



République algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et la Recherche
Scientifique



Ecole Normale Supérieure d'Enseignement Technologique
-Skikda-

Département de mathématiques et d'informatique

Mémoire :

Présenté pour obtenir un diplôme en tant que professeur de l'enseignement moyen

Intitulé :

Processus de Poisson

Présenter par :

Ziadi Nihel

Mourakeb Yousra

Soutenu le 29/06/2025 devant le jury composé de :

Mme. Fnizri Fatma Zohra	ENSET SKIKDA	Présidente
Mr.Ferrag Azouz	ENSET SKIKDA	Encadrant
Mme. Sghire Fatma Zohra	ENSET SKIKDA	Examinatrice
Mme. Merabet Farida	ENSET SKIKDA	Examinatrice

Année universitaire 2024/2025

=====

Remerciement

Louange à Dieu, le Tout-Puissant, pour m'avoir accordé la force, la patience et la sagesse nécessaires à l'accomplissement de ce travail. Sans Sa volonté et Sa miséricorde, rien n'aurait été possible. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **Ferrag Azouz**, mon encadrant, pour son accompagnement précieux, sa rigueur, sa disponibilité et ses conseils éclairés tout au long de la réalisation de ce mémoire. Son expertise et son soutien ont été d'une grande aide et d'un appui constant tout au long de ce parcours. Je remercie également sincèrement les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer ce travail. Leurs remarques pertinentes et leur bienveillance ont grandement enrichi cette expérience académique. À toutes celles et ceux qui ont contribué, directement ou indirectement, à l'élaboration de ce travail, je vous adresse mes sincères remerciements.

Merci infiniment.

dédicace

À mon cher père **Mouhamed Taher Yacine**, pilier de ma vie, exemple de courage et de droiture. Ta présence rassurante, ton travail silencieux et ton amour discret ont toujours été ma force.

À ma douce mère **Radhia**, lumière de mon cœur, source inépuisable de tendresse, de prière et de sacrifice. Que Dieu te garde en paix et en santé, toi qui es mon refuge et mon repère.

À mes sœurs bien-aimées : **Aya**, au regard bienveillant, **Douaa**, au cœur apaisant, **Siwar Iman**, rayon d'énergie et de joie... Merci pour votre amour pur et votre présence dans ma vie. À mon petit frère **Mohamed ELSalah Firas**, innocence, rires et bonheur au quotidien. Que ta vie soit toujours illuminée par la paix et la réussite.

À ma précieuse famille : À mes oncles paternels et à ma tante bien-aimée, À mes tantes maternelles et à mes oncles maternels, À mes cousins, cousines et à tous ceux qui partagent mes racines.

Un hommage spécial à ma grand-mère chérie, que j'aime profondément. Que Dieu lui accorde longue vie et paix intérieure.

Une pensée du cœur pour ceux qui nous ont quittés, de ma famille, dont les souvenirs et les prières continuent de nous accompagner. Qu'Allah les couvre de Sa miséricorde.

À mes amies chères, pour leur affection sincère et leur soutien dans les bons comme dans les moments difficiles : À **Narimane**, d'abord, pour sa gentillesse, sa présence constante et sa générosité de cœur

À **Ziadi Nihel**, binôme et partenaire dans ce travail, pour sa collaboration précieuse, son implication et son esprit d'équipe tout au long de cette aventure académique et mon amie de toujours.

À **Rayan, Doha, Wafa, b, Chaïma, ikram**, et toutes celles dont les noms ne sont pas cités ici, mais qui ont marqué ma vie par leur affection et leur amitié.

À Monsieur **Ferrag Azouz**, mon encadrant, pour sa disponibilité, sa confiance, ses conseils avisés et son accompagnement rigoureux. Sa bienveillance et son professionnalisme ont été d'un grand soutien.

Enfin, à tous mes enseignants, qui ont nourri mon esprit, éveillé ma curiosité, et m'ont accompagnée avec passion et rigueur tout au long de ma scolarité. Que chacun d'eux trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Ce travail est dédié à vous tous, avec amour, respect et gratitude.

Mourakeb Yousra.

À ma chère famille, à mes enseignants, mes amis, et à tous ceux que j'aime, Alors que je me tiens aujourd'hui au seuil d'un nouveau chapitre de ma vie, je ne peux m'empêcher de repenser à l'extraordinaire parcours qui m'a conduit jusqu'à cet instant. Ce jour n'est pas seulement une célébration de mes accomplissements, mais un témoignage vivant du soutien inconditionnel, de l'amour et de l'orientation que j'ai reçus de toutes celles et ceux qui ont été à mes côtés à travers chaque réussite et chaque épreuve.

Tout d'abord, je dédie cet accomplissement précieux à mon cher père, **Toufik**, dont la sagesse, la force et les sacrifices ont été la pierre angulaire de mon chemin. Ta confiance constante en moi a été ma lumière, et je porterai toujours tes valeurs et tes enseignements dans mon cœur, au moment où j'entame cette nouvelle aventure.

À ma chère mère, **Nadjet**, dont l'amour infini, la patience et le dévouement ont façonné la personne que je suis aujourd'hui. Tes innombrables sacrifices et ton encouragement indéfectible ont été ma source de force, et je te suis éternellement reconnaissante pour ta présence constante dans ma vie.

Même s'ils ont quitté ce monde, je garde dans mon cœur les souvenirs précieux et l'amour éternel de ma grand-mère **Hada** et de mon grand-père **Rebai**. Leur héritage de tendresse, de bonté et de persévérance continue de m'inspirer chaque jour.

À mon grand frère **Abd El Hamid**, qui s'est aventuré loin jusqu'au Canada, ton soutien, malgré la distance, a toujours été proche de mon cœur. Ta confiance en moi et tes encouragements m'ont poussée à rêver et à aspirer sans crainte.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude à mon oncle **Bilel**, qui m'a toujours offert ses conseils et son soutien, même depuis l'autre rive de la mer. Ta foi en mes rêves a été pour moi une source inépuisable d'inspiration.

À mon jumeau **Rayen**, mon compagnon d'aventures : ta présence dans ma vie me rappelle sans cesse la force des liens profonds et des expériences partagées.

À mes jeunes frères et sœurs, **Yacine** et **Bayene**, vos rires, votre innocence et votre amour pur ont illuminé ma vie, même dans les jours les plus sombres. Je suis si fière d'être votre sœur, et je porterai toujours vos rêves avec les miens.

À ma grande famille — mes cousins, mes tantes, mes oncles — votre amour, vos encouragements et les rires partagés ont enrichi mon parcours et lui ont donné tout son sens. Merci pour ce sentiment d'appartenance et de soutien que vous m'avez toujours offert.

À **Mourakeb Yousra**, ma binôme tout au long de cette aventure : ta collaboration, ton sérieux et ta présence constante ont été des piliers dans la réalisation de ce

mémoire. Merci pour ton engagement, ta patience et l'esprit d'équipe que tu as su entretenir à chaque étape du chemin.

Et enfin, à mes chères amies : **Khansaa, Wafa, Djamila** et **Lamis, hind, lina, chahed, amina , safa** votre amitié, vos rires et votre soutien constant ont été parmi les plus beaux cadeaux de cette aventure. Je chérirai à jamais les souvenirs que nous avons créés ensemble.

Je ne saurais terminer sans adresser mes plus sincères remerciements à mon professeur et encadrant Monsieur **Ferrag Azouz**, pour son soutien, son engagement et ses conseils sincères tout au long de ce parcours. Ses remarques pertinentes et ses orientations m'ont grandement aidée dans l'achèvement de ce travail, ainsi que dans mon développement académique et personnel. Avec tout mon amour et ma gratitude.

Nihel Ziadi.

ملخص المذكرة

في هذا العمل سنتطرق إلى دراسة عملية بواسون باعتبارها أداة رياضية فعالة و بسيطة لتحليل العديد من الظواهر العشوائية، و تشكل أساسا مهما لفهم و تطوير نماذج أكثر تعقيد في مجالات متعددة.

الكلمات المفتاحية : المتغير العشوائية، قانون الأًحتمال، توزيع بواسون، عملية بواسون.

Abstract

In this work, we will study the Poisson process as an effective and simple mathematical tool for analyzing many random phenomena, and it constitutes an important basis for understanding and developing more complex models in various fields.

keywords : Random variable, Probability law, Poisson ditribution, Poisson process.

Résumé

Dans ce travail, nous étudierons le processus de Poisson comme un outil mathématique efficace et simple pour analyser de nombreux phénomènes aléatoires, et il constitue une base importante pour comprendre et développer des modèles plus complexes dans divers domaines.

mots-clés :variable aléatoire, Loi de probabilité, Distribution de Poisson, Processus de Poisson.

Table des matières

I Introduction	1
II Notions de probabilités et processus stochastique	2
II.1 Notions de probabilités	2
II.1.1 Espace de probabilités	2
II.1.2 Variables aléatoires	4
II.1.3 Espérance, Variance et écart-type	5
II.1.4 Fonctions génératrices et caractéristique	6
II.1.5 Loi de Poisson	7
II.1.6 La loi exponentielle	9
II.1.7 La loi gamma	10
II.2 Processus stochastique	13
III Processus de Poisson	15
III.1 Processus de comptage	15
III.1.1 Temps d'arrivées (inter-arrivées)	16
III.2 Processus de Poisson	16
III.3 Processus de Poisson non homogène	23
III.4 Processus de Poisson composé	27
IV Généralisation non homogènes du processus de Poisson dans la modélisation des processus aléatoires liés aux accidents de la route	29
IV.1 Introduction	29
IV.2 Données sur les motorisations et les accidents de la route en Algérie	30
IV.3 Données générales sur les accidents de la route	32
IV.4 Modèle du nombre d'accident de la route	37
IV.5 Estimation des paramètres du modèle	37
IV.6 Anticipation du nombre d'accidents	38
IV.7 Conclusion	39
V Conclusion	41
Bibliographie	42

Les processus stochastiques occupent une place centrale dans la théorie des probabilités, en raison de leur capacité à modéliser des phénomènes aléatoires évoluant dans le temps. Parmi ces processus, le processus de Poisson se distingue par sa simplicité mathématique et son efficacité dans la représentation d'événements rares et indépendants qui surviennent au cours du temps ou dans l'espace. Initialement développé pour modéliser la répartition des événements aléatoires, tels que les appels téléphoniques entrants dans un centre de communication, les arrivées de clients dans une file d'attente ou les particules détectées dans un détecteur, le processus de Poisson est devenu un outil fondamental dans divers domaines scientifiques : physique, biologie, ingénierie, finance, et bien d'autres. Ce travail a pour objectif d'introduire rigoureusement le processus de Poisson, d'en étudier les propriétés fondamentales, et d'explorer ses principales applications pratiques. Nous nous attarderons notamment sur les notions de stationnarité, d'indépendance des accroissements, et sur les différentes généralisations de ce processus, telles que le processus de Poisson homogène et non homogène. À travers cette étude, nous mettrons en lumière l'importance du processus de Poisson comme modèle probabiliste incontournable dans l'analyse des phénomènes aléatoires discrets.

Dans le premier chapitre on a fait Un rappel des notions fondamentales de la théorie des probabilités et des processus stochastiques, afin de fournir un cadre rigoureux et cohérent à notre étude.

Le deuxième chapitre est consacré à La définition formelle du processus de Poisson, avec l'étude de ses propriétés caractéristiques telles que l'indépendance des accroissements, la stationnarité, la loi exponentielle des temps d'attente, et la fonction de répartition. et à des généralisations du processus de Poisson, notamment le processus de Poisson non homogène, ainsi que quelques variantes adaptées à des contextes plus complexes.

Le dernier chapitre est une application de du processus de Poisson non homogène à la modélisation du nombre d'accidents à la route Algérienne dans la période 1970 – 2017.

II

Notions de probabilités et processus stochastique

L'étude des phénomènes aléatoires occupe une place centrale dans de nombreuses disciplines scientifiques, allant des mathématiques appliquées à l'ingénierie, en passant par l'économie, la biologie et les télécommunications. Pour modéliser rigoureusement ces phénomènes, il est indispensable de s'appuyer sur les fondements de la théorie des probabilités et de maîtriser les outils liés aux processus stochastiques, qui permettent de décrire l'évolution aléatoire d'un système dans le temps ou dans l'espace. Ce premier chapitre a pour objectif de présenter les concepts fondamentaux nécessaires à la compréhension du processus de Poisson, qui constitue le cœur de notre étude. Il s'agit de poser un cadre mathématique clair en introduisant les notions essentielles telles que : les variables aléatoires, les lois de probabilité, l'espérance, la variance, les notions de convergence, ainsi que les différentes formes d'indépendance. Par la suite, nous introduirons la notion de processus stochastique, en définissant ses composantes principales, ses classifications, et en donnant quelques exemples classiques. Ces notions constitueront la base sur laquelle reposeront les chapitres suivants, et permettront d'aborder avec rigueur les propriétés et les applications du processus de Poisson.

