec solutions

Exercice N°01 :

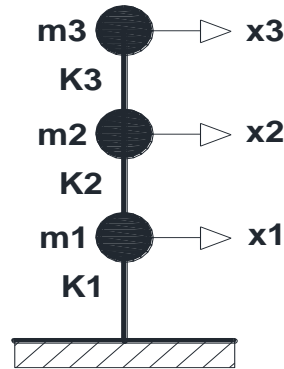
Construire les matrices de masse et rigidité de la structure à trois étages représentée sur la figure ci-dessous.



Solution :

- Matrice de masse

On suppose que toutes les masses sont concentrées au centre de gravité du plancher, ainsi le déplacement du plancher, i , sera caractérisé par le déplacement de son centre de gravité qui représente le degré de liberté, i . par conséquent, la structure ci-dessus, peut réduite à une brochette comportant trois masses concentrées.

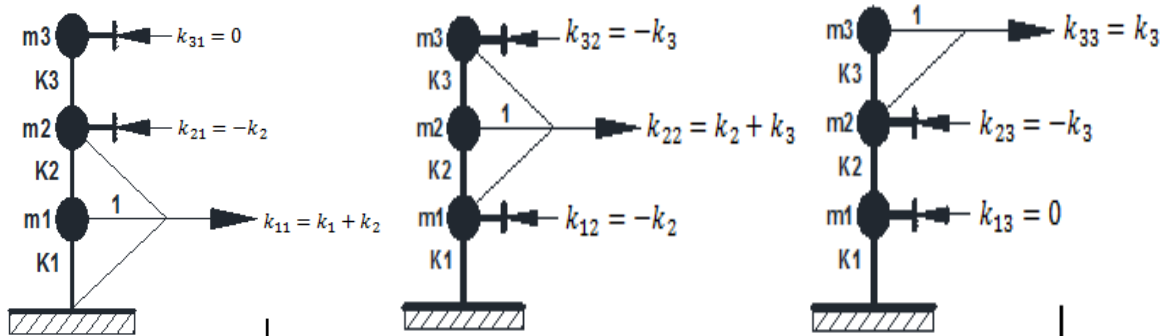


Pour cette structure, la matrice de masse est diagonale et d'ordre 3x3 :

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \frac{KN.s^2}{mm}$$

- Matrice de rigidité

Pour construire la matrice de rigidité, on impose un déplacement unitaire au niveau du DDL*i* tout en maintenant bloqués tout les autres DDL, puis, on détermine la force correspondante au déplacement unitaire du DDL *i* et les réactions induites au niveau des autres DDL bloqués.



On voit bien que lorsqu'on impose un déplacement unitaire au DDL *i*, on obtient les éléments de la colonne *i* de la matrice de rigidité, ainsi, la forme de la matrice [k] pour cette structure est :

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 525 & -210 & 0 \\ -210 & 315 & -105 \\ 0 & -105 & 105 \end{bmatrix} \frac{KN}{mm}$$

Exercice N°02

Pour la structure de l'exercice N°01, on demande de déterminer les valeurs et vecteurs propres et de construire la matrice modale..

$$[k] = \begin{bmatrix} 525 & -210 & 0 \\ -210 & 315 & -105 \\ 0 & -105 & 105 \end{bmatrix} \frac{KN}{mm} \quad [m] = \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \frac{KN.s^2}{mm}$$

Solution :

- Valeurs propres

Les valeurs propres sont les racines de l'équation 3.17.

$$\begin{vmatrix} 525 - 0.175\omega^2 & -210 & 0 \\ -210 & 315 - 0.263\omega^2 & -105 \\ 0 & -105 & 105 - 0.35\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (525 - 0.175\omega^2) \begin{vmatrix} 315 - 0.263\omega^2 & -105 \\ -105 & 105 - 0.35\omega^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 210 \begin{vmatrix} -210 & -105 \\ 0 & 105 - 0.35\omega^2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} -210 & 315 - 0.263\omega^2 \\ 0 & -105 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (525 - 0.175\omega^2)[(315 - 0.263\omega^2)(105 - 0.35\omega^2) - 105 \times 105] +$$

$$+ 210[-210(105 - 0.35\omega^2) + 105 \times 0] + 0 = 0$$

$$\Rightarrow -0.01611\omega^6 + 72.452\omega^4 - 60802.875\omega^2 + 6945750 = 0$$

Pour trouver les racines de cette équation, on pose : $\omega^2 = z$, et on aura une équation d'ordre 3 :

$$\Rightarrow -0.01611z^3 + 72.452z^2 - 60802.875z + 6945750 = 0$$

Dont les racines sont :

$$\Rightarrow z_1 = 3435.2, \quad z_2 = 926.737, \quad z_3 = 135.43$$

D'où, les valeurs propres cherchées sont :

$$\Rightarrow \omega_1 = 58.61 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_2 = 30.44 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_3 = 11.64 \text{ rad/s}$$

- *Vecteurs propres (modes propres)*

Les vecteurs propres sont déduits à partir de l'équation 3.15 pour chaque valeur propre.

$$[-\omega_n^2[m] + [k]]\{A\} = \{0\}$$

$$\text{Pour } \omega_1 = 58.61 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 525 - 0.175 \times 58.61^2 & -210 & 0 \\ -210 & 315 - 0.263 \times 58.61^2 & -105 \\ 0 & -105 & 105 - 0.35 \times 58.61^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -76.15 & -210 & 0 \\ -210 & -588.44 & -105 \\ 0 & -105 & -1097.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour que ce système ait une seule solution, on pose : $A_1 = 0$

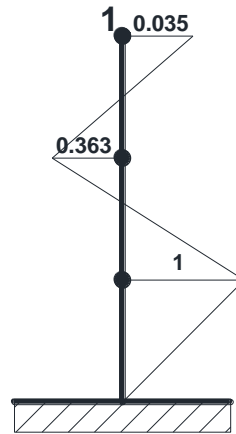
D'où :

$$\Rightarrow \begin{cases} -76.15 - 210A_2 = 0 \\ -210 - 588.44A_2 - 105A_3 = 0 \\ -105A_2 - 1097.3A_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = -0.363 \\ A_3 = 0.035 \end{cases}$$

Alors, le premier vecteur propre est :

$$A^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.363 \\ 0.035 \end{Bmatrix}$$

Ce mode de vibration peut être illustré graphiquement :



Pour $\omega_2 = 30.44 \frac{rad}{s}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 525 - 0.175 \times 30.44^2 & -210 & 0 \\ -210 & 315 - 0.263 \times 30.44^2 & -105 \\ 0 & -105 & 105 - 0.35 \times 30.44^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 362.84 & -210 & 0 \\ -210 & 71.30 & -105 \\ 0 & -105 & -219.31 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour que ce système ait une seule solution, on pose : $A_1 = 0$

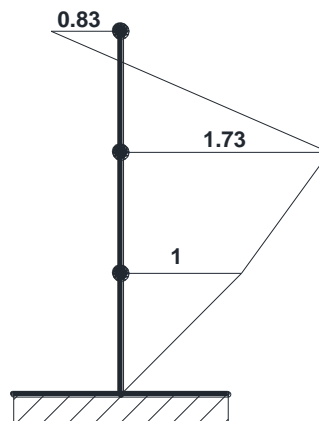
D'où :

$$\Rightarrow \begin{cases} 362.84 - 210A_2 = 0 \\ -210 + 71.30A_2 - 105A_3 = 0 \\ -105A_2 - 219.31A_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 1.73 \\ A_3 = -0.83 \end{cases}$$

Alors, le deuxième vecteur propre est :

$$A^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.73 \\ -0.83 \end{Bmatrix}$$

