الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا للأساتذة التعليم التكنولوجي-سكيكدة

Ecole Normale Supérieure d'eneigneme technologique,skikda

Département de Mathématiques_ قسم الرياضيـــات_

مُذكّرة تخرُج لنَيل شهَادة أُستَاذ التَّعليِم المُتوسط

الحلول العددية للمعادلات اللاخطية

من إعداد الطالبتين :

• صياد صفاء • شطي ياسمين

لجنة المناقشة :

الأستاذ الرئيسي : غمراني سارة. أ.المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي

الأستاذ المؤطر : فراق عزوز . أ.المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي

الأستاذ المناقش : بوسنة جلال. أ.المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي

الأستاذ المناقش : بن تيعامة وئام. أ.المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي

2025/2024

إهـــــداء

"وَ مَآ تَوْفِيقِي الاّ بِاللّهِ عَلَيْهِ تَوَكَّلتُ وِ الَيه أُنِيبْ"

في لحظة طال انتظارها، تقف الكلمات حائرة أمام عظمة الشعور...

أربعة أعوام من السعي، والكد، والسهر، والدموع أحيانًا، والابتسامة كثيرًا،أربعة أعوام كانت مليئة بالتجارب، بالتحديات، وبالنجاحات الصغيرة التي صنعت هذا النجاح الكبير. ها أنا اليوم، على أعتاب نهاية مرحلة وبداية أخرى، أحمل بين يدي ثمرة تعب السنين، وفي قلبي عرفان لا يسعه إلا الحروف. وقبل أن أختم هذا المشوار، كان لا بد أن أقف وقفة امتنان... إهداء بسيطا، لكنه يحمل في طياته كل مشاعري الصادقة، إلى أولئك الذين ساندوني، وآمنوا بي، ورافقوني حتى وصلت. إلى من زرعوا الأمل في دربي، وسقوا حلمي حتى أزهر...

الى من جعل الله الجنة تحت قدميها ، من و هبتني الحياة ، ملجئ من وخزات الأيام ، سر قوتي و تشبثي بالحياة ، المرأة التي حاربت ذلك العرض الخبيث

أمي الحبيبة نبض قلبي، ومصدر قوتي، ورفيقة دعائي في كل لحظة.

كنت وما زلت السند الأول، وصوتك الذي يردد "أنا فخورة بك" هو وسامي الأجمل أدامك الله تاجا على رووسنا و يفخر به قلوبنا .

إلى أبي العزيز،معلّمي الأول، وقدوتي في الحياة،

كم تعبتَ لتصل بنا إلى بر الأمان، وكم كنتَ السقف الذي احتمينا به من عواصف الدنيا.

إلى أختي الوحيدة" مريم"، يا زهرة البيت وبهجته، يا من كنت نوري في لحظات العتمة

شكراً لكل كلمة طيبة، ولكل لحظة وقفتِ فيها بجانبي.

إلى خالتي الغالية" إلهام "لتي كانت لي دومًا أما ثانية وقلبًا حنونًا،

جزاك الله عنّي خير الجزاء، فقد كنتِ الحضن الدافئ والكلمة الطيبة في وقت الحاجة.

أشكرك من أعماق قلبي على دعمك الصادق و زوج خالتي الرجل الذي كان بمثابة الأب لي

شكرا لوقوفك بجانبي واهتمامك الدائم.

إلى جدتي العزيزة، صاحبة الدعاء الصادق والوجه النوراني

وجودك في حياتي بركة، وكلماتك كانت عزائي في لحظات التعب. لك مني كل الحب.

إلى الكوكبين اللذان يطوفان في سمائي و يمنحاني النور و الدفئ و السعادة

أخويّ العزيزين سامي ورامي

يا من شاركتموني تفاصيل الحياة، وكنتم لي أكثر من إخوة

الى رفيقة الروح و صديقة القلب

الى أجمل صدفة في حياتي الى من تتعافى معها روحي الى من تعالت معها الضحكات الى حبية قلبي ااالتي تشاركت معها هذا الانجاز " صفائي "

إلى توأم روحي التي شاركتني كل لحظات حياتي ، من فرحي إلى حزني، ومن كانت دائما الى جانبي ، مشجعة ومحبة

الى حظي الجميل في الدنيا الى جميلة الروح و طيبة القلب الى أختي التي لم تلدها أمي "أمينة"

الى رفيقة العمر الى من تبقى قريبة حتى في بعد الأميال الى كتفي الثابت الذي لا يميل "نسيبة"

الى من جمعتني بها أجمل الأيام و أحلى الذكريات الى جميلتي "كوثر"

الى من جعلوا سنواتي بالمدرسة العليا رحلة مفعمة بالحب و الدعم من كنتم البلسم في لحظات التعب،

و في أوقات الضيق من زرعن في قلبي ذكريات لا تمحى و أصبحن جزءا لا يتجزأ منّي من تبادلنا سويا اللحظات السعيدة و المرهقة ،

لكم كل الحب والامتنان على صحبتكم

الجميلة، ومواقفكم التي لا تُنسى.

الى عائلة أبواب العلم والمعرفة،

لكم مني جزيل الشكر والتقدير.

إهــــــداء

الى عائلة أمي الحبيبة و أبي العزيز كل باسمه و مقامه الى من قدم لي التشجيع و الدعم من كان عونا و سندا في هذا الطريق أهديكم هذا الانجاز الذي لا طالما تمنيتموه الى كل من كان له دور قريب أو بعيد لإتمام هذه الدراسة

الى كل من نساهم قلمي و لم ينساهم قلبي الى كل من غاب اسمهم عن هذه الكلمات ، ذكراكم محفورة في ذاكرتي

إلى أساتذتي الكرام

،لكل من علّمني حرفًا وفتح لي بابًا من أبواب العلم والمعرفة

لكم مني جزيل الشكر والتقدير، فقد كنتم

،منارات أنارت طريقي

.وساهمتم في بناء شخصيتي وتوجيهي إلى طريق النجاح

وإلى نفسي

أخاطبكِ بكل فخر

يا من صبرتِ في وجه الصعاب، وثابرتِ رغم التعب، وسهرتِ الليالي طلبا للعلم، أربع سنوات من الجدّ والاجتهاد، لا يمكن اختزالها في كلمات

أهديكِ هذا الإنجاز لأنه ثمرة عزيمتكِ

وإيمانكِ، وقوتكِ

أهدي نجاحي هذا إلى نفسي الطموحة التي تحملت كل العثرات و أكملت رغم الصعوبات

إلى عائلتي وأحبتي جميعًا

الحمد الله ما انتهى درب و لاختم جهد و لا سعي إلا بفضله ، الحمد الله الذي يسر البدايات و بلغنا النهايات

إهـــــداء

الحمد لله الذي بنعمته تتمّ الصالحات،
وبفضله وحده اكتمل هذا المشوار، وتحقق هذا الحلم الذي طالما دعوتُ الله أن يكتبه لي.
فما كان لهذا الإنجاز أن يكون لولا عون الله، وتوفيقه، ورحمته التي وسعت كل شيء.
إلى أمي، نبع الحنان، وسر الصبر، ورفيقة الروح،
يا من كنتِ تسهرين حين أنام، وتدعين لي حين أغفل،
كنتِ دومًا سندي الذي لا ينكسر، وصوتك ملاذي حين يضيق بي العالم،
أهديكِ ثمرة سنواتي، نجاحي، وتخرّجي، ودموعي التي خبّأتها عنك في الليالي القاسية
وإلى أبي...
يا من كنتَ السند الصامت، والركن الذي لا يميل،
أعلم كم أخفيتَ قلقك خلف كلماتك القوية، وكم حملت من أجلي ما لا أراه،
أعلم أن كل نجاحي هو امتداد لاسمك وجهدك،
فشكرًا لك بحجم السماء
إلى أخواتي العزيزات،
إلى سارة، أختي الكبرى، ملهمتي في الحكمة والهدوء،
يا من كنتِ دومًا الملجأ الأول حين احتجتُ إلى نصيحة،
علمتِني كيف أكون كبيرة رغم ضعفي، وقوية رغم خوفي.
إليكِ كل الحب والتقدير، فأنتِ أول من صدّق بي حتى قبل أن أصدق بنفسي.
وإلى سلوى، الحنونة، التي لم تبخل يومًا بكلمة دعم أو دعوة من القلب،
كنتِ صوت الاطمئنان وسط الفوضى، ونورًا يطلّ حين يغيب الأمل.
شكرًا لأنكِ كنتِ حاضرة في كل تفاصيل الرحلة، ولو من بعيد.
وإلى بثينة، أختي المقربة، رفيقة قلبي، ومرآتي، ونسختي الأخرى،
كنتِ الوحيدة التي تفهمني من نظرة، وتقرأني من دون أن أتكلم،
كم مرة بكيتِ معي، وشجعتِني، ووقفتِ بجانبي حين كنت على وشك الانهيار...
نجاحي اليوم، هو لكِ كما هو لي، فلا كلمات توفيكِ حقكِ، يا أقرب من الأخت
أنتم النكهة الحلوة في كل مراحل حياتي،
كنتم ولا زلتم الدعم المعنوي والضحكة التي تزيل كل هم،
شكرًا لأنكم كنتم لي الأصدقاء قبل أن تكونوا أهلاً
إلى زهرتَي قلبي... ياسمين وأمينة،
إليكما يا من رافقتما قلبي في كل محطات التعب، والفرح، والقلق، والنجاح.
.كنتما أكثر من مجرد صديقتين، كنتما العائلة حين ابتعد الجميع، والكتف الذي احتميتُ به دون أن أطلب
ياسمين... بضحكتك التي كانت دواءً لكل لحظة ضيق
وأمينة... بحنانكِ الذي يشبه دعاء الأم في آخر الليل،
شكرًا لأنكما كنتما الجزء الأجمل في رحلتي.

إهداء

إلى ماريهان،
الصديقة التي تشبه الأمان في زمنٍ كلّه قلق،
يا من كنتِ النور في أكثر لحظاتي ظلمة، والرفيقة التي لا تغيّبها الأيام مهما تغيّرت الظروف

إلى من كانت دائمًا بقربي دون حاجة لكلمات كثيرة،
كوثر...
شكرًا لأنكِ كنتِ خفّة الروح وسط الثقل،
وضحكة صافية وسط الزحام.

إلى صديقاتي (آياتي ، عبير ، نهى ، نهال ، ريان ، هند)
أنتم لستُن مجرد أسماء في قائمة معارفي، بل أنتنّ نبض التجربة الجامعية،
ضحكاتكن، ودموعكن، ونقاشاتنا الطويلة، والمذاكرة تحت الضغط،
كل ذلك كان زادًا يجعل من هذا الإنجاز ذكرى لا تنسى

إلى كل من مرّ في حياتي يومًا، وترك أثرًا طيبًا،
إلى من قال كلمة دعم لم أنسها،
لكم جميعًا، أهدي هذا الإنجاز، فهو ليس لي وحدي، بل جزء من كل لحظة جمعتني بكم

إلى نفسي،
إلى تلك الفتاة التي لم تستسلم، رغم كل التعب والانكسارات والخذلان أحيانًا،
إلى تلك التي سارت في طريقٍ لم يكن مفروشًا بالورود،
التي سقطت لكنها نهضت، بكت لكنها واصلت،
إليكِ يا "أنا"...
أهدي هذا التخرج، فهو شهادة على صعودك، وإيمانك، وقدرتك على النهوض كل مرة.