Nous nous sommes référés à des ouvrages [2, 9, 12].

II.1

Notions de probabilités

II.1.1 Espace de probabilités

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω , c'est-à-dire que Ω est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire.

σ -algèbre

Définition II.1.1 Une tribu (ou σ -algèbre) sur Ω est une partie τ de l'ensemble des parties de Ω telle que

1. $\Omega \in \tau$

2. Pour tout $A \in \tau$, son complémentaire \bar{A} est élément de τ .
3. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de τ , la réunion $\cup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est un élément de τ .

Exemple II.1.1 La tribu trivial $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ est aussi une tribu.

Espace mesurable

Définition II.1.2 Soit S un ensemble et ρ une σ -algèbre sur S . Une mesure positive est une fonction $\mu : \rho \rightarrow [0, \infty]$ telle que

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$
- 2) μ est σ additive, c'est-à-dire, pour toutes les collections dénombrables $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ d'ensembles deux à deux disjoints dans ρ ,

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

La paire (S, ρ) est appelée un espace mesurable, et les éléments de ρ sont appelés ensembles mesurables.

Espace de probabilité

Dans cette partie (Ω, τ) désigne un espace mesurable.

Définition II.1.3 On appelle probabilité sur (Ω, τ) une application \mathbb{P} définie sur τ , à valeurs sur $[0, 1]$ et vérifiant :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles, la série $\mathbb{P}(A_n)$ converge et

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

On appelle cette propriété la σ -additivité ou additivité dénombrable. Le triplet $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$ s'appelle espace probabilisé.

Probabilité conditionnelle

Définition II.1.4 Soit A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Évènements indépendants

Définition II.1.5 Soient A et B deux évènements d'un espace probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, tel que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Les évènements A et B sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Exemple II.1.2 On considère l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{P}, P) . On lance deux fois un dé, l'univers est

$$\Omega = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq i \leq 6, \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$$

Soit l'événement A : la somme des deux résultats égale 9.

$$A = \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\}$$

Donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Soit l'événement B : obtenir 3 au premier lancer

$$B = \{(3, j), j \in \mathbb{N}, \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$$

Donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Maintenant, on pose la question suivante :

Sachant que l'on obtient 3 au premier lancé. qu'elle est la probabilité de A sachant B .
le nouveau univers est

$$\Omega' = \{(3, j), j \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq j \leq 6\} = \Omega \cap B = B$$

et le nouveau espace probabilité est $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega), P')$ où P' est la probabilité uniforme sur Ω'

On définit dans cet espace. l'événement A' : la somme des résultats égale à 9.

$$A \cap B = \{(3, 6)\}$$

Donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega')} = \frac{1}{6}$$

et

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/6}{1/6} = 1$$

II.1.2 Variables aléatoires

Variable aléatoire

Définition II.1.6 On considère une expérience aléatoire associée à un univers Ω .

Une variable aléatoire X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans \mathbb{R} ; autrement dit, X est une fonction qui, à tout élément ω de Ω , associe un unique réel :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Exemple II.1.3 On tire au hasard une boule dans une urne contenant des boules rouges et des boules noires .

Ainsi, ici, On peut définir l'univers comme $\Omega = \{\text{rouge, noire}\}$.

Soit X la variable aléatoire qui, à tout élément de Ω associe un réel dont la valeur est 10 si la boule tirée est rouge, et -20 si la boule tirée est noire .

On a alors $X(\text{rouge}) = 10$ et $X(\text{noire}) = -20$

Loi de Probabilité

Définition II.1.7 Lorsque chaque valeur x_i ($1 \leq i \leq n$) prise par une variable aléatoire X , on associe la probabilité de l'événement $X = x_i$, on dit que l'on définit la loi de probabilité de X .

On représente généralement cette loi à l'aide d'un tableau :

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Exemple II.1.4 Un jeu consiste à tirer au hasard une boule dans une urne contenant 5 boules bleues , 3 boules vertes et 10 boules rouges. le joueur gagne 1 euro s'il tire une boule bleue, 2 euros s'il tire une boule verte et il perd 3 euro s'il tire une boule rouge.

Soit G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.

Déterminer la loi de probabilité de G .

les valeurs prises par G sont 1, 2 et -3 .

L'événement $G = 1$ correspond à l'événement de tirer une boule bleue parmi les 18 boules de l'urne. il y a 5 boules bleues, et le tirage est au hasard, donc $P(G = 1) = \frac{5}{18}$.

De même, On obtient $P(G = 2) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ et $P(G = -3) = \frac{5}{9}$.

Donc la loi de probabilité de G est :

Valeur k	1	2	-3
$p(G=k)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{9}$

II.1.3 Espérance, Variance et écart-type

Dans toute cette partie, on appelle X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n .

Espérance

Définition II.1.8 L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

Variance et écart-type

Définition II.1.9 La variance de la loi de probabilité de X est le nombre réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(x_i))^2$$

Définition II.1.10 L'écart-type de la loi de probabilité de X est le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple II.1.5 On considère la variable aléatoire X de loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	-3
$P(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

Alors $E(x) = 1 \times 0,3 + 2 \times 0,5 - 3 \times 0,2 = 0,3 + 1 - 0,6 = 0,7$

Et ainsi $V(X) = 0,3 \times (1 - 0,7)^2 + 0,2 \times (-3 - 0,7)^2 = \dots = 3,61$

Et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3,61} = 1,9$

II.1.4 Fonctions génératrices et caractéristique

Ces fonctions sont très importantes car elles ont la particularité de caractériser complètement la variable aléatoire à laquelle elles se rapportent. En d'autres termes, connaître la fonction génératrice ou la fonction caractéristique d'une variable aléatoire est équivalent à connaître sa distribution. Commençant alors par la plus simple d'entre elles.

Définition II.1.11 soit X une variable aléatoire discrète ne prenant que des valeurs entières positives ou nulles . La fonction génératrice des probabilités de la variable X est la fonction

$$G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}[X = n]$$

définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que l'espérance existe (c-à-d tel que la série soit absolument convergente).

pour $t \in [-1, 1]$, cette série converge absolument ; la fonction génératrice des probabilités est donc au moins définie dans l'intervalle $[-1, 1]$.

comme son nom l'indique, cette fonction permette de générer les probabilités de la variable X .

Définition II.1.12 Pour toute variable aléatoire X , discrète ou continue, la fonction génératrice des moments est définie par

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} \mathbb{P}[X = x] & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{si } X \text{ est continue et de densité } f \end{cases}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que l'espérance soit définie.

Cette fonction possède des propriétés similaires à la fonction génératrice des probabilités.

Définition II.1.13 Soit X une variable aléatoire quelconque. Sa fonction caractéristique est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = \begin{cases} \sum_x e^{itx} \mathbb{P}[X = x] & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx & \text{si } X \text{ est continue et de densité } f. \end{cases}$$

Dans le cas où la variable X est continue, la fonction caractéristique correspond à la transformée de Fourier de sa fonction de densité.

Propriété d'oubli de l'exponentielle

Soit X une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre ν . Pour tous $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X > s + t \mid X > s] &= \frac{\mathbb{P}[X > s + t \text{ et } X > s]}{\mathbb{P}[X > s]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[X > s + t]}{\mathbb{P}[X > s]} \\ &= \frac{e^{-\nu(s+t)}}{e^{-\nu s}} \\ &= e^{-\nu t} \\ &= \mathbb{P}[X > t]. \end{aligned}$$

II.1.5 Loi de Poisson

La loi de poisson intervient pour mesurer un nombre de réalisation observées pendant un intervalle de temps de longueur donnée.

On utilise la loi de poisson dans les télécommunications (pour compter le nombre de communications dans un intervalle de temps donné), le contrôle de qualité statistique, la description de certains phénomènes liés à la désintégration radioactive, la biologie (mutations), la météorologie, la finance pour modéliser la probabilité de défaut d'un crédit, etc...

Définition II.1.14

une variable aléatoire X est dite suivre une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si

$$\mathcal{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

X admet alors une espérance et une variance

$$E[X] = \lambda \text{ et } V[X] = \lambda$$

Exemple II.1.6 la figure 1.1 représente la probabilité associée à la loi de poisson des paramètres 0.5, 2, 5, 10, ils ont été obtenus dans le logiciel R par la commande `dpois()`.

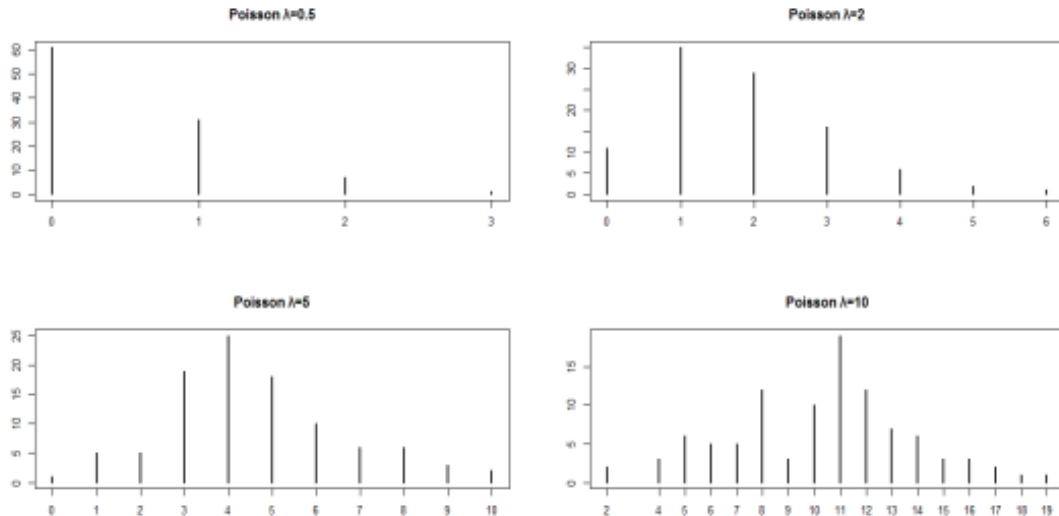


Figure 1.1 : Probabilité d'une variable aléatoire de la loi de Poisson de paramètres 0.5, 2, 5 et 10

Exemple II.1.7 En 1837, Siméon-Denis Poisson a établi cette distribution pour approximer la loi binomiale lorsqu'un paramètre, déterminant la probabilité de succès d'une expérience unique, est faible. L'application de cette distribution n'a pas été trouvée; lorsque von Bortkiewitsch (1898) a calculé, à partir des données de l'armée prussienne, le nombre de soldats morts au cours des 20 dernières années consécutives à cause d'un coup de cheval, une variable aléatoire, par exemple, indiquant le nombre de soldats tués accidentellement par un coup de cheval par an, s'est avérée avoir une loi de Poisson.

$$p(k) = p(X = k) = \frac{(\wedge)^k}{k!} e^{-\wedge}, k \in S = \mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, \dots$$

avec le paramètre $\wedge = [\frac{1}{\text{ans}}]$. Nous calculons plusieurs probabilités selon cette distribution.

$$P(X = 0) = 0.543351, \quad P(X = 1) = 0.331444,$$

$$P(X = 2) = 0.101090,$$

$$P(X = 3) = 0.020555, \quad P(X = 4) = 0.003135,$$

$$P(X \leq 4) = 0.999575, \quad P(X > 4) = 0.000425.$$

On peut remarquer que la probabilité qu'aucun soldat ne soit tué accidentellement par le coup de pied du cheval par an est supérieure à 50% et que la probabilité que plus de 4 soldats soient tués au cours de l'année est de 0,000425.

Exemple II.1.8 Suit à une étude statistique, un fournisseur d'accès à internet constate qu'il reçoit en moyenne entre 11h et 12h, 3 appels téléphonique par minute. On suppose que X , le nombre d'appels reçu pendant une minute, est une variable aléatoire qui suit une loi de poisson.

1. Donner le paramètre de cette loi de poisson.
2. Calculer la probabilité pour qu'entre 11h30 et 11h31 :
 - a. il n'y ait aucune appel;

- b. il y ait exactement un appel ;
- c. il y ait plus de deux appels ;
- d. il y ait moins de trois appels.

Solution

1. $\lambda = E(X) = 3$ (le nombre moyen d'appels)
2. a. $P(X = 0) \approx 0,050$
b. $P(X = 1) \approx 0,149$
c. $P(X > 2) \approx 0,577$
d. $P(X < 3) \approx 0,423$

II.1.6 La loi exponentielle

Une variable aléatoire X absolument continue suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et on note X , si la densité de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \text{si } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et sa fonction de répartition est donné par

$$F_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & ; \text{si } t \geq 0 \\ 0 & ; \text{si } t < 0 \end{cases}$$

X admet alors une espérance et une variance

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

On peut représenter des exemples de densité associées à la loi exponentielle de paramètres différents, pour obtenir la densité de X par le langage R on utilise la commande `dexp()`.

