الجمهـوريـــة الجزائـريـــة الديـمقـراطيـــة الشـعـبيـة

وزارة التعلـيم العـالي والبحث العلـمي
المـدرسـة العليـا لأسـاتـذة
التعليم التكنولوجي سكيكدة - عزابة -
- قـسـم الريـاضـيـات -

Ministre de l'Enseignement Supérieur
et de la recherche scientifique
École Normale Supérieur
d'enseignement technologique Skikda - Azzaba-
Département de Mathématiques

طريقة التدرج المترافق دراسة برمجية وتطبيقية في الأمثلة

مُذكّرَة تخَرج لنيَل شهَادة أُستَاذ التَّعلِيم المتوسط

من إعداد :

★ بوموس إكرام كنزة

★ حليمي صارة

تحت إشراف الأستاذ :

★ قواسمية محمد

من طرف لجنة المناقشة :

♦ بن تيامة وئام .... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة .... رئيسة.

♦ مزياني محمد سيف الدين .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... مناقشا.

♦ بولعراس صالح .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... مناقشا.

السنة الجامعية : 2023/2024

دفعة جوان : 2024

بسم الله الرحمن الرحيم

❖ شكـــر وتَقَديـــــر

الحمد لله حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه الذي سخر لنا الأسباب للوصول إلى ما نحن عليه، والصلاة والسلام على الحبيب المصطفى الذي أدى الأمانة ونصح للأمة.

عملا بقوله صلى الله عليه وسلم:

﴿ مَنْ لَمْ يَشْكُرِ النَّاس لَم يَشْكُرِ الله ﴾

رواه " أحمد والترميذي ".

وقبل أن نمضي نتقدم ببالغ شكرنا وعظيم إمتناننا للأستاذ قواسمية محمد الذي لن تكفي الحروف لإيفائه حقه لمجهوداته ونصائحه التي لم يبخلنا بها و إرشاداته، نرجوا من الله عز وجل أن يوفقه إلى ما يصبو إليه ويجعله من عباده الصالحين.

كما نشكر أعضاء اللجنة التي تشرفنا بقبولها مناقشة هذه المذكرة الأستاذ مزياني سيف الدين و الأستاذ بولعراس صالح و الأستاذة بن تيمامة وئام.

إلى مدير المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي سكيكدة و الأساتذة الكرام.

إلى من قدموا لنا المساعدات والتوجيهات دون أن يشعروا بدورهم بذلك.

﴿ربي أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي
وأن أعمل صالحا ترضاه وأدخلني برحمتك
في عبادك الصالحين﴾

❖ إهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات.

الحمد لله الذي وفّقنا لإتمام هذه المذكرة خاتمة سنين من الجد والاجتهاد، والحمد لله دائما وأبدا ...

إلى والدي الذي أفنى عمره في عالم الشقاء والتضحية من أجل أن أصبح على ما أنا عليه حفظة الله وأطال الله في عمره.

إلى أمي رحمها الله وجعل قبرها روضة من رياض الجنة .

إلى زوجة أبي مثابة أمي الثانية التي كانت مصدر قوتي وبسمة أملي وملجأي الآمن أكسبها الله الصحة والعافية .

إلى أخواتي سندي مصدر سعادتي الذين أفر إليهم حال ضعفي "وافية"، " أحلام "، " نور اليقين"، "سلسبيل " .

إلى أساتذتي وكل من علمني حرفا طيلة مشواري الدراسي.

إلى كل من نصحني وشجعني وأرشدني إلى طرق النجاح.

إلى كل طالب علم يقرأ عملنا المتواضع.

حليمي صارة

❖ إهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات،

الحمد لله الذي وفقنا لإتمام هذه المذكرة خاتمة سنين من الجد والاجتهاد، ها أنا اليوم أنظر إلى حلم طال انتظاره وقد أصبح واقعا أفتخر به.

أهدي هذا الإنجاز الذي لولا تضحياتهما لما كان له وجود، إلى والدايا الكريمين.

إلى من تملك جنة تحت القدم، إلى ملاكي الطاهر وقوتي بعد الله، داعمتي الأولى والأبدية "أمي الحبيبة".

إلى من أحمل اسمه بكل افتخار، إلى الجدار الذي استند عليه في تعبي وحزني عزيزي وحبيبي الذي أحبه بقدر هذا العالم إلى جنة الدنيا والآخرة "أبي الغالي".

إلى من قال فيهم (سنشد عضدك بأخيك)، إلى من آمنوا بقدراتي أخواتي الغاليات "أمينة"، "ابتهال"، "لينا ملاك"، "نورسين" وأخي الغالي "محمد" أدامكم الله ضلعا ثابتا.

إلى أساتذتي وكل من علمني حرفا طيلة مشواري الدراسي.

إلى كل من نصحني وشجعني وأرشدني إلى طرق النجاح.

إلى كل طالب علم يقرأ عملنا المتواضع.

بوموس إكرام كنزة

الفهرس

مقدمـــــة

نهتم في هذا العرض بدراسة مسائل الأمثلة غير المقيدة للدوال التربيعية التي تعرف بالشكل:

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\inf\limits_{x\in\mathcal{K}} J(x)\\ J\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^{T}Ax-B^{T}x\end{cases}$$

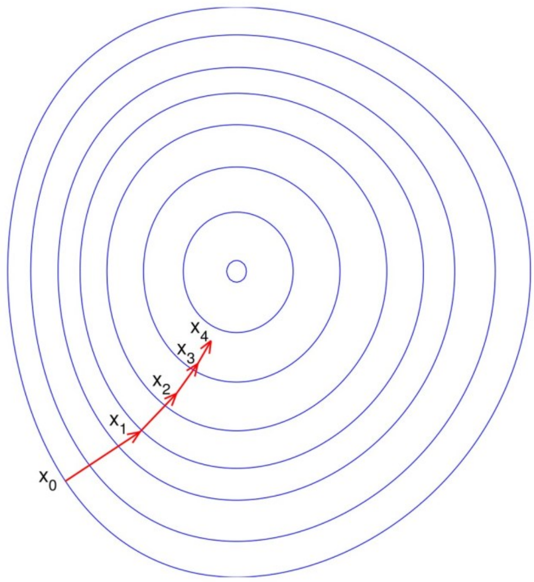
حيث $x,B\in\mathbb{R}^{n}$ و $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ مصفوفة متناظرة و معرفة موجبة.

وكذلك دراسة الخوارزميات والطرق التي تعالج هذه المسائل، ومن أهم هذه الطرق طريقة التدرج المترافق التي تستخدم غالبا لحل المسائل ذات الأبعاد الكبيرة. لقد تم اكتشاف هذه الطريقة سنة **1952** من قبل العالمان **Stefiel** و **Hestenes** ذلك لأجل تصغير الدوال التربيعية المحدبة تماما (البحث عن الحد الأدنى) ليتم بعدها تطوير هذه الطريقة وتوسيعها لتشمل الدوال التربيعية وغير التربيعية، هذا ما تم لأول مرة سنة **1964** من قبل **Fleetcher** وتوالت بعدها التعديلات في كل مرة بغية الوصول إلى الطريقة الأكفأ والأدق. وفي العقود التالية استمر البحث والتطوير في هذا المجال، من خلال الجهود المشتركة لعدد من الرياضيين والعلماء عبر التاريخ. مثل جوزيف فورييه، بيرنار ريمان، كارل فريدريش غاوس، دافيد هيلبرت وغيرهم الذين أسهمو في تطوير نظريات أكثر تعقيدا وتطبيقية للتدرج المترافق.

تعتمد هذه الطريقة على إنشاء متتالية $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ على النحو التالي:

$$\begin{cases}x^{(0)}, \quad \text{معطى}\\ x^{(k+1)}=x^{(k)}+\rho_{k}d^{(k)}, \quad \forall k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

حيث ρ_{k} سلمي (عدد حقيقي) و $d^{(k)}$ شعاع.



فأهمية هذه الطريقة في ميدان الأمثلة كان حافزا لنا لمحاولة دراستها وفهمها وانجاز مذكرة موضوعها يتمحور حول هذه الطريقة وحاولنا تبسيط شرحها.

تطرقنا في عملنا هذا إلى ثلاثة فصول حيث تناولنا في:

❂ الفصل الأول عموميات على الأمثلة ذكرنا بأهم التعاريف التي لها علاقة بدراستنا (الإستمرار، مفاهيم في الحساب التفاضلي، النظيم والجداء السلمي، المصفوفات، التحدب والتفاضل، التحدب والأمثلة).

❂ الفصل الثاني خوارزميات الأمثلة بدون قيود حيث تطرقنا إلى خوارزميات في فضاء أحادي البعد من بينها خوارزمية الإنحدار ....، ثم إلى خوارزميات في فضاء متعدد الأبعاد من بينها خوارزمية تدرج الخطوة المتغيرة....، ثم إلى طريقة التدرج المترافق وأدرجنا مثال تطبيقي على ذلك.

❂ الفصل الثالث طريقة التدرج بخطوة ثابتة وخطوة مثلى وفصلنا في طريقة التدرج المترافق وأدرجنا مثال تطبيقي على كل طريقة.

فنسأل الله تعالى أن يوفقنا في هذا العمل المتواضع.

الفصل 1

عموميات على الأمثلة

1.1 تمهيد

ميدان الأمثلة في الرياضيات يهتم بالبحث عن الحد الأصغري أو الحد الأعظمي لبعض التوابع الرياضية وهاته التوابع التي سنرمز لها بالرمز J تسمى في هذا التخصص بتوابع الكلفة وميدان دراستها عادة يكون في مجال الإقتصاد. طوال هذا العمل، سنعتبر J تابع متعلق بالمتغير $x = (x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n)$ من $\mathbb{R}^n$ أو من مجموعة جزئية $\mathcal{K}$ من $\mathbb{R}^n$ هذا التابع يأخذ قيمة في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. وعلى هذا الأساس، لنعتبر $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$ مفتوح والتطبيق $J : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$. ولتكن $\mathcal{K}$ مجموعة مغلقة ليست خالية من $\mathcal{U}$. في هذا الفصل سنهتم بمسائل الأمثلة ذات الشكل العام التالي:

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x \in \mathcal{K}} J(x) \tag{1.1}$$

وعليه، القول عن المسألة 1.1 أنها تقبل حل إذا وجد شعاع $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots\,, x_n^*)$ من $\mathcal{K}$ يحقق العلاقة التالية:

$$J(x^*) \leq J(x), \qquad \forall x \in \mathcal{K}$$

ونقول عن x^* أنه نقطة الحد الأصغري التي يبلغها التابع J على المجموعة $\mathcal{K}$. وعليه بفرض $I^* = J(x^*)$ فإننا نميز حالتين فيما يخص I^*:

1- إذا كانت $J(\mathcal{K})$ مجموعة ليست محدودة من الأسفل فإن: $I^* = -\infty$.

2- إذا كانت $J(\mathcal{K})$ مجموعة محدودة من الأسفل فإن: $I^* = \inf\{\, J(\mathcal{K})\,\}$.

تعريف 1.1.1:
ليكن $x^* \in \mathcal{K}$. القول عن J أنه يقبل حد أصغري شامل على $\mathcal{K}$ عند x^* إذا تحقق:

$$J(x^*) \leq J(x), \quad \forall x \in \mathcal{K}$$

تعريف 2.1.1:
ليكن $x^* \in \mathcal{K}$. القول عن J أنه يقبل حد أصغري محلي على $\mathcal{K}$ عند x^* إذا تحقق:

$$\exists R > 0, J(x^*) \leq J(x), \quad \forall x \in \mathcal{K} \cap B_R(x)$$

ملاحظة (1)

نشير إلى أن شروط وجود ووحدانية I^* تعتمد على تقريب الحد الأصغري x^* بالإعتماد على متتاليات $(x^{(n)})_n$ من $\mathcal{K}$ نسميها متتالية تصغيرية

1.1.1 المتتالية التصغيرية

تعريف 3.1.1:
ليكن I^* حد أصغري (محلي أو شامل) لمسألة الأمثلة 1.1 عند x^* ولتكن $(x^{(n)})_n$ متتالية من $\mathcal{K}$. القول عن $(x^{(n)})_n$ أنها متتالية أصغرية للمسألة 1.1 معناه:

$$\lim_{n \to \infty} J(x^{(n)}) = J(x^*) = I^*$$

مبرهنة 1.1.1:
لكل مسألة أمثلة تحت الشكل $\mathcal{P}$ متتالية تصغيرية.

مثال: طالب يريد التحضير للإختبار ولديه أربعة مواد لذلك، ويرغب في تقسيم الوقت للتحضير لأنه تبقى من الوقت ستة أيام فقط عن موعد الإختبار، بفرض أن الطالب يدرس سبعة ساعات مراجعة في اليوم.
من أجل هذا نعتبر $x^{(k)}$ هو الوقت المخصص لدراسة المادة رقم k حيث $k \in A = \{1, 2, 3, 4\}$.

من أجل هذا لدينا المجموعة التالية:

$$\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4, \quad \forall k \in A : \; x^{(k)} \geq 0 \wedge \sum_{k=1}^{4} x^{(k)} = 42 \right\}$$

ونعتبر التابع $M(x)$ هو معدل الطالب (على 20) الذي سيحصل عليه بعد الإختبار، هذه مسألة أمثلة على الطالب أن يحاول الحصول على أعلى معدل ممكن من أجل هذا عليه أن يحاول توزيع ساعات المراجعة على المواد يراعي فيها مدى صعوبة كل مادة بما في ذلك معاملها. كما نشير إلى أن مسألة الأمثلة هذه يمكن نمذجتها كمايلي:

$$\inf \{ 20 - M(x), \quad x \in \mathcal{K} \}$$

ففي هذه الحالة لدينا $J(x) = 20 - M(x)$. نحن لا ننكر أن هناك عوامل عديدة تتحكم في هذه المسألة مثل: الحالة النفسية للطالب، مدى صعوبة إختبار كل مادة، الوقت المخصص للإختبار ...وهذه هي طبيعة النماذج الرياضية فهي لا تأخذ جميع العوامل المتحكمة في المسألة المراد نمذجتها.