الملخص

تطرقنا في هذه المذكرة الى ثلاث طرق عددية لحل المعادلات اللاخطية وهي طريقة التنصيف التي تعتمد على تغير اشارة الدالة داخل مجال معين و طريقة نيوتن التي تعتمد على المشتقة الاولى للدالة وتميز بسرعة كبيرة في التقارب و كذا طريقة القاطع التي لا تتطلب مشتقة و تعتمد على استخدام نقطتين متتاليتين، كما درسنا تقدير الاخطاء لهذه الطرق.

كلمات مفتاحية

تقدير الاخطاء ،حل معادلة ،المعادلة اللاخطية ،الطرق العددية.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons abordé trois méthodes numériques pour résoudre les équations non linéaires : la méthode de bissection, qui repose sur le changement de signe de la fonction dans un intervalle donné ; la méthode de Newton, qui utilise la dérivée première de la fonction et se distingue par sa rapidité de convergence ; et la méthode de la sécante, qui ne nécessite pas de dérivée et utilise deux points successfis. Nous avons également étudié l'estimation des erreurs associée à ces méthodes.

Mots-clés

Estimation des erreurs, Résolution d'équation, Équation non linéaire, Méthodes numériques.

Abstract

in this dissertation, we explored three numerical methods for solving nonlinear equations: the Bisection Method, which relies on the change of sign of the function within a given interval; Newton's Method, which uses the first derivative of the function and is known for its rapid convergence; and the Secant Method, which does not require the derivative and instead uses two successive points. We also studied the error estimation associated with each method.

Keywords

Error estimation, Equation solving, Nonlinear equation, Numerical methods.

المحتويات

مقـــــدمة:

تُعد المعادلات اللاخطية من أكثر النماذج الرياضية شيوعًا وتعقيدًا في العديد من مجالات العلوم والتكنولوجيا، نظرًا لكونها تُستخدم في وصف الظواهر الفيزيائية والهندسية والطبيعية التي يصعب تمثيلها بالمعادلات الخطية البسيطة. إلا أن إيجاد حلول دقيقة لهذه المعادلات غالبًا ما يكون أمرًا صعبًا، خاصة عندما تكون غير قابلة للحل تحليليًا. وهنا تظهر أهمية **الطرق العددية** كوسيلة فعّالة لتقريب حلول المعادلات اللاخطية بدقة وسرعة مناسبة.

تهدف هذه المذكرة إلى دراسة الحلول العددية للمعادلات اللاخطية، من خلال تقديم عرض شامل ومبسط لمجموعة من الطرق والأساليب التكرارية المستعملة في هذا السياق، مع التركيز على خصائصها، وشروط تقاربها، ومدى دقتها. وقد تم تنظيم محتوى المذكرة في ثلاثة فصول مترابطة تغطي الجوانب النظرية والعملية لهذا الموضوع.

يتناول **الفصل الأول** جملة من المفاهيم الرياضية الأساسية الضرورية لفهم بنية المعادلات اللاخطية وسلوكها، مثل الاستمرارية، والاشتقاق، والتقارب، والدوال ذات متغير واحد، وغيرها من المفاهيم التمهيدية.

أما **الفصل الثاني** فيُعنى بدراسة **تقدير الأخطاء**، وهو عنصر جوهري في التحليل العددي، إذ يُساعد على تقييم دقة الحلول التقريبية، وتحديد مدى موثوقيتها. كما نناقش فيه أنواع الأخطاء (المطلقة والنسبية)، ومصادرها، وأهمية التوقف عن التكرار عند حدود مناسبة.

يُخصص **الفصل الثالث** لعرض أهم **الطرق العددية** لحل المعادلات اللاخطية، مثل طريقة التنصيف (bisection)، وطريقة نيوتن-رافسون، وطريقة القاطع (secant) مع شرح تفصيلي لكل منها، وتحليل أدائها من حيث سرعة التقارب وكفاءة الحساب. اعتمدنا في معظم اجزاء هذه المذكرة على المرجع .[1, 2]

باب 1

مفاهيم رياضية

منذ أواخر الأربعينات من القرن العشرين، أدى انتشار أجهزة الكمبيوتر الرقمية على نطاق واسع إلى حدوث انفجار في استخدام وتطوير الطرق العددية من خلال برامج ساعدت في ذلك، إذ توفر أجهزة الكمبيوتر والطرق العددية بديلا للحسابات المعقدة في حل المسائل الرياضية والحصول على الحلول الدقيقة أو التقريبية لها.
أما بالنسبة للمعادلات غير الخطية فقد واجه الرياضيون منذ فجر التاريخ صعوبة في إيجاد حلول تحليلية دقيقة لهذه المعادلات، مما دفعهم إلى البحث عن طرق تقريبية لحلها. فقد شهد القرن السابع عشر ثورة في طرق حل هذا النوع من المعادلات بفضل أعمال "**إسحاق نيوتن**"(Isaac Newton) و "فيلهلم ليبنيز" (Wilhelm Leibniz) ، في وضع أسس حساب التفاضل والتكامل، مما أدى إلى ظهور طرق جديدة مثل طريقة نيوتن رافسون.

يحتوي هذا الفصل على مراجعة قصيرة للموضوعات الأساسية في حساب التفاضل والتكامل لمتغير واحد، والتي ستكون ضرورية في الفصول اللاحقة، إلى جانب مقدمة حول التقارب، وتحليل الخطأ، وتمثيل الأعداد في الحاسوب.

1.1 تذكير حول حساب التفاضل و التكامل

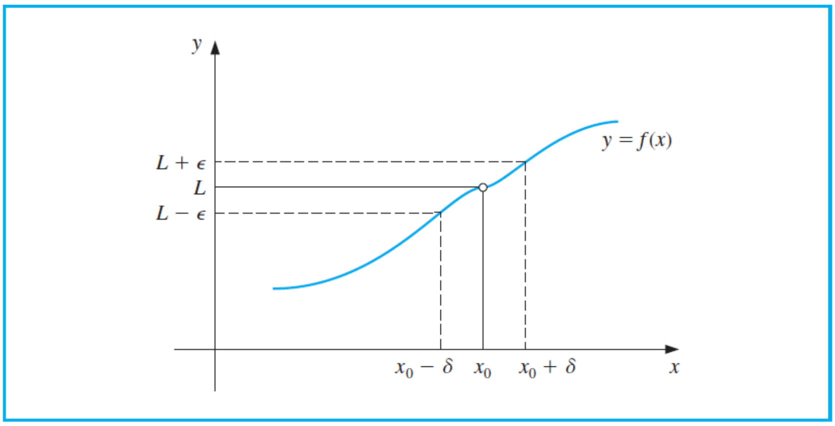
مفهوما النهاية والاستمرارية للدالة أساسيان في دراسة حساب التفاضل والتكامل.

1.1.1 النهاية

تعريف 1.1.1 تكون الدالة f المعرفة على مجموعة X من الأعداد الحقيقية لها نهاية L عند x_0 و نكتب:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

. مهما يكن $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي ، فهناك عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث $|f(x) - L| < \varepsilon$ كلما كان x عنصراً في X و $0 < |x - x_0| < \delta$



1.1.2 الاستمرارية

تعريف 2.1.1 ليكن f دالة معرفة على مجموعة X من الأعداد الحقيقية وليكن $x_0 \in X$. تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا تحقق:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

تكون الدالة f مستمرة على المجموعة X إذا كانت مستمرة عند كل نقطة في X.

يرمز $C(X)$ إلى مجموعة جميع الدوال المستمرة على X. عندما تكون X مجال من الأعداد الحقيقية، يُحذف القوسان في هذه الصياغة. على سبيل المثال، مجموعة جميع الدوال المستمرة على المجال المغلقة $[a,b]$ يرمز لها بـ $C[a,b]$.

1.1.3 تقارب متتالية

تعريف 3.1.1 لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية غير منتهية من الأعداد الحقيقية أو المركبة. نقول إن المتتالية $\{x_n\}$ لها نهاية (أو **تتقارب إلى** x) إذا، لكل $\varepsilon > 0$، يوجد عدد صحيح موجب $N(\varepsilon)$ بحيث يتحقق:

$$|x_n - x| < \varepsilon. \quad \text{من اجل} \quad n > N(\varepsilon)$$

ويرمز لذلك بالصياغة:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{أو} \quad x_n \to x \text{ عندما } n \to \infty.$$

وهذا يعني أن المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب إلى x.

نظرية 1.1.1 إذا كانت f دالة معرفة على مجموعة X من الأعداد الحقيقية وكان $x_0 \in X$، فإن العبارتين التاليتين متكافئتان:

أ. الدالة f مستمرة عند x_0.

ب. إذا كانت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أي متتالية في X تتقارب إلى x_0، فإن:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

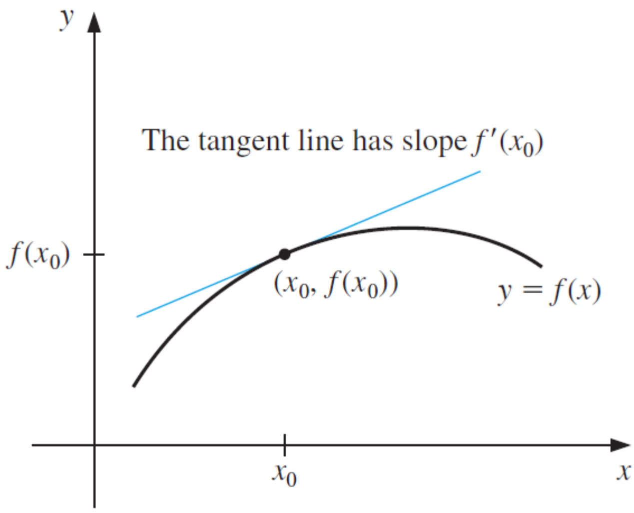
جميع الدوال التي سنناقشها عند استخدام الطرق العددية سيتم افتراض استمراريتها، لأن الاستمرارية تعد مطلباً أساسياً للحصول على سلوك يمكن التنبؤ به. الدوال غير المستمرة يمكن ان تسبب صعوبات عند محاولة تقريب حل لمسألة معينة.
الفرضيات الرياضية حول استمرارية الدالة تؤدي إلى نتائج تقريب أفضل. على سبيل المثال، دالة ذات اشتقاق مستمر هي اكثر قابلية للتنبؤ عندما يتم تحليلها باستخدام طرق تعتمد على ميزات رياضية متقدمة مثل كثيرات الحدود ذات الدرجات العليا.

1.1.4 قابلية الاشتقاق

تعريف 4.1.1 لتكن f دالة معرفة في مجال مفتوح يحتوي على x_0. تكون الدالة f **قابلة للاشتقاق** عند x_0 إذا تحقق:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

إذا كانت النهاية موجودة. يسمى العدد $f'(x_0)$ **مشتقة** الدالة f عند x_0. إذا كانت الدالة تمتلك مشتقة عند كل نقطة في المجموعة X، فإنها تكون **قابلة للاشتقاق** على X.
مشتقة f عند x_0 تمثل ميل المماس لمنحنى f عند النقطة $(x_0, f(x_0))$، كما هو موضح في الشكل .



نظرية 2.1.1 إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0، فإنها تكون أيضًا مستمرة عند x_0.