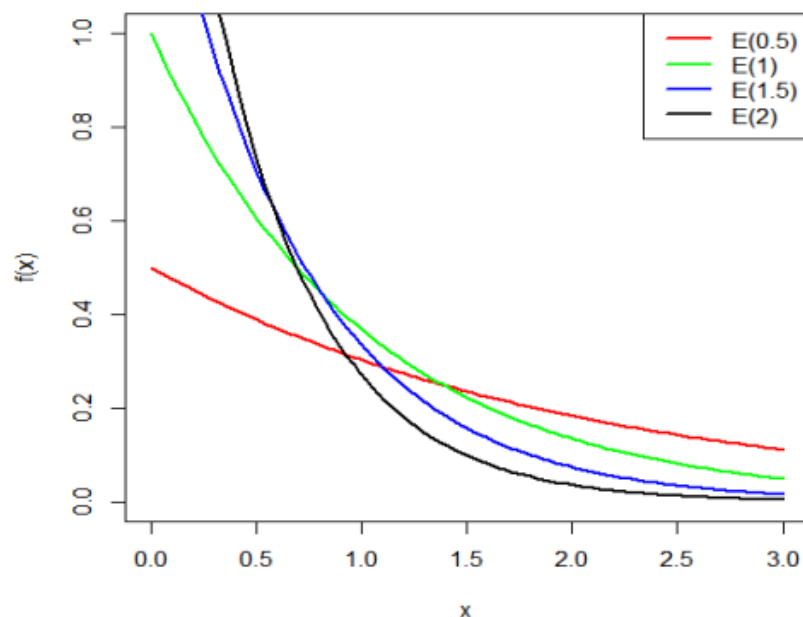


Figure 1.2 : Densité de la loi exponentielle de paramètres 0.5, 1, 1.5, 2

Exemple II.1.9 La durée de vie, exprimée en mois, d'un ordinateur portable est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

On suppose que l'espérance de vie d'un ordinateur est de 5 ans.

1. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ .
2. Calculer alors $P(X \geq 48)$. Interpréter.
3. Calculer la probabilité que l'ordinateur ait un problème dès la première année.

Solution

$$1. \lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{5 \cdot 12} = \frac{1}{60}$$

$$2. P(X \geq 48) = 1 - P(X < 48) = 1 - \int_0^{48} \frac{1}{60} e^{-\frac{t}{60}} dt = 1 - [-e^{-\frac{t}{60}}]_0^{48} = 1 - (-e^{-\frac{48}{60}} + 1) = e^{-\frac{48}{60}} \approx 0,45.$$

La probabilité qu'un ordinateur dure moins d'un an est de 45% environ.

$$3. P(X \leq 12) = \frac{1}{60} \int_0^{12} e^{-\frac{t}{60}} dt = \left[-e^{-\frac{t}{60}} \right]_0^{12} = -e^{-\frac{12}{60}} + 1 \approx 0,18$$

La probabilité qu'un ordinateur dure moins d'un an est de 18% environ.

II.1.7 La loi gamma

L'une des lois les plus pratiques est la loi gamma. Il est utilisé pour surveiller la durée de vie des équipements et des machines. Ainsi, pour les dispositifs médicaux, son utilisation est cruciale. La distribution gamma est plus fine que la loi exponentielle. Cette dernière est utilisée dans les modèles mathématiques de longue durée de vie.

Définition II.1.15 Fixons $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Une variable aléatoire continue X suit une loi gamma de paramètres α et β , ce que l'on note $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, si elle a pour densité la

fonction

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

ou $\Gamma(\alpha)$ dénote la fonction gamma de Euler définie pour tout $\alpha > 0$ par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du.$$

Si $\alpha = 1$, il s'agit tout simplement une exponentielle négative de paramètre v .

Espérance de la loi gamma

Soit $X \in \Gamma(\alpha, \beta)$. Alors on a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} x^\alpha dx$$

On suppose que $y = \beta x$

$$\begin{aligned} &= \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{\beta}\right)^\alpha dy \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta \Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$, Alors l'espérance du variable aléatoire X qui suit la loi gamma est donné par

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Variance de la loi gamma

On se donne une variable aléatoire $X \in \Gamma(\alpha, \beta)$. La variance de cette variable est par définition $\sigma^2 = V(x) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. Pour le changement de variable $y = \beta x$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\alpha+1} dy \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$V(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Ainsi la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi gamma est

$$V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Exemple II.1.10 Ces graphiques représentent les courbes des densités de la loi gamma $G(\alpha, \beta)$

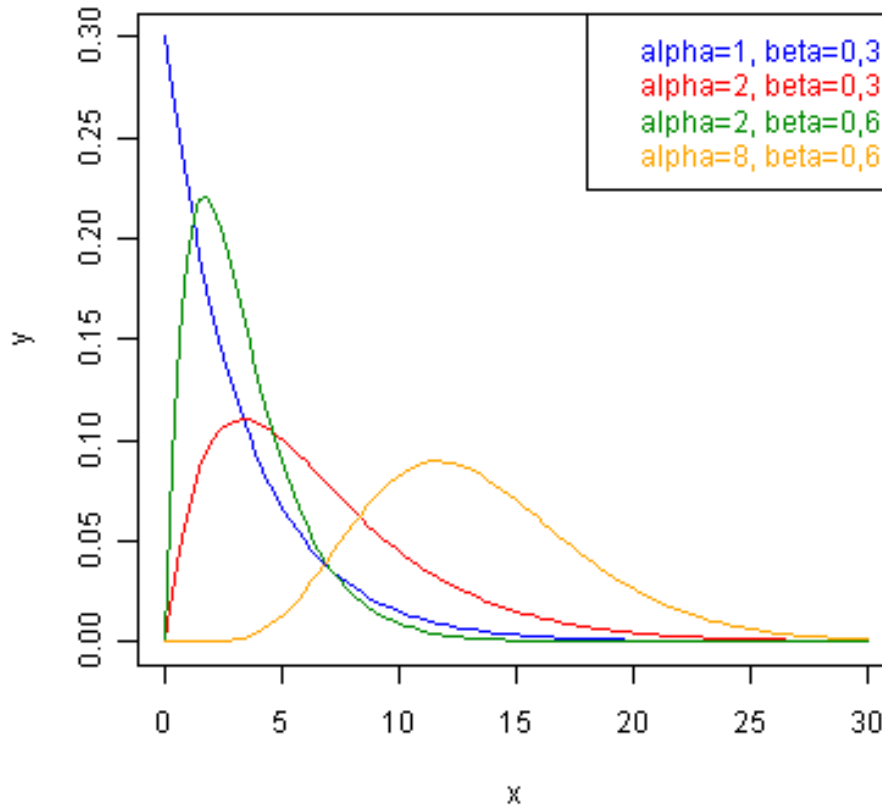


Figure 1.3 : Densité de la loi gamma

Exemple II.1.11 Supposons qu'un transistor d'un certain type soumis à un test de durée de vie accéléré. La durée de vie Y (en semaine) à une distribution gamma avec une moyenne de 24 et un écart-type de 12.

1. trouver les valeurs de α et β
2. trouver $P(Y \leq 24)$.
3. trouver $P(Y \geq 48)$.
4. trouver $P(24 \leq Y \leq 48)$.

Solution II.1.1 1. En posant $\beta = \frac{1}{\theta}$. On trouve

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha\theta = 24,$$

$$V(X) \frac{\alpha}{\beta^2} = \alpha\theta^2 = 144.$$

Alors :

$$\alpha\theta^2 = \alpha\theta \cdot \theta = 24\theta = 144.$$

Cela implique : $\theta = \frac{144}{24} = 6$ et $\alpha = \frac{144}{36} = 4$.

II.2 Processus stochastique

Un processus dynamique est une structure mathématique utilisée pour modéliser l'évolution déterministe de certains phénomènes (physique) dans le temps. Le mot clé ici est déterministe.

On dit qu'un système est déterministe si son futur est complètement prédictible connaissant de son état initial. Mais s'il y a quelques intrinsèques randomisations dans le système, qui rend la prédiction parfaite du futur impossible, on utilise alors une autre structure mathématique utilisée pour modéliser les différents phénomènes où la prédiction de la future est impossible.

Définition II.2.1 Un processus stochastique $X := \{X_t, t \geq 0\}$ est une collection de variables aléatoires $\{X_t, t \geq 0\}$ définies sur un même espace Ω .

$$\begin{aligned} X_t : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

L'application (pour $\omega \in \Omega$ fixé)

$$\begin{aligned} X.(\omega) : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

s'appelle une trajectoire du processus.

Exemple II.2.1 On considère une suite de parties de piles ou face indépendantes, et on note S_n le nombre de piles obtenus après la n -ième partie la suite de (S_n) est un processus, appelé processus ou schéma de Bernoulli.

On considère un appareil, et on note N_t le nombre de pannes survenues entre l'instant 0 et l'instant t . $(N_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus à temps continu.

Définition II.2.2 (accroissements indépendants)

Le processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ a des accroissements indépendants si $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$, les variables aléatoires $X_{t_1} - X_{t_0}$, $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.

Définition II.2.3 (accroissements stationnaires)

Le processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ a des accroissements stationnaires si $\forall h > 0$, les variables aléatoires $X_{t+h} - X_t$ ont la même distribution $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

Définition II.2.4 (Indépendance)

Deux processus stochastiques $\{X_t, t \in T\}$ et $\{Y_t, t \in T\}$ sont dits indépendants si tout événement défini à partir du premier est indépendant de tout événement défini à partir du second, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout ensemble de n éléments t_1, \dots, t_n de

T , les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ sont indépendants.

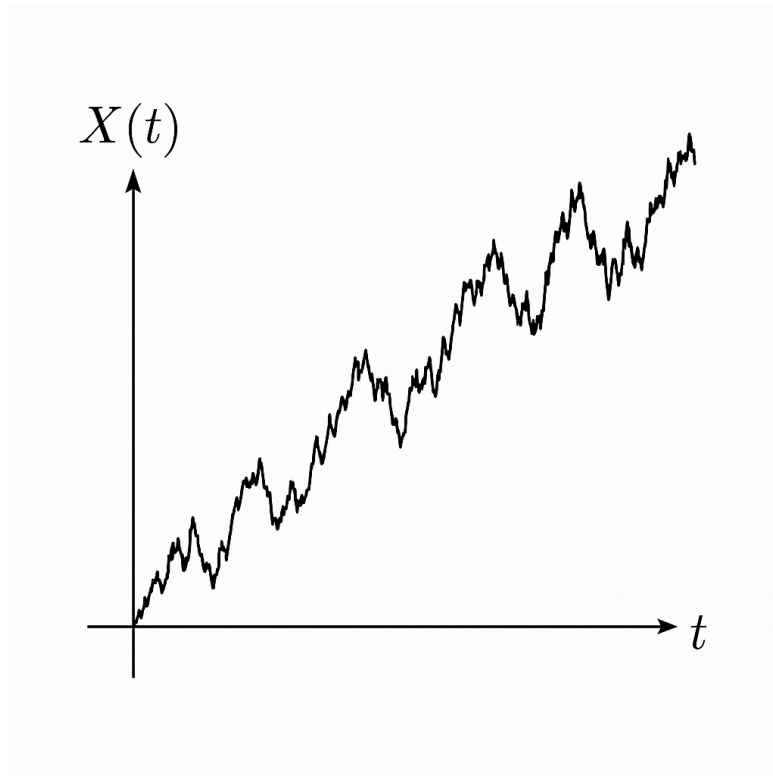


Figure 1.4 : Trajectoire d'un processus stochastique

III Processus de Poisson

Les processus de Poisson (du nom du mathématicien français Siméon Denis Poisson, XIX^{ème} siècle) sont des outils puissants grâce à sa simplicité et ses nombreuses propriétés analytiques, qui permettent d'analyser et de prédire des phénomènes aléatoires dans différents contextes.

Les événements particuliers modélisés appelés des sauts. Ils peuvent être temporels, représentant le moment d'arrivée d'une personne à un service, la date d'apparition d'une catastrophe ou bien spatiaux comme la position des antennes téléphoniques dans une ville. Nous étudierons les processus de Poisson simple, de paramètre constant, c'est-à-dire lorsque l'apparition des sauts est équilibrée au cours du temps, ainsi que les processus de Poisson dites non homogènes et composés.

Nous appuyons sur les références [2, 4, 8, 10, 11, 12].