Ce mode de vibration peut être illustré graphiquement :



$$\text{Pour } \omega_3 = 11.64 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 525 - 0.175 \times 11.64^2 & -210 & 0 \\ -210 & 315 - 0.263 \times 11.64^2 & -105 \\ 0 & -105 & 105 - 0.35 \times 11.64^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 501.29 & -210 & 0 \\ -210 & 279.36 & -105 \\ 0 & -105 & 57.581 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour que ce système ait une seule solution, on pose : $A_1 = 0$

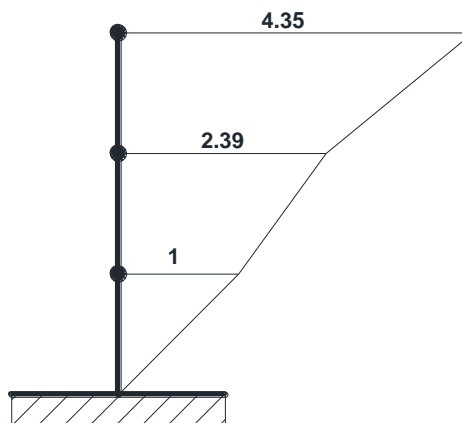
D'où :

$$\Rightarrow \begin{cases} 501.29 - 210A_2 = 0 \\ -210 + 279.36A_2 - 105A_3 = 0 \\ -105A_2 + 57.58A_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 2.39 \\ A_3 = 4.35 \end{cases}$$

Alors, le troisième vecteur propre est :

$$A^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.39 \\ 4.35 \end{Bmatrix}$$

Ce mode de vibration peut être illustré graphiquement :



- **Matrice modale**

La matrice modale est tout simplement l'assemblage en colonnes des vecteurs propres..

$$[A] = [A^{(1)} \ A^{(2)} \ A^{(3)}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.363 & 1.73 & 2.39 \\ 0.035 & -0.83 & 4.35 \end{bmatrix}$$

Exercice N°03

Pour la structure de l'exercice N°01, on demande de déterminer les déplacements de chaque étage causé par un chargement constant soudainement appliqué au troisième étage, $F(t) = \{0,0,445\}$ N sans tenir compte de l'amortissement ($\zeta=0$).

Solution :

Le déplacement au niveau de chaque étage est déterminé conformément aux étapes suivantes :

Etape 1 : Construction des matrices de masse et rigidité

Ces matrices ont été déjà déterminées dans l'exercice N°01.

$$[k] = \begin{bmatrix} 525 & -210 & 0 \\ -210 & 315 & -105 \\ 0 & -105 & 105 \end{bmatrix} \frac{KN}{mm} \quad [m] = \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \frac{KN.s^2}{mm}$$

Etape 2 : Calcul des valeurs et vecteurs propres

Les valeurs et vecteurs propres ont été déjà déterminés dans l'exercice N°01.

- Valeurs propres

$$\omega_1 = 58.61 \frac{rad}{s}, \quad \omega_2 = 30.44 \frac{rad}{s}, \quad \omega_3 = 11.64 \frac{rad}{s}$$

- Vecteurs propres

$$A^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.363 \\ 0.035 \end{Bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.73 \\ -0.83 \end{Bmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.39 \\ 4.35 \end{Bmatrix}$$

- Matrice modale

$$[A] = [A^{(1)} \ A^{(2)} \ A^{(3)}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.363 & 1.73 & 2.39 \\ 0.035 & -0.83 & 4.35 \end{bmatrix}$$

Etape 3 : Calcul des valeurs généralisées

- Masses généralisées

$$M_i = \{A^{(i)}\}^T [m] \{A^{(i)}\}$$

$$M_1 = \{A^{(1)}\}^T [m] \{A^{(1)}\}$$

$$M_1 = \{1, -0.363, 0.035\} \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.363 \\ 0.035 \end{Bmatrix} = 0.21 \frac{KN.s^2}{mm}$$

$$M_2 = \{1, 1.73, -0.83\} \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.73 \\ -0.83 \end{Bmatrix} = 1.203 \frac{KN.s^2}{mm}$$

$$M_3 = \{1, 2.39, 4.35\} \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.39 \\ 4.35 \end{Bmatrix} = 8.3 \frac{KN.s^2}{mm}$$

- Coefficients de rigidité généralisés

$$K_i = \{A^{(i)}\}^T [k] \{A^{(i)}\}$$

$$K_1 = \{A^{(1)}\}^T [k] \{A^{(1)}\}$$

$$K_1 = \{1, -0.363, 0.035\} \begin{bmatrix} 525 & -210 & 0 \\ -210 & 315 & -105 \\ 0 & -105 & 105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.363 \\ 0.035 \end{Bmatrix} = 721.76 \frac{KN}{mm}$$

$$K_2 = \{1, 1.73, -0.83\} \begin{bmatrix} 525 & -210 & 0 \\ -210 & 315 & -105 \\ 0 & -105 & 105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.73 \\ -0.83 \end{Bmatrix} = 1115 \frac{KN}{mm}$$

$$K_3 = \{1, 2.39, 4.35\} \begin{bmatrix} 525 & -210 & 0 \\ -210 & 315 & -105 \\ 0 & -105 & 105 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.39 \\ 4.35 \end{Bmatrix} = 1124.1 \frac{KN}{mm}$$

- Charge généralisée

$$P_i(t) = \{A^{(i)}\}^T \{F(t)\}$$

$$P_1(t) = \{A^{(1)}\}^T \{F(t)\}$$

$$P_1(t) = \{1, -0.363, 0.035\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 445 \end{Bmatrix} = 15.58 N$$

$$P_2(t) = \{1, 1.73, -0.83\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 445 \end{Bmatrix} = -369.35 N$$

$$P_3(t) = \{1, 2.39, 4.35\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 445 \end{Bmatrix} = 1935.7 N$$

Etape 4 : Conditions initiales

Les conditions initiales sont nulles

$$x_0 = \{0, 0, 0\} \text{ et } v_0 = \{0, 0, 0\}$$

Etape 5 : Evaluation des variables normales (u)

On construit des équations différentielles élémentaires à l'aide des variables généralisées

$$M_i \ddot{u}_i + K_i u_i = P_i(t)$$

Cette équation est similaire à celle d'un système non amorti à un seul degré de liberté dont la réponse de chaque degré de liberté peut être directement obtenue à l'aide de l'intégrale de Duhamel :

$$u_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_i} \int_0^t p_i(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau$$

$$u_i(t) = \frac{p_i}{M_i \omega_i^2} (1 - \cos \omega_i t)$$

$$\omega_i = \sqrt{K_i/M_i} \text{ et } \omega_{d_i} = \omega_i$$

On aura donc pour chaque DDL :

$$u_1(t) = \frac{15.58}{0.21 \times 58.61^2} (1 - \cos 58.61t) = 0.022(1 - \cos 58.61t)$$

$$u_2(t) = \frac{-369.35}{1.203 \times 30.44^2} (1 - \cos 30.44t) = -0.331(1 - \cos 30.44t)$$

$$u_3(t) = \frac{1935.7}{8.3 \times 11.64^2} (1 - \cos 11.64t) = 1.721(1 - \cos 11.64t)$$