1.2 أمثلة في حالة $n = 1$

في هذه الحالة نعتبر $\mathcal{K} = [a\,,\,b]$ مجال مغلق ومحدود غير خال (أي أن $\mathcal{K}$ متراص) أو يمكن أن نعتبر $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ وتابع الكلفة $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ولهذه المسألة عدة أشكال. نذكر منها على سبيل المثال:

1- حالة التابع J مستمر ولا يقبل حد أصغري ولا حد أعظمي مثال ذلك التابع التآلفي على $\mathbb{R}$.

2- حالة J تابع غير مستمر وليس محدب تماما أي أن بيانه به قطعة مستقيم، فهذا التابع قد لا يقبل حد أصغري ولا حد أعظمي وقد يقبل حد أصغري أو حد أعظمي ولكنه ليس وحيدا.

3- حالة J تابع محدب تماما وقابل للإشتقاق وفي هذه الحالة فإن J يقبل حد أصغري وحيد.

من خلال هذه الأمثلة يمكننا تقديم بعض النتائج المتعلقة بمسائل الأمثلة، نذكر منها

1- وجود الحد الأصغري أو الحد الأعظمي متعلق بإستمراية التابع J.

2- وحدانية الحد الأصغري أو الحد الأعظمي متعلق بتحدب التابع J.

3- وجود العلاقة التي تحدد الحد الأصغري متعلق بقابلية إشتقاق التابع J

كل هاته النتائج وأخرى سنتعرف عليها في هذا الفصل.

ملاحظة (1)

إذا كان $K = \mathbb{R}^n$ تصبح الأمثلة غير مقيدة و هو موضوع الفصول اللاحقة

1.3 الإستمرار

تعريف 1.3.1:

لتكن الدالة:

$$J : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

نقول عن J أنها مستمرة عند $a \in D$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\eta > 0$ بحيث:

$$\| x - a \| < \eta \Rightarrow |J(x) - J(a)| < \varepsilon$$

وفي هذه الحالة يكون لدينا:

$$\lim_{x \to a} J(x) = J(a)$$

ملاحظة (1)

نقول عن J أنها مستمرة على $D \subset \mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند كل نقطة منه.

1.4 مفاهيم في الحساب التفاضلي

1.4.1 التفاضل من الدرجة الأولى

التفاضل

تعريف 1.4.1:
في الفضاء $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ نعتبر المجموعة $U \in \mathbb{R}^n$. مجموعة مفتوحة وليكن لدينا التابع $J : U \to \mathbb{R}$ وليكن $u \in U$. القول عن التابع J أنه قابل للمفاضلة عند u إذا وجد تطبيق خطي $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ يحقق:

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad u+h \in U, \quad J(u+h) = J(u) + L(h) + \|h\| \, \varepsilon(h).$$

حيث: $\lim_{\|h\| \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

الإشتقاق وفق شعاع

تعريف 2.4.1:
ليكن d شعاع غير معدوم من $\mathbb{R}^n$ وليكن $u \in U$. نعرف مشتقة التابع J عند النقطة u وفق الشعاع d كما يلي:

$$\frac{\partial J}{\partial d}(u) = \lim_{t \to 0} \frac{J(u+td) - J(u)}{t}.$$

الإشتقاق الجزئي

تعريف 3.4.1:
نعرف الإشتقاق الجزئي على أنه اشتقاق وفق أشعة الأساس القانوني ل J عند النقطة u، والذي يكتب من الشكل:

$$\frac{\partial J}{\partial e_i}(u) = \lim_{t \to 0} \frac{J(u+te_i) - J(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{J(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + t, u_{i+1}, \dots, u_n) - J(u_1, \dots, u_n)}{t}.$$

التفاضل و الإشتقاق وفق شعاع

مبرهنة 1.4.1:
إذا كان التابع J قابل للمفاضلة عند $u \in U$ فإنه يقبل الإشتقاق وفق جميع الأشعة حيث:

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle DJ(u)\,,\, h\rangle = DJ(u)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_i}(u) h_i.$$

التدرج

نعرف تدرج التابع J عند النقطة u كما يلي:

$$\nabla J(u) = \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}(u)\,,\, \dots\,,\, \frac{\partial J}{\partial x_n}(u)\right)^t$$

إذن:

$$DJ(u)(h) = \langle \nabla J(u), h\rangle \tag{1.2}$$

ملاحظة (1)

إذا كان J قابل للتفاضل عند النقطة u فإن $\nabla J(u)$ هو الشعاع الوحيد في $\mathbb{R}^n$ الذي يحقق العلاقة 1.2.

ملاحظة (2)

إذا كان التابع J قابل للمفاضلة عند u فإن النشر المحدود لـ J من الرتبة الأولى في جوار u يكتب وفق الشكل التالي:

$$J(u+h) = J(u) + \langle DJ(u)\,,\, h\rangle + o(\|h\|)$$

بحيث $\lim_{h \to 0} o(\|h\|) = 0$.

1.4.2 التفاضل من الدرجة الثانية

المصفوفة الهيسية

تعريف 1.4.4:
نعتبر التابع

$$J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \to J(x)$$

قابل للمفاضلة مرتين على نطاق مفتوح U من $\mathbb{R}^n$. نعرف المصفوفة الهيسية للتابع J عند u من U كمايلي:

$$\mathrm{Hiss}J(u) = \nabla^2 J(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}J(u) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}J(u) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial u_n}J(u) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}J(u) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}J(u) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n}J(u) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1}J(u) & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2}J(u) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}J(u) \end{pmatrix}$$

ملاحظة (3)

إذا كان التابع J قابل للمفاضلة مرتين عند u فإن النشر المحدود لـ J من الرتبة الأولى في جوار u يكتب وفق الشكل التالي:

$$J(u+h) = J(u) + \langle DJ(u)\, , \, h\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{Hiss}J(u)h\, , \, h\rangle + o(\|h\|^2)$$

بحيث $\lim\limits_{h\to 0} o(\|h\|^2) = 0$.

1.5 النظيم والجداء السلمي

1.5.1 النظيم

تعريف 1.5.1:
ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$. نسمي نظيم على E كل تطبيق من E نحو $\mathbb{R}_+$ نرمز له $\|.\|$ ويحقق الشروط التالية:

$$01-\ \forall x\in E,\qquad \|x\|=0\Leftrightarrow x=0$$

$$02-\ \forall x\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\qquad \|\lambda x\|=\lambda.\,\|x\|$$

$$03-\ \forall x\,,\,y\in E,\qquad \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

من بين النظم التي يمكن أن يزود بها الفضاء $\mathbb{K}^n$ هي من أجل كل $x=(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n)$ من $\mathbb{K}^n$ لدينا:

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}$$

$$\|x\|_\infty=\max\{|x_k|,\qquad k=\overline{1:n}\}$$

ملاحظة (1)

جميع النظم متكافئة في الفضاءات منتهية البعد.

1.5.2 الجداء السلمي

تعريف 2.5.1:
ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$. نسمي جداء سلمي (حقيقي) على E كل شكل ثنائي الخطية متناظر ومعرف موجب على الجداء الديكارتي $E\times E$ نرمز له بأحد الرموز التالية: $\langle .,.\rangle_E$ أو $(.,.)_E$ أو $(.|.)_E$ أي أنه يحقق الشروط التالية

$$01-\ \forall x\in E\backslash\{0_E\},\quad \langle x\,,\,x\rangle_E>0$$
$$02-\ \forall x\,,\,y\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\quad \langle\lambda x\rangle=\lambda.\langle x\rangle$$
$$03-\ \forall x\,,\,y\in E,\quad \langle x\,,\,y\rangle_E=\langle y\,,\,x\rangle_E$$
$$04-\ \forall x\,,\,y\,,\,z\in E,\quad \langle x+y\,,\,z\rangle_E=\langle x\,,\,z\rangle_E+\langle y\,,\,z\rangle_E$$

ملاحظة (2)

1- على الفضاء $E=\mathbb{R}$. التطبيق التالي يعرف لنا جداء سلمي: من أجل كل $A=(a_{ij})$ مصفوفة متناظرة ومن أجل كل $x=(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n)$ و $y=(y_1\,,\,y_2\,,\,\ldots\,,\,y_n)$ من E لدينا:

$$\langle Ax\,,\,y\rangle_E=x^tAy=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

ففي حالة $A=I_n$ أين نجد:

$$\langle I_nx\,,\,y\rangle_E=\langle x\,,\,y\rangle_E=x^ty=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$$

ويسمى هذا الأخير بالجداء السلمي النقطي أو الاعتيادي على $\mathbb{R}^n$.

2- على الفضاء $E=C([a\,,\,b])$ أسرة كل التوابع المستمرة على المجال $[a\,,\,b]$. التطبيق التالي يعرف لنا جداء سلمي: من أجل كل f و g من E لدينا:

$$\langle f\,,\,g\rangle_E=\int_a^b|(f.g)(x)|dx$$

ويسمى الجداء السلمي المستمر.

3- نشير إلى أن كل فضاء شعاعي مزود بجداء سلمي هو فضاء نظيمي والنظيم المرفق بالجداء السلمي معرف بالعلاقة التالية:

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x\,,\,x\rangle_E}, \quad \forall x \in E$$

1.6 عموميات على المصفوفات

تعريف 1.6.1:
لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. نقول عن A أنها مصفوفة نصف معرفة موجبة يعني أن $\langle Ax\,,\,x\rangle_{\mathbb{R}^n} \geq 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}^n$.

مبرهنة 1.6.1:
لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة. تكون المصفوفة A نصف معرفة موجبة إذا وفقط إذا وجد $\alpha > 0$ يحقق العلاقة التالية:

$$\langle Ax\,,\,x\rangle_{\mathbb{R}^n} \geq \alpha\,\|x\|^2\,, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

إثبات الشرط الكافي: إذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة تحقق العلاقة:

$$\langle Ax\,,\,x\rangle_{\mathbb{R}^n} \geq \alpha\,\|x\|^2 \geq 0$$

من أجل كل $x \in E$ فإن:

$$\langle Ax\,,\,x\rangle_{\mathbb{R}^n} \geq 0$$

وبالتالي فإن A نصف معرفة موجبة.

إثبات الشرط اللازم: نعتبر $A = (a_{ij})$ مصفوفة متناظرة ونصف معرفة موجبة. من أجل هذا نعرف التطبيق $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \langle Ax\,,\,x\rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i\,,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j, \quad x = (x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

من الواضح أنه كثير حدود وبالتالي فهو مستمرة على $\mathbb{R}^n$ وبالتالي فهو يبلغ حديه الأعلى والأدنى على المجموعة المتراصة $S = \{y \in \mathbb{R}^n, \quad \|y\| = 1\}$ أي أنه يوجد $y_0 \in S$ يحقق العلاقة:

$$f(y_0) \leq f(x), \quad \forall x \in S$$

بأخذ $\alpha = f(y_0)$، ولكون A نصف معرفة موجبة فإن $\alpha > 0$ لأن $y_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$، ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}^n$ فإنه يوجد $y \in S$ يحقق العلاقة $y = \frac{x}{\|x\|}$، وعلى هذا الأساس نجد:

$$f(x) = \langle Ax\,,\, x\rangle_{\mathbb{R}^n} = \|x\|^2 \langle Ay\,,\, y\rangle_{\mathbb{R}^n} \geq \|x\|^2 \langle Ay_0\,,\, y_0\rangle_{\mathbb{R}^n} = \alpha \|x\|^2$$

1.7 التحدب والتفاضل

تعريف 1.7.1:
ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ولتكن K مجموعة منه، عندئذ، القول عن K أنها محدبة يعني أن:

$$\forall \theta \in [0,1]\,, \quad \forall (x,y) \in K^2, \quad (1-\theta)\, x + \theta y \in K \tag{1.4}$$

تعريف 2.7.1:
ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ولتكن K مجموعة منه، وليكن التابع $J : K \to \mathbb{R}$. القول عن التابع J أنه محدب على K يعني أن:

$$\forall \theta \in [0,1]\,, \quad \forall (x,y) \in K^2 : J\left((1-\theta)\, x + \theta y\right) \leq (1-\theta)\, J(x) + \theta J(y) \tag{1.5}$$

ملاحظة (1)

إذا كانت المتباينة 1.5 تامة فإن J محدب تماما.

مبرهنة 1.7.1:
ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ولتكن K مجموعة محدبة منه، وليكن $J:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. تابع قابل للمفاضلة على K. ومنه العبارات التالية متكافئة :

01− التابع J محدب على K.

$$02-\ \forall (u,v) \in K^2, \quad J(v) \geq J(u) + \langle \nabla J(u), v-u \rangle$$
$$03-\ \forall (u,v) \in K^2, \quad \langle \nabla J(v) - \nabla J(u), v-u \rangle \geq 0$$

ملاحظة (2)

إذا كان التابع J محدب تماما فإن المبرهنة تظل محققة من أجل المتباينتين (02) و (03) تامتين.

نظريـة 1.7.1:
ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ولتكن K مجموعة محدبة منه، وليكن $J:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. تابع قابل للمفاضلة مرتين على K. يكون التابع J محدب على K إذا وفقط إذا كانت المصفوفة الهيسية $\mathrm{Hiss}J(u)$ نصف معرفة موجبة من أجل كل $u \in K$.

1.8 التحدب والأمثلة

مبرهنة 1.8.1:
ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ولتكن K مجموعة محدبة منه، وليكن $J:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع تربيعي محدب تماما على K. فإن حل المسألة 1.1 موجود ووحيد.

الإثبات: بالخلف نفرض J محدب تماما على K، لديه حدين أصغرين x, y نلاحظ أن m هي القيمة الأصغرية للحد الأصغري بحيث:

$$m = J(x) = J(y).$$

ليكن $z = \frac{1}{2}(x+y)$ منتصف $[x,y]$. و K محدب، لدينا $z \in K$ وبما أن J محدبة تماما فإن:

$$J\left(z\right)=J\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)<\frac{1}{2}J\left(x\right)+\frac{1}{2}J\left(y\right)=m.$$

وهذا يتناقض مع تعريف الحل الأصغري لـ J.