III.1 Processus de comptage

Définition III.1.1 Un processus stochastique $\{N(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ est un processus de comptage si $N(t)$ représente le nombre total d'événements qui se sont produits entre 0 et t ; il doit donc satisfaire

1. $N(t) \geq 0$;
2. $N(t)$ a des valeurs entières uniquement;
3. Si $s < t$, alors $N(s) \leq N(t)$;
4. Pour $s < t$, $N(t) - N(s)$ est le nombre d'événements qui ont eu lieu entre s et t .

Propriété III.1.1 Soit $(N(t))_{t \geq 0}$ un processus de comptage. On a

1. $N(t) \geq 0$,
2. $N(t) \in \mathbb{N}$,
3. Si $s < t$, alors $N(s) \leq N(t)$,
4. Pour tout couple (s, t) , $s < t$, $N(t) - N(s)$ représente le nombre de sauts intervenus dans l'intervalle de temps $]s, t]$.
5. Un processus de comptage $N(t)$ est à valeurs entières positives. et croissante.

Exemple III.1.1

1. N_t peut représenter le nombre de clients arrivés à un guichet avant l'instant t (ou le nombre d'appels vers un central téléphonique). On peut également s'intéresser au

nombre de pannes d'une machine à l'instant t , la machine étant réparée immédiatement après chaque panne.

- En physique nucléaire, un compteur Geiger permet de détecter des rayonnements α ou γ émis par des particules radioactives. Sous l'action d'un rayonnement électromagnétique, un gaz basse pression produit des ions de façon aléatoire. Supposons que les ionisations se produisent indépendamment les unes des autres et notons par N_t le nombre d'ionisations au cours de l'intervalle $[0, t]$.

III.1.1 Temps d'arrivées (inter-arrivées)

On associe au processus de comptage $N(t)$ ses des processus des temps successifs $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ tel que
 Le processus $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$, appelé processus des temps d'occurrence (d'arrivées) est continue à temps discret définie par

$$T_0 := 0 \quad \text{et} \quad T_n := S_1 + \dots + S_n \quad (n \geq 1)$$

par conséquent, la variable aléatoire T_n ($n \geq 1$) est le temps d'occurrences du n^{ieme} événement (à partir de $t=0$).

le processus $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ appelé processus des temps d'inter-occurrence (d'inter-arrivées), la variable aléatoire S_n ($\forall n \in \mathbb{N}$) est le temps d'attente entre les $(n - 1)^{\text{ieme}}$ et $(n)^{\text{ieme}}$ occurrences .

$$S_n := T_n - T_{n-1}$$

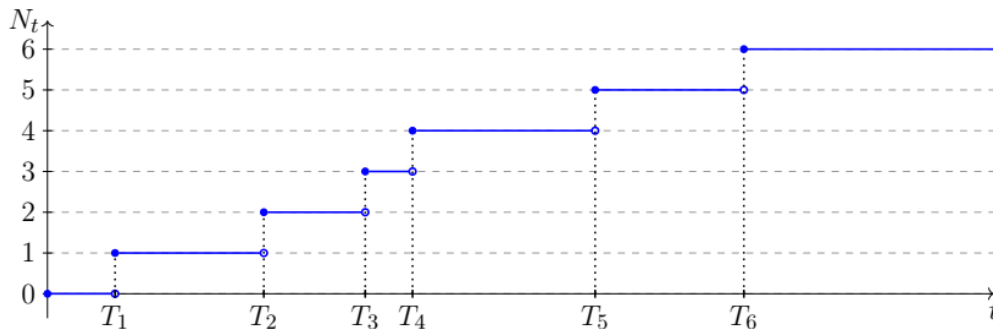


Figure 2.1 : Trajectoire d'un processus de comptage $(N_t)_{t \in \mathbb{R}}$

III.2 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est un processus de comptage qui compte le nombre de sauts T_n qu'il ya eu avant un instant donné t . On a en particulier $N_0 = 0$ et pour tout $s \leq t$, $N_s \leq N_t$. Le nom de ce processus vient du fait que la loi marginale du processus est une loi de Poisson.

Les processus de poisson sont souvent utilisés pour modéliser des files d'attente, chaque top représentant l'appel d'un client au guichet.

Définition III.2.1 Un processus stochastique de comptage $\{N(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ est appelé processus de Poisson, de densité $\lambda > 0$, s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. $N(0) = 0$;
2. Le processus est à accroissements indépendants, c'est-à-dire $\forall n, \forall t, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$. les variables aléatoires $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \dots, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_0}$ sont indépendants.
3. le nombre de tops se produisant dans un intervalle de temps de longueur $t \geq 0$ suit la loi de poisson de paramètre λt , c'est-à-dire, pour tout $s \geq 0$ et tout $t \geq 0$ on a :

$$P\{N(s+t) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (n \geq 0).$$

Théorème III.2.1 L'espérance et la variance de processus de poisson sont :

$$E(X(t)) = \lambda t, \quad V(X(t)) = \lambda t, \quad t > 0$$

Preuve III.2.1 Un processus de Poisson $X(t), t \geq 0$ avec taux $\lambda > 0$ satisfait :

$$P(X(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Soit :

$$E(X(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(X(t) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

pour $n \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}$

donc :

$$E(X(t)) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} = (\lambda t) e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = (\lambda t) e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \lambda t$$

Soit :

$$Var(X(t)) = E(X(t)^2) - (E(X(t)))^2$$

On a :

$$E(X(t)^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot P(X(t) = n) = \lambda t + (\lambda t)^2$$

Donc :

$$Var(X(t)) = \lambda t + (\lambda t)^2 - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

□

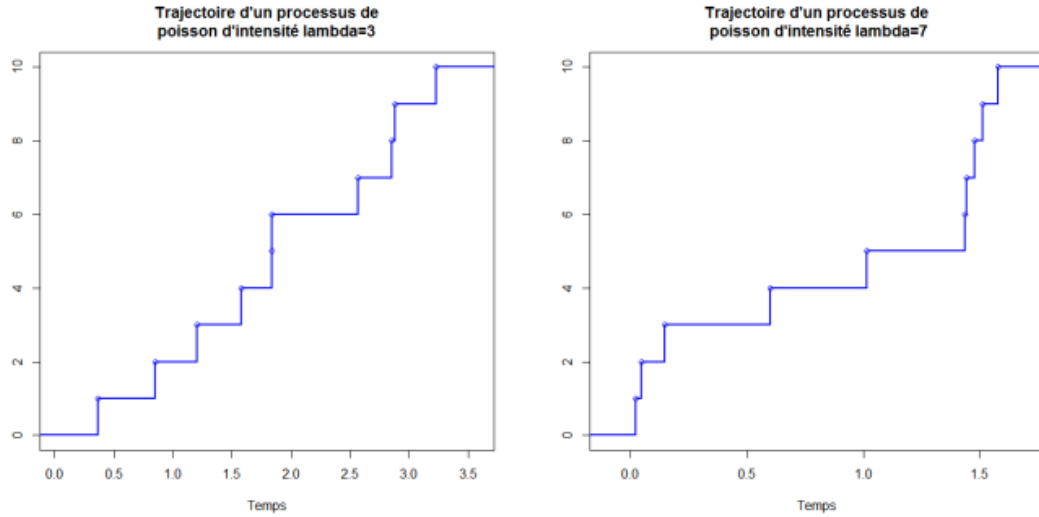


Figure 2.2 : Trajectoires d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 3, 7$

Une construction des processus de Poisson

Soit $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de variables aléatoires réelles positives telles que $(T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}, \dots)$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On lui associe le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$, défini par

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} 1_{T_n \leq t} = \begin{cases} 0, & \text{si } t < T_1 \\ n, & \text{si } T_n < t < T_{n+1} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Théorème III.2.2 Le processus $N(t)$ défini dans [III.1](#) est un processus de poisson.

Temps d'attente (espacement)

Soit $\{N(t) : t \geq 0\}$ un processus de poisson de densité $\lambda > 0$. On note S_1 le temps d'attente du premier top (à partir de $t = 0$) et $S_n (n \geq 2)$ la durée séparant le $(n - 1)^{\text{ime}}$ du n^{ime} top. On dit encore que les S_n sont les espacements.

Théorème III.2.3 [?] La suite $(S_n) (n \geq 1)$ est formée de variables aléatoires indépendantes, dont chacune suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$.

Preuve III.2.2 Montrons que, pour tout $n \geq 1$, la densité conjointe du vecteur (S_1, \dots, S_n) est la produit $\lambda e^{-\lambda s_1} \dots \lambda e^{-\lambda s_n}$ de n densités exponentielles de paramètre λ . Le changement de variables $s_k \mapsto t_k$, où $t_k := s_1 + \dots + s_k (1 \leq k \leq n)$ montre que la densité conjointe de (S_1, \dots, S_n) au point (s_1, \dots, s_n) est égale à la densité de (T_1, \dots, T_n) au point (t_1, \dots, t_n) , où $t_1 \leq \dots \leq t_n$.

Calculons cette dernière densité. Pour ce faire, considérons l'évènement

$$A_n := \{T_1 \in [t_1, t_1 + h_1[, T_2 \in [t_2, t_2 + h_2[, \dots, T_n \in [t_n, t_n + h_n[\},$$

où les t_i et les h_i on été choisis de sorte que $0 < t_1 < t_1 + h_1 < t_2 < t_2 + h_2 < \dots < t_n < t_n + h_n$. Alors $P(A_n)$ est la probabilité de la conjonction des évènements :

zéro top dans $[0, t_1[$ et exactement un top dans $[t_1, t_1 + h_1[$;
 zéro top dans $[t_1 + h_1, t_2[$ et exactement un top dans $[t_2, t_2 + h_2[$;
 ...;
 zéro top dans $[t_{n-1} + h_{n-1}, t_n[$ et exactement un top dans $[t_n, t_n + h_n[$.
 D'où

$$\begin{aligned} P(A_n) &= e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda h_1} \lambda h_1 e^{-\lambda(t_2 - t_1 - h_1)} e^{-\lambda h_2} \lambda h_2 \\ &\quad \dots e^{-\lambda(t_n - t_{n-1} - h_{n-1})} e^{-\lambda h_n} \lambda h_n \\ &= e^{-\lambda t_n} e^{-\lambda h_n} \lambda^n h_1 \dots h_n, \end{aligned}$$

soit, en divisant par $h_1 \dots h_n$ et en faisant tendre chaque h_i vers 0,

$$\frac{1}{h_1 \dots h_n} P(A_n) \longrightarrow \lambda^n e^{-\lambda t_n},$$

qui est la densité de (T_1, \dots, T_n) . Comme $t_n = s_1 + \dots + s_n$, on en déduit que $\lambda e^{-\lambda s_1} \dots \lambda e^{-\lambda s_n}$ est la densité de (S_1, \dots, S_n) . \square

Théorème III.2.4 Pour tout $n \geq 1$, la variable $T_n = S_1 + \dots + S_n$, qui représente l'instant où se produit le $n^{\text{ième}}$ top, suit la loi gamma de paramètre (n, λ) , à savoir la loi de densité :

$$f_{T_n}(s) = \begin{cases} \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda s} (\lambda s)^{n-1}, & \text{si } s \geq 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve III.2.3 La variable T_n est, en effet, la somme de n variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ . Elle suit donc une loi gamma de paramètre (n, λ) . \square

Propriété III.2.1 Pour tout $t \geq 0$, $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$

Preuve III.2.4 La démonstration repose sur l'identité

$$\{T_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}, \quad (t > 0, n \geq 0).$$

Alors

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n + 1) \\ &= P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t) \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} dx \\ &= \int_0^t d\left(e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{(n!)}\right) \\ &= e^{(-\lambda t)} \frac{(\lambda t)^n}{(n!)} \end{aligned}$$

Donc

$$N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$$

\square

Voici quelques propriétés que vérifie un processus de Poisson.

Propriété III.2.2 Un processus de Poisson est à accroissements stationnaires.

Preuve III.2.5 Soit $N(t)$ un processus de Poisson de λ .

L'accroissement entre deux instants $s < t$ est donné par :

$$N(t) - N(s)$$

on dit que $N(t)$ a des accroissement stationnaires si :

$$P(N(t+h) - N(t) = k) = P(N(s+h) - N(s) = k)$$

pour tout $t, s, h \geq 0$, ce qui vrai pour un processus de Poisson.

En effet, pour un tel processus :

$$N(t+h) - N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda h)$$

c'est-à-dire que le nombre d'événements dans un intervalle de durée h suit une loi de Poisson de paramètre λh , quel que soit de soit le point de départ de l'intervalle. \square

Propriété III.2.3 Un processus de Poisson est localement continu en probabilité.