Étape 6 : Calcul des déplacements, (x) , de chaque DDL

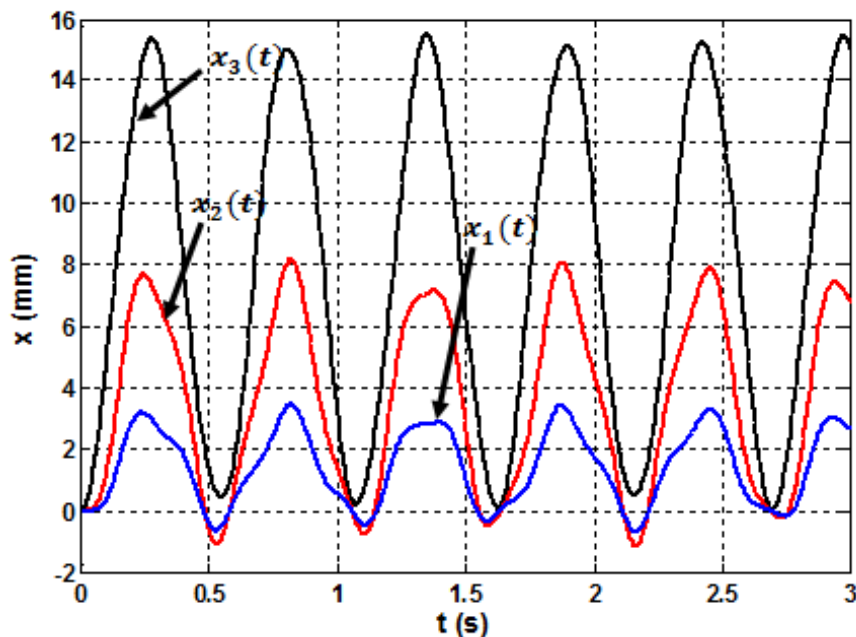
On peut maintenant superposer les réponses modales pour trouver les réponses de chaque degré de liberté (étage) :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.363 & 1.73 & 2.39 \\ 0.035 & -0.83 & 4.35 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.022(1 - \cos 58.61t) \\ -0.331(1 - \cos 30.44t) \\ 1.721(1 - \cos 11.64t) \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) = 0.022(1 - \cos 58.61t) - 0.331(1 - \cos 30.44t) + 1.721(1 - \cos 11.64t) \\ x_2(t) = -0.008(1 - \cos 58.61t) - 0.572(1 - \cos 30.44t) + 4.11(1 - \cos 11.64t) \\ x_3(t) = 7.7 \times 10^{-4}(1 - \cos 58.61t) + 0.275(1 - \cos 30.44t) + 7.486(1 - \cos 11.64t) \end{pmatrix}$$

L'illustration graphique de ces trois déplacements est présentée sur la figure suivante :



Ce graphique montre que le déplacement est plus important au niveau du DDL N°03 (3^{ème} étage).

V.1 Introduction

Le présent chapitre expose un ensemble de classifications nécessaires à la définition de la situation sismique étudiée et au choix de la méthode et des paramètres de calcul des forces sismiques.

La construction parasismique regroupe l'étude du comportement des bâtiments et structures sujets à un chargement dynamique du type sismique et la réalisation de bâtiments et infrastructures résistant aux séismes.

Les objectifs principaux de la construction parasismique sont de :

- Comprendre l'interaction entre les bâtiments ou autres infrastructures de génie civil et le sol ;
- Prévoir les conséquences potentielles des tremblements de terre ;
- Concevoir et construire des structures résistantes aux tremblements de terre, conformément aux normes de construction locales.

Une structure ne doit pas nécessairement être extrêmement résistante et dispendieuse. La méthode de construction parasismique la plus efficace et la plus économique est l'isolement bas [7].

V.2 Classification des zones sismiques (RPA 99)

Le territoire national est divisé en quatre (04) zones de séismicité croissante, définies sur la carte des zones de séismicité et le tableau associé qui précise cette répartition par wilaya et par commune, soit [7]:

- Zone 0 : sismicité négligeable.
- Zone I : sismicité faible.
- Zone II : sismicité moyenne.
- Zone III : sismicité élevée.

La figure V.1 représente la carte des zones sismiques de l'Algérie et le zonage global des différentes wilayas.

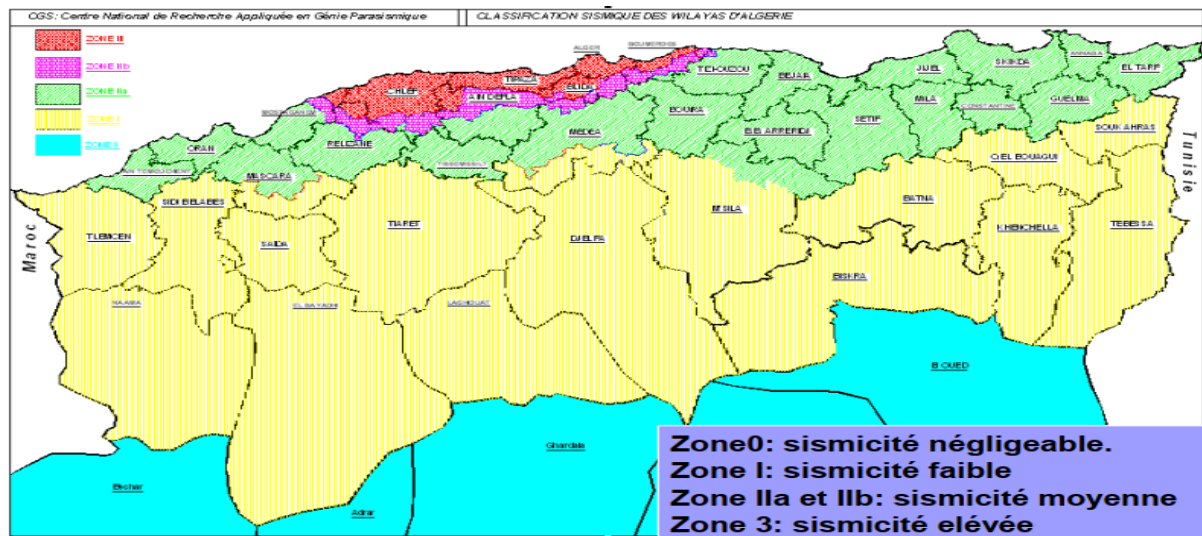


Fig. V.1 Classification sismiques des wilayas [7].

V.3 Classification des ouvrages selon leur importance

Le niveau minimal de protection sismique accordé à un ouvrage dépend de sa destination et de son importance vis à vis des objectifs de protection fixés par la collectivité.

Les listes décrites ci-dessous sont nécessairement incomplètes. Cependant, elles permettent d'illustrer cette classification qui vise à protéger les personnes, puis les biens économiques et culturels de la communauté.

Cette classification préconise des seuils minima de protection qu'un maître d'ouvrage peut modifier uniquement en surclassant l'ouvrage pour une protection accrue, compte tenu de la nature et de la destination de l'ouvrage vis à vis des objectifs visés.

Tout ouvrage qui relève du domaine d'application des présentes règles doit être classé dans l'un des quatre (04) groupes définis ci-après [7] :

Groupe 1A : Ouvrages d'importance vitale

Ouvrages vitaux qui doivent demeurer opérationnels après un séisme majeur pour les besoins de la survie de la région, de la sécurité publique et de la défense nationale, soit:

- Bâtiments abritant les centres de décisions stratégiques.
- Bâtiments abritant le personnel et le matériel de secours et (ou) de défense nationale ayant un caractère opérationnel tels que casernes de pompiers, de police ou militaires, parcs d'engins et de véhicules d'intervention d'urgence et de secours.
- Bâtiments des établissements publics de santé tels que les hôpitaux et centres dotés de services des urgences, de chirurgie et d'obstétrique.
- Bâtiments des établissements publics de communications tels que les centres de télécommunications, de diffusion et de réception de l'information (radio et télévision), des relais hertziens, des tours de contrôle des aéroports et contrôle de la circulation aérienne.
- Bâtiments de production et de stockage d'eau potable d'importance vitale.
- Ouvrages publics à caractère culturel, ou historique d'importance nationale.
- Bâtiments des centres de production ou de distribution d'énergie, d'importance nationale.
- Bâtiments administratifs ou autre devant rester fonctionnels en cas de séisme.