1.8.1 الأمثلة والتفاضلية الأولى

الشرط اللازم

نظرية 1.8.1:
ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ولتكن K مجموعة محدبة منه، وليكن $J:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ تابع يقبل حل أصغري محلي عند u من $\mathring{K}$. إذا كان J قابل للمفاضلة عند u فإن $\nabla J(u)=0$

ملاحظة (1)

تسمى المعادلة $\nabla J(u)=0$ أحيانا بمعادلة آولر.

الشرط الكافي

نظرية 2.8.1:
ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ولتكن K مجموعة محدبة منه، وليكن $J:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ تابع محدب وقابل للمفاضلة على $\mathring{K}$ وكان $\nabla J(u)=0$. فإن J يقبل حل أصغري محلي على K.

شروط الأمثلة في حالة K محدبة

نظرية 3.8.1:
ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ولتكن K مجموعة محدبة منه، وليكن $J:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ تابع قابل للمفاضلة على $\mathring{K}$ ويملك حل أصغري محلي عند u من $\mathring{K}$ فإن:

$$\left\langle\nabla J(u)\,,v-u\right\rangle\geq 0,\qquad\forall v\in\mathring{K}$$

الاثبات: ليكن u حل أصغري لـ J في المجموعة المحدبة K. نلاحظ أنه بتعريف التابع $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بناءا على تابع الكلفة J وذلك بالعلاقة التالية:

$$\forall t \in [0\,,\,1]\,, \qquad F(t) = J(u + tv)$$

حيث $u\,,\,v \in K$، ولدينا J قابل للمفاضلة على $\mathring{K}$ فإننا نجد:

$$\langle \nabla J(u + tv)\,,\,d\rangle = F'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} \geq 0$$

بأخذ $d = v - u \in K$ مع أن $u + t(v - u) = tv + (1 - t)u \in K$ نجد:

$$\langle \nabla J(u)\,,\,v - u\rangle = F'(0) \geq 0$$

1.8.2 الأمثلة و التفاضلية الثانية

الشرط اللازم

نظريـة 4.8.1:
ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ ولتكن K مجموعة محدبة منه، وليكن $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع يقبل حل أصغري محلي عند u من $\mathring{K}$. إذا كان J قابل للمفاضلة مرتين عند u فإن $\nabla J(u) = 0$ وأن $\mathrm{Hiss}J(u)$ نصف معرفة موجبة.

الشرط الكافي

نظرية 5.8.1:
ليكن $J:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع قابل للمفاضلة مرتين عند u و $u \in \mathring{K}$ و $\nabla J(u) = 0$. إذا كان:

$$\exists \alpha > 0, \forall h \in \mathbb{R}^n, \langle D^2 J(u)h, h\rangle \geq \alpha \parallel h\|^2$$

فإن u حل أصغري محلي.
وإذا كان:

$$\exists B_R(u) \subset K, \forall v \in B_R(u), h \in \mathbb{R}^n, \langle D^2 J(v)h, h\rangle > 0$$

فإن u حل أصغري محلي .

الفصل 2

خوارزميات الأمثلة بدون قيود

2.1 الخوارزميات

في هذا الفصل سنحاول التعرف على الشكل العام للخوارزميات المتبعة في البحث عن حدود المتتالية $(x^{(k)})_k$ من الفضاء $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ من أجل إيجاد الحلول التقريبية للمسألة 1.1.

تعريف 1.1.2:

الخوارزمية هي تطبيق $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ يسمح بتحديد $(x^{(k)})_k$ من الفضاء $\mathbb{R}^n$ وفق العلاقة:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, & \text{معطى} \\ x^{(k+1)} = \mathcal{F}(x^{(k)}), & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.1}$$

تعريف 2.1.2:

القول عن الخوارزمية 2.1 أنها متقاربة يعني أن $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \in \mathbb{R}^n$.

ملاحظة (1)

من المهم ضمان تقارب الخوارزمية عبر فرضيات مخصصة، لكن سرعة التقارب والتعقيد من العوامل أيضًا التي يجب مراعاتها عند استخدام (أو إنشاء) الخوارزمية، ومن المهم أيضا أن تكون الطريقة سريعة قدر الإمكان مع الحفاظ على الدقة والإستقرار وهما معياران أساسيان للخوارزمية إضافة إلى معيار قياس سرعة التقارب والمعرف بالعلاقة $e_k = \|x^* - x^{(k)}\|$.

2.1.1 معيار التقارب

تعريف 3.1.2:
لتكن $(x^{(k)})_k$ متتالية مولدة باستعمال الخوارزمية 2.1 ومتقاربة نحو x^*. عندئذ، القول عن الخوارزمية 2.1 أنها متقاربة خطيا يعني أن:

$$\exists C \in [0\,,\,1[\,,\ \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad e_{k+1} \leq C e_k, \quad \forall k \geq k_0.$$

ملاحظة (2)

هناك أنواع أخرى من التقاربات نذكر منها

- **التقارب فوق خطي:** القول عن الخوارزمية 2.1 أنها متقاربة فوق خطي إذا كان $e_{k+1} \leq \alpha_k e_k$ حيث $(\alpha_k)_k$ متتالية موجبة تماما متقاربة نحو الصفر. وكحالة خاصة إذا كانت $(\alpha_k)_k$ متتالية هندسية فإننا نقول عن الخوارزمية 2.1 أنها متقاربة هندسيا.
- **التقارب من الرتبة p:** القول عن الخوارزمية 2.1 أنها متقاربة من الرتبة p يعني أن:

$$\exists C \geq 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad e_{k+1} \leq C (e_k)^p, \quad \forall k \geq k_0.$$

وكحالة خاصة إذا كانت $p = 2$ فإن التقارب نسميه تقارب تربيعي.

2.1.2 شعاع الإنحدار

تعريف 4.1.2:
ليكن لدينا التابع $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابل للمفاضلة بحيث يوجد $x \in \mathbb{R}^n$ يحقق $\nabla J(x) \neq 0$ وليكن $d \in \mathbb{R}^n$. القول عن d أنه شعاع إنحدار للتابع J عند x يعني وجود $\alpha > 0$ يحقق العلاقة التالية:

$$J(x + \rho d) \leq J(x), \quad \forall\, \rho \in [0\,,\,\alpha[$$

نظريـة 1.1.2:
ليكن لدينا التابع $J:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابل للمفاضلة بحيث يوجد $x \in \mathbb{R}^n$ يحقق $\nabla J(x) \neq 0$ وليكن $d \in \mathbb{R}^n$.
القول عن d أنه شعاع إنحدار للتابع J عند x اذا وفقط إذا كان:

$$\langle \nabla J(x)\,,\, d\rangle \leq 0 \ldots (*)$$

الإثبات: لكون J قابل للمفاضلة عند x مع كون d شعاع إنحدار لـ J عند x فإنه لدينا:

$$\langle \nabla J(x)\,,\, d\rangle = \lim_{\rho \to 0} \frac{J(x+\rho d) - J(x)}{\rho} \leq 0$$

والآن، بفرض أن العلاقة $(*)$ محققة من النشر المحدود من الرتبة الأولى للتابع J في جوار x نجد:

$$J(x+\rho d) = J(x) + \rho \langle \nabla J(x)\,,\, d\rangle + o(\|\rho d\|) \ldots (1)$$

مع العلم أن $\lim_{\rho \to 0} o(\|\rho d\|) = 0$ مع إهمال باقي هذا الأخير والشرط $(*)$ نجد (1) تستلزم وجود $\alpha > 0$ يحقق العلاقة التالية:

$$\frac{J(x+\rho d) - J(x)}{\rho} \leq 0$$

من أجل كل $\rho \in [0\,,\,\alpha[$ ولكون $\rho \geq 0$ فإن:

$$J(x+\rho d) - J(x) \leq 0$$

2.1.3 خوارزمية الإنحدار

نسمي خوارزمية الإنحدار كل خوارزمية تحقق العلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} x^{(0)}, & \text{معطى} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d^{(k)}, & \forall k \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad 2.2$$

حيث $x^{(0)}$ يسمى الشعاع الإبتدائي للخوارزمية و $d^{(k)}$ هو شعاع الإنحدار لتابع الكلفة J أو نقول شعاع الإنحدار للخوارزمية أما ρ_k فيسمى مقدار خطوة الخوارزمية عند العملية التكرارية k. وهكذا نجد:

$$J(x^{(k+1)}) \leq J(x^{(k)}), \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$

ملاحظة (3)

هناك أنواع عديدة من خوارزميات الإنحدار والإختلاف بينهم يكمن في طريقة إختيار الشعاع $d^{(k)}$ ومقدار الخطوة ρ_k. كما أن هناك طرق و أساليب أخرى تعتمد على الاستقطاب ونتائج نظرية القيم المتوسطة.

2.2 خوارزميات في فضاء أحادي البعد

2.2.1 خوارزمية القطع الذهبي

في هذا المقطع نعتبر $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ونقوم ببناء المتتالية $(x^{(k)})_k$ التي تحقق العلاقة 2.3 وذلك وفقا لمتتالية من المجالات من الشكل $[a_k\,, b_k]$ التي تحتوي على الحد الأصغري x^* لتابع الكلفة J على مجال معلوم $[a\,, b]$ يحوي x^* مع أخذ $x^{(k)} = \frac{a_k+b_k}{2}$. من أجل هذا، للإنتقال من المجال $[a_k\,, b_k]$ إلى المجال $[a_{k+1}\,, b_{k+1}]$ مع إعتبار $[a_0\,, b_0] = [a\,, b]$ نتبع المراحل التالية:

الخطوة رقم k. نختار a' و b' ضمن المجال $[a_k\,, b_k]$ بحيث $a_k < a' < b' < b_k$ ثم نحسب كل من $J(a')$ و $J(b')$. فخلال هذه الخطوة نميز ثلاث حالات:

1- **الحالة الأولى:** إذا كان $J(a') < J(b')$ ففي هذه الحالة لدينا x^* يقع في المجال $[a_k\,, b']$. من أجل هذا نعرف المجال الجديد $[a_{k+1}\,, b_{k+1}] = [a_k\,, b']$.

2- **الحالة الثانية:** إذا كان $J(a') > J(b')$ ففي هذه الحالة لدينا x^* يقع في المجال $[a'\,, b_k]$. من أجل هذا نعرف المجال الجديد $[a_{k+1}\,, b_{k+1}] = [a'\,, b_k]$.

3- **الحالة الثالثة:** إذا كان $J(a') = J(b')$ ففي هذه الحالة لدينا x^* يقع في المجال $[a'\,, b']$. من أجل هذا نعرف المجال الجديد $[a_{k+1}\,, b_{k+1}] = [a'\,, b']$.

إلى هنا. نطرح السؤال التالي: كيف نختار a' و b' في كل خطوة من أجل الوصول إلى x^* أو إلى قيمة تقريبية بها أكبر عدد ممكن من الأرقام المعبرة وبأقل الخطوات الممكنة؟ من أجل هذا نقترح

أن نختار عامل التخفيض $\tau \in]0\,,\, b-a[$ من المجال $[a_k\,,\, b_k]$ إلى المجال $[a_{k+1}\,,\, b_{k+1}]$. وعليه، نجد

$$a' = a_k + \frac{1}{\tau^2}(b_k - a_k) \quad ; \quad b' = a_k + \frac{1}{\tau}(b_k - a_k)$$

وغالبا ما نأخذ τ يساوي قيمة العدد الذهبي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ من هنا أخذت اسم خوارزمية العدد الذهبي.

تطبيق: نأخذ مثال تطبيقي للتابع $f(x) = 2x^2 - \ln(x) - e^x$ على المجال $[0.2\,,\, 1.8]$ حيث نوضح الخوارزمية في الجدول التالي مع تقريب النتائج إلى 10^{-7}.

k	a_k	b_k	a'	b'	$f(a')$	$f(b')$	$x^{(k)}$	$\lvert x^{(k+1)} - x^{(k)} \rvert$
0	0.2000000	1.8000000	0.8111456	1.1888544	−0.7252626	−0.6295583	1.0000000	
1	0.2000000	1.1888544	0.5777088	0.8111456	−0.5657706	−0.7252626	0.6944272	0.305572809
2	0.5777088	1.1888544	0.8111456	0.9554175	−0.7252626	−0.7285037	0.8832816	0.188854382
3	0.8111456	1.1888544	0.9554175	1.0445825	−0.7285037	−0.7035237	1.0000000	0.116718427
4	0.8111456	1.0445825	0.9003106	0.9554175	−0.7342334	−0.7285037	0.9278640	0.072135955
5	0.8111456	0.9554175	0.8662526	0.9003106	−0.7336170	−0.7342334	0.8832816	0.044582472
6	0.8662526	0.9554175	0.9003106	0.9213595	−0.7342334	−0.7329924	0.9108351	0.027553483
7	0.8662526	0.9213595	0.8873016	0.9003106	−0.7343890	−0.7342334	0.8938061	0.017028989
8	0.8662526	0.9003106	0.8792616	0.8873016	−0.7342454	−0.7343890	0.8832816	0.010524494
9	0.8792616	0.9003106	0.8873016	0.8922706	−0.7343890	−0.7343857	0.8897861	0.006504495
10	0.8792616	0.8922706	0.8842306	0.8873016	−0.7343560	−0.7343890	0.8857661	0.004019999
11	0.8842306	0.8922706	0.8873016	0.8891996	−0.7343890	−0.7343959	0.8882506	0.002484496
12	0.8873016	0.8922706	0.8891996	0.8903726	−0.7343959	−0.7343952	0.8897861	0.001535503
13	0.8873016	0.8903726	0.8884746	0.8891996	−0.7343945	−0.7343959	0.8888371	0.000948993
14	0.8884746	0.8903726	0.8891996	0.8896476	−0.7343959	−0.7343961	0.8894236	0.00058651
15	0.8891996	0.8903726	0.8896476	0.8899245	−0.7343961	−0.7343959	0.8897861	0.000362483
16	0.8891996	0.8899245	0.8894765	0.8896476	−0.7343961	−0.7343961	0.8895620	0.000224027
17	0.8891996	0.8896476	0.8893707	0.8894765	−0.7343961	−0.7343961	0.8894236	0.000138456
18	0.8893707	0.8896476	0.8894765	0.8895418	−0.7343961	−0.7343961	0.8895092	$8.55706E-05$
19	0.8894765	0.8896476	0.8895418	0.8895822	−0.7343961	−0.7343961	0.8895620	$5.28856E-05$
20	0.8894765	0.8895822	0.8895169	0.8895418	−0.7343961	−0.7343961	0.8895294	$3.26851E-05$

فيتضح لنا أن $x^{(22)} = 0.8895294$ كما نشير إلى أنه يمكن التحقق من أن $x^* = 0.889549290248009\ldots$.