Preuve III.2.6 On montre que

$$\forall t > 0, \lim_{h \rightarrow 0} P\{N(t+h) - N(t) \geq 1\} = 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0$$

Puisqu'un processus de Poisson est à accroissements stationnaires, on a

$$\begin{aligned} P\{N(t+h) - N(t) \geq 1\} &= P\{N(h) - N(0) \geq 1\} \\ &= P\{N(h) \geq 1\} \\ &= 1 - P\{N(h) = 0\} \\ &= 1 - e^{-\lambda h} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

lorsque h tend vers 0. \square

Propriété III.2.4 Soit $\{N(t) : t \geq 0\}$ un processus de Poisson de densité $\lambda > 0$. Alors, lorsque h tend vers 0,

1. $P(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$;
2. $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$;
3. $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$.

Preuve III.2.7 i. En effet, $P(N(h) = 0) = e^{-\lambda h}$. On fait la développement limité de $e^{-\lambda h}$ pour $h \rightarrow 0$, on obtient

$$P(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$$

ii. On a $P\{N(h) = 1\} = \lambda h e^{-\lambda h}$. On fait la développement limité de $e^{-\lambda h}$ pour $h \rightarrow 0$. Alors

$$P(N(h) = 1) = \lambda h(1 + o(h)) = \lambda h + o(h)$$

iii.

$$\begin{aligned} P(N(h) \geq 2) &= 1 - P(N(h) < 2) \\ &= 1 - [P(N(h) = 0) + P(N(h) = 1)] \\ &= o(h), \text{ lorsque } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Propriété III.2.5 Pour tout $t > 0$ la probabilité pour qu'il se produise une infinité de tops dans $[0, t]$ est nulle. De façon équivalente : avec probabilité 1, la suite $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots$ des instants où se produisent les tops n'admet pas de valeur d'adhérence à distance finie.

Preuve III.2.8 Pour tout $t > 0$, on a

$$P\{N(t) < +\infty\} = \sum_{k \geq 0} P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = 1.$$

□

Exemple III.2.1 Soit $\{N(t), t \in [0, \infty[$ le processus de Poisson d'intensité $\lambda = 0,5$.

- Trouvez la probabilité qu'il n'y ait aucune arrivée dans $(3, 5]$
- trouvez la probabilité qu'il y ait exactement une arrivée dans chacun des intervalles suivants : $(0, 1], (1, 2], (2, 3]$, et $(3, 4]$.

Solution III.2.1 a. si Y est le nombre d'arrivée dans $(3, 5]$, alors $Y \sim \text{Poisson}(\mu = 0,5 * 2)$. par,

$$P(Y = 0) = e^{-1} = 0,37$$

- Soit Y_1, Y_2, Y_3 et Y_4 les nombres d'arrivées dans l'intervalles $(0, 1], (1, 2], (2, 3]$, et $(3, 4]$. Alors $Y_i \sim \text{Poisson}(0,5)$ et Y_i sont indépendants, donc :

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 1) =$$

$$P(Y_1 = 1) \cdot P(Y_2 = 1) \cdot P(Y_3 = 1) \cdot P(Y_4 = 1) = [0,5e^{-0,5}]^4 \approx 8,5 * 10^{-3}$$

Exemple III.2.2 Soit $N(t), t \in [0, \infty[$ un processus de poisson de l'intensité λ . Trouver sa fonction de covariance

$$C_N(t_1, t_2) = \text{Cov}(N(t_1), N(t_2)), \text{ pour } t_1, t_2 \in [0, \infty)$$

Solution III.2.2 Supposons que $t_1 \geq t_2 \geq 0$. Alors, par la propriété d'incrément indépendant du processus de poisson, les deux variables aléatoires $N(t_1) - N(t_2)$ et $N(t_2)$ sont indépendantes. On peut écrire

$$\begin{aligned} C_N(t_1, t_2) &= \text{cov}(N(t_1), N(t_2)) \\ &= \text{Cov}(N(t_1) - N(t_2) + N(t_2), N(t_2)) \\ &= \text{Cov}(N(t_1) - N(t_2), N(t_2)) + \text{Cov}(N(t_2), N(t_2)) \\ &= \text{Cov}(N(t_2), N(t_2)) \\ &= \text{Var}(N(t_2)) \\ &= \lambda t_2, \text{ puisque } N(t_2) \sim \text{Poisson}(\lambda t_2). \end{aligned}$$

De même, si $t_2 \geq t_1 \geq 0$, On conclut

$$C_N(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2), \text{ pour } t_1, t_2 \in [0, \infty).$$

Propriété III.2.6 Soit un processus de poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ d'intensité $\lambda > 0$, $\forall t, s \geq 0$, on a

1. $E[N(t)] = \text{Var}[N(t)] = \lambda t$,
2. $\text{Cov}(N(s), N(t)) = \lambda \min(s, t)$.

Preuve III.2.9 1. Comme

$$N(t) \sim P(\lambda t).$$

alors

$$E[N(t)] = \text{Var}[N(t)] = \lambda t.$$

2. Soit $s < t$. Alors $N(s)$ et $N(t) - N(s)$ sont indépendantes (car $N(t)$ est à accroissement indépendantes), Alors

$$\text{Cov}(N(s), N(t) - N(s)) = 0$$

□

Exemple III.2.3 Soit $N_1(t)$ et $N_2(t)$ deux processus de Poisson indépendants d'intensité $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$, respectivement. Soit $N(t)$ le processus fusionné $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.

- a. Trouvez la probabilité que $N(1) = 2$ et $N(2) = 5$.
- b. Sachant que $N(1) = 2$, trouvez la probabilité que $N_1(1) = 1$.

Solution III.2.3 $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 1 + 2 = 3$.

- a. On a

$$\begin{aligned} P(N(1) = 2, N(2) = 5) &= P(\text{deux arrivées on } (0, 1], \text{ et trois arrivées on } (1, 2]) \\ &= \left[\frac{e^{-3} 3^2}{2!} \right] \cdot \left[\frac{e^{-3} 3^3}{3!} \right] \approx 0,5 \end{aligned}$$

- b. On a

$$\begin{aligned} P(N_1(1) = 1 \mid N(1) = 2) &= \frac{P(N_1(1) = 1, N(1) = 2)}{P(N(1) = 2)} \\ &= \frac{P(N_1(1) = 1, N_2(1) = 1)}{P(N(1) = 2)} \\ &= \frac{P(N_1(1) = 1) \cdot P(N_2(1) = 1)}{P(N(1) = 2)} \\ &= \frac{2e^{-3}}{9e^{-3}} \\ &= \frac{2!}{2!} \\ &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Somme de deux processus de Poisson

On considère deux processus de Poisson indépendants et on cherche la loi de la somme deux processus.

Propriété III.2.7 Soient deux processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ et $(M_t)_{t \geq 0}$ indépendants d'intensité respective λ_1 et λ_2 . Alors le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ définie par

$$X_t = N_t + M_t, \text{ pour } t \geq 0,$$

est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$.

Preuve III.2.10 Soit le processus

$$X_t = N_t + M_t.$$

On a $X(0) = 0$. Par ailleurs, si $t, s > 0$, Alors

$$X(t+s) - X(s) = (N(t+s) - N(s)) + (M(t+s) - M(s)).$$

N est un processus de Poisson. Par conséquence $N(t+s) - N(s)$ suit la loi $\mathbb{P} = (\lambda_1, t)$ et indépendant de $N(s)$. De même $M(t+s) - M(s)$ suit la loi $\mathbb{P} = (\lambda_2, t)$ et indépendant de $M(s)$. \square

Le processus de Poisson simple possède des accroissements stationnaires. Cette caractéristique est assez réductrice en pratique. Par exemple, en fiabilité, le cumul des défaillances d'une machine peut faire apparaître une tendance au vieillissement. Dans ce cas, on s'attend à avoir une valeur de l'intensité λ plus importante à la fin de l'étude qu'au début. Le processus des arrivées aux caisses d'un supermarché ou des appels entrants vers un central téléphonique peut aussi connaître des changements au cours du temps. Il est alors naturel de remplacer l'intensité λ par une fonction $\lambda(\cdot)$.

III.3

Processus de Poisson non homogène

Le processus de Poisson non homogène permet de construire un modèle probabiliste décrivant les différents types d'accidents. Le processus de Poisson composé non homogène permet de décrire mathématiquement les conséquences de ces différents types d'accidents. Les résultats théoriques permettent d'anticiper le nombre d'accidents et leurs conséquences.

Si un processus ponctuel de poisson $N(t)$ a un paramètre constant, par exemple λ , il est alors appelé processus ponctuel de poisson homogène ou stationnaire. Le paramètre λ , appelé taux ou intensité, est lié au nombre attendu (ou moyen) de point de poisson existant dans une région délimitée. En fait, le paramètre λ peut être interprété comme le nombre moyen de point par unité de longueur, de surface ou de volume, en fonction de l'espace mathématique sous-jacent, c'est pourquoi il est parfois appelé densité moyenne. Dans de tels scénarios, nous pourrions modéliser $N(t)$ comme un processus de Poisson

non homogène. Un tel processus a toutes les propriétés d'un processus de Poisson, à l'exception du fait que son taux est une fonction du temps, c'est-à-dire $\lambda' = \lambda(t)$.

Un processus de Poisson non homogène et un processus de Poisson composé non homogène sont des généralisations du processus de Poisson. Le processus de Poisson non homogène permet de construire un modèle probabiliste décrivant le nombre de différents types d'accidents. Les résultats théoriques présentés dans [4, 5] permettent d'anticiper le nombre d'accidents et leurs conséquences.

Définition III.3.1 Soit $\lambda(t) : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ une fonction intégrable. Le processus de comptage $\{N(t), t \mapsto \in [0, \infty)\}$ est appelé un processus de Poisson non homogène de taux $\lambda(t)$ si toutes les conditions suivantes sont réunies.

1. $N(0)=0$;
2. $N(t)$ a des incréments indépendants;
3. pour tout $t \in [0, \infty)$, $s > 0$. Nous avons

$$N(t+s) - N(t) \sim \text{Poisson} \left(\int_t^{t+s} \lambda(\alpha) d\alpha \right)$$

L'espérance et la variance de processus de Poisson non homogène sont :

$$E(N(t)) = \int_0^t \lambda(x) dx, \quad V(N(t)) = \int_0^t \lambda(x) dx, \quad t \geq 0$$

Remarque III.3.1 Le processus de Poisson simple correspond à une intensité constante au cours du temps (i.e $\lambda(t) = \lambda$ pour tout $t \geq 0$).

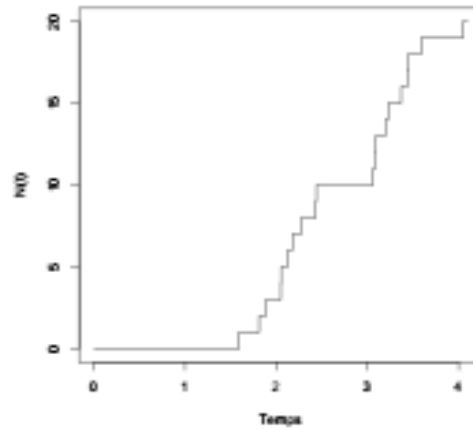
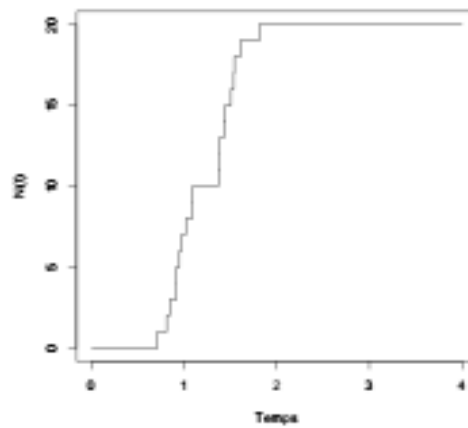
Propriété III.3.1 Supposons l'intensité λ continu au voisinage de t . Alors

- $P(N(t + \Delta) - N(t) = 0) = 1 - \lambda(t) \Delta + o(\Delta)$,
- $P(N(t + \Delta) - N(t) = 1) = \lambda(t) \Delta + o(\Delta)$,
- $P(N(t + \Delta) - N(t) \geq 2) = o(\Delta)$.