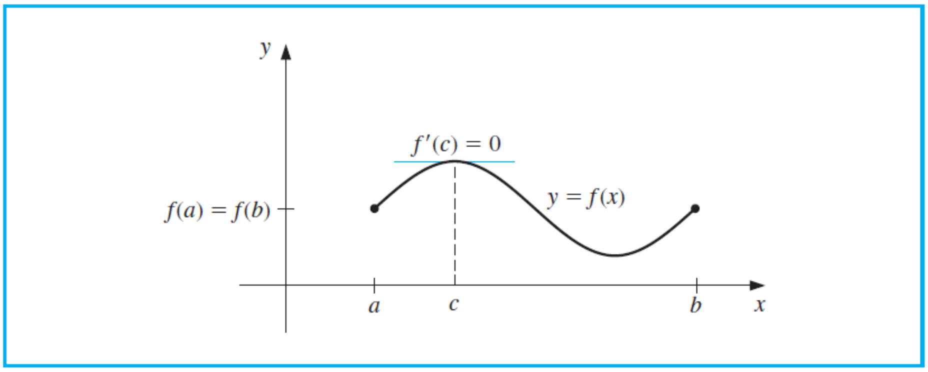
نرمز الى مجموعة جميع الدوال التي تملك مشتقات من الرتبة n مستمرة على X بالرمز $C^n(X)$، ومجموعة الدوال التي تملك مشتقات من جميع الرتب على X يرمز لها بـ $C^\infty(X)$.

مثال 1.1.1 الدوال كثيرة الحدود، والدوال الكسرية، والمثلثية، والأسية، واللوغاريتمية تنتمي إلى $C^\infty(X)$، حيث تمثل X جميع الأعداد التي تكون الدوال معرفة عليها.

المبرهنات التالية لها أهمية أساسية في تطوير طرق تقدير الخطأ. يمكن العثور على براهين هذه المبرهنات والنتائج الأخرى غير المذكورة في هذا الفصل في أي كتاب قياسي لحساب التفاضل والتكامل.

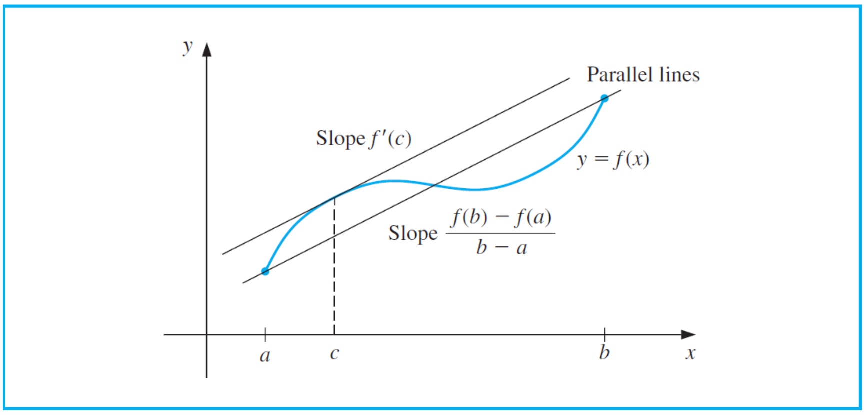
نظرية 3.1.1 مبرهنة رول *Rolle's Theorem*
لتكن $f \in C[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على (a, b). إذا كان $f(a) = f(b)$، فإنه يوجد عدد c في (a, b) بحيث:

$$f'(c) = 0.$$



نظرية 4.1.1 مبرهنة القيمة المتوسطة *Mean Value Theorem*
إذا كانت $f \in C[a,b]$ وكانت f قابلة للاشتقاق على (a,b)، فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث:

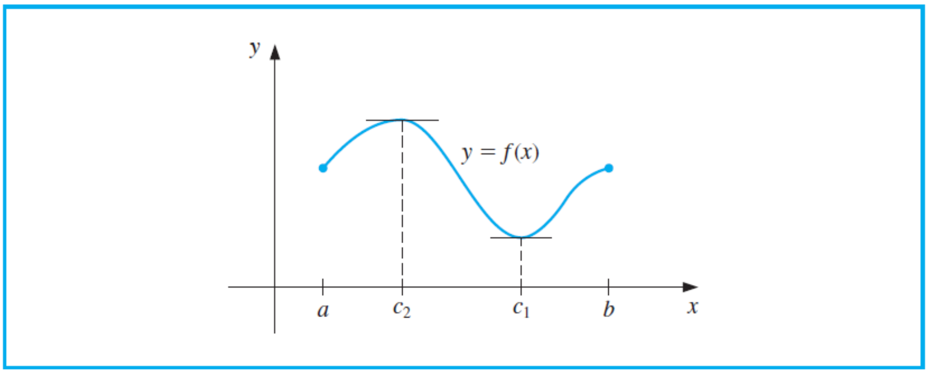
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



نظرية 5.1.1 مبرهنة القيمة الحدية *Extreme Value Theorem*
إذا كانت $f \in C[a,b]$، فإنه يوجد عددان $c_1, c_2 \in [a,b]$ بحيث:

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2), \qquad \forall x \in [a,b]$$

بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a,b) ، فإن القيم c_1 و c_2 تظهر إما عند حدود $[a,b]$ أو حيث تكون f' تساوي الصفر.



كما تم ذكره في المقدمة، سنستخدم نظام الجبر الحاسوبي Maple كلما كان ذلك مناسباً. أنظمة الجبر الحاسوبي (CAS) مفيدة بشكل خاص في الاشتقاق الرمزي ورسم المنحنيات. كلا التقنيتين موضحتان في المثال 1.

مثال 2.1.1 استخدم *Maple* لإيجاد $\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$ للدالة:

$$f(x) = 5\cos 2x - 2x\sin 2x$$

في المجالين $[1,2]$ و $[0.5,1]$.

أولًا، سنوضح إمكانيات الرسم البياني في *Maple* للوصول إلى الحزمة الكاملة للرسم البياني، أدخل الأمر: $> withplots$

بعد ذلك، ستظهر قائمة بالأوامر المتاحة داخل الحزمة.

نقوم بتعريف f بإدخال:

$> f := 5 * cos(2 * x) - 2 * x * sin(2 * x);$

يستجيب *Maple* بالآتي:

$$f := 5\cos(2x) - 2x\sin(2x)$$

لرسم f على المجال $[0.5, 2]$، استخدم الأمر:

$$plot(f, x = 0.5..2);$$

يمكننا تحديد إحداثيات نقطة على الرسم بتحريك مؤشر الفأرة إلى النقطة والنقر بالزر الأيسر. تظهر الإحداثيات في الصندوق العلوي الأيسر من شاشة *Maple*

نكمل المثال باستخدام *مبرهنة القيمة الحدية*. نبدأ بالمجال $[1,2]$. لحساب المشتقة الأولى $g = f'$، ندخل:

$$g := diff(f, x);$$

يستجيب *Maple* بالنتيجة:

$$g := -12\sin(2x) - 4x\cos(2x)$$

يمكننا بعد ذلك حل المعادلة $g(x) = 0$ للمجال $1 \leq x \leq 2$ باستخدام:

$$fsolve(g, x, 1..2);$$

فيعطي *Maple* الحل: $x = 1.358229874$

ثم نحسب $f(1.358229874)$:

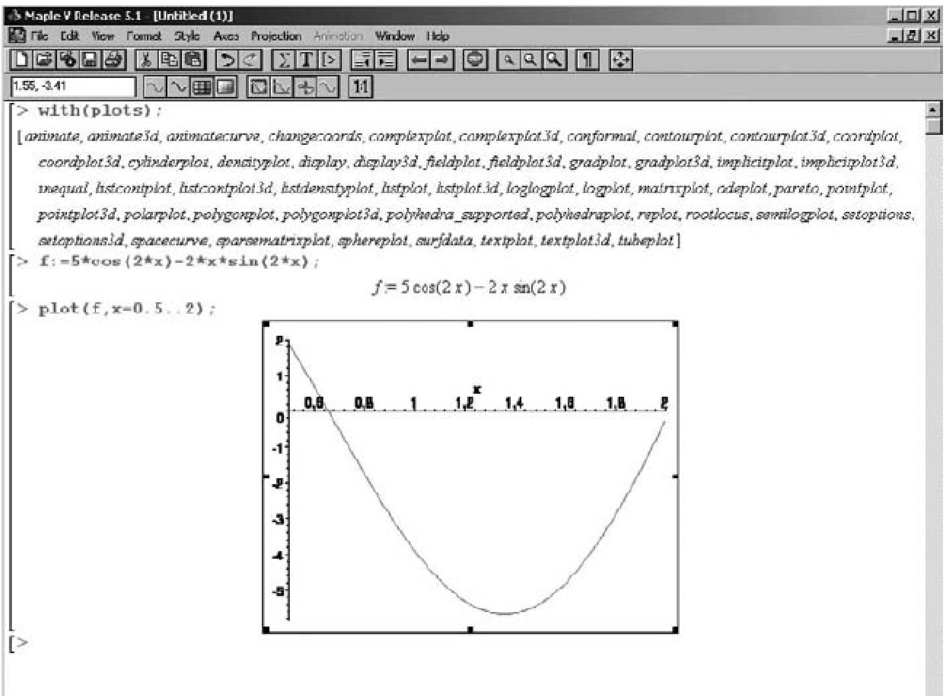
$$evalf(subs(x = 1.358229874, f))$$

فنحصل على:

$f(1.358229874) = -5.675301338$

$, f(1) = -3.899329037$

$f(2) = -0.241008124$



النقطة الحرجة وأقصى قيمة

$$\max_{1\le x\le 2}|f(x)| = \max_{1\le x\le 2}|5\cos(2x)-2x\sin(2x)| = |f(1.358229874)| = 5.675301338.$$

إذا حاولنا حل المعادلة $g(x)=0$ للمجال $0.5\le x\le 1$، نجد أنه عند إدخال الأمر:

$$> fsolve(g,x,0.5..1);$$

تستجيب Maple بما يلي:

$$fsolve(-12*sin(2x)-4x*cos(2x),x,0.5..1)$$

وهذا يشير إلى أن Maple لم تتمكن من إيجاد حل في المجال $[0.5,1]$، والسبب هو أنه لا يوجد حل ضمن هذاالمحال. ونتيجة لذلك، فإن القيمة العظمى تحدث عند أحد طرفي هذاالمحال $[0.5,1]$. وبما أن:

$$f(0.5)=1.860040545 \quad \text{و} \quad f(1)=-3.899329037$$

فإن:

$$\max_{0.5\le x\le 1}|f(x)| = \max_{0.5\le x\le 1}|5\cos(2x)-2x\sin(2x)| = |f(1)| = 3.899329037.$$

المفهوم الأساسي الآخر في حساب التفاضل والتكامل الذي نستخدمه على نطاق واسع هو التكامل وفقًا لريمان.

تعريف 5.1.1 تكامل ريمان للدالة f على المجال $[a,b]$ هو العبارةالتالية، بشرط أن يكون موجوداً:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum f(z_i)\Delta x_i$$

حيث أن x_0 x_1 ... x_n تحقق العلاقة:

$$a=x_0\le x_1\le\cdots\le x_n=b,$$

و:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

لكل $i=1,2,\ldots,n$، و z_i يتم اختياره عشوائيًا في المجال $[x_{i-1},x_i]$.