ملاحظة (1)

في هذه الحالة k هو عدد مرات المراحل التكرارية، لكن ليس من الضروري الوصول إلى x^*. من أجل هذا وجب علينا حساب الفرق $e_k = |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$ وتحديد العتبة ϵ من أجل التوقف عند المرحلة التكرارية k والتي من أجلها نحصل على $e_k < \epsilon$.

ملاحظة (2)

يمكن ترجمة خوارزمية العدد الذهبي إلى لغة برمجة معينة سنتحصل حتما على نفس النتائج التي تحصلنا عليها في الجدول الأخير، فمثلا لو كتبنا الخوارزمية بلغة FreeFem++ مع أخذ $\epsilon = 10^{-7}$ سنجد النتائج أسفل البرنامج:

```
func real f(real u){real r=2*u^2-log(u)-exp(u);  return r;}
int m=100,M;       real[int] X(m),A(m),B(m);
real a,b,aa,bb,tau,dis;
a=0.2;b=1.8;    tau=(1+sqrt(5))/2.;     A(0)=a;B(0)=b;  X(0)=(A(0)+B(0))/2.;
for(int n=1;n<m;n++){ M=n;
    aa=A(n-1)+(B(n-1)-A(n-1))/tau^2;
    bb=A(n-1)+(B(n-1)-A(n-1))/tau;
    bool p1,p2,q;     p1=f(aa)<f(bb);   p2=f(aa)>f(bb);
    if(p1) {   A(n)=A(n-1);B(n)=bb;  }
     else {  if(p2){  A(n)=aa;  B(n)=B(n-1);}
             else{ A(n)=aa; B(n)=bb;}  }
             X(n)=(A(n)+B(n))/2.;
             dis=abs(X(n)-X(n-1));     q=dis<1e-7;
             if(q) break;}
X.resize(M);    cout<<"X="<<X<<   endl;
cout<<"nomber des iterations est "<<M<<endl; sizestack + 1024 =1249  ( 225 )
```

```
X=33
1 0.694427191   0.883281573    1  0.927864045
0.883281573  0.910835056     0.893806067 0.883281573   0.889786068
0.885766069   0.888250565    0.889786068 0.888837075   0.8894235849
0.889786068  0.8895620411   0.8894235849 0.8895091556   0.8895620411
```

```
0.8895293561   0.8895495565 0.889537072 0.8895447879   0.8895495565
0.8895466093 0.8895484308 0.8895495565 0.8895488608 0.8895492908
0.8895495565 0.8895493923 0.8895492908
nomber des iterations est 33
```

2.2.2 خوارزمية الإستقطاب التكافئي

الفكرة الرئيسية لطريقة الإستقطاب التكافئي تقوم ببناء المتتالية $(y_k)_k$ بالاعتماد على إستقطاب دالة الكلفة J على متتالية المجالات $[x_k\,,\,z_k]$ من $[a\,,\,b]$ والتي تحوي x^* بكثير حدود من الدرجة الثانية عن طريقة الفروق المقسومة عند العقد $\{(x_k\,,\,J(x_k))\}$ ، $\{(y_k\,,\,J(y_k))\}$ و $\{(z_k\,,\,J(z_k))\}$ بحيث $a < x_k < y_k < z_k < b$ وفق المراحل التالية:

المرحلة رقم k: نختار $x_k\,,\,y_k$ و z_k بحيث $J(x_k) \geq J(y_k)$ و $J(z_k) \geq J(y_k)$. من أجل هذا نجد كثير حدود الاستقطاب هو:

$$P(x) = J\,[x_k] + J\,[x_k\,,\,y_k]\,(x - x_k) + J\,[x_k\,,\,y_k\,,\,z_k]\,(x - x_k)(x - y_k)$$

مع العلم أن:

$$J\,[x_k\,,\,y_k] = \frac{J(x_k) - J(y_k)}{x_k - y_k} \quad ; \quad J\,[x_k\,,\,y_k\,,\,z_k] = \frac{J\,[x_k\,,\,y_k] - J\,[y_k\,,\,z_k]}{x_k - z_k}$$

وهكذا نجد الحد الأصغري لكثير الحدود P يكون عند الفاصلة:

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}\left[(x_k + y_k) - \frac{J\,[x_k\,,\,y_k]}{J\,[x_k\,,\,y_k\,,\,z_k]}\right]$$

إلى هنا نميز حالتين:

1- إذا كان $y_{k+1} \in [x_k\,,\,y_k]$ في هذه الحالة نأخذ $x_{k+1} = x_k$ و $z_{k+1} = y_k$.

2- إذا كان $y_{k+1} \in [y_k\,,\,z_k]$ في هذه الحالة نأخذ $x_{k+1} = y_k$ و $z_{k+1} = z_k$.

فمثلا لو كتبنا الخوارزمية بلغة FreeFem++ مع أخذ المثال السابق سنجد النتائج أسفل البرنامج:

```
Junc real J(real u){real r=2*u^2-exp(u)-log(u);  return r;}//2*u^2-log(u)-exp(u)
Junc real dJ(real u){real r=4*u-exp(u)-(1/u);  return r;}//4*u-(1./u)-exp(u) with a=0.2;b=2;
Junc real J1(real u1,real u2){real r=(J(u1)-J(u2))/(u1-u2); return r;}
Junc real J2(real u1,real u2,real u3){real r=(J1(u1,u2)-J1(u2,u3))/(u1-u3);  return r;}
int m=100,M;       real[int] X(m),Y(m),Z(m);
real a,b,dis,pas,S0;    bool q;  a=0.2;   b=1.8;
X(0)=a;     Z(0)=b;       pas=(b-a)/10.;
   Y(0)=(a+b)/5.;
for(int n=1;n<20;n++){ M=n;
     Y(n)=0.5*( X(n-1)+Y(n-1) - J1(X(n-1),Y(n-1)) / J2(X(n-1),Y(n-1),Z(n-1)));
     bool s1,s2,s3,s4;
         s1=X(n-1)<Y(n); s2=Y(n)<Y(n-1);
         s3=Y(n-1)<Y(n); s4=Y(n)<Z(n-1);
         if(s1&s2) {X(n)=X(n-1);   Z(n)=Y(n-1);}
         else {X(n)=  Y(n-1);   Z(n)=Z(n-1);}
         dis=abs(dJ(Y(n)));
        q=dis<1e-8; if(q) break;
                                }
Y.resize(M);    cout<<"Y="<<Y<<   endl;
cout<<"nomber des iterations est "<<M<<endl; sizestack + 1024 =1305  ( 281 )
```

```
Y=19
0.4 1.084799807 1.064185078 0.9381116145 0.9209933166
0.9009577031 0.895742982 0.8921056467 0.8908235724 0.8901077865
0.8898166575 0.8896697983 0.889605895 0.8895751388 0.8895613243
0.8895548194 0.8895518538 0.8895504716 0.889549837
nomber des iterations est 19
```

يمكن إثبات أن الطريقة هي من الرتبة 1.3 أي أنه يمكن إثبات وجود ثابت $C > 0$ مستقل عن k يحقق العلاقة التالية:

$$|y_{k+1} - x^*| \leq C|y_k - x^*|^{1.3}$$

نقول أن الطريقة من الرتبة 1.3، يعني أنه إذا كان الخطأ في خطوة معينة هو 10^{-2} فستكون الطريقة من الرتبة $(10^{-2})^{1.3} \approx 2.5 \times 10^{-3}$ في الخطوة الموالية.

إحدى الصعوبات تتعلق ببدء استعمال الخوارزمية، عمليا يمكننا القيام بذلك بالطريقة التالية:
نختار $\alpha_0 \in [a;b]$، وخطوة موجبة ρ ثم نحسب $J(\alpha_0)$ و $J(\alpha_0+\rho)$ إذن توجد حالتين:

1- إذا كان $J(\alpha_0) \geq J(\alpha_0+\rho)$ فإن J متناقصة ومنه x^* تقع على يمين α_0 نستمر في حساب $J(\alpha_0+2\rho)$، $J(\alpha_0+3\rho)$، ...، $J(\alpha_0+k\rho)$ إلى أن نجد عدد صحيح k بحيث:

$$J(\alpha_0+k\rho) > J(\alpha_0+(k-1)\rho), \qquad k \geq 2$$

إذن نضع: $y_0 = \alpha_0+(k-1)\rho$, $x_0 = \alpha_0+(k-2)\rho$ و $z_0 = \alpha_0+k\rho$

2- إذا كان $J(\alpha_0) < J(\alpha_0+\rho)$ فإن x^* يقع على يسار $\alpha_0+\rho$ لدينا $-\rho$ هي خطوة إلى أن نجد عدد صحيح k بحيث:

$$J(\alpha_0-k\rho) \geq J(\alpha_0-(k-1)\rho)$$

إذن نضع: $y_0 = \alpha_0-(k-1)\rho$, $x_0 = \alpha_0-k\rho$ و $z_0 = \alpha_0-(k-2)$

ملاحظة (3)

البحث عن الخطوة ما هي إلا مرحلة من خوارزمية جد معقدة من أجل تصغير J. الفكرة العامة إذن هي محاولة الحصول على تقريب أحسن للخطوة المثلى.

إذا اعتبرنا $F(\rho) = J\langle x+\rho d\rangle$, مع $\rho > 0$ فإن $F(\rho) = \langle \nabla J(x+\rho d), d\rangle_{\mathbb{R}^n}$ وبالتالي، بما أن d هو اتجاه الإنحدارفإن:

$$F'(0) = \langle \nabla J(x), d\rangle_{\mathbb{R}^n} < 0$$

إضافة إلى ذلك إذا أخذنا ρ قليلا إلى يمين 0 فإن الدالة F حتما تتناقص.

2.3 خوارزميات في فضاء متعدد الأبعاد

نريد الوصول إلى x^*. فإننا نبحث عن $x^{(1)}$ إنطلاقا من $x^{(0)}$ بحيث $J(x^{(1)}) \leq J(x^{(0)})$ بشكل بسيط هو البحث عن الشعاع $x^{(1)}$ بحيث الشعاع $x^{(1)}-x^{(0)}$ موازيا لإتجاه الإنحدار $d^{(0)}$ مع أن $d^{(k)} \neq 0$ والعلاقة العامة التي

تحدد الإنطلاق من $x^{(k)}$ إلى $x^{(k+1)}$ تتم وفق الخوارزمية التالية:

$$\begin{cases} x^{(0)}, & \text{معطى} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d^{(k)}, & \forall k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.4}$$

مع العلم أن $\rho_k > 0$ في حين $d^{(k)}$ هو شعاع الانحدار كما سبق وأن أشرنا إليه في بداية الفصل. ففي حالة J قابل للمفاضلة في جوار $x^{(k)}$ فإن:

$$J(x^{(k+1)}) = J(x^{(k)} + \rho_k.d^{(k)}) = J(x^{(k)}) + \rho_k \left\langle \nabla J(x^{(k)}) \,,\, d^{(k)} \right\rangle + o(\left\| d^{(k)} \right\|)$$

وهكذا نكون قد تحصلنا على الخوارزمية التالية والتي تسمى بخوارزمية التدرج التي تعطى من الشكل:

$$\begin{cases} x^{(0)}, & \text{معطى} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \rho_k \nabla J(x^{(k)}), & k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.5}$$

عادة في مثل هذه الخوارزميات عندما نريد الوصول إلى الدقة $\|x^* - x^{(k)}\| \leq \epsilon$ يكفي تحقيق العلاقة:

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \leq \epsilon$$

وبما أن التقارب ليس دائما مضمون فإن القاعدة الأساسية هي تحديد العدد الأعظمي للتكرارات $k^{\max}$ في أي خوارزمية.

ملاحظة (1)

حتى لو كانت هذه الطريقة بسيطة من ناحية المفهوم ويمكن برمجتها مباشرة، إلا أنها غالبا ما تكون بطيئة في تحقيق أكبر عدد ممكن من الأرقام الدالة، فهي متقاربة ولكنها تتطلب شروط تقارب معقدة، ونشير إلى أن هناك صنفين من الخوارزميات يتفرعان منها وهما:

1- خوارزمية التدرج ذات خطوة ثابتة أي أن $\rho_k = \rho \in \mathbb{R}_+^*$ من أجل كل k.

2- خوارزمية التدرج ذات خطوة مثلى أي أن:

$$J\left(x^{(k)}+\rho_k d^{(k)}\right)=\min\{J(x^{(k)}+\rho.d^{(k)}),\quad \rho\in\mathbb{R}_*^+\}$$

2.3.1 خوارزمية تدرج الخطوة المتغيرة

نظرية 1.3.2:
ليكن $J:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ تابع $\alpha-$إهليجي أي أن:

$$\exists\alpha>0,\quad \forall(x\,,\,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\quad \langle\nabla J(x)-\nabla J(y),x-y\rangle\geq\alpha\left\|x-y\right\|,$$

وليكن ∇J ليبشيتزي أي أن:

$$\exists M>0,\quad \forall(x\,,\,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\quad \|\nabla J(x)-\nabla J(y)\|\leq M\left\|x-y\right\|$$

بحيث:

$$\exists a,b\in\mathbb{R},\quad 0<a<\rho_k<b<\frac{2a}{M^2},\quad \forall k\geq 0$$

عندئذ، طريقة التدرج تعرف بـ:

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\rho_k\nabla J(x^{(k)})$$

متقاربة بطريقة هندسية من أجل كل إختيار $x^{(0)}$ أي أن:

$$\exists\beta\in\,]0,1[\,,\left\|x^{(k+1)}-x^*\right\|_{\mathbb{R}^n}\leq\beta^k\left\|x^{(0)}-x^*\right\|_{\mathbb{R}^n}$$

نظرية 2.3.2:
إذا كان J من الصنف C^1 وكان $\alpha-$إهليجي فإن خوارزمية التدرج ذات خطوة مثلى تتقارب من أجل أي إختيار لشعاع البداية $x^{(0)}$.