Exemple III.3.1 Pour modéliser l'arrivée des clients dans une agence bancaire, on peut imaginer que les arrivées ensuie. On pourra exemple prendre :

$$\lambda(t) = \begin{cases} t(6-t), & 0 \leq t \leq 6 \\ 0 & , t > 6 \end{cases}$$

Exemple III.3.2 Un trajectoire de deux processus de Poisson non homogène avec les fonctions d'intensité $\nu = 3t$ et $\nu = 15t$

Figure 3.1 : Trajectoire pour $\nu = 3t$ Figure 3.2 : Trajectoire pour $\nu = 15t$

Proposition III.3.1 la construction d'un processus de poisson non homogène peut se faire à partir d'un processus de poisson simple par une modification de l'échelle de temps. Si N est un processus de poisson simple d'intensité 1, alors le processus \tilde{N} défini par $\tilde{N} = N_{\wedge(t)}$ est un processus de poisson non homogène d'intensité λ . notons

$$\wedge^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \wedge(x) \geq t\}$$

la pseudo-inverse continue à gauche de \wedge et posons $S_n = \wedge^{-1}(T_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, où T_n est le temps du n -ième saut de N . alors on a

$$\tilde{N}_t = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1_{(S_n \leq t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Exemple III.3.3 — On peut imaginer que l'intensité des arrivées à un guichet subit une modification brusque au cours du temps : $\lambda = \lambda_1$ si $t < t_0$ et $\lambda(t) = \lambda_2$ si $t > t_0$.

— En fiabilité, lorsque un matériel subit une succession de pannes et lorsque chaque panne est réparée instantanément, on utilise souvent un processus de Poisson non

homogène d'intensité :

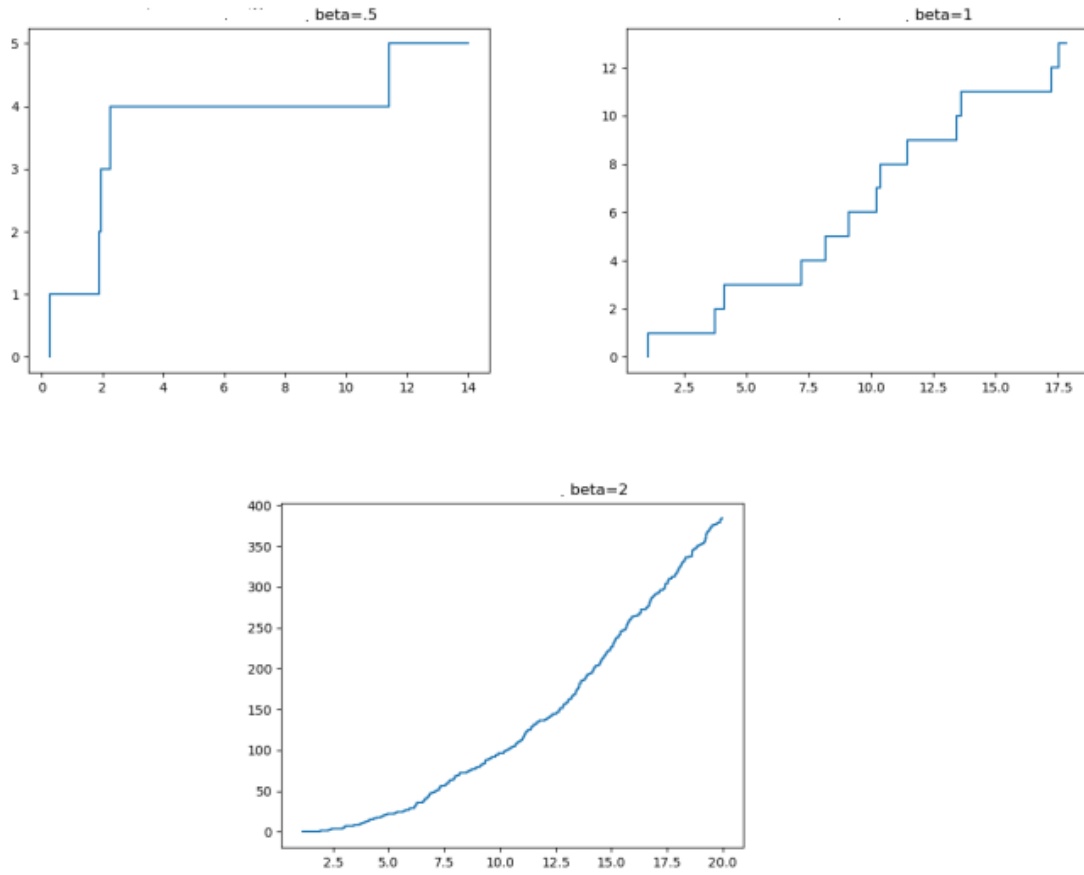
$$\lambda(s) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{s}{\alpha} \right)^{\beta-1}, s \in \mathbb{R}_+.$$

On peut alors montrer que le premier instant de saut $S_1 = \wedge^{-1}(T_1)$ a pour la loi de paramètres α et β dont la densité est donnée par

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

De plus si $\beta = 1$ (taux de panne constant autour du temps) on retrouve la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ et donc le processus de Poisson simple. Si $\beta > 1$, le taux de défaillance augmente avec le temps alors que si $\beta < 1$, le taux de défaillance diminue avec le temps (les éléments défectueux qui fragilisent le système tombent en panne rapidement).

Les figures suivantes montrent des trajectoires dans les trois cas ($\beta = 0.5$, $\beta = 1$ et $\beta = 2$).



III.4 Processus de Poisson composé

Définition III.4.1 Soit (X_n) , $(n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires, indépendantes, identiquement distribuées, soit $\{N(t) : t \geq 0\}$ un processus de Poisson, de densité $\lambda > 0$, indépendant de la suite (X_n) , $(n \geq 1)$. Pour tout $t \geq 0$, on pose :

$$s(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k.$$

Le processus $\{S(t) : t \geq 0\}$ est alors appelé processus de Poisson composé.

Exemple III.4.1 — Un exemple d'un processus de Poisson composé pourrait être le

nombre de litres d'essence vendus à une pompe d'une station service. Le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est le processus d'arrivée des clients à cette pompe et pour le n -ième client, Y_n est le nombre de litres qu'il a achetés.

- On suppose que des clients entrent dans un grand magasin selon un processus de Poisson $\{N(t) : t > 0\}$ de densité λ . On suppose, de plus, que les montants X_n ($n > 1$) des dépenses faites par chaque client forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose, en outre, que la suite (X_n) ($n > 1$) est indépendante du processus $\{N(t) : t > 0\}$. Avec les notations précédentes, $S(t)$ est le montant des dépenses faites dans le magasin dans l'intervalle $[0, t]$.
-

IV

Généralisation non homogènes du processus de Poisson dans la modélisation des processus aléatoires liés aux accidents de la route

La théorie des processus stochastiques fournit des concepts et des théorèmes, qui permettent de construire les modèles probabilistes concernant les accidents. Le «processus de comptage» peut être appliqué pour modéliser le nombre d'accidents de route, de mer et de chemin de fer dans les intervalles de temps donnés.

Le processus de Poisson et ses généralisations jouent un rôle crucial dans la construction de ces modèles, le processus de Poisson non homogène et le processus de Poisson composé non homogène correspondant sont appliqués à la modélisation du nombre d'accidents de la route et du nombre de personnes blessées et tuées sur des routes algérienne. Pour estimer les paramètres du modèle, des données provenant des rapports annuels de la police algérienne ont été utilisées.

IV.1 Introduction

Un accident corporel de la circulation fait intervenir plusieurs acteurs économiques, certains sont susceptibles de gagner, en termes financier, et d'autres sont susceptibles d'en subir les coûts. Il s'agit, d'identifier les flux financiers, entre les différents acteurs économiques pour comprendre les secteurs qui bénéficient et ceux qui perdent du fait d'un accident. Les coûts des accidents de la circulation sont généralement rassemblés en deux groupes relatifs, soit aux victimes (les coûts médicaux, les coûts de réhabilitation, les coûts humains... etc.) soit à l'accident (les coûts des dommages matériels, les coûts administratifs... etc.)

Lorsqu'un accident corporel de la route survient une enquête particulière sur ses circonstances et ses causes est effectuée par les services de sécurité. En Algérie, la police nationale intervient dans les zones urbaines et la gendarmerie nationale au niveau des zones rurales, d'où la distinction entre accident en milieu urbain et accident en mi-

lieu rural. Par ailleurs, il faut signaler, que les statistiques concernant les accidents corporels de la circulation se réfèrent généralement aux accidents survenus sur la voie publique et ayant occasionnés au moins un tué et/ou blessé. Concernant les tués, ne sont pris en compte que les décès survenus sur le lieu de l'accident, pendant le transfert à l'hôpital ou immédiatement après celui-ci. La sécurité routière constitue un enjeu majeur tant par le nombre des victimes sur les routes que par le poids du coût économique de ces accidents sur l'économie algérienne. La lutte contre l'insécurité routière est une préoccupation prioritaire d'État et cette lutte doit être menée envers les usagers de la route les plus vulnérables, vu que les déplacements ne cessent de croître en Algérie. L'objectif du diagnostic du bilan des accidents de la circulation routière des années 2005, 2010 et 2017 est d'identifier et de quantifier les dysfonctionnements caractérisant les accidents de la route. Ces dysfonctionnements seront décrits par le moyen d'indicateurs tels que les ratios d'accidents ou d'avarie, les niveaux d'utilisation de la route, et autres. La lutte contre l'insécurité sur les routes est un défi qui impose une évolution en profondeur des mentalités et une mobilisation sans relâche des services de l'État dans le but de protéger la vie des citoyens actuels et futurs. La théorie des processus stochastiques fournit des concepts et des théorèmes, qui permettent de construire les modèles probabilistes concernant les accidents. Le «processus de comptage» peut être appliqué pour modéliser le nombre d'accidents de route, de mer et de chemin de fer dans les intervalles de temps donnés.

Le processus de Poisson et ses généralisations jouent un rôle crucial dans la construction de ces modèles, le processus de Poisson non homogène et le processus de Poisson composé non homogène correspondant sont appliqués à la Modélisation du nombre d'accidents de la route et du nombre de personnes blessées et tuées sur des routes algérienne. Pour estimer les paramètres du modèle, des données provenant des rapports annuels de la police algérienne ont été utilisées. Nous avons utilisé la bibliographie [1] [3] [5] [6] [7] [9]

IV.2 Données sur les motorisations et les accidents de la route en Algérie

Évolution du parc motorisé en Algérie

Le transport constitue une priorité dans la stratégie de développement du territoire Algérien, lequel compte une particularité dans le domaine géographique et démographique.

En effet, l'Algérie est le pays le plus étendu des pays africains (plus de 2,38km²). Le nord et le sud du pays sont traversés d'ouest en est par une double barrière montagneuse, à savoir :

Atlas tellien et Atlas saharien, avec entre les deux des plaines et des hauts plateaux. Quant au Sahara, il couvre presque à lui seul 85% du territoire algérien.

Les conditions climatiques influencent à leur tour l'implantation des populations, où il est constaté une forte concentration de la population au niveau de la bande littorale avec un climat méditerranéen. La concentration du nombre d'habitants régresse à mesure que nous descendons vers le sud.

Suivant la tendance démographique, le tissu économique se concentre également au niveau de la frange Nord à forte concentration de population, où sont également situées les principales villes du pays, considéré comme les bassins de consommation. Ces spécificités géographiques et économiques impacts de manière directe sur le développement du système de transport.

Selon les tableaux ci-dessous (Tableau 01 et Tableau 02), le niveau de motorisation de l'Algérie affiche un rythme clairement croissant. Les voitures de tourisme et de transport de marchandises, en termes de nombre sont ceux qui ont affiché, au cours des deux décennies, la croissance la plus élevée, ce qui est, certainement, un bon indicateur d'une économie en mouvement.

Par ailleurs, les véhicules de transports de personnes ont eux aussi vu croître leur nombre, révélant ainsi des indices clairs de l'importance de l'évolution de la mobilité. Les motos occupent une position très visible dans ce tableau, même si leur poids est moindre dans le total.

Le ratio total des automobiles en circulation sur population totale est une donnée importante qui ne doit pas passer inaperçue. En Algérie, ce ratio est de 89 automobiles pour chaque mille habitant. En plus, des conclusions peuvent être tirées à partir du tableau ci-après relatif à l'étude des années de mise en circulation des divers genres de véhicules. En premier lieu, il y a lieu de signaler :

- Les véhicules de tourisme sont, dans leur majorité, anciens, dépassant les 10 ans d'âge, nous observons également une augmentation du genre de véhicules de moins de 5 ans grâce à l'évolution du pouvoir d'achat au cours des dernières années et autres facilités ;*
- Les véhicules de transport de marchandises subissent aussi une tendance similaire ;*
- Les véhicules en circulation de plus de 10 ans d'utilisation indiquent un degré élevé de vieillissement des automobiles en Algérie et un amortissement orienté vers le long terme.*

Le réseau routier algérien, à l'image de la répartition de la population et de ses activités, est dense dans la frange nord du pays, assez lâche sur les hauts plateaux et se réduit pour atteindre un petit nombre d'axes dans le Sud (Sahara). Toutefois, ce réseau se densifie de manière rapide et constante. Les chiffres du tableau n°3 ci-dessous rendent compte de cette évolution entre 1970 et 2017.