Groupe 1B : Ouvrages de grande importance

Ouvrages abritant fréquemment de grands rassemblements de personnes

- Bâtiments recevant du public et pouvant accueillir simultanément plus de 300 personnes tels que grande mosquée, bâtiments à usage de bureaux, bâtiments industriels et commerciaux, scolaires, universitaires, constructions sportives et culturelles, pénitenciers, grands hôtels.
- Bâtiments d'habitation collective ou à usage de bureaux dont la hauteur dépasse 48 m.

Ouvrages publics d'intérêt national ou ayant une importance socio-culturelle et économique certaine.

- Bâtiments de bibliothèque ou d'archives d'importance régionale, musée, etc.
- Bâtiments des établissements sanitaires autres que ceux du groupe 1A.

- Bâtiments de centres de production ou de distribution d'énergie autres que ceux du groupe 1A.
- Châteaux d'eau et réservoirs de grande à moyenne importance.

Groupe 2 : Ouvrages courants ou d'importance moyenne

Ouvrages non classés dans les autres groupes 1A, 1B ou 3 tels que :

- Bâtiments d'habitation collective ou à usage de bureaux dont la hauteur ne dépasse pas 48 m.
- Autres bâtiments pouvant accueillir au plus 300 personnes simultanément tels que, bâtiments à usage de bureaux, bâtiments industriels,...
- Parkings de stationnement publics,...

Groupe 3 : Ouvrages de faible importance

- Bâtiments industriels ou agricoles abritant des biens de faibles valeurs.
- Bâtiments à risque limité pour les personnes
- Constructions provisoires

V.4 Classification des sites

V.4.1 Catégories et Critères de classification

Les sites sont classés en quatre (04) catégories en fonction des propriétés mécaniques des sols qui les constituent.

- **Catégorie S₁** (site rocheux) :

Roche ou autre formation géologique caractérisée par une vitesse moyenne d'onde de cisaillement (V_s) \geq à 800m/s.

- **Catégorie S₂** (site ferme) :

Dépôts de sables et de graviers très denses et/ou d'argile sur consolidée sur 10 à 20 m d'épaisseur avec $V_s \geq 400$ m/s à partir de 10 m de profondeur.

- **Catégorie S₃** (site meuble) :

Dépôts épais de sables et graviers moyennement denses ou d'argile moyennement raide avec $V_s \geq 200$ m/s à partir de 10 m de profondeur.

- **Catégorie S₄** (site très meuble)

Dépôts de sables lâches avec ou sans présence de couches d'argile molle avec $V_s < 200$ m/s dans les 20 premiers mètres.

Dépôts d'argile molle à moyennement raide avec $V_s < 200$ m/s dans les 20 premiers mètres.

Par ailleurs, outre les valeurs des vitesses d'ondes de cisaillement, les valeurs moyennes harmoniques d'autres résultats d'essais (pénétromètre statique, SPT, pressiomètre...) peuvent être utilisées pour classer un site selon le tableau suivant :

Tableau V.1 : Classification des sites [7].

Catégorie	Description	q_c (MPa) (c)	N (d)	pl (MPa) (e)	E_p (MPa) (e)	q_u (MPa) (f)	V_s (m/s) (g)
S₁	Rocheux (a)	-	-	>5	>100-	>10	≥800
S₂	Ferme	>15	>50	>2	>20	>0.4	≥400 - < 800
S₃	Meuble	1.5 ~ 15	10 ~ 50	1 ~ 2	5 ~ 20	0.1 ~ 0.4	≥200 - < 400
S₄	Très Meuble ou Présence de 3m au moins d'argile molle (b)	<1.5	<10	<1	<5	< 0.1	≥100 <200

V.5 Choix de la méthode de calcul

Le calcul des forces sismiques peut être mené suivant trois méthodes [7]:

- ❖ Par la méthode statique équivalente.
- ❖ Par la méthode d'analyse modale spectrale.
- ❖ Par la méthode d'analyse dynamique par accélérogrammes.

a) La méthode d'analyse modale spectrale peut être utilisée dans tous les cas, et en particulier, dans le cas où la méthode statique équivalente n'est pas permise.

b) La méthode d'analyse dynamique par accélérogrammes peut être utilisée au cas par cas par un personnel qualifié, ayant justifié auparavant les choix des séismes de calcul et des lois de comportement utilisées ainsi que la méthode d'interprétation des résultats et les critères de sécurité à satisfaire.

V.5.1 Méthode statique équivalente

V.5.1.1 Principe

Les forces réelles dynamiques qui se développent dans la construction sont remplacées par un système de forces statiques fictives dont les effets sont considérés équivalents à ceux de l'action sismique.

Le mouvement du sol peut se faire dans une direction quelconque dans le plan horizontal. Les forces sismiques horizontales équivalentes seront considérées appliquées successivement suivant deux directions orthogonales caractéristiques choisies par le projeteur. Dans le cas général, ces deux directions sont les axes principaux du plan horizontal de la structure.

Il faut souligner toutefois que les forces et les déformations obtenues pour l'élément à partir des méthodes d'analyse statiques pour les charges de conception recommandées sont inférieures aux forces et aux déformations qui seraient observées sur la structure sous les effets d'un séisme majeur pour lequel les charges ont été spécifiées. Ce dépassement des forces est équilibré par le comportement ductile qui est fourni par les détails de construction de l'élément.

C'est pourquoi l'utilisation de cette méthode ne peut être dissociée de l'application rigoureuse des dispositions constructives garantissant à la structure:

- Une ductilité suffisante.
- La capacité de dissiper l'énergie vibratoire transmise à la structure par des secousses sismiques majeures.

V.5.1.2 Conditions d'application de la méthode statique équivalente

La méthode statique équivalente peut être utilisée dans les conditions suivantes :

a) Le bâtiment ou bloc étudié, satisfaisait aux conditions de régularité en plan et en élévation prescrites, avec une hauteur au plus égale à 65m en zones I et II et à 30m en zones III.

b) Le bâtiment ou bloc étudié présente une configuration irrégulière tout en respectant, autres les conditions de hauteur énoncées en a), les conditions complémentaires suivantes :

Zone I : • tous groupes.

Zone II : • groupe d'usage 3.

• groupe d'usage 2, si la hauteur est inférieure ou égale à 7 niveaux ou 23m.

• groupe d'usage 1B, si la hauteur est inférieure ou égale à 5 niveaux ou 17m.

• groupe d'usage 1A, si la hauteur est inférieure ou égale à 3 niveaux ou 10m.

Zone III : • groupes d'usage 3 et 2, si hauteur est inférieure ou égale à 5 niveaux ou 17m.

• groupe d'usage 1B, si la hauteur est inférieure ou égale à 3 niveaux ou 10m.

• groupe d'usage 1A, si la hauteur est inférieure ou égale à 2 niveaux ou 08m.

V.5.1.3 Modélisation

a) Le modèle du bâtiment à utiliser dans chacune des deux directions de calcul est plan avec les masses concentrées au centre de gravité des planchers et un seul degré de liberté en

translation horizontale par niveau sous réserve que les systèmes de contreventement dans les deux (2) directions puissent être découplés.

b) La rigidité latérale des éléments porteurs du système de contreventement est calculée à partir de sections non fissurées pour les structures en béton armé ou en maçonnerie.

c) Seul le mode fondamental de vibration de la structure est à considérer dans le calcul de la force sismique totale.

V.5.1.4 Calcul de la force sismique totale

La force sismique totale V , appliquée à la base de la structure, doit être calculée successivement dans deux directions horizontales orthogonales selon la formule :

$$V = \frac{A \cdot D \cdot Q}{R} W \quad (V.1)$$

- **A : coefficient d'accélération de zone**, donné par le tableau V.1 suivant la zone sismique et le groupe d'usage du bâtiment

Tableau V.2. : Coefficient d'accélération de zone A [7].