ملاحظة (2)

1- التدرج بخطوة مثلى من حيث المبدأ هو أفضل هذه الطرق بالنسبة لسرعةالتقارب، ويمكن أن يكون بطيئا بسبب عدم توفر شروط المصفوفة الهيسية $\mathrm{Hiss}(J)$.

2- في حالة تدرج الخطوة المثلى تحصل على نفس نتيجة التقارب السابقة تحت فرضيات ضعيفة لـ J.

3- يمكن أخذ بعين الإعتبار معايير التقارب على التدرج لـ J في $x^{(k)}$ بحيث $\| \nabla J\left(x^{(k)}\right) \| < \varepsilon_1$.

2.4 طريقة التدرج المترافق

تعريف 1.4.2:
لتكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة وليكن $B \in \mathbb{R}^n$. القول عن $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ أنه تابع تربيعي مرفق بالمصفوفة A والشعاع B يعني أنه يكتب على الشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax\,,\,x\rangle - \langle B\,,\,x\rangle + c = \frac{1}{2}x^t Ax - B^t.x \qquad 2.6$$

ملاحظة (1)

1- من الملاحظ أن التابع التربيعي عبارة عن كثير حدود معرف على $\mathbb{R}^n$ وبالتالي فهو من الصنف C^∞. علاوة على ذلك فإن:

$$\nabla J(x) = Ax - B \quad ; \quad \mathrm{Hiss}(J) = A$$

2- في هذا الفصل سنهتم بطريقة التدرج المترافق وذلك بالبحث عن القيم الحدية للتوابع التربيعية، وبالتالي سنبحث وبطريقة غير مباشرة عن حلول النظام الخطي $Ax = B$ لأنه من كون J تابع قابل للمفاضلة ويملك قيمة حدية عند x^* فإن $\nabla J(x^*) = 0$ أي أن $Ax^* = B$.

نظريـة 1.4.2:
ليكن $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع تربيعي مرفق بالمصفوفة A والشعاع B. وليكن $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ القيمتين الذاتيتين الصغرى والكبرى لـ A على الترتيب. إذا كانت A مصفوفة معرفة موجبة فإن J تابع $\alpha-$إهليجي من أجل $\alpha = \lambda_{\min}$ في حين ∇J تابع $M-$ليبشيتزي من أجل $M = \lambda_{\max}$.

تعريف 2.4.2:
ليكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة معرفة موجبة وليكن $u\,, v \in \mathbb{R}^n$. القول عن u و v أنهما متعامدان بالنسبة إلى الجداء السلمي المرفق بـ A يعني أن $\langle Au\,, v\rangle = u^t Av = 0$.

ملاحظة (2)

في بعض المراجع يقصد بـ u و v مترافقان يعني أنهما متعامدان بالنسبة إلى الجداء السلمي المرفق بـ A.

تعريف 3.4.2:
ليكن $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابع تربيعي مرفق بالمصفوفة A المعرفة موجبة والشعاع B. وليكن $x^{(0)}$ شعاع معطى بحيث $\nabla J(x^{(0)}) \neq 0$. من أجل هذا نعرف خوارزمية التدرج المترافق من أجل $\nabla J(x^{(k)}) \neq 0$ بالعلاقة التالية:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d^{(k)}, \qquad k \in \mathbb{N} \tag{2.7}$$

حيث $d^{(0)} = -\nabla J(x^{(0)})$ ، $d^{(k)} = -\nabla J(x^{(k)}) + \dfrac{\left\|\nabla J(x^{(k)})\right\|^2}{\left\|\nabla J(x^{(k-1)})\right\|^2} d^{(k-1)}$ ، $\rho_k = \dfrac{\left\|\nabla J(x^{(k)})\right\|^2}{\langle Ad^{(k)}\,, d^{(k)}\rangle}$

2.4.1 مثال تطبيقي

من أجل المعطيات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ -39 \\ 42 \end{pmatrix} \quad ; \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

فإننا نحصل على النتائج الموضحة في الجدول التالي:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	ρ_k
0	1	1	1	
1	2.103002339485313	−2.910644658175201	4.810371718221990	0.100272939953210
2	1.197565470245279	−4.849894537594134	3.381390409582261	0.578786924954743
3	1.999999999999943	−4.999999999999872	2.999999999999827	4.307621625566413

حيث يمكن التحقق من أن $x^* = (2\,,\,-5\,,\,3)$. نشير إلى أنه يمكن الحصول على نتائج هذا الجدول بلغة FreeFem++ كما هو موضح أسفل الخوارزمية:

```
real a=1,b=-1,c=2,d=5,e=-4,f=6,b1=13,b2=-39,b3=42;
real[int,int] A=[[a,b,c],[b,d,e],[c,e,f]];
real[int] A1(3),A2(3), M(3),X0(3),B(3),uu(3),X1(3);
X0=[1,1,1];B=[b1,b2,b3];A1=[a,d,f];A2=[b,e,c];
func real F(real[int]&u){real s=0.,r=0.;
for(int j=0;j<3;j++){s+=0.5*A1[j]*u[j]^2-B[j]*u[j];}
for(int j=0;j<2;j++){r+=u[j]*u[j+1]*A2[j];} r+=u[0]*u[2]*A2[2];
return s+r;}
func real[int] dF(real[int]&u){M=0;
for(int j=0;j<3;j++){M[j]+=A1[j]*u[j]-B[j];}
M[0]+=b*u[1]+c*u[2];  M[1]+=b*u[0]+e*u[2];  M[2]+=c*u[0]+e*u[1];
return M;}
func real Ero(real[int]& xx,real[int]&yy){real epss=0;uu=0;
uu[0]+=a*xx[0]+b*xx[1]+c*xx[2];
uu[1]=b*xx[0]+d*xx[1]+e*xx[2];
uu[2]=c*xx[0]+e*xx[1]+f*xx[2];
for(int j=0;j<3;j++) epss+=abs(uu[j]-B(j));return epss;}
func real[int] initial(real[int]&vv){return vv;}
LinearCG(dF,X0,nbiter=0,precon=initial);
cout <<"LinearCG(Affine):J(x)="<<F(X0)<<" et Ero="<<Ero(X0,B)<<" "<<initial(X0)<<endl;
X0=[1,1,1];  LinearCG(dF,X0,nbiter=1,precon=initial);
cout <<"LinearCG(Affine):J(x)="<<F(X0)<<" et Ero="<<Ero(X0,B)<<" "<<initial(X0)<<endl;
X0=[1,1,1];  LinearCG(dF,X0,nbiter=2,precon=initial);
cout <<"LinearCG(Affine):J(x)="<<F(X0)<<" et Ero="<<Ero(X0,B)<<" "<<initial(X0)<<endl;
CG does'nt converge: 0 ||g||^2 = 19.6439 reps2= 3.086e-009
```

```
LinearCG(Affine):J(x)=-167.721 et Ero=7.44749 3
2.103002339 -2.910644658 4.810371718
CG does'nt converge: 1 ||g||^2 = 0.0436569 reps2= 3.086e-009
LinearCG(Affine):J(x)=-173.406 et Ero=0.300211 3
1.19756547 -4.849894538 3.38139041
LinearCG(Affine):J(x)=-173.5 et Ero=3.0731e-013 3
2  -5   3
```

لاحظ النتيجة الأخيرة التي توضح x^* ولدينا أيضا $J(x^*) = -173.5$ والمتمثلة في القيمة الحدية الدنيا للتابع التربيعي J المرفق بالمصفوفة A والشعاع B.

الفصل 3

طريقة التدرج المترافق

3.1 مقدمة

كما قد تناولنا طريقة التدرج المترافق في الفصل السابق وباختصار هي تعد من أفضل وأكفىء الطرق غير المباشرة لحل النظم الخطية ذات مصفوفة A متناظرة ومعرفة موجبة وذات الأبعاد الكبيرة. وبالإمكان كذلك تكييف هذه الطريقة لحل مسائل الأمثلة ذات القياس الكبير. طريقة التدرج المترافق طريقة تكرارية تستعمل لإيجاد حل للنظام الخطي التالي:

$$Ax = B \tag{3.1}$$

حيث $B \in \mathbb{R}^n$. نذكر بالخوارزمية العامة لهذه الطريقة وهي على الشكل التالي:

$$\begin{cases} x^{(0)}, & \text{معطى} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d^{(k)}, & k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.2}$$

مع العلم أن $\rho_k > 0$ في حين $d^{(k)}$ هو شعاع الإنحدار بالنسبة للتابع التربيعي J وهكذا نحصل على العلاقة التالية:

$$J(x^{(k+1)}) \leq J(x^{(k)}), \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

في هذا الفصل سنشرع في تفصيل هذه الطريقة لم نعرضها سابقا.

3.2 طرق التدرج

تعتمد طريقة التدرج المترافق أساسا في البحث عن $x^* \in \mathbb{R}^n$ الذي يحقق العلاقة التالية:

$$J(x^*) = \min\{J(x), \quad x \in \mathbb{R}^n\} \tag{3.4}$$

مع العلم أن $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ هي دالة الكلفة. ففي هذا الفصل سنعتبرها على شكل تابع تربيعي مرفق بالمصفوفة A والشعاع B للنظام 3.1. وعليه:

مبرهنة 1.2.3:
ليكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة معرفة موجبة و $B \in \mathbb{R}^n$ فإن $x^* \in \mathbb{R}^n$ هو حل للنظام الخطي 3.1 إذا وفقط إذا كان حل للمسألة 3.4.

الإثبات نلاحظ أن:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J(x) - J(x^*) =& \frac{1}{2}(Ax\,,\,x) - (B\,,\,x) - \frac{1}{2}(Ax^*\,,\,x^*) + (B\,,\,x^*)\\ =& \frac{1}{2}(Ax\,,\,x) - \frac{1}{2}(Ax^*\,,\,x^*) - (B\,,\,x - x^*)\end{aligned}$$

بما أن x^* حل للنظام 3.1 فإن:

$$\begin{aligned}J(x) - J(x^*) =& \frac{1}{2}(Ax\,,\,x) - \frac{1}{2}(Ax^*\,,\,x^*) - (Ax^*\,,\,x - x^*)\\ =& \frac{1}{2}(Ax\,,\,x) - \frac{1}{2}(Ax^*\,,\,x^*) - (Ax^*\,,\,x) + (Ax^*\,,\,x^*)\\ =& \left(\frac{1}{2}(Ax\,,\,x) - \frac{1}{2}(Ax^*\,,\,x)\right) + \left(\frac{1}{2}(Ax^*\,,\,x^*) - \frac{1}{2}(Ax^*\,,\,x)\right)\\ =& \frac{1}{2}(A(x - x^*)\,,\,x - x^*)\end{aligned}$$

ولكون A متناظرة ومعرفة موجبة فإن $J(x) - J(x^*) \geq 0$

نفرض الآن x^* حل للمسألة 3.4. من أجل ذلك نعتبر $z \in \mathbb{R}^n$ معطى في $\mathbb{R}^n$ ونعرف التابع $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالعلاقة التالية:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = J(x^* + tz)$$

وعليه، x^* حل للمسألة 3.4. فإن:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad F(0) \leq F(t)$$

ونتيجة لذلك، 0 هو الحد الأصغري للتابع القابل للإشتقاق F، ومنه $F'(0) = 0$ ولدينا أيضا:

$$\begin{aligned}
F'(0) =& \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} \\
=& \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} \frac{(A(x^* + tx), x^* + tz) - (B, x^* + tz) - \frac{1}{2}(Ax^*, x^*) + (B, x^*)}{t} \\
=& \lim_{t\to 0} \frac{t((Ax^*, z) - (B, z) + \frac{1}{2}t^2(Az, z)}{t} \\
=& (Ax^* - B, z)
\end{aligned}$$

ومنه $(Ax^* - B, z) = 0$ من أجل كل $z \in \mathbb{R}^n$ وبالتالي x^* حل للنظام الخطي 3.1.

ملاحظة (1)

نذكر أن تدرج الدالة: $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ عند النقطة $x \in \mathbb{R}^n$ يحقق:

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle \nabla G(x)\, ,\, z\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{G(x + tz) - G(x)}{t}$$

مع إعتبار تابع الكلفة $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نجد أن:

$$\langle \nabla J(x), z\rangle = \langle Ax - b, z\rangle\,, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

وبالتالي:

$$\nabla J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = Ax - b$$

والسؤال الذي نطرحه. هو كيف نختار $z \in \mathbb{R}^n$ بحيث $J(x + tz) \leq J(x)$ من أجل t صغير؟

الإجابة على هذا السؤال عن طريق إجراء النشر المحدود لـ $J(x+tz)$ بالنسبة لـ t بجوار 0 حيث:

$$J(x+tz) = J(x) + t\langle \nabla J(x), z\rangle + o(\|t\|)$$

بإختيار الإنحدار حسب الميل الأكبر $z_0 = -\nabla J(x)$ نجد:

$$J(x+tz_0) = J(x) - t\|\nabla J(x)\|_2^2 + o(t^2) \leq J(x)$$

من أجل t كافي صغير وموجب.

3.2.1 طريقة التدرج بخطوة ثابتة

المبدأ العام

طريقة التدرج بخطوة ثابتة هي معرفة بالخوارزمية التالية:

$$\begin{cases} x^{(0)}, & \text{معطى} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho \nabla J(x^{(k)}) = x^{(k)} + \rho(Ax^{(k)} - b) \end{cases} \quad 3.5$$

تقارب طريقة التدرج بخطوة ثابتة

نظرية 3.2.1:
إذا كانت $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة معرفة موجبة، فإن طريقة التدرج بخطوة ثابتة ρ تتقارب من أجل

$$\rho \in \left] \frac{-2}{\rho(A)}, 0 \right[\quad 3.6$$

حيث $\rho(A)$ هو نصف القطر الطيفي للمصفوفة A، أي أن المتتالية التي تولدها الخوارزمية 3.5 متقاربة، من أجل كل إختيار $x^{(0)}$ نحو الحل الوحيد للنظام الخطي 3.1.