<i>Genre de véhicules</i>	1996	2006	2017	<i>var% (1996-2017)</i>
<i>Véhicule Tourisme</i>	1.615.107	2.042.824	3.984.250	147%
<i>Camion</i>	294.283	322.628	417.286	42%
<i>Camionnette</i>	581.092	687.391	1.190.641	105%
<i>Autocars-Bus</i>	30.430	54.769	86.741	185%
<i>Tracteurs routiers</i>	46.906	53.114	85.504	82%
<i>Tracteurs agricoles</i>	117.425	125.892	161.885	38%
<i>Véhicule spécial</i>	2.784	3.071	7.164	157%
<i>Remorque</i>	89.245	103.028	151.503	70%
<i>Moto</i>	8.985	9.507	77.586	763%
Total	2.786.257	3.402.294	6.162.542	121%

Tableau 1 : Évolution du parc automobile Algérie de 1996 à 2017

<i>Genre de véhicule</i>	-5 ans	5 à 9 ans	10 ans et plus	Total
<i>Véhicules de Tourisme</i>	753.569	805.613	2.425.065	3.984.250
<i>Camion</i>	22.295	36.892	358.099	417.286
<i>Camionnette</i>	151.656	232.765	806.220	1.190.641
<i>Autocars-bus</i>	4.747	12.915	69.079	86.741
<i>tracteurs routiers</i>	9.902	12.031	63.571	85.504
<i>Autres tracteurs</i>	18.123	11.555	132.207	161.885
<i>Véhicule spéciale</i>	1.518	955	4.691	7.164
<i>Remorque</i>	19.184	17.570	114.749	151.503
<i>Moto</i>	57.713	7.534	12.321	77.568
TOTAL	1.038.707	1.137.830	3.986.005	6.162.542

Tableau 2 : Évolution du parc automobile Algérie par tranche d'âge en 2017

<i>Classement administratif</i>	1970	2017
<i>Autoroutes</i>	/	4.545
<i>RN</i>	13.960	30.932
<i>CW</i>	15.300	27.356
<i>CC</i>	5.900	70.908
Totaux	35.160	133.741

Tableau 3 : Évolution du réseau routier par catégorie (en km linéaire)

IV.3 Données générales sur les accidents de la route

L'analyse des statistiques montre à travers une lecture particulière l'évolution du nombre de personnes tuées en Algérie entre 1970 à 2017 et donne plus d'éclaircissements pour

mieux cerner la situation de la sécurité routière en Algérie. Ainsi 4 données importantes nous obligent à marquer des arrêts pour mieux diagnostiquer les causes et mesures d'atténuation engagés. Entre 1970 et 1986, la progression moyenne annuelle du nombre des tués a enregistré 6,8%. La période de 1987 à 2000 ou il y a eu promulgation le 10 février 1987 de la loi n°87 – 09 relative à l'organisation, la sécurité et la police de la circulation routière, une hausse moyenne annuelle de 0,6% a été constaté. Cette dernière a atteint 2,3% entre 2001 et 2008, période qui a vu la promulgation le 19 août 2001 de la loi n°01 – 14 relative à l'organisation, la sécurité et la police de la circulation routière. Cette hausse est devenue inquiétante durant cette période, en revanche après la promulgation le 22 juillet 2009 de la loi 09 – 03 modifiant et complétant la loi n°01 – 14 relative à l'organisation, la sécurité et la police de la circulation routière, il a été constaté entre l'année 2009 et 2017 une baisse significative de la moyenne annuelle de tuée de 2,9% En huit (8) ans, entre 2009 et 2017, le gain s'élève à –56% pour les personnes tuées et 94% pour les personnes blessées. Le gain cumulé depuis 2009 est estimé à plus de 2500 vies sauvés et 61.000 blessés épargnés. (Voir figure 01)

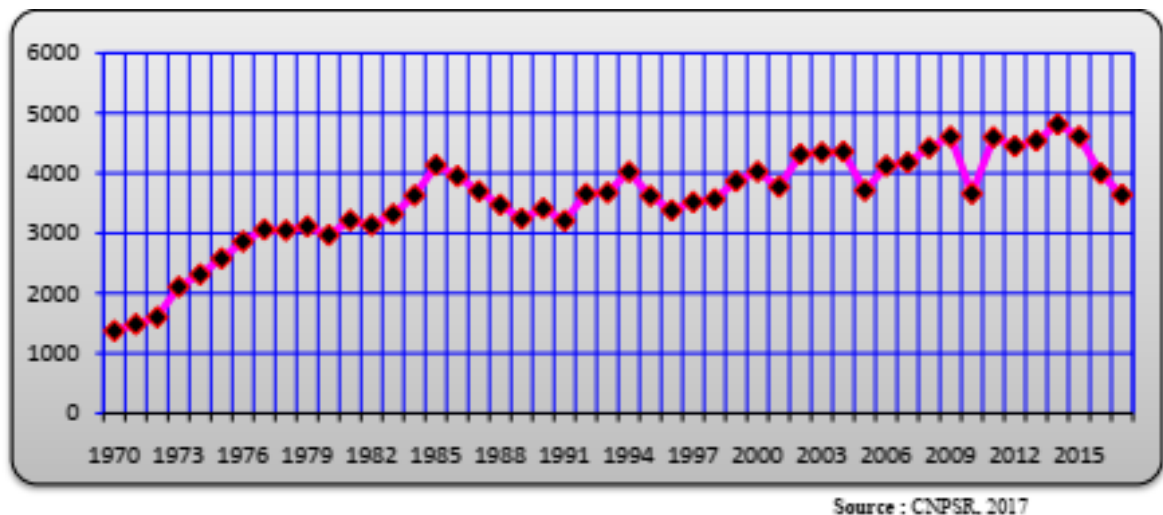


Figure01 :Évolution du nombre de personnes tuées de la route en Algérie de 1970 à 2017

Pour de nombreux chercheurs, la grande difficulté dans l'analyse des données statistiques de l'insécurité routière est d'évaluer la fréquence des accidents rapportés à des facteurs endogènes et/ou exogènes à la route y compris voir les coïncidences et les véritables liens entre les différentes causes. Ainsi il est utile de présenter ici les données de l'accidentologie pour orienter la lumière sur ce volet qui continue d'attirer l'attention des intervenants dans ce domaine qu'ils soient chercheurs ou décideurs. Il sera question de marquer des arrêts pour analyser et faire une comparaison entre les données des années 2005, 2010 et 2017.

Selon les statistiques établies par le CNPSR (Centre National de Prévention et de Sécurité routières), l'année 2017 a enregistré 3.639 morts à cause des accidents de la circulation au niveau national et une moyenne des décès de dix (10) personnes tuées par jour. Pour ce qui est de la répartition des décès entre les zones urbaines et rurale, les mêmes statistiques montrent que 726 personnes ont été tuées dans les zones urbaines et 2.913

personnes tuées au niveau des zones rurales (Voir tableau 4). Ainsi, cette année 2017 a vu moins de morts par rapport aux deux années 2015 et 2010, lesquelles ont enregistré respectivement 3711 et 3660 morts sur les routes au niveau national. S'agissant de la répartition entre les milieux, l'année 2017 enregistre une hausse dans le nombre des tués dans le milieu urbain avec 726 Morts. En revanche l'année 2010 a vu 666 morts, ce qui représente aussi un chiffre inférieure par rapport à l'année 2005 qui enregistré 779 morts. Plus de 25.000 accidents corporels, dont plus de 60% en zones urbaines ont été enregistré durant cette année. S'agissant du nombre de blessés, le bilan de 2017 fait état de plus de 36.000 sinistrés répartis à parts égales entre le milieu urbain et rural. Ainsi ce nombre de blessés pour cette année a le comparer avec celui des années 2005 et 2010 est inférieur ce qui montre une réduction remarquable avec une baisse de 16148 blessés par rapport à l'année 2010 et également une baisse de 21795 blessés (Voir Tableau 4).

	Année 2005	Année 2010	Année 2017
Nombre d'accidents	39233	32873	25038
Zone urbaine	16549	15894	15335
Zone rurale	22648	16979	9703
Nombre du tués	3711	3660	3639
Zone urbaine	779	666	726
Zone rurale	2932	2994	2913
Nombre de blessés	58082	52435	36287
Zone urbaine	19225	18173	18175
Zone rurale	38857	34262	18112

Tableau 4 : Nombre d'accidents, des tués et des blessés(2005, 2010 et 2017)

En plus, des données du tableau 4, nous pouvons considérer que le trafic automobile en milieu urbain et porteur d'insécurité vu le nombre des morts enregistrés. L'intégration des préoccupations urbaines de sécurité routière dans les démarches de planification urbaine ont fait l'objet d'études ou les comparaisons des phénomènes d'insécurité observé dans les centres urbains denses et de ceux survenant dans les périphéries peu denses peut apporter quelques éléments indirects à ce sujet (insécurité routière), mais qu'il est difficile d'en tirer des conclusions claires. . . Sur la base d'une comparaison entre centre et périphérie, il est possible qu'une urbanisation plus denses pourrait avoir des effets complexes, non univoques : elle permettrait de réduire la gravité des accidents, mais serait peut-être susceptible d'augmenter leur fréquence (Brenac, Maillot,2012).

La catégorie de véhicules la plus impliquée dans les accidents de la route en Algérie est celle des véhicules de poids légers. Cela s'explique par l'évolution du parc automobile en Algérie. Puis, viennent en deuxième position les motocycles qui peut être expliqué par l'excès de vitesse des usagers et leur manque de conscience ainsi que l'utilisation massive des motocyclettes vu l'encombrement des routes en ville. Par ailleurs, il convient de souligner que les motocycles représentent 1,83% du parc automobile.

La croissance économique en Afrique du Nord, en particulier en Algérie, et le sous investissement persistant dans la sécurité routière face à la croissance démographique rapide, ainsi qu'à l'urbanisation, ont entraîné une détérioration de l'état des routes.

L'Algérie est considérée comme l'un des pays avec le plus grand nombre de décès liés à la circulation routière sur le continent africain (Azzedine and Ghiat, 2015). La situation de la sécurité routière a été une préoccupation majeure en Algérie ces dernières années, les décès sur les routes étant signalés comme l'une des principales causes de décès en Algérie (ONS,2015). Une tendance générale à la hausse est observée de 1970 à 2017 comme le montre le tableau 1 qui exprime l'état de l'insécurité routière (CNPSR,2020). Les statistiques du Centre national de prévention et de sécurité routière indiquent que l'Algérie a enregistré 39010 accidents en 2007, avec 4177 morts et 61 139 blessés, contre 42477 en 2013, avec 4540 morts et 69 582 blessés (Azzedine and Ghiat, 2015). Depuis 2014, on observe une diminution relative du nombre d'accidents de la circulation. 35500 accidents de la circulation ont été recensés en 2014 contre 18 949 accidents en 2017 (CNPSR., 2017)

Un tableau contenant le nombre d'accidents et leurs conséquence est présenté ci-dessous les données proviennent des rapports de police.