Groupe	Zone		
	I	II	III
1A	0,12	0,25	0,35
1B	0,10	0,20	0,30
2	0,08	0,15	0,25
3	0,05	0,10	0,15

- **D : facteur d'amplification dynamique moyen**, fonction de la catégorie de site, du facteur de correction d'amortissement (η) et de la période fondamentale de la structure (T).

$$D = \begin{cases} 2.5\eta & 0 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(T_2/T)^{\frac{2}{3}} & T_2 \leq T \leq 3.0s \\ 2.5\eta(T_2/3.0)^{\frac{2}{3}}(3.0/T)^{\frac{5}{3}} & T \geq 3.0s \end{cases} \quad (V.2)$$

- T_2 période caractéristique, associée à la catégorie du site et donnée par le tableau V.8

Le facteur D est par ailleurs donné sous forme graphique à la figure V.2 pour un amortissement $\xi = 5\%$

• **η : Facteur de correction d'amortissement**

Donné par la formule :

$$\eta = \sqrt{7/(2+\xi)} \geq 0.7 \tag{V.3}$$

Où ξ (%) est le pourcentage d'amortissement critique fonction du matériau constitutif, du type de structure et de l'importance des remplissages.

Quant $\xi = 5\%$, on a $\eta = 1$

Tableau V.3 : Valeurs de ξ (%) [7].

Remplissage	Portiques		Voiles ou murs
	Béton armé	Acier	Béton armé/maçonnerie
Léger	6	4	10
Dense	7	5	

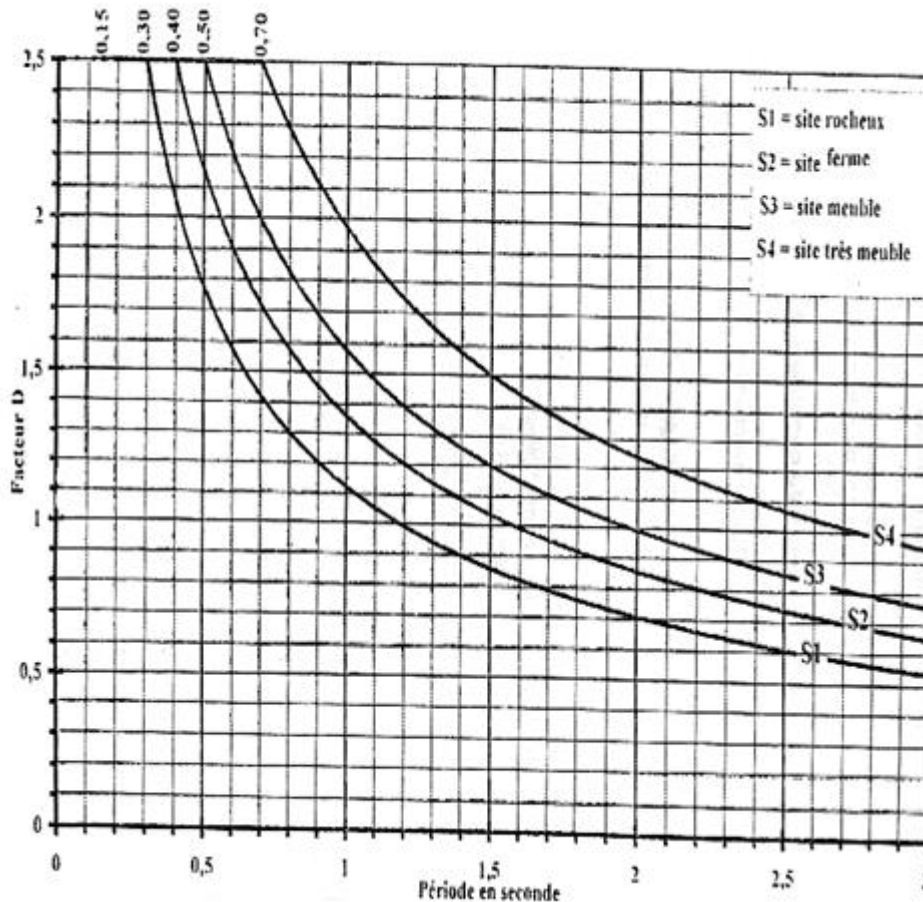


Fig. V.2 Facteur d'amplification dynamique moyen ($\xi = 5\%$) [7].

○ **R : Coefficient de comportement global de la structure**

Sa valeur unique est donnée par le tableau V.4 en fonction du système de contreventement tel que défini en V.4

En cas d'utilisation de systèmes de contreventement différents dans les deux directions considérées il y a lieu d'adopter pour le coefficient **R** la valeur la plus petite.

Tableau V.4 : Valeurs du coefficient de comportement R.

Cat	Description du système de contreventement	Valeur de R
A	Béton armé	
1a	Portiques autostables sans remplissages en maçonnerie rigide	5
1b	Portiques autostables avec remplissages en maçonnerie rigide	3,5
2	Voiles porteurs	3,5
3	Noyau	3,5
4a	Mixte portiques/voiles avec interaction	5
4b	Portiques contreventés par des voiles	4
5	Console verticale à masses réparties	2
6	Pendule inverse	2
B	Acier	
7	Portiques autostables ductiles	6
8	Portiques autostables ordinaires	4
9a	Ossature contreventée par palées triangulées en X	4
9b	Ossature contreventée par palées triangulées en V	3
10a	Mixte portiques/palées triangulées en X	5
10b	Mixte portiques/palées triangulées en V	4
11	Portiques en console verticale	2
C	Maçonnerie	
12	Maçonnerie porteuse chaînée	2,5
D	Autres systèmes	
13	Ossature métallique contreventée par diaphragme	2
14	Ossature métallique contreventée par noyau en béton armé	3
15	Ossature métallique contreventée par voiles en béton armé	3,5
16	Ossature métallique avec contreventement mixte comportant un noyau en béton armé et palées ou portiques métalliques en façades	4
17	Systèmes comportant des transparences (étages souples)	2

○ **Q : Facteur de qualité**

Le facteur de qualité de la structure est fonction de :

- La redondance et de la géométrie des éléments qui la constituent.
- La régularité en plan et en élévation.
- La qualité du contrôle de la construction.

La valeur de Q est déterminée par la formule :

$$Q = 1 + \sum_{1}^{5} P_q \quad (V.4)$$

P_q est la pénalité à retenir selon que le critère de qualité q " est satisfait ou non".

Sa valeur est donnée au tableau V.4

Les critères de qualité "q" à vérifier sont :

a. Conditions minimales sur les files de contreventement

- ❖ **Système de portiques** : chaque file de portique doit comporter à tous les niveaux, au moins trois (03) travées dont le rapport des portées n'excède pas 1,5. Les travées de portique peuvent être constituées de voiles de contreventement.
- ❖ **Système de voiles** : chaque file de voiles doit comporter à tous les niveaux, au moins un (01) trumeau ayant un rapport "hauteur d'étage sur largeur" inférieur ou égal à 0,67 ou bien deux (02) trumeaux ayant un rapport "hauteur d'étage sur largeur" inférieur ou égal à 1,0. Ces trumeaux doivent s'élever sur toute la hauteur de l'étage et ne doivent avoir aucune ouverture ou perforation qui puisse réduire de manière significative leur résistance ou leur rigidité.

b. Redondance en plan

Chaque étage devra avoir, en plan, au moins quatre (04) files de portiques et/ou de voiles dans la direction des forces latérales appliquées.

Ces files de contreventement devront être disposées symétriquement autant que possible avec un rapport entre valeurs maximale et minimale d'espacement ne dépassant pas 1,5.

c. Régularité en plan

La structure est classée régulière en plan.

d. Régularité en élévation

La structure est classée régulière en élévation.

e. Contrôle de la qualité des matériaux

Des essais systématiques sur les matériaux mis en œuvre doivent être réalisés par l'entreprise.

f. Contrôle de la qualité de l'exécution

Il est prévu contractuellement une mission de suivi des travaux sur chantier. Cette mission doit comprendre notamment une supervision des essais effectués sur les matériaux.