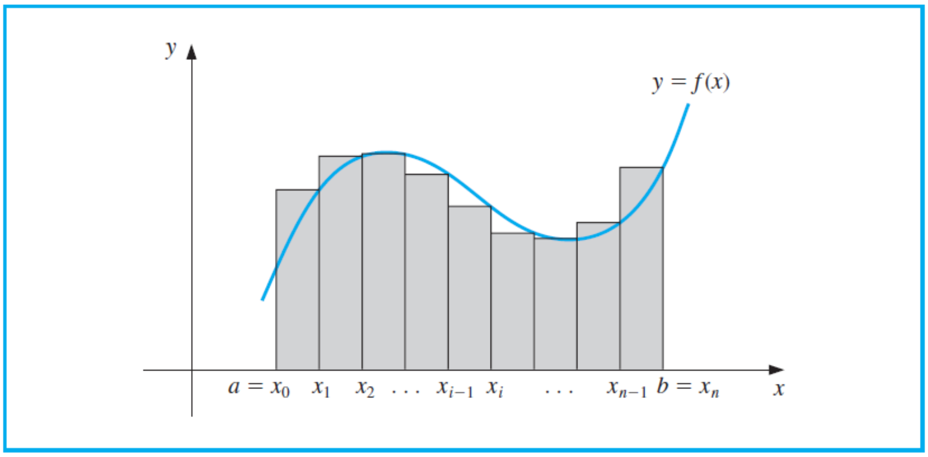
كل دالة f مستمرة على المجال$[a,b]$ هي قابلة للتكامل وفقًا لريمان على $[a,b]$. وهذا يسمح لنا، من أجل التبسيط الحسابي، باختيار النقاط x_i بحيث تكون متساوية التوزيع في $[a,b]$، فنختار $z_i=x_i$ من اجل كل $i=1,2,\ldots,n$،

في هذه الحالة:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

حيث أن الأعداد الموضحة في الشكل تُعطى كما يلي:

$$x_i = a + i\frac{(b-a)}{n}.$$

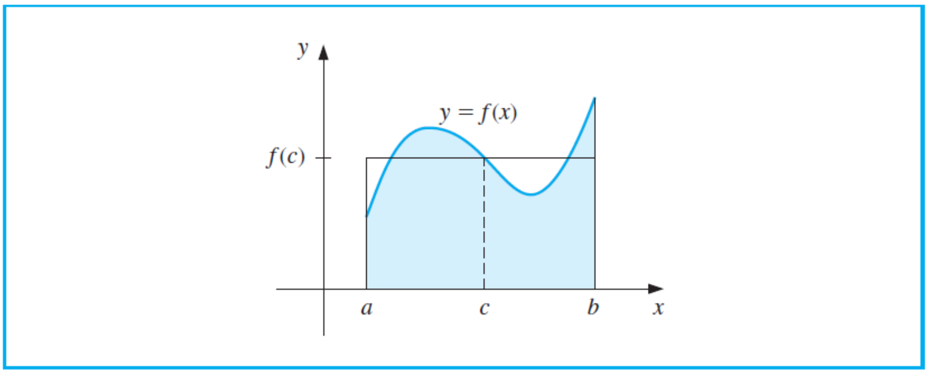


نظرية 6.1.1 (القيمة المتوسطة الموزونة للتكاملات)
لتكن $f \in C[a,b]$، و لتكن الدالة g قابلة للتكامل وفق ريمان على المجال$[a,b]$، وأن $g(x)$ لا يغير إشارته على $[a,b]$. عندئذٍ، يوجد عدد c من (a,b) بحيث:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

عندما تكون $g(x) \equiv 1$، فإن النظرية 4.1.1 تصبح نظرية القيمة المتوسطة العادية للتكاملات، والتي تعطي المتوسط الحسابي للدالة f على المجال$[a,b]$ كما يلي:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$



نظرية 7.1.1 (نظرية رول المعممة) نفترض أن $f \in C[a,b]$ قابلة للاشتقاق n مرة على المجال (a,b). إذا كانت $f(x)$ تساوي الصفر عند $n+1$ قيمة مميزة $x_0, x_1, \dots, x_n$ في المجال $[a,b]$، فعندئذٍ يوجد عدد c في (a,b) بحيث:

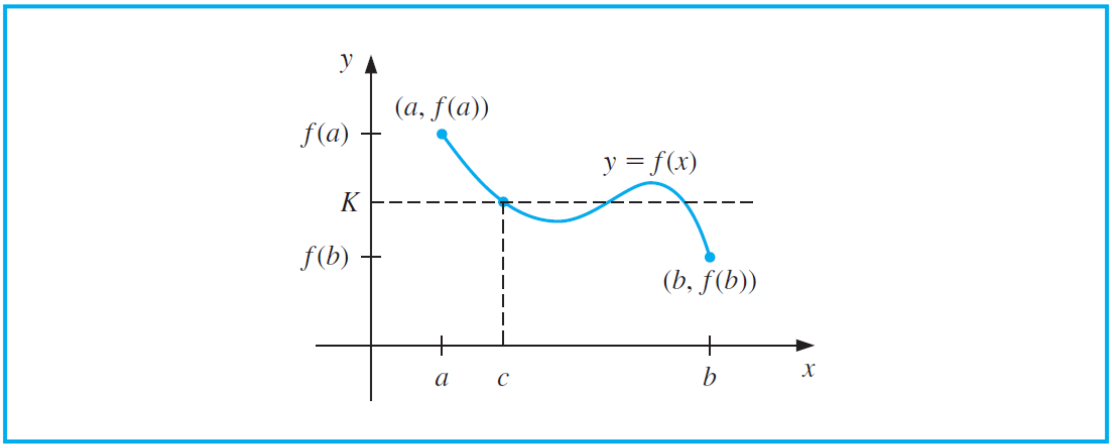
$$f^{(n)}(c) = 0$$

النظرية التالية هي نظرية القيمة المتوسطة وعلى الرغم من أن صياغتها تبدو منطقية، إلا أن برهانها يتجاوز نطاق حساب التفاضل والتكامل المعتادة. ومع ذلك، يمكن العثور عليها في معظم كتب التحليل الرياضي.

نظرية 8.1.1 (نظرية القيمة المتوسطة)

إذا كانت $f \in C[a,b]$ وكان k عدداً محصوراً بين $f(a)$ و $f(b)$، فعندئذٍ يوجد عدد c في (a,b) بحيث:

$$f(c) = k.$$



مثال 3.1.1 لإظهار أنّ المعادلة:

$$x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 1 = 0$$

تملك حلًّا في المجال $[0, 1]$، نعتبر الدالة:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 1.$$

نجد أنّ $f(0) = -1$ و$f(1) = 1$. وبحسب **مبرهنة القيمة المتوسطة**، لا بدّ من وجود حل للدالة في المجال $[0, 1]$.
تُستخدم مبرهنة القيمة المتوسطة عادةً لتحديد ما إذا كان هناك حل لمسألة معيّنة ضمن مجال ما، لكنّها لا تعطي وسيلة عملية لحساب قيمة ذلك الحل.

باب 2

تقديرالاخطاء

في قانون الغازات المثالية في الكيمياء لدينا المعادلة:

$$PV = NRT$$

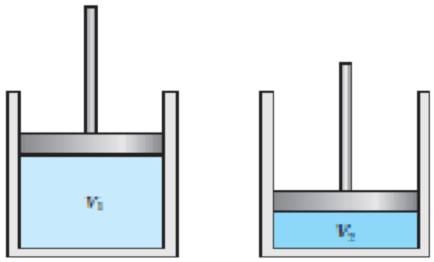
والتي تربط بين الضغط P، الحجم V، درجة الحرارة T ، وعدد المولات N لغاز مثالي، R هو ثابت.
لنفترض أنه تم إجراء تجربتين لاختبار هذا القانون، باستخدام نفس الغاز في كلتا الحالتين.
في التجربة الأولى:

- الضغط $P = 1.00\,atm$
- الحجم $V = 0.100\,m^3$
- عدد المولات $N = 0.00420\,mol$
- ثابت الغاز $R = 0.08206$

يتوقع ان تكون درجة حرارة الغز وفقا لقانون الغاز المثالي :

$$T = \frac{PV}{NR} = \frac{(1.00)(0.100)}{(0.00420)(0.08206)} = 290.15\,K = 17°C$$

ولكن عندما نقوم بقياس درجة الحرارة للغاز الفعلية نجد أنها تساوي $15°C$



نكرر التجربة نفسها باستخدام القيم نفسها لـ R و N، ولكن نقوم بزيادة الضغط بمقدار ضعف قيمته الأصلية وتقليل الحجم بنفس النسبة. نظراً لأن حاصل ضرب PV يظل ثابتًا، فإن درجة الحرارة المتوقعة تظل $17°C$ ، ولكننا نجد أن درجة الحرارة الفعلية للغاز أصبحت $19°C$. من الواضح أن قانون الغازات المثالي يصبح محل شك في هذه الحالة، ولكن قبل الاستنتاج بأن هذا

القانون غير صالح في هذا السياق، يجب علينا فحص البيانات لمعرفة ما إذا كان الخطأ ناتجاً عن النتائج التجريبية. إذا كان الأمر كذلك، فقد نتمكن من تحديد مدى دقة النتائج التجريبية المطلوبة لضمان عدم حدوث خطأ بهذا الحجم.
تحليل الخطأ في الحسابات يُعد موضوعاً مهماً في التحليل العددي، ويتم تقديمه في القسم 1.2.

2.1 طرق تقدير الاخطاء

نظرية 1.1.2 مبرهنة تايلور – *Taylor's Theorem*
نفترض أنّ الدالة f تنتمي إلى الصنف C^{n+1} على المجال $[a,b]$، وأنّ x_0 نقطة من $[a,b]$. إذا كان x أيضًا في $[a,b]$، إذن يوجد عدد $\xi(x)$ بين x_0 و x حيث $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ مع

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

يُسمّى الحد الأخير

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$P_n(x)$ يسمى كثير حدود تايلور من الدرجة n لـ f عند النقطة x_0.
$R_n(x)$ يسمى الحد الباقي *Remainder* المرافق لكثير الحدود $P_n(x)$،و نظرا لأن العدد $\xi(x)$ في الباقي $R_n(x)$ يتعلق بقيمة x التي يتم فيها تقييم كثير الحدود $P_n(x)$ ، فإنه دالة للمتغير x. إن كانت قيمة $f^{(n+1)}(\xi)$ صغيرة أو كان x قريباً من x_0، يصبح هذا الباقي صغيراً، مما يجعل التقريب بكثير حدود تايلور دقيقًا.
وإذا أخذنا $x_0 = 0$، فإن هذاالتمثيل يسمى **متسلسلة ما كلورين** *Maclaurin Series*.

مثال 1.1.2 1- اوجد كثير الحدود من الدرجة الثانية و الثالثة في متسلسلة تايلور للدالة

$$f(x) = \cos x$$

حول $x_0 = 0$،

2- استخدم هذه الكثيرات حدود لتقريب $\cos(0.01)$.

3- استخدم كثير الحدود من الدرجةالثالثة في متسلسلة تايلور وحدد الخطأ الخاص به لتقريب التكامل

$$\int_0^{0.1} \cos x \, dx.$$

حل المثال

بما أن $f \in C^\infty(\mathbb{R})$، فإنه يمكن تطبيق مبرهنة تايلور لأي $n \geq 0$.
لدينا:

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f'''(x) = \sin x, \quad \text{و} \quad f^{(4)}(x) = \cos x,$$

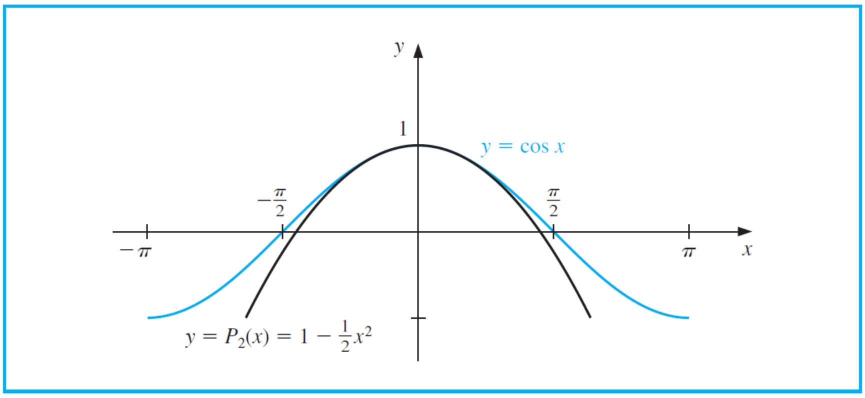
وبالتالي:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad \text{و} \quad f'''(0) = 0.$$

1.1. بالنسبة إلى $n = 2$ وعند $x_0 = 0$، لدينا:

$$\cos x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}x^3$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin \xi(x),$$

حيث إن $\xi(x)$ هو عدد (غير معروف عموماً) يقع بين 0 و x.