الإثبات: مصفوفة الطريقة التكرارية 3.5 تعطى بـ:

$$B = I + \rho A \qquad 3.7$$

من المعلوم أن هذه الطرق التكرارية متقاربة إذا وفقط إذا كان:

$$\rho(B) < 1 \qquad 3.8$$

هذا يؤدي إلى $\rho \neq 0$. بالإضافة إلى ذلك لدينا من تعريف $S_p(A)$ و $S_p(B)$، مجموعتا القيم الذاتية ل A و B، على التوالي أن:

$$S_p(B) = \{1 + \rho\lambda / \quad \lambda \in S_p(A)\} \qquad 3.9$$

من الواضح أنه إذا كان $\lambda \in S_p(A)$ فإن $1 + \rho\lambda \in S_p(B)$. عكسيا، إذا كان $\delta \in S_p(B)$ فإن:

$$\exists u \in \mathbb{R}^n (u \neq 0), \quad (I + \rho A) = \delta u$$

أي:

$$Au = \frac{\delta - 1}{\rho} u, \quad \rho \neq 0$$

و $\delta = 1 + \rho \frac{\delta-1}{\rho}$ مع $\frac{\delta-1}{\rho} \in S_p(A)$ نستنتج من 3.9 أن شرط التقارب 3.8 محقق إذا وفقط إذا كان:

$$\lambda \in S_p(A), \quad 1 + \rho\lambda \in]-1, 1[$$

بما أن A مصفوفة معرفة موجبةفإن $S_p(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ نستنتج أن:

$$\forall \lambda \in S_p(A), \quad \rho \in \left] \frac{-2}{\lambda}, 0 \right[$$

أي:

$$\rho \in \left] \frac{-2}{\rho(A)}, 0 \right[$$

ملاحظة (2)

في خوارزمية التدرج الموضحة في 3.5 يسمى الوسيط ρ بخطوة الطريقة.

3.2.2 مثال تطبيقي

نأخذ المصفوفة A المعرفة ب: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 22 \end{pmatrix}$.

لدينا التابع: $J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ المعرف بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} \forall X = (x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad J(X) &= \tfrac{1}{2}\,\langle AX, X\rangle - \langle B, X\rangle \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - 8x + 17y - 22z \end{aligned}$$

من الملاحظ أن A مصفوفة متناظرة ومعرفة موجبة لأن $\mathrm{sp}(A) = \{2\,,\,2+\sqrt{2}\,,\,2-\sqrt{2}\}$ علاوة على ذلك فإن $\rho(A) = \max\{\mathrm{sp}(A)\} = 2 + \sqrt{2}$ وبالتالي J يقبل قيمة حدية وحيدة $X^* = (x^*, y^*, z^*)$ نبحث عنها باستعمال خوارزمية التدرج ذات الخطوة الثابتة وفق الخوارزمية 3.5 مع أخذ الشرط 3.6 أي أن:

$$\rho \in \left]-\frac{2}{\rho\,(A)}, 0\right[\approx \,]-0,58, 0[$$

وعليه بأخذ $\rho = -0,5$ على سبيل المثال و $X^{(0)} = (\,1\,,\,1\,,\,1\,)$
حساب $X^{(1)}$:

$$\begin{aligned} X^{(1)} =& X^{(0)} + \rho\left(AX^{(0)} - B\right) \\ =& \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0,5 \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 22 \end{pmatrix} \right] \\ =& \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0,5 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 22 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4.5000 \\ -7.5000 \\ 11.5000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

وبطريقة مماثلة نجد:

$$X^{(2)} = (0.2500\,,\ -0.5000\,,\ 7.2500)$$
$$X^{(3)} = (3.7500\,,\ -4.7500\,,\ 10,7500)$$
$$X^{(4)} = (1.6250\,,\ -1.2500\,,\ 8.6250)$$
$$X^{(5)} = (3.3750\,,\ -3.3750\,,\ 10.3750)$$
$$X^{(6)} = (2.3125\,,\ -1.625\,,\ 9.3125)$$

3.2.3 طريقة التدرج بخطوة مثلى

المبدأ العام

طريقة التدرج بخطوة مثلى تمثل في تغيير الوسيط ρ للخوارزمية 3.5 لكل تكرار k بخطوة ρ_k، تسمى خطوة مثلى.

مبرهنة 3.2.2:

ليكن J تابع تربيعي مرفق بالمصفوفة A والشعاع B وليكن x و d شعاعان من $\mathbb{R}^n$ بحيث $d \neq 0$. نعتبر مسألة البحث عن $\rho \in \mathbb{R}$ الذي يحقق العلاقة:

$$J(x+\rho d) \leq J(x+td), \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

عندئذٍ، إذا كانت A متناظرة معرفة موجبة،فإن المسألة 3.10 تقبل حل وحيد يعطى بـ:

$$\rho = -\frac{(Ax-B,d)}{(Ad,d)} \tag{3.11}$$

الإثبات: نعتبر التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف بالعلاقة $f(t) = J(x+td)$. ومنه

$$\begin{aligned}
f(t) &= \tfrac{1}{2}(A(x+td), x+td) - (B, x+td) \\
&= \tfrac{1}{2}\left[(Ax,x) + 2t(Ax,d) + t^2(Ad,d)\right] - (B,x) - t(B,d) \\
&= \tfrac{1}{2}t^2(Ad,d) + t(Ax-B,d) + \tfrac{1}{2}(Ax,x) - (B,x)
\end{aligned}$$

بما أن A معرفة موجبة و $d \neq 0$ من الفرض فإن $(Ad,d) > 0$ ومنه الدالة f تقبل حد أصغري شامل

من أجله نجد $f'(t^*)=0$. وعليه، بأخذ $\rho=t^*$ فإن:

$$\rho=\frac{(Ax-B,d)}{(Ad,d)}$$

تعليق: من خلال هذه النظرية الأخيرة نجد أن خوارزمية التدرج بخطوة مثلى معطاة بالعلاقة التالية:

$$\begin{cases} x^{(0)}, & \text{معطى} \\ x^{(k+1)}=x^{(k)}+\rho_k d^{(k)}, & k\in\mathbb{N} \end{cases} \tag{3.12}$$

حيث $d^{(k)}=Ax^{(k)}-B$ و $\rho_k=-\dfrac{\|d^{(k)}\|_2^2}{(Ad^{(k)}\,,\,d^{(k)})}$.

في الواقع قيمة ρ_k المحسوبة في التكرار k^{ieme} من الخوارزمية هي مثلى، لأنه من أجل كل إختيار آخر $t\in\mathbb{R}$، من المبرهنة 2.2.3 نجد $J(x^{(k+1)})\leq J(x^{(k)}+td^{(k)})$ وهذا الإختيار يسمح بالإقتراب بشكل أسرع من $x^*\in\mathbb{R}^n$ والذي يحقق $J(x^*)\leq J(x)$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}^n$.

تقارب طريقة التدرج بخطوةمثلى

نظريـة 2.2.3:
إذا كانت $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ متناظرة معرفة موجبة، طريقة التدرج بخطوة مثلى متقاربة.

3.2.4 مثال تطبيقي

نأخذ نفس المثال السابق نبحث عن $X^*=(x^*,y^*,z^*)$ باستعمال خوارزمية التدرج ذات خطوة مثلى وفق الخوارزمية 3.12 بأخذ $X^{(0)}=(1,1,1)$ نجد الأشعة التالية:

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\rho_0 d^{(0)}$$

أولا حساب $d^{(0)}$ كمايلي:

$$d^{(0)} = AX^{(0)} - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 17 \\ -21 \end{pmatrix}$$

ثانيا حساب ρ_0 كمايلي:

$$\rho_0 = -\frac{\| g_0 \|_2^2}{(Ag_0, g_0)}$$

حيث

$$\| g_0 \|_2^2 = (-7)^2 + (17)^2 + (-21)^2 = 779$$

و

$$(Ag_0, g_0) = g_0^T A g_0 = (-7, 17, -21) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 17 \\ -21 \end{pmatrix} = 2310$$

ومنه:

$$\rho_0 = -\frac{779}{2310} = -0.31036$$

إذن

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.31036 \begin{pmatrix} -7 \\ 17 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1725 \\ -4.2761 \\ 7.5175 \end{pmatrix}$$

وبطريقة مماثلة نجد

$$X^{(2)} = (1.8515\,,\ -3.1460\,,\ 8.8727)$$

$$X^{(3)} = (2.4354\,,\ -3.1378\,,\ 9.4351)$$

$$X^{(4)} = (2.4312\,,\ -2.5729\,,\ 9.4312)$$

$$X^{(5)} = (2.7177\,,\ -2.5688\,,\ 9.7177)$$

3.2.5 طريقة التدرج المترافق

المبدأ العام

في بقية هذا الفصل سنرمز لشعاع الإنحدار $d^{(k)}$ بالرمز g_k مع أخذ $g(x) = Ax - B$ لنجد $g_k = Ax^{(k)} - B$.
وعليه، المبدأ العام لطريقة التدرج المترافق يتم وفق الخوارزمية التالية:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k g_k \quad 3.13$$

طريقة التدرج المترافق تعني أخذ أول اتجاه للإنحدار $d^{(0)} = \nabla J(x^{(0)})$ ونختار في المرحلة $k+1$ الاتجاه $d^{(k+1)}$ بحيث:

$$(d^{(k+1)}, Ad^{(k)}) = 0 \quad 3.14$$

وخطوة مثلى ρ_k معرفة بـ:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad J(x^{(k)} + \rho_k d^{(k)}) \leq J(x^{(k)} + td^{(k)}) \quad 3.15$$

بالتالي فإن إتجاهات النزول $d^{(k)}$ و $d^{(k+1)}$ هي متعامدة بمعنى الجداء الديكارتي المرفق بالمصفوفة المتناظرة والمعرفة موجبة A.

مبرهنة 3.2.3:
من أجل $x^{(k)}$ معطى و لكل إختيار لـ $d^{(k)} \neq 0$ فإن ρ_k يعرف بـ 3.15 يعبر بـ:

$$\rho_k = -\frac{(g_k, d^{(k)})}{(Ad^{(k)}, d^{(k)})}$$

وتعطى العلاقتين التاليتين:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad g_{k+1} = g_k + \rho_k Ad^{(k)} \quad 3.16$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (d^{(k)}, g_{k+1}) = 0 \quad 3.17$$

الإثبات: من عبارة ρ_k يترتب عنها مباشرة المبرهنة 2.2.3 بالإضافة إلى ذلك لدينا:

$$\begin{aligned} g_{k+1} =& Ax^{(k+1)} - b \\ =& A(x^{(k)} + \rho_k d^{(k)}) - b \\ =& g_k + \rho_k A d^{(k)} \\ (d^{(k)}, g_{k+1}) =& (d^{(k)}, g_k) + \rho_k (Ad^{(k)}, d^{(k)}) \\ =& (d^{(k)}, g_k) - \frac{(g_k, d^{(k)})}{(Ad^{(k)}, d^{(k)})}(Ad^{(k)}, d^{(k)}) \\ =& 0 \end{aligned}$$

ملاحظة (3)

في طريقة التدرج المترافق نفرض أن الأشعة $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k-1)}$ و $d^{(1)}, d^{(2)}, \ldots, d^{(k-1)}$ تم حسابها سابقا.
إذا كان $d^{(k-1)} \neq 0$، نبحث عن $d^{(k)}$ في المستوي المشكل بالإتجاهين المتعامدين g_k و $d^{(k-1)}$ بوضع:

$$d^{(k)} = g_k + \alpha_k d^{(k-1)} \tag{3.18}$$

من 3.14 لدينا:

$$(d^{(k)}, Ad^{(k-1)}) = (g_k + \alpha_k d^{(k-1)}, Ad^{(k-1)}) = 0 \tag{3.19}$$

$$\alpha_k = -\frac{(g_k, Ad^{(k-1)})}{(Ad^{(k-1)}, d^{(k-1)})} \tag{3.20}$$

وصف خوارزمية التدرج المترافق

نقوم بتقديم الخوارزمية عن طريق إختيار الشعاع $x^{(0)}$.

1- إذا كان $g_0 = Ax^{(0)} - b = 0$ نوقف العمليات الحسابية.