Tableau V.5.: Valeurs des pénalités P_q [7].

Critère q »	P_q	
	Observé	N/observé
1. Conditions minimales sur les files de contreventement	0	0,05
2. Redondance en plan	0	0,05
3. Régularité en plan	0	0,05
4. Régularité en élévation	0	0,05
5. Contrôle de la qualité des matériaux	0	0,05

6. Contrôle de la qualité de l'exécution	0	0,10
--	---	------

- **W : Poids total de la structure,**

W est égal à la somme des poids W_i , calculés à chaque niveau (i) :

$$W = \sum_{i=1}^n w_i \quad (V.5)$$

Avec : $W_i = W_{Gi} + \beta W_{Qi}$

- W_{Gi} : Poids dû aux charges permanentes et à celles des équipements fixes éventuels, solidaires de la structure.
- W_{Qi} : Charges d'exploitation.
- β : Coefficient de pondération, fonction de la nature et de la durée de la charge d'exploitation et donné par le tableau V.6.

Tableau V.6 : Valeurs du coefficient de pondération β [7].

Cas	Type d'ouvrage	β
1	Bâtiments d'habitation, bureaux ou assimilés.	0,20
2	Bâtiments recevant du public temporairement : - Salles d'exposition, de sport, lieux de culte, salles de réunions avec places debout. - salles de classes, restaurants, dortoirs, salles de réunions avec places assises.	0,30 0,40
3	Entrepôts, hangars.	0,50
4	Archives, bibliothèques, réservoirs et ouvrages assimilés.	1,00
5	Autres locaux non visés ci-dessus.	0,60

V.5.2.5 Estimation de la période fondamentale de la structure

1. La valeur de la période fondamentale (T) de la structure peut être estimée à partir de formules empiriques ou calculée par des méthodes analytiques ou numériques.

2. La formule empirique à utiliser selon les cas est la suivante :

$$T = C_T h_N^{3/4} \quad (V.6)$$

- h_N : Hauteur mesurée en mètres à partir de la base de la structure jusqu'au dernier niveau (N).
- C_T : Coefficient, fonction du système de contreventement, du type de remplissage et donné par le tableau V.7.

Tableau V.7 : Valeurs du coefficient C_T [7].

Cas n°	Système de contreventement	C_T
--------	----------------------------	-------

1	Portiques autostables en béton armé sans remplissage en maçonnerie	0,075
2	Portiques autostables en acier sans remplissage en maçonnerie	0,085
3	Portiques autostables en béton armé ou en acier avec remplissage en maçonnerie	0,050
4	Contreventement assuré partiellement ou totalement par des voiles en béton armé, des palées triangulées et des murs en maçonnerie	0,050

Dans les cas n° 3 et 4, on peut également utiliser aussi la formule :

$$T = 0.09 h_N / \sqrt{D} \quad (V.7)$$

Où :

D : La dimension du bâtiment mesurée à sa base dans la direction de calcul considérée. Dans ce cas de figure il y a lieu de retenir dans chaque directions considérée la plus petite des deux valeurs données respectivement par (V.6) et (V.7)

3. La valeur de T peut être calculée avec **la formule de Rayleigh** ou une version simplifiée de cette formule :

a)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_i^n W_i \delta_i}{g \left(\sum_i^n f_i \delta_i \right)}} \quad (V.8)$$

- f_i : Système de forces horizontales, distribuées selon les formules de répartition de V suivant la verticale.
- δ_i : Flèches horizontales dues aux forces f_i calculées à partir d'un modèle élastique linéaire de la structure qui prend en compte tous les éléments participant à sa rigidité.

b.) **Version simplifiée de la formule de Rayleigh :**

$$T = 2\sqrt{\delta_N} \quad (V.9)$$

- δ_N : Flèche horizontale au sommet du bâtiment, mesurée en mètres, due aux forces gravitaires appliquées horizontalement.

4. Les valeurs de T, calculées à partir des formules de Rayleigh ou de méthodes numériques ne doivent pas dépasser celles estimées à partir des formules empiriques appropriées de plus de 30%.

V.5.1.5 Distribution de la résultante des forces sismiques selon la hauteur

La résultante des forces sismiques à la base **V** doit être distribuée sur la hauteur de la structure selon les formules suivantes :

$$V = F_t + \sum F_i \quad (V.10)$$

La force concentrée F_t au sommet de la structure permet de tenir compte de l'influence des modes supérieurs de vibration. Elle doit être déterminée par la formule :

$$F_t = 0,07 TV$$

Où :

T est la période fondamentale de la structure (en secondes). La valeur de F_t ne dépassera en aucun cas 0,25 V et sera prise égale à 0 quand T est plus petit ou égale à 0,7 secondes.

La partie restante de V soit $(V - F_t)$ doit être distribuée sur la hauteur de la structure suivant la formule :

$$F_i = \frac{(V - F_t)W_i h_i}{\sum_{j=1}^n W_j h_j} \quad (V.11)$$

V.5.1.6 Distribution horizontale des forces sismiques

L'effort tranchant au niveau de l'étage k :

$$V_K = F_t + \sum_{i=k}^n F_i \quad (V.12)$$

Dans le cas de structures comportant des planchers rigides dans leur plan, est distribué aux éléments verticaux de contreventement proportionnellement à leurs rigidités relatives.

V.5.1.7 Effet de la torsion d'axe vertical

L'augmentation de l'effort tranchant provoqué par la torsion d'axe vertical due à l'excentricité entre le centre de gravité et le centre de rigidité doit être prise en compte. Les efforts tranchants négatifs dus à la torsion devront être négligés.

Pour toutes les structures comportant des planchers ou diaphragmes horizontaux rigides dans leur plan, on supposera qu'à chaque niveau et dans chaque direction, la résultante des forces horizontales a une excentricité par rapport au centre de torsion égale à la plus grande des deux valeurs:

- 5% de la plus grande dimension du bâtiment à ce niveau (cette excentricité doit être prise en considération de part et d'autre du centre de torsion).
- Excentricité théorique résultant des plans.

V.5.2 Méthode dynamique modale spectrale

V.5.2.1 Principe

Par cette méthode, il est recherché pour chaque mode de vibration, le maximum des effets engendrés dans la structure par les forces sismiques représentées par un spectre de réponse de calcul. Ces effets sont par la suite combinés pour obtenir la réponse de la structure.

V.5.2.2 Modélisation

a) Pour les structures régulières en plan comportant des planchers rigides, l'analyse est faite séparément dans chacune des deux directions principales du bâtiment. Celui-ci est alors représenté dans chacune des deux directions de calcul par un modèle plan, encastré à la base et où les masses sont concentrées au niveau des centres de gravité des planchers avec un seul DDL en translation horizontale.

b) Pour les structures irrégulières en plan, sujettes à la torsion et comportant des planchers rigides, elles sont représentées par un modèle tridimensionnel, encastré à la base et où les masses sont concentrées au niveau des centres de gravité des planchers avec trois (03) DDL (2 translations horizontales et une rotation d'axe vertical).

c) Pour les structures régulières ou non comportant des planchers flexibles, elles sont représentées par des modèles tridimensionnels encastrés à la base et à plusieurs DDL par plancher.

d) La déformabilité du sol de fondation doit être prise en compte dans le modèle toutes les fois où la réponse de la structure en dépend de façon significative.

e) Le modèle de bâtiment à utiliser doit représenter au mieux les distributions des rigidités et des masses de façon à prendre en compte tous les modes de déformation significatifs dans le calcul des forces d'inertie sismiques (ex : contribution des zones nodales et des éléments non structuraux à la rigidité du bâtiment).

f) Dans le cas des bâtiments en béton armé ou en maçonnerie la rigidité des éléments porteurs doit être calculée en considérant les sections non fissurées. Si les déplacements sont critiques particulièrement dans le cas de structures associées à des valeurs élevées du coefficient de comportement, une estimation plus précise de la rigidité devient nécessaire par la prise en compte de sections fissurées.