عند $x = 0.01$، تصبح المعادلة:

$$\cos(0.01) = 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 \sin \xi(0.01) = 0.99995 + \frac{10^{-6}}{6} \sin \xi(0.01).$$

بالتالي، فإن التقريب الذي يعطيه كثير الحدود في متسلسلة تايلور لـ $\cos(0.01)$ هو **0.99995**. أما خطأ القطع، أو الحد الباقي المرتبط بهذا التقريب، فهو:

$$\frac{10^{-6}}{6} \sin \xi(0.01) = 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \sin \xi(0.01),$$

حيث إن استخدام الشريط العلوي فوق الرقم 6 في $0.1\overline{6}$يشير إلى أن هذا الرقم يتكرر إلى ما لا نهاية. على الرغم من أننا لا نستطيع تحديد قيمة $\sin\xi(0.01)$ بالضبط، إلا أننا نعلم أن جميع قيم دالة الجيب تقع في المجال $[-1,1]$. لذا، فإن الخطأ الذي يحدث عند استخدام التقريب 0.99995 لقيمة $\cos(0.01)$ يكون محدوداً ضمن:

$$|\cos(0.01) - 0.99995| = 0.16\overline{6} \times 10^{-6} \sin\xi(0.01) \leq 0.16\overline{6} \times 10^{-6}.$$

لذلك، فإن التقريب 0.99995 يطابق على الأقل أول خمسة أرقام من $\cos(0.01)$، حيث:

$$\begin{aligned}0.99994983 < 0.99995 - 0.16 \times 10^{-6} &\leq \cos(0.01)\\ &\leq 0.99995 + 0.16 \times 10^{-6} < 0.99995017\end{aligned}$$

إن حد الخطأ أكبر بكثير من الخطأ الفعلي. يعود ذلك جزئيًا إلى الحد الضعيف الذي استخدمناه لقيمة $|\sin\xi(x)|$. يمكن إثبات أنه لجميع قيم x، لدينا $|\sin x| \leq |x|$.

بما أن $0 \leq \xi(x) \leq 0.01$، يمكننا استخدام المتباينة $|\sin\xi(x)| \leq 0.01$ في صيغة الخطأ، مما ينتج عنه الحد 0.16×10^{-8}.

2.1.إيجاد كثير الحدود من الدرجة الثالثة لمتسلسلة تايلور

بما أن $f'''(0) = 0$، فإن كثير الحدود من الدرجة الثالثة في متسلسلة تايلور مع الحد الباقي حول $x_0 = 0$ هو:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \cos\xi(x),$$

حيث $0 < \xi(x) < 0.01$. يبقى كثير الحدود المقرب كما هو، أي أن التقريب لا يزال 0.99995، لكن لدينا الآن ضمان دقة أفضل بكثير.

بما أن $|\cos\xi(x)| \leq 1$ لكل x، فإننا نحصل على:

$$\left|\frac{1}{24}x^4 \cos\xi(x)\right| \leq \frac{1}{24}(0.01)^4(1) < 4.2 \times 10^{-10}.$$

وبالتالي، فإن:

$$|\cos(0.01) - 0.99995| \leq \frac{1}{24}(0.01)^4(1) < 4.2 \times 10^{-10}.$$

و

$$0.99994999958 = 0.99995 - 4.2 \times 10^{-10} \leq \cos(0.01) \leq 0.99995 + 4.2 \times 10^{-10} = 0.99995000042.$$

يُوضّح الجزءان الأولان من هذا المثال هدفين رئيسيين في التحليل العددي:

1- إيجاد تقريب لحل مسألة معينة.

2- تحديد حد أعلى للخطأ في هذا التقريب.

يعطي كل من كثيري الحدود في متسلسلة تايلور نفس الإجابة للنقطة (1)، ولكن كثير الحدود من الدرجة الثالثة أعطى إجابة أدق بكثير للنقطة (2) مقارنةً بكثير الحدود من الدرجةالثانية.

3. نستخدم كثير الحدود الثالث لحساب التكامل:

$$\int_0^{0.1} \cos x \, dx = \int_0^{0.1} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx + \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \cos \xi(x) \, dx.$$

$$= \left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{0.1} + \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \cos \xi(x) \, dx.$$

$$= 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 + \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \cos \xi(x) \, dx.$$

وبالتالي، نحصل على التقريب:

$$\int_0^{0.1} \cos x \, dx \approx 0.1 - \frac{1}{6}(0.1)^3 = 0.09983\overline{3}.$$

يتم تحديد حد أعلى للخطأ في هذا التقريب من خلال تكامل الحد الباقي في متسلسلة تايلور وحقيقة أن $|\cos \xi(x)| \leq 1$ لكل x:

$$\frac{1}{24} \left| \int_0^{0.1} x^4 \cos \xi(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 |\cos \xi(x)| \, dx$$

$$\leq \frac{1}{24} \int_0^{0.1} x^4 \, dx = 8.3\overline{3} \times 10^{-8}.$$

بما أن القيمة الحقيقية لهذا التكامل هي

$$\int_0^{0.1} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{0.1} = \sin 0.1 = 0.099833416647,$$

فإن الخطأ الفعلي لهذا التقريب هو 8.3314×10^{-8}، وهو ضمن حد الخطأ.

يمكننا أيضًا استخدام نظام ***CAS*** في المثال 3. باستخدام ***Maple***، نعرّف الدالة f كما يلي:

$$f := cos(x);$$

يتيح لنا ***Maple*** كتابة عدة أوامر في سطر واحد واستخدام النقطتين : لمنع ظهور الاستجابات. على سبيل المثال، يمكننا الحصول على متعددة حدود تايلور من الدرجة الثالثة باستخدام:

$> s3 := taylor(f, x = 0, 4) : p3 := convert(s3, polynom);$

يحدد الأمر $s3 := taylor(f, x = 0, 4)$ متعددة حدود تايلور حول $x_0 = 0$ بأربعة حدود (الدرجة 3) مع الحد الباقي.

أما الأمر $p3 := convert(s3, polynom)$ فيحوّل السلسلة $s3$ إلى متعددة الحدود $p3$ عن طريق حذف الحد الباقي.

للحصول على 11 رقمًا عشريًا في العرض، ندخل:

$Digits := 11;$

ثم نقوم بحساب القيم $f(0.01)$، و $P_3(0.01)$، و $|f(0.01) - P_3(0.01)|$ باستخدام:

$$y1 : = evalf(subs(x = 0.01, f));$$
$$y2 : = evalf(subs(x = 0.01, p3));$$
$$err : = abs(y1 - y2);$$

هذا ينتج:

$$y_1 = f(0.01) = 0.99995000042, \quad y_2 = P_3(0.01) = 0.99995000000$$

و $|f(0.01) - P_3(0.01)| = 0.42 \times 10^{-9}$

للحصول على رسم بياني مشابه لما هو معروض في الشكل 10، أدخل:

$plot(f, p3, x = -Pi..Pi);$

أوامر حساب التكاملات هي:

$$q1 := int(f, x = 0..0.1);$$
$$q2 := int(p3, x = 0..0.1);$$
$$err := abs(q1 - q2);$$

والتي تعطي القيم المطلوبة.

$$q_1 = \int_0^{0.1} f(x)\,dx = 0.099833416647 \quad \text{و} \quad q_2 = \int_0^{0.1} P_3(x)\,dx = 0.099833333333,$$

مع خطأ مقداره:

$$0.83314 \times 10^{-7} = 8.3314 \times 10^{-8}.$$

توضح الجزئيتان (a) و (b) من هذا المثال كيف يمكن لطريقتين مختلفتين إنتاج نفس التقريب، لكن مع ضمانات دقة مختلفة. تذكّر أن تحديد التقريبات هو مجرد جزء من هدفنا. الجزء المهم بنفس القدر هو تحديد حد أعلى لخطأ التقريب.

2.2 أخطاء التقريب والحسابات الحاسوبية

تعريف 1.2.2 إذا كان p^* هو تقريب للقيمة p، فإن **الخطأ المطلق** يعرَّف بأنه $|p-p^*|$، **والخطأ النسبي** يعرَّف بأنه $\frac{|p-p^*|}{|p|}$، بشرط أن $p \neq 0$.

فكّر في الخطأ المطلق والخطأ النسبي عند تمثيل p بواسطة p^* في المثال التالي.

مثال 1.2.2 (a) إذا كان $p = 0.3000 \times 10^1$ و $p^* = 0.3100 \times 10^1$، فإن الخطأ المطلق هو 0.1، والخطأ النسبي هو 0.3333×10^{-1}.

(b) إذا كان $p = 0.3000 \times 10^{-3}$ و $p^* = 0.3100 \times 10^{-3}$، فإن الخطأ المطلق هو 0.1×10^{-4}، والخطأ النسبي هو 0.3333×10^{-1}.

(c) إذا كان $p = 0.3000 \times 10^4$ و $p^* = 0.3100 \times 10^4$، فإن الخطأ المطلق هو 0.1×10^3، والخطأ النسبي هو أيضًا 0.3333×10^{-1}.

هذا المثال يظهر أن نفس الخطأ النسبي، 0.3333×10^{-1}، يمكن أن يحدث مع اختلافات كبيرة في الأخطاء المطلقة. كمقياس للدقة، قد يكون الخطأ المطلق مضللاً، ويعُد الخطأ النسبي أكثر معنى لأنه يأخذ في الاعتبار حجم القيمة.

تعريف 2.2.2 يقُال إن العدد p^* يقُرب العدد p إلى s رقم إذا كان s هو أكبر عدد صحيح غير سالب بحيث:

$$\frac{|p-p^*|}{|p|} \leq 5 \times 10^{-s}$$

الجدول التالي يوُضح الطبيعة المستمرة للأرقام المعنوية من خلال سرد، لمختلف القيم لـ p، الحد الأعلى الأدنى للقيمة $|p-p^*|$، والمسُمى $max\,|p-p^*|$، عندما يتطابق p^* مع p حتى أربعة أرقام معنوية.

p	0.1	0.5	100	1000	5000	9990	10000
$max\,|p-p^*|$	0.00005	0.00025	0.05	0.5	2.5	4.995	5

بالعودة إلى التمثيل الآلي للأعداد، نرى أن التمثيل العائم $f(y)$ للعدد y له الخطأ النسبي التالي:

$$\left|\frac{y-f(y)}{y}\right|$$

إذا تم استخدام القطع (*chopping*) مع k من الأرقام العشرية لتمثيل العدد y، حيث:

$$y = 0.d_1d_2 \dots d_kd_{k+1} \dots \times 10^r$$

فإنه لدينا:

$$\left|\frac{y - f(y)}{y}\right| = \left|\frac{0.d_1d_2 \dots d_kd_{k+1} \dots \times 10^r - 0.d_1d_2 \dots d_k \times 10^r}{0.d_1d_2 \dots \times 10^r}\right|$$

$$= \left|\frac{0.d_{k+1}d_{k+2} \dots \times 10^{-k}}{0.d_1d_2 \dots \times 10^r}\right| = \frac{0.d_{k+1}d_{k+2} \dots}{0.d_1d_2 \dots} \times 10^{-k}$$

بما أن $d_1 \neq 0$، فإن القيمة الدنيا للمقام هي 0.1. أما البسط فهو محصور بأقصى قيمة له وهي 1. وكنتيجة لذلك:

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq \frac{1}{0.1} \times 10^{-k} = 10^{-k+1}$$

وبطريقة مماثلة، فإن الحد الأعلى للخطأ النسبي عند استخدام حساب تقريبي عشري مكون من k أرقام هو:

$$0.5 \times 10^{-k+1}$$

لاحظ أن هذه الحدود لا تعتمد على الرقم المُمثَّل، بل تعتمد على الطريقة التي توزع بها الأرقام في الآلة. بسبب الطبيعة الأسية للتمثيل، فإن نفس عدد الأرقام العشرية يُستخدم لتمثيل الفترات التالية:

$$[0.1, 1], \quad [1, 10], \quad [10, 100], \dots$$

ضمن حدود الآلة، عدد الأرقام العشرية في المجال:

$$[10^n, 10^{n+1}[$$

يبقى ثابتاً لأي عدد صحيح n.