2- إذا كان $g_0 \neq 0$ نختار $d^{(0)} = g_0$ ونجري الحسابات التالية:

$$\begin{cases} x^{(0)} \quad \text{معطى} \\ d^{(0)} = g_0 = Ax^{(0)} - b \\ \rho_0 = -\dfrac{\| g_0 \|_2^2}{(Ag_0, g_0)} \\ x^{(1)} = x^{(0)} + \rho_0 g_0 \end{cases} \qquad 3.21$$

من أجل $k \geq 1$، نأخذ:

$$\begin{cases} g_k = Ax^{(k)} - b \\ \alpha_k = -\dfrac{\left(Ag_k, d^{(k-1)}\right)}{\left(Ad^{(k-1)}, d^{(k-1)}\right)} \\ d^{(k)} = g_k + \alpha_k d^{(k-1)} \\ \rho_k = -\dfrac{\left(g_k, d^{(k)}\right)}{\left(Ad^{(k)}, d^{(k)}\right)} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d^{(k)} \end{cases} \qquad 3.22$$

3.2.6 مثال تطبيقي

نأخذ نفس المثال السابق نبحث عن $X^* = (x^*, y^*, z^*)$ بإستعمال خوارزمية التدرج المترافق وفق الخوارزمية 3.21 و 3.22 . بأخذ $X^{(0)} = (1,1,1)$ نجد الأشعة التالية:

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \rho_0 g_0$$

أولا نقوم بحساب g_0 و ρ_0 بالاعتماد على 3.21 كمايلي:

$$g_0 = d^{(0)} = AX^{(0)} - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 17 \\ -21 \end{pmatrix}$$

ولدينا:

$$\rho_0 = -\frac{\|g_0\|_2^2}{(Ag_0, g_0)}$$

حيث:

$$\|g_0\|_2^2 = (-7)^2 + (17)^2 + (-21)^2 = 779$$

في حين:

$$(Ag_0, g_0) = g_0^T A g_0 = (-7, 17, -21)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 17 \\ -21 \end{pmatrix} = 2510$$

ومنه:

$$\rho_0 = -\frac{779}{2510} = -0.3104$$

إذن:

$$X^{(1)} = (1,1,1) - 0,3104\begin{pmatrix} -7 \\ 17 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1725 \\ -4.2761 \\ 7.5175 \end{pmatrix}$$

البحث عن الشعاع $X^{(2)}$ المعرف بـ:

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \rho_1 d^{(1)}$$

أولا نقوم بحساب كل من $g_1, \alpha_1, d^{(1)}, \rho_1$ بالاعتماد على العلاقة 3.22 كمايلي

$$g_1 = AX^{(1)} - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3.1725 \\ -4.2761 \\ 7.5175 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6211 \\ -2.2422 \\ -2.6888 \end{pmatrix}$$

في حين لدينا:

$$\alpha_1 = -\frac{(Ag_1\,,\,d^{(0)})}{(Ad^{(0)}\,,\,d^{(0)})} = -\frac{(2.6211 \quad -2.2422 \quad -2.6888)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 17 \\ -21 \end{pmatrix}}{(-7, 17, -21)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 17 \\ -21 \end{pmatrix}} = 0,0246$$

وكذلك:

$$d^{(1)} = g_1 + \alpha_1 d^{(0)} = \begin{pmatrix} 2.6211 \\ -2.2422 \\ -2.6888 \end{pmatrix} + 0,0246 \begin{pmatrix} -7 \\ 17 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4492 \\ -1.8248 \\ -3.2045 \end{pmatrix}$$

وكذلك:

$$\rho_1 = -\frac{\left(g_1, d^{(1)}\right)}{\left(Ad^{(1)}, d^{(1)}\right)} = -\frac{(2,6211; -2,2422; -2,6888) \begin{pmatrix} 2.4492 \\ -1.8248 \\ -3.2045 \end{pmatrix}}{(2.4489 \quad -1.842 \quad -3.2054) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.4492 \\ -1.8248 \\ -3.2045 \end{pmatrix}}$$

$$\rho_1 = -\frac{19,1273}{36,4376} = -0,5249$$

إذن:

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 3.1725 \\ -4.2761 \\ 7.175 \end{pmatrix} - 0,5249 \begin{pmatrix} 2,4492 \\ -1,8248 \\ -3,2045 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8868 \\ -3.3182 \\ 9,1997 \end{pmatrix}$$

بطريقة مماثلة نجد $X^{(3)}$, $X^{(4)}$:

$$X^{(3)} = (3,0000; -2,0000; 10,0000)$$

$$X^{(4)} = (3,0000; -2,0000; 10,0000)$$

مقامات العبارات التي تظهر في 3.22 ليست معدومة كما تبينه التوطئة التالية:

توطئة 1.2.3:

ليكن $p \in \{1, 2, \dots, n\}$، نفرض أن $g_0, g_1, \dots, g_{p-1}$ ليست كلها معدومة، فإن $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(p-1)}$ غير معدومةو:

$$\rho_j = -\frac{\left(g_j, d^{(j)}\right)}{\left(Ad^{(j)}, d^{(j)}\right)}, \qquad j \in \{0, \dots, P-1\} \tag{3.23}$$

$$\alpha_k = -\frac{\left(Ag_k, d^{(k-1)}\right)}{\left(Ad^{(k-1)}, d^{(k-1)}\right)}, \qquad k \in \{1, \dots, p\} \tag{3.24}$$

معرفة جيدا و $\rho_k \neq 0$ من أجل كل $k \in \{0, \dots p-1\}$.

الإثبات: لإثبات أن العلاقتين 3.23 و 3.24 معرفتان جيدا، يكفي إثبات:

$$d^{(j)} \neq 0, \qquad \forall j \in \{0, \dots, p-1\}$$

لدينا A معرفة موجبة ومنه:

$$\left(Ad^{(j)}, d^{(j)}\right) \neq 0; \qquad j \in \{0, ..., p-1\}$$

إذن ρ_j و α_k معرفتان جيدا من أجل $j \in \{0, .., p-1\}$ و $k \in \{1, .., p\}$

نقوم بالبرهان بالتراجع

1- من أجل $j = 0$ فإن $d^{(0)} = g_0 \neq 0$

2- من أجل $j \in \{1, .., p-1\}$، لنفرض أن: $d^{(0)}, d^{(1)}, ..., d^{(j-1)}$ غير معدومة فإن α_j معرف جيدا ومن 3.18 لدينا:

$$d^{(j)} = g_j + \alpha_j d^{(j-1)}$$

ومن المبرهنة 3.2.3 لدينا:

$$\left(g_j, d^{(j-1)}\right) = 0$$

إذن:

$$\| d^{(j)} \|_2^2 = \left(g_j + \alpha_j d^{(j-1)}, g_j + \alpha_j d^{(j-1)}\right) = \| g_j \|_2^2 + (\alpha_j)^2 \| d^{(j-1)} \|_2^2$$

و من الفرض: $g^j \neq 0$ من أجل كل $j \in \{0, ..., p-1\}$ فإن $d^{(j)} \neq 0$ من أجل كل $j \in \{0, ..., p-1\}$ نستنتج أن α^k معرف جيدا من أجل كل $k \in \{1, ..., p\}$ وبالتالي من المبرهنة 3.2.3 نجد:

$$\rho_k = -\frac{(g_k, d^{(k)})}{(Ad^{(k)}, d^{(k)})} = -\frac{\left(g_k, g_k + \alpha_k d^{(k-1)}\right)}{(Ad^{(k)}, d^{(k)})} = -\frac{\| g_k \|_2^2}{(Ad^{(k)}, d^{(k)})} \neq 0, \quad \forall k \in \{1, ..., p-1\}$$

توطئة 3.2.2:

ليكن $p \in \{1, 2, ..., n\}$، نفرض أن $g_0, g_1, ..., g_{p-1}$ غير معدومة.إذن من أجل كل $k \in \{1, 2, ..., p\}$ فإن:

$$\left(g_k, d^{(j)}\right) = 0, \quad j \in \{0, 1, ..., k-1\} \tag{3.25}$$

$$(g_k, g_j) = 0, \quad j \in \{0, 1, ..., k-1\} \tag{3.26}$$

$$\left(d^{(k)}, Ad^{(j)}\right) = 0, \quad j \in \{0, 1, ..., k-1\} \tag{3.27}$$

الإثبات: 1- إثبات العلاقة 3.25.

نقوم بالبرهان بالتراجع من أجل $k = 1$ من 3.17 لدينا:

$$\left(g_1, d^{(0)}\right) = 0$$

و

$$(g_1, g_0) = \left(g_1, d^{(0)}\right) = 0$$

ومن 3.14 لدينا:

$$\left(d^{(1)}, Ad^{(0)}\right) = 0$$

نفرض أن الخاصية تبقى صحيحة حتى الرتبة $k \leq p-1$، ونبين أنها صحيحة بالنسبة للرتبة $k+1$، أي:

$$\left(g_{k+1}, d^{(j)}\right) = 0, \quad j \in \{0, 1, ..., k\} \tag{3.28}$$

$$(g_{k+1}, g_j) = 0 \quad j \in \{0, 1, ..., k\} \tag{3.29}$$

$$\left(d^{(k+1)}, Ad^{(j)}\right) = 0, \quad j \in \{0, 1, ..., k\} \tag{3.30}$$

إذا كان $j = k$ من 3.17 فإن $\left(g_{k+1}, d^{(k)}\right) = 0$

إذا كان $j \leq k-1$ من 3.16 ومن التوطئة 1.2.3 و من فرضية التراجع نجد:

$$\left(g_{k+1}, d^{(j)}\right) = \left(g_k + \rho_k Ad^{(k)}, d^{(j)}\right) = \left(g_k, d^{(j)}\right) + \rho_k \left(Ad^{(k)}, d^{(j)}\right) = 0$$

2- إثبات العلاقة 3.26

من 3.18 و 3.25 و التوطئة 1.2.3, من أجل كل $j \in \{1, ..., k\}$ نجد:

$$(g_{k+1}, g_j) = \left(g_{k+1}, d^{(j)} - \alpha_j d^{(j-1)}\right)$$

$$(g_{k+1}, g_j) = \left(g_{k+1}, d^{(j)}\right) - \alpha^j \left(g_{k+1}, d^{(j-1)}\right)$$

$$(g_{k+1}, g_0) = \left(g_{k+1}, d^{(0)}\right) = 0$$

وبإستعمال 3.25 نجد:

$$(g_{k+1}, g_j) = 0, \quad j \in \{0, 1, ..., k\}$$

3- إثبات العلاقة 3.27

إذا كان $j = k$ من 3.14 لدينا:

$$\left(d^{(k+1)}, Ad^{(k)}\right) = 0$$

إذا كان $j \leq k-1$ من 3.18 و التوطئة 1.2.3 نجد:

$$\left(d^{(k+1)}, Ad^{(j)}\right) = \left(g_{k+1} + \alpha_{k+1} d^{(k)}, Ad^{(j)}\right) = \left(g_{k+1}, Ad^{(j)}\right) + \alpha_{k+1}\left(d^{(j)}, Ad^{(j)}\right)$$

من فرضية التراجع :

$$\left(d^{(k+1)}, Ad^{(j)}\right) = \left(g_{k+1}, Ad^{(j)}\right)$$

ومن 3.16 نجد:

$$\left(d^{(k+1)}, Ad^{(j)}\right) = \left(g_{k+1}, \frac{g_{j+1} - g_j}{\rho_j}\right)$$

بما أن $\rho_j \neq 0$ ومن التوطئة 1.2.3 و من العلاقة 3.29 نجد:

$$\left(d^{(k+1)}, Ad^{(j)}\right) = \frac{1}{\rho_j}\left[(g_{k+1}, g_{j+1}) - (g_{k+1}, g_j)\right] = 0$$

تقارب خوارزمية التدرج المترافق

نظرية 3.2.3:
تتقارب خوارزمية التدرج المترافق بتكرار n كحد أقصى نحو x^*. بمعنى آخر من أجل كل إختيار لـ $x^{(0)}$ إذا كان $Ax^{(0)} - b \neq 0$ فإن:

$$\exists k \in \{1, 2, ..., n\}, \quad Ax^{(k)} = b$$

الإثبات: إذا كان $Ax^{(0)} - b = 0$ لا يوجد إثبات. لذلك نفرض أن $Ax^{(0)} - b \neq 0$.

1- إذا كان يوجد $k_0 \in \{1, ..., n-1\}$ بحيث $g_{k_0} = 0$ في هذه الحالة تتقارب الخوارزمية بشكل واضح في أقل من n تكرار.

2- إذا كان $g_k \neq 0$ من أجل كل $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ من 3.18 و 3.25 والتوطئة 1.2.3 نجد:

$$\begin{aligned} \| d^{(k)} \|_2^2 &= \left(g_k + \alpha_k d^{(k-1)}, g_k + \alpha_k d^{(k-1)}\right) \\ &= \| g_k \|_2^2 + \left(\alpha^k\right)^2 \| d^{(k-1)} \|_2^2 \end{aligned}$$

نستنتج أن $d^{(k)} \neq 0$ من أجل كل $k \in \{1, 2, ..., n-1)$. العائلة $\left(d^{(0)}, d^{(1)}, ..., d^{(n-1)}\right)$ من 3.27

هي أساس في $\mathbb{R}^n$، متعامدة من خلال الجداء الديكارتي:

$$(x, y)_A = (Ax, y)$$

و من التوطئة 2.2.3 نجد:

$$\forall j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}, \qquad \left(d^{(n)}, d^{(j)}\right)_A = 0$$

ومنه $d^{(n)} = 0$. من 3.18, 3.25 و التوطئة 1.2.3 فإن:

$$\| d^{(n)} \|_2^2 = \| g_n \|_2^2 + (\alpha^n)^2 \| d^{(n-1)} \|_2^2$$

بما أن $d^{(n)} = 0$ فإن:

$$g_n = Ax^{(n)} - b = 0$$

إذن تتقارب الخوارزمية عند التكرار n.