V.5.2.3 Spectre de réponse de calcul

L'action sismique est représentée par le spectre de calcul suivant :

$$\frac{S_a}{g} = \begin{cases} 1.25A \left(1 + \frac{T}{T_1} \left(2.5\eta \frac{Q}{R} - 1 \right) \right) & 0 \leq T \leq T_1 \\ 2.5\eta(1.25A) \left(\frac{Q}{R} \right) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(1.25A) \left(\frac{Q}{R} \right) \left(\frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & T_2 \leq T \leq 3.0s \\ 2.5\eta(1.25A) \left(\frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left(\frac{3}{T} \right)^{5/3} \left(\frac{Q}{R} \right) & T > 3.0s \end{cases} \quad (V.13)$$

- **A** : Coefficient d'accélération de zone (tableau V.2)
- **η** : Facteur de correction d'amortissement (quant l'amortissement est différent de 5%).
- **ξ** : Pourcentage d'amortissement critique (tableau V.3)
- **R** : Coefficient de comportement de la structure (tableau V.4)
- **T1, T2** : Périodes caractéristiques associées à la catégorie de site (tableau V.8)
- **Q** : Facteur de qualité (tableau V.5)

Tableau V.7 : Valeurs de T₁ et T₂ [7].

Site	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄
T ₁ (sec)	0,15	0,15	0,15	0,15

T_2 (sec)	0,30	0,40	0,50	0,70
-------------	------	------	------	------

Dans la détermination de la valeur de Q, il y a lieu de tenir compte que les irrégularités en plan et en élévation ont déjà été prises en charge par le modèle. Par ailleurs, en cas d'analyse tridimensionnelle il y a lieu de prendre comme valeur de Q la plus pénalisante, des valeurs calculées suivant les deux directions orthogonales de référence

L'action sismique doit être appliquée dans toutes les directions jugées déterminantes pour le calcul des forces sismiques ainsi que les directions qui leur sont perpendiculaires, compte tenu de la configuration en plan de la structure. Pour les structures ayant leurs éléments de contreventement distribués le long de deux directions orthogonales, ces deux directions sont à retenir comme directions d'excitation.

V.5.2.4 Nombre de modes à considérer

a) Pour les structures représentées par des modèles plans dans deux directions orthogonales, le nombre de modes de vibration à retenir dans chacune des deux directions d'excitation doit être tel que :

- ❖ La somme des masses modales effectives pour les modes retenus soit égale à 90 % au moins de la masse totale de la structure.
- ❖ Ou que tous les modes ayant une masse modale effective supérieure à 5% de la masse totale de la structure soient retenus pour la détermination de la réponse totale de la structure.

Le minimum de modes à retenir est de trois (03) dans chaque direction considérée.

b) Dans le cas où les conditions décrites ci-dessus ne peuvent pas être satisfaites à cause de l'influence importante des modes de torsion, le nombre minimal de modes (K) à retenir doit être tel que :

$$K \geq 3\sqrt{N} \text{ et } T_K \leq 0.20 \text{ sec} \quad (\text{V.14})$$

Où :

- N : Le nombre de niveaux au dessus du sol et T_k la période du mode K.

V.5.3.5 Combinaison des réponses modales

a) Les réponses de deux modes de vibration i et j de périodes T_i, T_j et d'amortissement ξ_i, ξ_j sont considérées comme indépendantes si le rapport $r = T_i / T_j$ ($T_i \leq T_j$).

Vérifie :

$$r \leq 10 / (10 + \sqrt{\xi_i \xi_j}) \quad (\text{V.15})$$

b) Dans le cas où toutes les réponses modales retenues sont indépendantes les unes des autres, la réponse totale est donnée par :

$$E = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^K E_i^2} \quad (V.16)$$

- E : Effet de l'action sismique considéré.
- E_i : Valeur modale de E selon le mode « i ».
- K : Nombre de modes retenus (V.14).

c) Dans le cas où deux réponses modales ne sont pas indépendantes ; E_1 et E_2 par exemple, la réponse totale est donnée par :

$$\sqrt{(|E_1| + |E_2|) + \sum_{i=3}^k E_i^2} \quad (V.17)$$

V.5.2.6 Résultante des forces sismiques de calcul

La résultante des forces sismiques à la base V_t obtenue par combinaison des valeurs modales ne doit pas être inférieure à 80 % de la résultante des forces sismiques déterminée par la méthode statique équivalente V pour une valeur de la période fondamentale donnée par la formule empirique appropriée.

- Si $V_t < 0.80 V$, il faudra augmenter tous les paramètres de la réponse (forces, déplacements, moments,...) dans le rapport $0.8 V/V_t$.

V.5.2.7 Effets de la torsion accidentelle

Quand il est procédé à une analyse par modèles plans dans les deux directions orthogonales

Dans le cas où il est procédé à une analyse tridimensionnelle, en plus de l'excentricité théorique calculée, une excentricité accidentelle (additionnelle) égale à $\pm 0.05 L$, (L étant la dimension du plancher perpendiculaire à la direction de l'action sismique) doit être appliquée au niveau du plancher considéré et suivant chaque direction

V.6 Exercices avec solutions

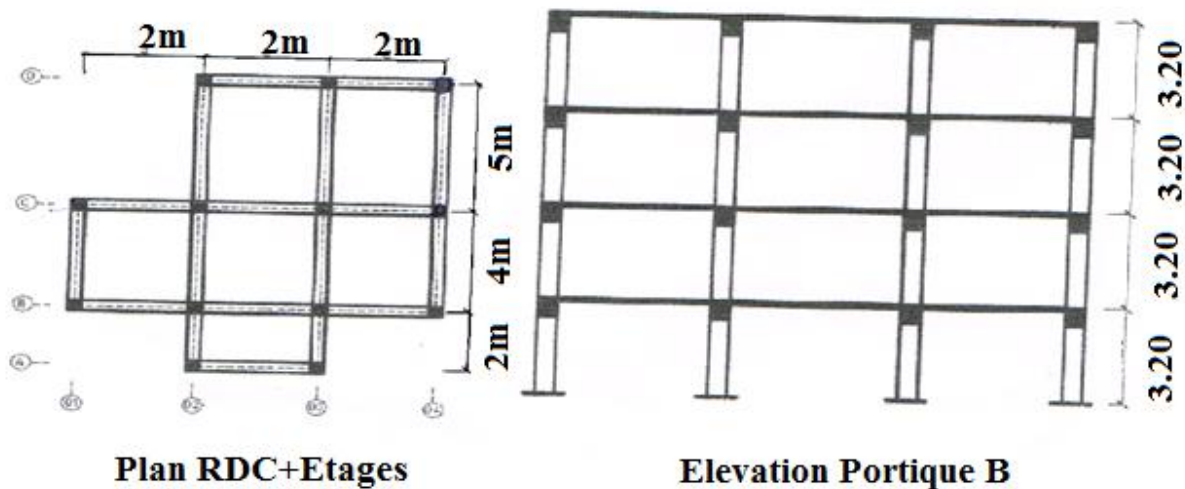
Exercice N°01 :

Soit un immeuble à usage d'habitation qui se compose d'un RDC et trois étages contreventé dans les deux sens par des portiques auto-stables étagés. On demande :

- 1- Calculer l'effort sismique total à la base du bâtiment.
- 2- Repartir cet effort entre les différents niveaux.