بالإضافة إلى التمثيل غير الدقيق للأرقام، فإن العمليات الحسابية التي تُجرى في الحاسوب ليست دقيقة تماماً، حيث تعتمد على التلاعب بالبتات الثنائية. ونظراً لأننا لا نتطرق لتفاصيل تنفيذ هذه العمليات، سنقوم بوضع تقريب مبسط للحساب.

نفترض أن $fl(x)$ و $fl(y)$ هما التمثيل العشري المحدود للعددين الحقيقيين x و y. وتُستخدم الرموز التالية:

- $\oplus$: الجمع التقريبي
- $\ominus$: الطرح التقريبي

- $\otimes$: الضرب التقريبي
- $\oslash$: القسمة التقريبية

ويتم تعريف العمليات كالتالي:

$$x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y))$$

$$x \ominus y = fl(fl(x) - fl(y))$$

$$x \otimes y = fl(fl(x) \times fl(y))$$

$$x \oslash y = fl(fl(x) \div fl(y))$$

هذا يعادل إجراء العملية الدقيقة ثم تقريب الناتج إلى أقرب تمثيل عشري محدود وفقًا لدقة الآلة، وأخيراً، يمكن تنفيذ الحساب العشري المقرب في نظام *CAS* مثل *Maple* باستخدام الأمر:

$> Digits := t;$

يؤدي استخدام التقريب إلى t أرقام عشرية إلى جعل جميع العمليات الحسابية تُقرّب إلى t أرقام، على سبيل المثال، تُحسب العملية:

$$fl(fl(x) + fl(y))$$

باستخدام التقريب إلى t أرقام عشرية كما يلي في برنامج (*Maple*):

$$> evalf(evalf(x) + evalf(y));$$

إن تنفيذ الحساب بطريقة التقطيع (*chopping*) إلى t أرقام عشرية هو أكثر صعوبة ويتطلب سلسلة من الخطوات أو إجراءً خاصًا، التمرين 27 يستكشف هذه المسألة.

مثال 2،2،2 نفترض أن $x = \frac{5}{7}, \quad y = \frac{1}{3}$ ويتم استخدام التقطيع إلى خمس خانات عشرية في العمليات الحسابية التي تشمل x و y، يوضح الجدول 1،2 نتائج هذه العمليات كما تحسبها الحواسيب:

$$fl(x) = 0.71428 \times 10^0, \quad fl(y) = 0.33333 \times 10^0$$

نظراً لأن الخطأ النسبي الأقصى في العمليات في المثال 3 هو: 0.267×10^{-4} فإن هذه الحسابات تنتج نتائج دقيقة ومقبولة ضمن خمسة أرقام عشرية، لكن، لنفترض أيضًا أن لدينا:

$u = 0.714251, \quad v = 98765.9, \quad w = 0.111111 \times 10^{-4}$ **فعندها:**

$$fl(u) = 0.71425 \times 10^0$$

لعملية	النتيجة	القيمة الحقيقية	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
$x \oplus y$	0.10476×10^1	$22/21$	0.190×10^{-4}	0.182×10^{-4}
$x \ominus y$	0.38095×10^0	$8/21$	0.238×10^{-5}	0.625×10^{-5}
$x \oslash y$	0.23809×10^0	$5/21$	0.524×10^{-5}	0.220×10^{-4}
$x \otimes y$	0.21428×10^1	$15/7$	0.571×10^{-4}	0.267×10^{-4}

نُلاحظ أن:

$$fl(v) = 0.98765 \times 10^5, \quad fl(w) = 0.11111 \times 10^{-4}$$

(تم اختيار هذه القيم لتوضيح بعض المشكلات التي قد تنشأ عند استخدام الحساب بدقة محدودة). في الجدول تؤدي العملية $x \oslash u$ إلى خطأ مطلق صغير ولكن خطأ نسبي كبير. إن القسمة اللاحقة على العدد الصغير w أو الضرب في العدد الكبير v تُضخم الخطأ المطلق دون تغيير الخطأ النسبي. أما جمع عدد كبير وآخر صغير مثل u و v، فينتج عنه خطأ مطلق كبير ولكن ليس خطأً نسبياً كبيراً.

العملية	النتيجة	القيمة الحقيقية	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي
$x \ominus u$	0.30000×10^{-4}	0.34714×10^{-4}	0.471×10^{-5}	0.136
$(x \ominus u) \oslash w$	0.27000×10^1	0.31243×10^1	0.424	0.136
$(x \ominus u) \otimes v$	0.29629×10^1	0.34285×10^1	0.465	0.136
$u \oplus v$	0.98765×10^5	0.98766×10^5	0.161×10^1	0.163×10^{-4}

من أكثر العمليات التي تسبب أخطاءً هي طرح عددين متقاربين جداً في القيمة. لنفترض أن عددين x و y، بحيث $x > y$، لديهما تمثيل عشري من k أرقام على النحو التالي:

$$f(x) = 0.d_1d_2 \dots d_p\alpha_{p+1}\alpha_{p+2} \dots \alpha_k \times 10^n,$$

$$f(y) = 0.d_1d_2 \dots d_p\beta_{p+1}\beta_{p+2} \dots \beta_k \times 10^n,$$

فيكون الفرق بينهما:

$$f(f(x) - f(y)) = 0.\sigma_{p+1}\sigma_{p+2} \dots \sigma_k \times 10^{n-p},$$

حيث:

$$0.\sigma_{p+1}\sigma_{p+2} \dots \sigma_k = 0.\alpha_{p+1}\alpha_{p+2} \dots \alpha_k - 0.\beta_{p+1}\beta_{p+2} \dots \beta_k.$$

العدد الناتج $x-y$ يحتوي على أكثر شيء $k-p$ أرقام ذات أهمية. ومعظم الآلات الحسابية تعطي k أرقام، إلا أن p منها تكون غير دقيقة أو عشوائية. وبالتالي، أي عملية لاحقة على $x-y$ تحتفظ فقط بـ $k-p$ أرقام هامة.
إذا كانت هناك دقة محدودة في التمثيل الرقمي وأدى ذلك إلى خطأ، فإن القسمة على عدد صغير (أو الضرب في عدد كبير) يؤدي إلى تضخيم هذا الخطأ. على سبيل المثال، إذا كان لدينا العدد: $z+\delta,$ حيث δ هو الخطأ الناتج عن تمثيل العدد z بدقة محدودة.
إذا قمنا الآن بقسمة على $\varepsilon = 10^{-n}$ حيث $n > 0$، فإن:

$$\frac{z}{\varepsilon} \approx fl\left(\frac{fl(z)}{fl(\varepsilon)}\right) = (z+\delta)\times 10^{n},$$

وبالتالي فإن الخطأ المطلق في هذا التقريب $|\delta| \times 10^{n}$، هو الخطأ المطلق الأصلي $|\delta|$ مضروباً في العامل 10^{n}.

مثال 3.2.2 لتكن $p = 0.54617$ و $q = 0.54601$. القيمة الحقيقية لـ $r = p - q$ هي:

$$r = 0.00016.$$

نفترض أن الطرح يتم باستخدام حساب بأربع خانات عشرية. بتقريب p و q لأربع خانات يصبح:

$$p^{*} = 0.5462, \quad q^{*} = 0.5460,$$

ويكون:

$$r^{*} = p^{*} - q^{*} = 0.0002,$$

وهو التقريب بأربع خانات للنتيجة r.
وبحساب الخطأ النسبي:

$$\frac{|r-r^{*}|}{|r|} = \frac{|0.00016 - 0.0002|}{0.00016} = 0.25,$$

أي أن النتيجة تحوي على خانة معنوية واحدة فقط، بينما كانت الدقتان في p^{*} و q^{*} أربع وخمس خانات معنوية على التوالي.
إذا استخدمنا طريقة القطع (*chopping*) للحصول على الأربع خانات، فإن القيم التقريبية تصبح:

$$p^{*} = 0.5461, \quad q^{*} = 0.5460, \quad r^{*} = p^{*} - q^{*} = 0.0001,$$

ويصبح الخطأ النسبي:

$$\frac{|r-r^*|}{|r|}=\frac{|0.00016-0.0001|}{0.00016}=0.375,$$

وهي أيضاً تعطي خانة معنوية واحدة فقط.

يمكن في كثير من الأحيان تجنب فقدان الدقة الناتج عن خطأ التقريب (*round-off error*) من خلال إعادة صياغة المشكلة، كما هو موضح في المثال التالي.

مثال 4.2.2 تنص صيغة المعادلة التربيعية على أن جذور المعادلة

$$ax^2+bx+c=0, \quad \text{حيث} \ a\neq 0,$$

هي

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2.1}$$

باستخدام حساب بأربع خانات عشرية (*four-digit rounding arithmetic*)، لننظر إلى تطبيق هذه الصيغة على المعادلة:

$$x^2+62.10x+1=0,$$

حيث الجذور التقريبية هي:

$$x_1\approx -0.01610723 \quad \text{و} \quad x_2\approx -62.08390.$$

في هذه المعادلة، يكون b^2 أكبر بكثير من $4ac$، لذا فإن البسط في حساب x_1 هو يتضمن ذلك طرح أعداد متقاربة جداً. حيث:

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2-4ac}=&\sqrt{(62.10)^2-(4.000)(1.000)(1.000)}\\=&\sqrt{3856-4.000}=\sqrt{3852}\approx 62.06,\end{aligned}$$

وبالتالي

$$fl(x_1)=\frac{-62.10+62.06}{2.000}=\frac{-0.04000}{2.000}=-0.02000.$$

هذا تقريب ضعيف لـ $x_1=-0.01611$، مع خطأ نسبي كبير يُحسب كالتالي:

$$\frac{|-0.01611+0.02000|}{|-0.01611|}\approx 2.4\times 10^{-1}.$$

من ناحية أخرى، حساب x_2 يتضمن جمع الأعداد المتقاربة $-b$ و $-\sqrt{b^2-4ac}$، وهذا لا يمثل مشكلة لأن:

$$fl(x_2) = \frac{-62.10 - 62.06}{2.000} = \frac{-124.2}{2.000} = -62.10,$$

ويكون الخطأ النسبي صغيراً:

$$\frac{|-62.08 + 62.10|}{|-62.08|} \approx 3.2 \times 10^{-4}.$$

للحصول على تقريب أكثر دقة لأربع خانات لـ x_1، نغير صيغة المعادلة التربيعية عن طريق تعقيم البسط (*rationalizing the numerator*):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{-b - \sqrt{b^2-4ac}} = \frac{b^2 - (b^2-4ac)}{2a(-b - \sqrt{b^2-4ac})},$$

والتي تُبسّط إلى صيغة بديلة للمعادلة التربيعية:

$$x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2-4ac}} \tag{2.2}$$

وباستخدام الصيغة (2.2)، نحصل على:

$$fl(x_1) = \frac{-2.000}{62.10 + 62.06} = \frac{-2.000}{124.2} = -0.01610,$$

وهو تقريب دقيق لـ $x_1 = -0.01611$ باستخدام حساب بأربع خانات عشرية.
والذي يعطي خطأً نسبياً صغيراً:

$$\frac{|-0.01611 + 0.01610|}{|-0.01611|} \approx 6.2 \times 10^{-4}.$$

يمكن أيضًا تطبيق طريقة التعقيم (*rationalization*) للحصول على صيغة بديلة أخرى للمعادلة التربيعية لحساب x_2:

$$x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2-4ac}} \tag{2.3}$$

وهذه هي الصيغة (2.3) التي ينبغي استخدامها إذا كان b عدداً سالباً في المثال 5.ومع ذلك، فإن استخدام هذه الصيغة عن طريق الخطأ لحساب x_2 سيؤدي ليس فقط إلى طرح أعداد متقاربة جدًا، ولكن أيضًا إلى القسمة على نتيجة صغيرة جدًا لهذا الطرح.