Année	Nombre d'accidents	Décès	Blessés
1970	24437	1374	27430
1971	24163	1484	20072
1972	23621	1601	21883
1973	25714	2106	23423
1974	26560	2313	24618
1975	29484	2576	27954
1976	31424	2862	27530
1977	31111	3061	27860
1978	32616	3046	30143
1979	32335	3114	30118
1980	33275	2967	31928
1981	36428	3216	35616
1982	27742	3134	35347
1983	29154	3315	35596
1984	29497	3628	36612
1985	35308	4134	37936
1986	34899	3948	38548
1987	34292	3696	38012
1988	33186	3473	37937
1989	31372	3241	36565
1990	29493	3410	36955
1991	27585	3208	35484
1992	27550	3654	35726
1993	27842	3673	21689
1994	20141	4022	26198
1995	20127	3621	26768
1996	23949	3381	31952
1997	25930	3519	34534
1998	28693	3565	38092
1999	31639	3885	43765

<i>Année</i>	<i>Nombre d'accidents</i>	<i>Décès</i>	<i>Blessés</i>
2000	35771	4025	51506
2001	38393	3768	54633
2002	41754	4314	57013
2003	43227	4343	63699
2004	43777	4356	64714
2005	39233	3711	58082
2006	40885	4120	60120
2007	39010	4177	61139
2008	40481	4422	64708
2009	41224	4607	64979
2010	32873	3660	52435
2011	41467	4598	66300
2012	42477	4227	69141
2013	42846	3748	69582
2014	40101	3984	44546
2015	35199	4610	45012
2016	28856	3992	44007
2017	25038	3639	36287

Tableau 5 : Nombre d'accidents, de décès, de blessés et moyenne d'accidents par ans en Algérie(1970-2017)

Le tableau 5 montre l'évolution du nombre d'accidents de la circulation en Algérie au

cours de la période 1971 à 2017. On peut noter ce qui suit :

- *La période 1970-1981 : Les accidents de la circulation ont augmenté de 3,79% en moyenne pour atteindre 36 428 accidents*
- *La période 1981 - 1982 : Les accidents de la circulation sont diminués à 27 742, avec une moyenne de -23,84%.*
- *La période 1982 - 1985 : Reprise de la croissance des accidents de la circulation avec une moyenne de 8,66%, s'arrêtant à 35 308 accidents*
- *La période 1985 - 1995 : La récurrence de ces drames se réduit à un chiffre de 20 127 accidents, avec une moyenne de 5,08%*
- *La période 1995 – 2004 : Hausse récurrente des accidents de la circulation jusqu'à atteindre ses plus hauts niveaux avec 43 777 accidents, avec un taux moyen de 9,13%*
- *La période 2004 – 2013 : Il a été témoin de fluctuations dans les résultats du trafic, le nombre d'accidents de la circulation ayant atteint 42 846, avec un taux moyen de 0,45%.*
- *La période 2013-2017 : le phénomène des accidents de circulation s'est effondré à un taux moyen de -10,85%, avec les niveaux les plus bas enregistrés : 18 949 accidents.*

IV.4 Modèle du nombre d'accident de la route

En raison de la nature de ces événements, l'hypothèse préalable selon laquelle il s'agit d'un processus de poisson non homogène avec un paramètre $\lambda(t) > 0$ semble justifiée. La valeur attendue de l'incrément de ce processus, tandis que sa distribution unidimensionnelle est déterminée. Nous pouvons utiliser ces règles en pratique si l'intensité fonction $\lambda(t) > 0$ est connue. Pour définir cette fonction, on utilise les informations présentées dans le tableau 5. L'analyse statistique des données montre que la fonction d'intensité $\lambda(t)$ peut être approximée par la fonction linéaire $\lambda(t) = at + b$.

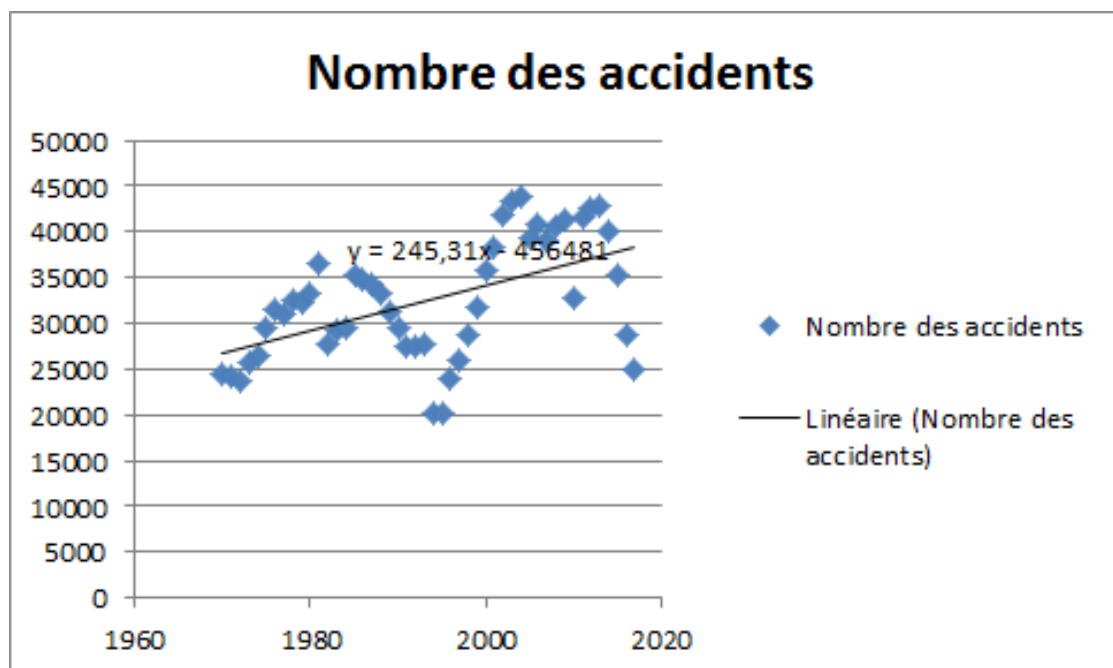


Figure 02 : Intensité des accidents de la route en Algérie

IV.5 Estimation des paramètres du modèle

En divisant le nombre d'accidents de chaque année par 365 ou 366, on obtient l'intensité en unités de [1/jour].

On approxime l'intensité empirique par une fonction de régression linéaire $y = ax + b$. aux données du tableau 5 et en utilisant le système Excel, nous obtenons :

$$a = 245.31 \quad b = -456481$$

L'intensité linéaire des accidents est :

$$\lambda(x) = 245.31x - 456481$$

cette fonction est illustrée à la figure 02.

nous obtenons :

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$$

$$\Lambda(t) = 122.655t^2 - 456481t, \quad t \geq 0.$$

par conséquent, la distribution unidimensionnelle de processus de poisson non homogène est :

$$P(N(t) = k) = \frac{(\Lambda(t))^k}{k!} e^{-\Lambda(t)} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

Enfin, on peut dire que le modèle du nombre d'accidents sur les routes Algériennes est le processus de Poisson non homogène avec le paramètre $\Lambda(t), t \geq 0$, déterminé par $122.655t^2 - 456481t, t \geq 0$.

L'écart-type correspondant est :

$$D(t) = \sqrt{V[N(t)]} = \sqrt{\int_0^t \lambda(x) dx}, \quad t \geq 0.$$

La valeur attendue de l'incrément $N(t+h) - N(t)$ est :

$$\Delta(t;h) = E(N(t+h) - N(t)) = \int_t^{t+h} \lambda(x) dx.$$

L'écart-type correspondant est :

$$D(t;h) = D(N(t+h) - N(t)) = \sqrt{\int_t^{t+h} \lambda(x) dx}$$

Un processus de Poisson non homogène avec $\lambda(t) = \lambda, t \geq 0$, est un processus de Poisson régulier. Les incréments d'un processus de Poisson non homogène sont indépendants, mais pas nécessairement stationnaires. Un processus de Poisson non homogène est processus de Markov.

IV.6

Anticipation du nombre d'accidents

$$P(N(t+h) - N(t) = k) = \frac{\Delta(t;h)^k}{k!} e^{-[\Delta(t;h)]}$$

Cela signifie que l'on peut anticiper le nombre d'accident à tout intervalle de temps, avec une longueur de h . L'espérance mathématique de L'incrément $N(t + h) - N(t)$. pour la fonction :

$$\Lambda(t) = a \frac{t^2}{2} + bt$$

nous obtenons l'espérance mathématique des accidents à l'intervalle de temps $[t, t + h)$

$$\Delta(t; h) = h \left(\frac{ah}{2} + b + at \right),$$

L'écart type correspondant est :

$$\sigma(t; h) = \sqrt{h \left(\frac{ah}{2} + b + at \right)}.$$

Exemple IV.6.1 Nous voulons prédire le nombre d'accident du 1^{er} janvier 2018 au 30 juin 2018. Nous voulons également calculer la probabilité d'un nombre donné d'accidents. Nous pouvons obtenir un intervalle t et h . En prolongeant le tableau 5 sur l'année 2017, nous pouvons obtenir un intervalle $[2018, 2018 + 152 \text{ jours}] = [2018, 2018 + \frac{152}{365}] = [2018, 2018 + 0.416] = [2018, 2018.416]$.

Du 1^{er} janvier 2018 au 1^{er} juin 2018, 152 jours se sont écoulés. Par conséquent, $t = 2018 + 152 = 2018 + 0.416 = 2018.416$. pour ces paramètres, nous obtenons $\Delta(t; h) = 16102.3838$, $\sigma(t; h) = 126.8951$. Cela signifie que le nombre moyen prévu pour 2018 et le 1^{er} janvier 2018 et 31 juin 2018 est d'environ 16102 avec un écart-type d'environ 126.

Du 1^{er} janvier 2019 et 31 mars 2019 nous avons obtenir un intervalle $[2019, 2019 + 90 \text{ jours}] = [2019, 2019 + 0.246] = [2019, 2019.246]$.

Du 1^{er} janvier 2019 ou 31 mars 2019 se sont écoulés. Par conséquent, $t = 2019 + 0.246 = 2019.246$ nous obtenons $\Delta(t; h) = 9567.0407$ et $\sigma(t; h) = 97.8112$.

Cela signifie que le nombre moyen prévu pour 2019 et le 1^{er} janvier 2019 et 31 mars 2019 est d'environ 9567 avec un écart-type d'environ 98.

IV.7 Conclusion

Le processus de Poisson non homogène et le processus de Poisson composé non homogène correspondant sont appliqués à la modélisation du nombre d'accidents de la route, ainsi que du nombre de blessés et de tués sur les routes polonaises. Pour estimer les paramètres du modèle, on a utilisé des données issues des rapports annuels de la police polonaise. Les modèles construits ont permis d'anticiper le nombre d'accidents à tout intervalle de temps, de longueur h , et leurs conséquences. On a obtenu la valeur attendue du nombre de tués ou de blessés, ainsi que l'écart type correspondant dans l'intervalle de temps $[t, t + h]$.

La distribution statistique du nombre de morts dans un seul accident, la distribution statistique du nombre de blessés, ainsi que la distribution statistique du nombre de morts ou de blessés dans un seul accident, sont calculées.

À travers ce mémoire, nous avons mené une étude approfondie du processus de Poisson, en explorant ses fondements théoriques, ses propriétés mathématiques essentielles, ainsi que ses diverses applications pratiques. Nous avons montré comment ce processus constitue un modèle de référence pour décrire des phénomènes où des événements surviennent de manière aléatoire, indépendamment les uns des autres, et à un rythme statistiquement régulier.

Nous avons débuté par un rappel des notions fondamentales en théorie des probabilités, ce qui nous a permis de poser un cadre rigoureux pour la compréhension des processus stochastiques. Ensuite, nous avons présenté la définition formelle du processus de Poisson homogène, avant de nous intéresser à ses généralisations telles que le processus de Poisson non homogène. Ces modèles offrent une plus grande souplesse et permettent de mieux représenter certaines réalités dynamiques complexes.

Les nombreuses applications étudiées ont mis en évidence la richesse et la polyvalence du processus de Poisson dans des domaines variés : modélisation des files d'attente, fiabilité des systèmes techniques, flux dans les réseaux, ou encore phénomènes biologiques. En conclusion, le processus de Poisson s'impose non seulement comme un objet théorique fondamental, mais aussi comme un outil pratique incontournable pour l'analyse des phénomènes aléatoires discrets. Sa compréhension ouvre la voie à l'exploration de modèles plus avancés, comme les processus de renouvellement, les chaînes de Markov, ou encore les processus ponctuels généralisés, qui représentent des perspectives intéressantes pour des recherches futures.

V.0 Bibliographie

- [1] Bougueroua, Mariem, and Laurent Carnis. "Insécurité routière et développement économique : analyse du cas algérien." *RTS. Recherche, transports, sécurité* 2018 (2018) : 13p.
- [2] CHENINI, M. *Loi exponentielle et processus de Poisson homogène.*
- [3] DERRAS, ABDELHAK. "La Sécurité Routière dans les Projets Routiers en Algérie." (2023).
- [4] Foata, Dominique, and Aimé Fuchs. *Processus stochastiques : Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales.* Dunod., 2002.
- [5] Grabski, Franciszek. "Nonhomogenous Poisson process application to modelling accidents number at Baltic Sea waters and ports." *Journal of Polish Safety and Reliability Association* 8 (2017).
- [6] Grabski, Franciszek. "Nonhomogeneous Poisson process and compound Poisson process in the modelling of random processes related to road accidents." *Journal of KONES* 26.1 (2019) : 39-46.
- [7] Madani, Azzeddine, Tarek Chella, and Abdelmadjid Bouder. "Les accidents de la route en Algérie, nécessité d'un diagnostic." *Revue parcours cognitifs des sciences sociales et humaines* 3.9 (2019) : 105-122.
- [8] OGOREK, Mélisande ALBERT-Nicolas. "Processus de Poisson homogènes Application à des données génomiques."
- [9] Ouramdane, Nadjat, Hocine Ifourah, and Jamel Eddine Henchiri. "Les accidents de la route en Algérie : un diagnostic pour mieux agir." (2023).
- [10] Oumaima, H. A. B. C. H. I. *Estimation de l'intensité d'un processus de Poisson homogène.*
- [11] Planchet, Frédéric, and Pierre Thérond. "Modèles de durée." *Economica* (2006).
- [12] Ruwet, Christel. "Processus de Poisson." (2007).