Sachant que le bâtiment est classé dans le groupe d'usage 3 et est implanté sur un site qui appartient à la catégorie S2 et à la zone sismique I, remplissage en maçonnerie léger. On donne :

- poids total niveau 2 : 1200 KN
cm
- poids total terrasse : 1700 KN
cm
- Poids total RDC : 1500 KN
- poids total niveau 1 : 1000 KN
- Section des poteaux : 30*40
- Section des poutres : 40*50



Solution :

1- Calcul de l'effort sismique à la base du bâtiment :

$$V = \frac{A \cdot D \cdot Q}{R} W$$

- Coefficient d'accélération de zone (A) :
A= Groupe 3 + zone I = 0.05
- Facteur d'amplification dynamique moyen (D), fonction de la catégorie de site, du facteur de correction d'amortissement (η) et de la période fondamentale de la structure (T).

On calcul d'abord la période fondamentale "T"

$$T_1 = C_T * h_n^{3/4}$$

- Portique auto stables en BA avec remplissage en maçonnerie cas n°03 : $C_T = 0.075$
 $h_n = 12,8m$ $T_1 = 0.075 * (12,8)^{3/4} = 0.507 s$
- Pour les cas n° 3 et 4 la période fondamentale peut être calculée d'une autre manière (la valeur minimale entre les deux valeurs calculées :

Direction X :

$$T_{X1} = 0.09 * h_n / (L_x)^{1/2} \quad \text{avec } L_x = 3+3+3+0.15+0.15 = 9.30 m \text{ et } h_n = 12.8 m$$

$$T_{X1} = 0.09 * 12.8 / (9.30)^{1/2} = 0.061s$$

$$T_x = \min (T_1, T_x) = 0.061s$$

Direction Y :

$$L_y = 5+4+2+0.15+0.15 = 11.30 m.$$

$$T_{Y1} = 0.09 * 12.8 / (11.30)^{1/2} = 0.050s$$

$$T_Y = \min (T_{Y1}, T_Y) = 0.050 s$$

Pour le calcul de 'D', on a dans les deux directions :

Catégorie S2 $T_2 = 0.40s$

Donc : $0 < T < T_2$ dans les deux directions

Donc : $D = 2.5\eta$

direction X et Y

$$D = 2.5\eta$$

$$\eta = \sqrt{7 / (2 + \xi)} \geq 0.7$$

o Portique en BA + remplissage dense : $\xi = 6\%$

o $\eta = \sqrt{7 / (2 + 6)} = 0.33$

$$D_x = D_y = 2.5 * 0.33 = 0.825$$

Facteur de qualité 'Q' :

$$Q = 1 + \sum_1^5 P_q$$

o **Direction X :**

$$Q_x = 1 + (0.05 + 0 + 0.05 + 0 + 0.05 + 0.10) = 1.25$$

o **Direction Y :**

$$Q_y = 1 + (0.05 + 0 + 0.05 + 0 + 0.05 + 0.10) = 1.25$$

Coefficient de comportement 'R' :

Portique auto stable avec remplissage en maçonnerie catégorie 1B : $R = 3.5$

Poids total d la structure 'W_{TOT}' :

$$W_{TOT} = 1500 + 1700 + 1200 + 1000 = 5400KN$$

Charge sismique totale 'V_x' et 'V_y' :

$$V_x = V_y = 0.20 * 2.204 * 1.25 / 3.5 * 5400 = 692.685 KN$$

2- Répartition de l'effort sismique entre les niveaux :

$$F_i = \frac{(V - F_t) W h_i}{\sum_{j=1}^n W_j h_j}$$

$$T < 0.7s \quad F_t = 0$$

$$\sum_{j=1}^n W_j h_j = 1500 * 3.20 + 1200 * 6.40 + 1700 * 9.60 + 1000 * 12.6$$

• $F_1 = 1500 * 3.20 * 692.685 / \quad = 115.447 KN$

- $F2 = 1200 * 6.40 * 692.685 / 28800 = 184.716 \text{ KN}$
- $F3 = 1700 * 9.60 * 692.685 / 28800 = 392.521 \text{ KN}$

CONCLUSION GÉNÉRALE

La dynamique des structures représente un pilier essentiel dans le domaine du génie civil, offrant un aperçu crucial de la manière dont les structures réagissent aux charges vibratoires. Son importance est particulièrement accentuée dans le contexte du génie parasismique, où la résistance des bâtiments face aux séismes est d'une importance vitale. Cependant, cette discipline va au-delà de la simple conception antisismique, car elle s'applique également à la conception de structures légères et élancées de plus en plus courantes de nos jours.

L'analyse dynamique des structures consiste à évaluer le comportement des systèmes sous l'influence de vibrations, qu'elles soient provoquées par des tremblements de terre, des vents violents ou d'autres sources. Elle permet de modéliser des structures complexes en systèmes discrets, simplifiant ainsi l'analyse. Les oscillations dans ces systèmes peuvent être libres, amorties ou forcées. Les oscillations libres se produisent naturellement dans des systèmes isolés, tandis que les oscillations amorties sont affectées par des forces de frottement. En présence d'une force extérieure, on observe des oscillations forcées, pouvant entraîner des phénomènes tels que la résonance, dont les conséquences peuvent être désastreuses si elles ne sont pas correctement prises en compte dans la conception des structures.

Il est crucial de comprendre que la plupart des problèmes rencontrés dans le génie civil, à l'exception des tremblements de terre, sont liés à la durabilité et à la performance à long terme des structures. Ainsi, une connaissance approfondie du comportement linéaire des structures est indispensable pour garantir leur aptitude au service. Cela fait de la dynamique des structures un domaine d'étude fondamental, permettant aux ingénieurs civils d'évaluer rigoureusement la résistance des structures aux charges vibratoires.

Le cours "Dynamique des structures" est spécialement conçu pour les étudiants de quatrième année en Génie Civil, les préparant aux défis complexes du monde réel. Il couvre divers sujets, des bases de la sismologie aux règlements parasismiques en Algérie, en passant par les systèmes à un degré de liberté avec et sans amortissement ainsi que les systèmes à plusieurs degrés de liberté et leurs modes propres. Ce programme structuré offre aux étudiants une base solide pour leur future carrière en ingénierie civile, les préparant également à des études plus avancées telles que le génie parasismique.

En conclusion, la dynamique des structures est un domaine incontournable pour les ingénieurs civils modernes. En comprenant en profondeur comment les structures réagissent aux charges vibratoires, les ingénieurs peuvent concevoir des bâtiments et des infrastructures plus sûrs et plus résistants, assurant ainsi la sécurité et le bien-être des personnes dans un monde de plus en plus soumis à diverses forces environnementales. Ce cours offre aux étudiants les connaissances et les compétences nécessaires pour relever ces défis, contribuant ainsi à façonner un avenir où la résilience des structures est au cœur de l'ingénierie civile.

Références bibliographiques

- [1] Capra A., Davidovici V., Calcul Dynamique des structures en zone sismique edition Eyrolles.1982
- [2] Jacky Maza.z:s. (2008) Cours de « Génie parasismique », Grenoble--INP et ENI Tunis.
- [3] Chopra A. K., Dynamics of structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., Fourth Edition.2011.
- [4] Bachmann, H. et al. (1995) Vibration Problems in structures, Birkhäuser, Basel.
- [5] Paultre, P. (2005) Dynamique des structures – application aux ouvrages de génie civil, Hermes Lavoisier, Paris.
- [6] Soong, T.T. and Dargush, G.F.(1997) Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering, John Wiley & Sons, Chichester.
- [7] Règle Parasismique Algérienne RPA99/Version 2003 ; Centre Nationale De Recherche Appliquée En Génie Parasismique ; Algérie.