هذا المزيج يؤدي إلى دقة منخفضة للغاية في الناتج، بسبب تضخيم الخطأ الناتج عن التقريب (*round-off error*) .
في هذه الحالة، نحصل على:

$$fl(x_2) = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{-2.000}{62.10 - 62.06} = \frac{-2.000}{0.04000} = -50.00,$$

والذي يحتوي على خطأ نسبي كبير:

$$\frac{|-62.08 + 50.00|}{|-62.08|} \approx 1.9 \times 10^{-1}.$$

يمكن أيضًا تقليل فقدان الدقة الناتج عن خطأ التقريب (*round-off error*) من خلال إعادة ترتيب العمليات الحسابية، كما سيتم توضيحه في المثال التالي.

مثال 5.2.2 احسب $f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5$ **عند** $x = 4.71$ باستخدام الحساب ذي الأرقام الثلاثية.

يعرض **الجدول** النتائج الوسيطة في الحسابات. تحقق من هذه النتائج بعناية للتأكد من أن فهمك للحساب باستخدام عدد محدود من الأرقام صحيح.
لاحظ أن قيم **القطع لثلاث خانات** (*Three-digit chopping*) تحتفظ فقط بأول ثلاث أرقام معنوية **دون تقريب**، وتختلف بشكل ملحوظ عن قيم **التقريب لثلاث خانات** (*Three-digit rounding*).

مثال 6.2.2 احسب:

$$f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5$$

عند $x = 4.71$ **باستخدام الحساب ذي الثلاث خانات معنوية.**

يعرض الجدول التالي النتائج الوسيطة في الحسابات. تحقق من هذه النتائج بعناية لتتأكد من أن مفهومك للحساب باستخدام أرقام معنوية محدودة صحيح. لاحظ أن قيم "التقطيع" (*chopping*) ذات الثلاث خانات تحتفظ فقط بأول ثلاث خانات من الرقم دون أي تقريب، ويمكن أن تختلف بشكل ملحوظ عن قيم التقريب.

	x	x^2	x^3	$6.1x^2$	$3.2x$
القيمة الدقيقة	4.71	22.1841	104.487111	135.32301	15.072
ثلاث خانات (تقطيع)	4.71	22.1	104	134	15.0
ثلاث خانات (تقريب)	4.71	22.2	105	135	15.1

لتوضيح الموقف، دعونا نلقي نظرة على الحسابات التي تتضمن حساب x^3 باستخدام تقريب ثلاث خانات معنوية.
أولاً نحسب:
$x^2 = 4.71^2 = 22.1841$ ونقربها إلى 22.2
ثم نستخدم هذه القيمة لـ x^2 لنحسب:
$x^3 = x^2 \cdot x = 22.2 \cdot 4.71 = 104.562$ ونقربها إلى 105
القيمة الدقيقة للدالة:

$$f(4.71) = 104.487111 - 135.32301 + 15.072 + 1.5 = -14.263899$$

ثلاث خانات (تقطيع):

$$f(4.71) = ((104 - 134) + 15.0) + 1.5 = -13.5$$

ثلاث خانات (تقريب):

$$f(4.71) = ((105 - 135) + 15.1) + 1.5 = -13.4$$

الخطأ النسبي (*Relative Error*) بالنسبة لطريقة التقطيع:

$$\left|\frac{-14.263899 + 13.5}{-14.263899}\right| \approx 0.05$$

وبالنسبة لطريقة التقريب:

$$\left|\frac{-14.263899 + 13.4}{-14.263899}\right| \approx 0.06$$

نهج بديل (طريقة متداخلة):
يمكن كتابة الدالة $f(x)$ بشكل متداخل على النحو التالي:

$$f(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5 = ((x - 6.1)x + 3.2)x + 1.5$$

ينتج عن هذا: **ثلاث خانات (تقطيع):**

$$f(4.71) = ((4.71 - 6.1) \cdot 4.71 + 3.2) \cdot 4.71 + 1.5 = -14.2$$

وناتج التقريب إلى ثلاث خانات هو -14.3. أما الأخطاء النسبية الجديدة فهي **ثلاث خانات (تقريب):**

$$f(4.71) = \ldots = -14.3$$

تقطيع:

$$\left|\frac{-14.263899 + 14.2}{-14.263899}\right| \approx 0.0045$$

تقريب:

$$\left|\frac{-14.263899 + 14.3}{-14.263899}\right| \approx 0.0025$$

قد أدى التعبير عن الدالة باستخدام الصيغة المتداخلة (*Nested Form*) إلى تقليل الخطأ النسبي في تقريب التقطيع (*Three-digit chopping*)إلى أقل من 10من الخطأ الذي تم الحصول عليه في البداية. أما في حالة تقريب التقريب (*Three-digit rounding*)، فقد كان التحسّن أكثر وضوحاً، حيث تم تقليل الخطأ بنسبة تجاوزت 95.

من الأفضل دائمًا تمثيل كثيرات الحدود بصيغة متداخلة قبل إجراء التقييم العددي (*Evaluation*)، لأن هذا الشكل يقلل من عدد العمليات الحسابية المطلوبة. ويعود انخفاض الخطأ في المثال 6 إلى تقليل عدد العمليات من أربع عمليات ضرب وثلاث عمليات جمع إلى عمليتي ضرب وثلاث عمليات جمع فقط.

ومن الطرق الفعالة لتقليل خطأ التقريب العددي (*Round-off Error*) هو تقليل عدد العمليات التي تُنتج هذا الخطأ، أي تقليل الحسابات التي تساهم في تراكم الأخطاء العددية.

2.3 الخوارزميات والتقارب

سنقوم بدراسة **إجراءات التقريب**، والتي تُعرف باسم **الخوارزميات**، والتي تتضمن تسلسلات من العمليات الحسابية.

الخوارزمية هي إجراء يصف، بطريقة غير ملتبسة، سلسلة محدودة من الخطوات يجب تنفيذها بترتيب معين.

الهدف من الخوارزمية هو تنفيذ إجراء لحل مشكلة معينة أو للحصول على تقريب لحل تلك المشكلة.

نستخدم ما يُعرف بـ ***Pseudocode*** لوصف الخوارزميات. يُحدد هذا الرمز شكل **المدخلات** التي يجب توفيرها، وشكل **المخرجات** المطلوبة.

من المهم ملاحظة أن ليس كل إجراء عددي يُنتج مخرجات مرضية لأي مدخلات يتم اختيارها بشكل عشوائي.

لذلك، يتم دمج **آلية إيقاف** مستقلة عن الأسلوب العددي داخل كل خوارزمية، وذلك لتجنّب الوقوع في **حلقات لا نهائية**.
يتم استخدام رمزين من علامات الترقيم ضمن الخوارزميات:

- **النقطة (.)**: تشير إلى نهاية الخطوة.
- **الفاصلة المنقوطة (;)**: تُستخدم للفصل بين المهام داخل نفس الخطوة.

يتم استخدام **المسافات البادئة** (*Indentation*) للدلالة على أن مجموعة من العبارات تُعامل كوحدة واحدة.
تشمل تقنيات التكرار في الخوارزميات نوعين رئيسيين:

- **التكرار المعتمد على عدّاد (*Counter-controlled*)**، مثل:

For $i = 1, 2, \ldots, n$
Set $x_i = a_i + i \cdot h$

- **التكرار المعتمد على شرط (*Condition-controlled*)**، مثل:

While $i < N$ *do Steps* 3–6.

وللسماح بتنفيذ التعليمات بشكل شرطي، نستخدم تراكيب التحكم القياسية:

- *If* ... *then*
- أو: *If* ... *then* ... *else*

تتبع خطوات الخوارزميات قواعد **البرمجة الهيكلية** (*Structured Programming*).
وقد تم تنظيمها بحيث يسهل تحويل *Pseudocode* إلى أي لغة برمجة مناسبة للتطبيقات العلمية.
تتضمّن الخوارزميات العديد من **التعليقات التوضيحية**، والتي تُكتب بخط مائل وتُوضع داخل أقواس لتمييزها عن تعليمات الخوارزمية.

مثال 1.3.2 خوارزمية لحساب المجموع $\sum_{i=1}^{N} x_i$
نهدف إلى حساب:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$$

المدخلات :(*Input*) $N, x_1, x_2, \ldots, x_N$
المخرجات :(*Output*) $SUM = \sum_{i=1}^{N} x_i$
خطوات الخوارزمية:

1- **عيّن** $SUM = 0$ (تهيئة المجمع)

2- **لكل** $i = 1, 2, \ldots, N$ **نفذ:**

$SUM = SUM + x_i$ (أضف الحد التالي إلى المجموع)

3- **اطبع** SUM; **ثم توقف.**

مثال 2.3.2 تقريب $\ln(x)$ باستخدام كثير حدود تايلور
نقرّب الدالة $f(x) = \ln x$ باستخدام كثير حدود تايلور حول $x_0 = 1$:

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i+1}}{i}(x-1)^i$$

نريد تحديد أقل قيمة لـ N بحيث يكون الخطأ:

$$|\ln(1.5) - P_N(1.5)| < 10^{-5}$$

مع العلم أن:

$$\ln(1.5) \approx 0.40546511$$

نستخدم شرط المتسلسلة المتناوبة الذي ينص على أن:

$$|A - A_N| \le |a_{N+1}|$$

***Algorithm* 1:** خوارزمية تقريب $\ln(x)$

عدد حقيقي $x > 0$**، حد الدقة *TOL*، عدد التكرارات الأقصى** M **قيمة تقريبية لـ** $\ln(x)$ **أو رسالة فشل**

الخطوة 1: التهيئة ;

; $N = 1$

; $y = x - 1$

;$SUM = 0$

; $POWER = y$

; $TERM = y$

$SIGN = -1$

while $N \leq M$ ***do***

الخطوة 3: تحديث القيم ;

; $SIGN = -SIGN$ //

; $SUM = SUM + SIGN \cdot TERM$ //

; $POWER = POWER \cdot y$; $N = N + 1$; $TERM$„0304$POWERN$; //

الخطوة 4: فحص الدقة ;

أطبع: N ; //

توقف.

الخطوة 5: التحضير للتكرار التالي;

; // : $N = N + 1$

الخطوة 6:; أطبع:***'Method Failed'*** ; //

توقف.