مبرهنة 4.2.3:
من أجل $k \geq 1$ وإذا كان $g_i \neq 0$ من أجل $i \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}$ فإن:

$$\alpha_k = \frac{\| g_k \|_2^2}{\| g_{k-1} \|_2^2} \tag{3.31}$$

من التوطئة 1.2.3 لدينا:

$$\alpha_k = -\frac{\left(Ag_k, d^{(k-1)}\right)}{\left(Ad^{(k-1)}, d^{(k-1)}\right)} \tag{3.32}$$

من 3.16 والتوطئة 1.2.3 و 3.26 نجد:

$$\left(Ag_k, d^{(k-1)}\right) = \left(g_k, Ad^{(k-1)}\right) = \left(g_k, \frac{g_k - g_{k-1}}{\rho_{k-1}}\right) = \frac{\| g_k \|_2^2}{\rho_{k-1}} \tag{3.33}$$

إضافة إلى ذلك، من 3.16 و 3.25 و التوطئة 1.2.3 نجد:

$$\left(Ad^{(k-1)}, d^{(k-1)}\right) = \left(\frac{g_k - g_{k-1}}{\rho_{k-1}}, d^{(k-1)}\right) = -\frac{\left(g_{k-1}, d^{(k-1)}\right)}{\rho_{k-1}} \tag{3.34}$$

لكن من 3.18 و التوطئة 1.2.3 نجد:

$$d^{(0)} = g_0$$

و

$$d^{(k-1)} = g_{k-1} + \alpha_{k-1} d^{(k-2)}, \qquad k \geq 2$$

بإستخدام التوطئة 1.2.3 و العلاقتين 3.34، 3.25 نجد:

$$(Ad^{(k-1)}, d^{(k-1)}) = -\frac{1}{\rho_{k-1}}(g_{k-1}, g_{k-1} + \alpha_{k-1} d^{(k-2)}) = -\frac{\| g_{k-1} \|_2^2}{\rho_{k-1}} \qquad 3.35$$

و كنتيجة من 3.32، 3.33 و 3.35 نأخذ:

$$\alpha_k = \frac{\| g_k \|_2^2}{\| g_{k-1} \|_2^2}$$

نتيجة المبرهنة 4.2.3 والعلاقة 3.16 تسمح بكتابة خوارزمية التدرج المترافق 3.21 و 3.22 على الشكل التالي:

$$\begin{cases} x^{(0)} \quad \text{معطى} \\ d^{(0)} = g_0 = Ax^{(0)} - B \\ \rho_0 = -\dfrac{\|g_0\|_2^2}{(Ag_0, g_0)} \\ x^{(1)} = x^{(0)} + \rho_0 d^{(0)} \\ g_1 = g_0 + \rho_0 A d^{(0)} \end{cases} \qquad 3.36$$

من أجل $k \geq 1$ فإن:

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{\|g_k\|_2^2}{\|g_{k-1}\|_2^2} \\ d^{(k)} = g_k + \alpha_k d^{(k-1)} \\ \rho_k = -\dfrac{(g_k, d^{(k)})}{(Ad^{(k)}, d^{(k)})} = \dfrac{\left\|\nabla J(x^{(k)})\right\|^2}{\langle Ad^{(k)}, d^{(k)} \rangle} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d^{(k)} \\ g_{k+1} = g_k + \rho_k A d^{(k)} \end{cases} \qquad 3.37$$

3.2.7 مثال تطبيقي

من أجل المعطيات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ -39 \\ 42 \end{pmatrix} \quad ; \quad X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بتطبيق خوارزمية التدرج المترافق نجد الأشعة التالية:

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \rho_0 d^{(0)}$$

أولا نقوم بحساب ρ_0 و $d^{(0)}$ بالاعتماد على العلاقة 3.36 كما يلي:

$$\rho_0 = -\frac{\| g_0 \|_2^2}{(Ag_0, g_0)}$$

حيث:

$$g_0 = d^{(0)} = AX^{(0)} - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ -39 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 39 \\ -38 \end{pmatrix}$$

$$\| g_0 \|_2^2 = (-11)^2 + (39)^2 + (-38)^2 = 3086$$

في حين:

$$(Ag_0, g_0) = g_0^T A g_0 = \begin{pmatrix} -11 & 39 & -38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ 39 \\ -38 \end{pmatrix} = 30776$$

ومنه:

$$\rho_0 = -\frac{3086}{30776} = -0.10027$$

إذن:

$$X^{(1)} = (1,1,1) - 0.10027 \begin{pmatrix} -11 \\ 39 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.10297 \\ -2.91053 \\ 4.81026 \end{pmatrix}$$

البحث عن الشعاع $X^{(2)}$ المعرف بـ:

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \rho_1 d^{(1)}$$

أولا نقوم بحساب كل من $g_1, \alpha_1, d^{(1)}, \rho_1$ بالاعتماد على العلاقة 3.37 كما يلي:

$$g_1 = g_0 + \rho_0 A d^{(0)} = \begin{pmatrix} -11 \\ 39 \\ -38 \end{pmatrix} - 0.10027 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ 39 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.63402 \\ 3.10334 \\ 2.70962 \end{pmatrix}$$

حيث:

$$\| g_1 \|_2^2 = (1.63402)^2 + (3.10334)^2 + (2.70962)^2 = 19.64278$$

في حين:

$$\alpha_1 = \frac{\| g_1 \|_2^2}{\| g_0 \|_2^2} = \frac{19.64278}{3086} = 0.00636$$

وكذلك:

$$d^{(1)} = g_1 + \alpha_1 d^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.63402 \\ 3.10334 \\ 2.70962 \end{pmatrix} + 0.00636 \begin{pmatrix} -11 \\ 39 \\ -38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.56406 \\ 3.35138 \\ 2.46794 \end{pmatrix}$$

وكذلك:

$$\rho_1 = -\frac{(g_1, d^{(1)})}{(Ad^{(1)}, d^{(1)})} = \frac{\begin{pmatrix} 1.63402 \\ 3.10334 \\ 2.70962 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.56406 \\ 3.35138 \\ 2.46794 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1.56406, 3.35138, 2.46794 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.56406 \\ 3.35138 \\ 2.46794 \end{pmatrix}} = -\frac{19.64335}{33.93785} = -0.57880$$

إذن:

$$X^{(2)}=(2.10297,-2.91053,4.81026)-0.57880\begin{pmatrix}1.56406\\3.35138\\2.46794\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.19769\\-4.85030\\3.38181\end{pmatrix}$$

بطريقة مماثلة نجد $X^{(3)}$:

$$X^{(3)}=\begin{pmatrix}1.99999\\-4.99999\\2.99999\end{pmatrix}$$

إختبار التوقف

إختبار التوقف يتوقف عند الخطوة التكرارية k^{ieme} ، إذا كان:

$$\frac{\| g_k \|}{\| b \|}<\varepsilon \tag{3.38}$$

إذا كانت 3.38 محققة فإن:

$$\frac{\| x^{(k)}-A^{-1}b \|}{\| x \|}<\varepsilon Cond\,(A)$$

حيث $Cond\,(A)$ هو العدد الشرطي للمصفوفة A و الذي يرمز له بـ $k(A)$ كما يلي:

$$k(A)=\| A^{-1} \| \,.\, \| A \|$$

و x حل للنظام 3.1.

بالفعل:

$$\| x^{(k)}-A^{-1}b \|=\| A^{-1}g_k \|\leq\| A^{-1} \| \quad \| g_k \|$$

حيث $g_k=Ax^{(k)}-b$، إذا كانت 3.38 محققة فإن :

$$\| x^{(k)}-x \|\leq\varepsilon \| A^{-1} \|\| b \|\leq\varepsilon \| A^{-1} \|\| A \|\| x \|=\varepsilon Cond\,(A) \| x \|$$

نستخدم أيضا إختبارا آخر يتكون من توقف التكرارات عندما يكون:

$$\| x^{(k+1)}-x^{(k)} \|\leq\varepsilon \| x^{(k)} \|$$

هذا الإختبار له سلبيات في بعض الحالات حيث يتم التحقق من $x^{(k)}$ دون أن يكون قريبا بدرجة كافية من الحل.

عدد العمليات

ليكن c أكبر عدد من المعاملات غير المعدومة في سطور المصفوفة A. في كل تكرار لخوارزمية التدرج عدد العمليات محدد وفق الجدول التالي:

حساب	ضرب/قسمة	جمع/طرح
α^k	n+1	n-1
w^k	n	n
Aw^k	nc	n(c-1)
r^k	2n+1	2(n-1)
$x^{(k+1)}$	n	n
g_{k+1}	n	n
$\parallel g^{k+1} \parallel_2^2$	n	n-1

في المجموع $(c+7)\ 2+n$ ضرب و قسمة و المجموع $(c+6)\ 4-n$ جمع و طرح. إذن عدد العمليات يقارب $(2c+13)n$ لكل تكرار. بالنسبة لعدد التكرارات من الرتبة n، فإننا نصل إلى عدد العمليات القريبة من $(2c+13)\,n^2$، وهو أمر مهم نسبيا عندما يكون c كبيرا (إذا كان $c=n$، نحصل على $2n^3$ عمليات، بينما تتطلب طريقة شولسكي $\frac{n^3}{3}$ عمليات فقط)
تعتبر طريقة التدرج المترافق من أفضل الطرق المناسبة لحل الأنظمة الخطية التي تكون فيها المصفوفة متناظرة ومعرفة موجبة وأكثر معاملاتها معدومة. بالإضافة إلى ذلك بفضل تقنيات التكيف المسبق للنظام الخطي 3.1. يمكن تقليل عدد العمليات بشكل كبير.

طريقة التدرج المترافق المكيفة مسبقا

تتمثل إحدى تقنيات التكييف المسبق للنظام الخطي 3.1. في إستبدال حل هذا النظام بحل النظام المكافئ:

$$\begin{cases} L^{-T}AL^{-1}y = L^{-T}b \\ Lx = y \end{cases} \quad 3.39$$

حيث L مصفوفة قابلة للعكس و $L^{-T}AL^{-1}$ مهيئة جيدا أي أن:

$$cond\left(L^{-T}AL^{-1}\right) \simeq 1 \tag{3.40}$$

يمكننا بسهولة التحقق من أن المصفوفة $L^{-T}AL^{-1}$ متناظرة ومعرفة موجبة و A كذلك و أن L قابلة للعكس. طريقة التدرج المترافق المطبقة على حل النظام الخطي:

$$L^{-T}AL^{-1}y = L^{-T}b \tag{3.41}$$

يمكن تفسيرهاعلى أنها طريقة لتصغير الدالة $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـ:

$$F(y) = \frac{1}{2}\left(L^{-T}AL^{-1}y, y\right) - \left(L^{-T}b, y\right) \tag{3.42}$$

حيث تدرج الدالة F يعطى بـ:

$$\nabla F(y) = L^{-T}AL^{-1}y - L^{-T}b \tag{3.43}$$

من خلال إدخال الترميز $G_k = \nabla F(y_k)$ و تعيين $D^{(k)}$ إتجاه الإنحدار، فإن تكرار خوارزمية التدرج المترافق المطبقة على حل النظام 3.41. يكتب وفق 3.37. بـ:

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{\|G_k\|_2^2}{\|G_{k-1}\|_2^2} \\ D^{(k)} = G_k + \beta_k D^{(k-1)} \\ R_k = -\frac{\left(G_k, D^{(k)}\right)}{\left(L^{-T}AL^{-1}D^{(k)}, D^{(k)}\right)} \\ y_{k+1} = y_k + R_k D^{(k)} \\ G_{k+1} = G_k + R_k L^{-T}AL^{-1}D^{(k)} \end{cases} \tag{3.44}$$

بالعودة إلى المتغير الأولي $x = L^{-1}y$ نجد:

$$\begin{cases} x^{(k)} = L^{-1}y^{(k)} \\ d^{(k)} = D^{(k)} \\ \alpha_k = \beta_k \\ \rho_k = R_k \\ g_k = Ax_k - b \end{cases} \tag{3.45}$$

من الواضح أنه لدينا:

$$G_k = L^{-T}Ax_k - L^{-T}b = L^{-T}g_k \tag{3.46}$$

إذن يمكن كتابة 3.44 ب:

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{\|L^{-T}g_k\|_2^2}{\|L^{-T}g_{k-1}\|_2^2} \\ d^{(k)} = L^{-T}g_k + \alpha_k d^{(k-1)} \\ \rho_k = -\frac{\left(L^{-T}g_k, d^{(k)}\right)}{\left(AL^{-1}d^{(k)}, L^{-1}d^{(k)}\right)} \\ x_{k+1} = x_k + \rho_k L^{-1}d^{(k)} \\ g_{k+1} = g_k + \rho_k AL^{-1}d^{(k)} \end{cases} \tag{3.47}$$

الخوارزمية التي تم تعريف تكرارها الحالي أكثر فعالية من تلك المعرفة ب 3.36 و 3.37 عندما تكون 3.40 محققة أي عندما تكون $L^{-T}AL^{-1}$ مهيئة جيدا.

ملاحظة (4)

لتكن $A = BB^T$ تحليل شولسكي ل A، نختار $L = B^T$ إذن:

$$L^{-T}AL^{-1} = B^{-1}AB^{-T} = I$$

أي:

$$Cond\left(L^{-T}AL^{-1}\right) = 1$$

تتقارب خوارزمية التدرج المترافق المطبقة على $L^{-T}AL^{-1}$ في التكرار الأول.

خاتمة

بفضل من الله وتوفيقه أتممنا إعداد هذه المذكرة فمن خلال دراستنا لطريقة التدرج المترافق التي تعتبر من أحسن الطرق التراجعية لحل النظم الخطية مثل طريقة جاكوبي، طريقة غوص سايدال والشيء الذي يميزهذه الطريقة هو كونها تمكننا من الحصول على الحل الدقيق في عدد منته من العمليات التكرارية والذي يكون أصغر أو يساوي من رتبة مصفوفة النظام الخطي. في مذكرتنا هذه تناولنا أمثلة تطبيقية لإيضاح خطوات الطريقة من أجل إيضاح أكبر للقارىء الكريم.

نتمنى أن يكون قد نال إعجابكم وأن يكون في مستوى تطلعاتكم حيث جمعنا لكم فيه مجموعة من المعلومات المهمة بعد مشوار طويل من البحث والإجتهاد، ويبقى ما قدمناه ما هو إلا الشيء اليسير من هذا المجال الواسع.

وفي الأخير نسأل الله أن يعود علينا وعليكم هذا العمل بالفائدة وأن يوفقنا الله لما يحبه ويرضاه.

ملخص

قمنا في هذا العمل بدراسة خوارزميات الأمثة بدون قيود في فضاء أحادي البعد وفي فضاء متعدد الأبعاد والتي تسمح بإيجاد حل لإشكاليات الأمثلة المتعلقة بتصغير الدوال التربيعية، وركزنا على طريقة التدرج المترافق كما أدرجنا مثال تطبيقي على ذلك.

❂ الكلمات المفتاحية: الأمثلة، التدرج المترافق، الخوارزمية، خطوة الخوازمية، التابع التربيعي، مصفوفة معرفة موجبة، شعاع الإنحدار، التفاضل التابع، الأشعة المترافقة، الحد الأدنى.

المراجع العلمية

[1] D. Azè et J.D. Hiriart-Urruty, Analyse variationnelle et optimisation, Cèpadues, 2010.

[2] M. Bergounioux, Optimisation et controle des systèmes linèaires, Dunod, paris, 2001.

[3] J. Cèa, Optimisation : thèorie et algorithmes, Dunod, 1971.

[4] P. Ciarlet, Introduction a l'analyse numèrique matricielle et a l'optimisation, Masson, Paris, 1982.

[5] P. Ciarlet, B. Miara, J.M Thomas, Exercicer l'analyse numèrique matricielle et d'optimisation, Masson, Paris, 1987.

[6] Philippe G Cialet, Introduction a l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.Dunod, 2007.

[7] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, Optimisation et analyse convexe (exercices corrigès), Presses Universitaires de France-PUF, 1998.

[8] Grègoire Allaire, Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, Editions Ecole Polytechnique, 2005.