بيانات الإدخال للمثال:

القيمة: $x = 1.5$، سماحية الخطأ: $TOL = 10^{-5}$، الحد الأقصى للتكرارات: $M = 15$

هذا الاختيار لـ M يمثّل الحد الأعلى لعدد العمليات الحسابية المسموح بها.

إذا تجاوزت الخوارزمية هذا الحد دون الوصول إلى الدقة المطلوبة، فإنها تفشل. ما إذا كانت النتيجة صالحة أو فشل يعتمد على دقة الجهاز المستخدم.

ندرس في هذا البحث مجموعة متنوعة من إجراءات التقريب. في كل حالة، نحتاج إلى تحديد طرق تقريب تعطي نتائج موثوقة لفئة واسعة من المسائل. ونظراً لاختلاف طرق الاشتقاق، نحتاج إلى معايير مختلفة لتصنيف هذه الخوارزميات، لكن ليس كل معيار مناسب لكل المسائل.

من المعايير المهمة التي نفرضها على الخوارزميات متى ما كان ذلك ممكناً:

أن تؤدي التغيرات الصغيرة في البيانات الابتدائية إلى تغيرات صغيرة في النتائج النهائية.

الخوارزمية التي تحقق هذا الشرط تُسمّى **مستقرة (*Stable*)**، بينما التي لا تحقق ذلك تُسمّى **غير مستقرة (*Unstable*)**. بعض الخوارزميات مستقرة فقط لبعض القيم الابتدائية وتُسمّى في هذه الحالة **مستقرة مشروطة (*Conditionally Stable*)**.
سنقوم بوصف خصائص الاستقرارية للخوارزميات متى ما أمكن.

لنفترض أن خطأ تقريبياً مقداره $E_0 > 0$ أُدخل في مرحلة معينة من العمليات الحسابية، ويرُمز إلى مقدار الخطأ بعد n خطوة حسابية بالرمز E_n. النوعان الأساسيان لنمو الخطأ اللذان يظهران غالباً في الممارسة يعُرّفان كما يلي:

تعريف 1.3.2 نفترض أن $E_0 > 0$ يمثل الخطأ الابتدائي، وE_n يمثل مقدار الخطأ بعد n عملية لاحقة:

- إذا كان
$$E_n \approx CnE_0,$$
حيث C ثابت لا يعتمد على n، فإن النمو يسُمى **خطي (*Linear*)**.
- وإذا كان
$$E_n \approx C^n E_0,$$
حيث $C > 1$، فإن النمو يسُمى **أُسّي (*Exponential*)**.

ملاحظات:

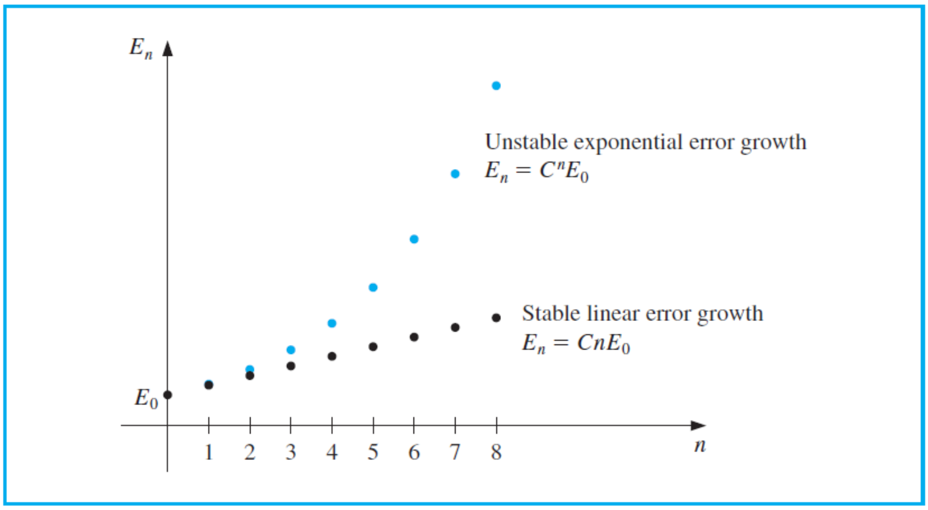
- النمو الخطي للخطأ غالباً لا يمكن تجنّبه، وعندما يكون C و E_0 صغيرين، تكون النتائج مقبولة.
- النمو الأُسّي للخطأ يجب تجنّبه لأنه يؤدي إلى أخطاء كبيرة حتى عندما يكون E_0 صغيراً.
- **نتيجة لذلك:**
  - الخوارزمية التي تُظهر نمواً خطياً للخطأ تُعتبر **مستقرة**.
  - أما التي تُظهر نمواً أُسّياً فتُعتبر **غير مستقرة**.

مثال 3.3.2 المعادلة التكرارية هي:

$$p_n = \frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2}, \quad \text{من اجل} \quad n = 2, 3, \ldots$$

لها الحل:

$$p_n = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 \cdot 3^n$$



لأي ثابتين c_1 و c_2، لدينا:

$$\frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2} = \frac{10}{3}\left[c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + c_2 3^{n-1}\right] - \left[c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + c_2 3^{n-2}\right]$$

$$= c_1\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left[\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{3} - 1\right]\right) + c_2 3^{n-2}\left(\frac{10}{3}\cdot 3 - 1\right)$$

$$= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^{n-2}(9) = c_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n = p_n$$

إذا كان $p_0 = 1$ و $p_1 = \frac{1}{3}$، فإننا نحصل على $c_1 = 1$ و $c_2 = 0$، لذا $p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n. لنفترض أن الحساب يتم باستخدام تقريب عشري من خمس خانات. حينها ستكون:

$$\hat{p}_0 = 1.0000, \quad \hat{p}_1 = 0.33333$$

وهذا يتطلب تعديل الثوابت إلى:

$$\hat{c}_1 = 1.0000, \quad \hat{c}_2 = -0.12500 \times 10^{-5}$$

السلسلة التقريبية $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ تكون:

$$\hat{p}_n = 1.0000\left(\frac{1}{3}\right)^n - 0.12500\times 10^{-5}\cdot 3^n$$

وخطأ التقريب هو:

$$p_n - \hat{p}_n = 0.12500\times 10^{-5}\cdot 3^n$$

الذي ينمو بشكل أسي مع n،
هذا ينعكس في عدم الدقة الشديد بعد الحدود القليلة الأولى، كما هو موضح في الجدول .
من ناحية أخرى، المعادلة التكرارية:

$$p_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}, \quad \text{من اجل } n = 2, 3, \ldots$$

لها الحل:

$$p_n = c_1 + c_2 n$$

لكل ثوابت c_1 و c_2، لأن:

$$\begin{aligned} 2p_{n-1} - p_{n-2} =& 2(c_1 + c_2(n-1)) - (c_1 + c_2(n-2)) \\ =& c_1(2-1) + c_2(2n-2-n+2) = c_1 + c_2 n = p_n \end{aligned}$$

n	المحسوبةالقيمة $\hat{p}_n$	الصحيحةالقيمة p_n	الخطأ النسبي
0	1.0000×10^{1}	1.0000×10^{1}	0
1	0.33333×10^{1}	0.33333×10^{1}	0
2	0.11110×10^{1}	0.11111×10^{1}	9×10^{-5}
3	0.37000×10^{0}	0.37037×10^{0}	1×10^{-4}
4	0.12320×10^{0}	0.12346×10^{0}	2×10^{-4}
5	0.41125×10^{-1}	0.41152×10^{-1}	7×10^{-4}
6	0.13763×10^{-1}	0.13717×10^{-1}	3×10^{-3}
7	-0.26893×10^{-1}	0.45775×10^{-2}	6×10^{0}
8	-0.92872×10^{-1}	0.15242×10^{-2}	6×10^{1}

إذا كانت $p_0 = 1$ و $p_1 = \frac{1}{3}$، فإن الثوابت في هذه المعادلة تصبح $c_1 = 1$ و $c_2 = -\frac{2}{3}$، وبالتالي:

$$p_n = 1 - \frac{2}{3}n$$

عند استخدام حساب تقريبي بدقة خمس أرقام، نحصل على: $\hat{p}_0 = 1.0000$ و $\hat{p}_1 = 0.33333$، وكنتيجة لذلك، فإن الثوابت المقربة تكون:

$$\hat{c}_1 = 1.0000 \quad \text{و} \quad \hat{c}_2 = -0.66667$$

وهكذا نحصل على:

$$\hat{p}_n = 1.0000 - 0.66667n$$

والخطأ الناتج عن التقريب هو:

$$p_n - \hat{p}_n = \left(0.66667 - \frac{2}{3}\right)n$$

وهو خطأ يزداد خطياً مع n. هذا ينعكس في الاستقرار الموضح في الجدول التالي:

n	$\hat{p}_n$ المحسوبةالقيمة	p_n الصحيحةالقيمة	الخطأ النسبي
0	1.0000×10^1	1.0000×10^1	0
1	0.33333×10^1	0.33333×10^1	0
2	0.11110×10^1	0.11111×10^1	9×10^{-5}
3	0.37000×10^0	0.37037×10^0	1×10^{-4}
4	0.12320×10^0	0.12346×10^0	2×10^{-4}
5	0.41125×10^{-1}	0.41152×10^{-1}	7×10^{-4}
6	0.13763×10^{-1}	0.13717×10^{-1}	3×10^{-3}
7	-0.26893×10^{-1}	0.45775×10^{-2}	6×10^0
8	-0.92872×10^{-1}	0.15242×10^{-2}	6×10^1

يمكن تقليل تأثير أخطاء التقريب باستخدام حسابات ذات دقة عالية مثل الدقة المزدوجة أو المتعددة، والتي تتوفر على معظم الحواسيب. من عيوب استخدام هذه الطرق أنها تتطلب وقت حساب أطول، ورغم أن الخطأ لا يُزال بالكامل، إلا أنه يؤُجل حتى تُستكمل العمليات الحسابية. أحد الأساليب لتقدير الخطأ هو استخدام الحساب بالفترات (*interval arithmetic*)، حيث يتم تحديد أصغر وأكبر قيمة ممكنة في كل خطوة للحصول على مجال تحتوي على القيمة الحقيقية. لكن هذا الأسلوب قد يتطلب مجالاً صغيراً جداً مما يجعله غير عملي.

بما أن العديد من الأساليب العددية تعتمد على التكرار، فإن هذا القسم يختتم بمناقشة مصطلح **معدل التقارب**، والذي يشير إلى مدى سرعة تقارب الحل العددي نحو القيمة الصحيحة، وهي خاصية مهمة نرغب دائمًا في توفرها.
نرغب في أن تتقارب الطرق العددية بأسرع ما يمكن. نستخدم التعريف التالي لمقارنة معدلات التقارب لمختلف الطرق.

تعريف 2.3.2 نفترض أن $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتالية معروفة بأنها تتقارب إلى الصفر، وأن $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى عدد α. إذا وجد ثابت موجب K بحيث: $|\alpha_n - \alpha| \leq K|\beta_n|$ من اجل اكبر n
فإننا نقول إن $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى α بمعدل تقارب $O(\beta_n)$ (وهذا التعبير يقُرأ "أو من مرتبة β_n"). ويكُتب هذا كما يلي:

$$\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$$

على الرغم من أن التعريف 1.3.2 يسمح بمقارنة $\{\alpha_n\}$ مع أي متتالية $\{\beta_n\}$، إلا أننا في أغلب الحالات نستخدم:

$$\beta_n = \frac{1}{n^p}$$

لبعض $p > 0$. وعادةً ما نهتم بأكبر قيمة ممكنة لـ p بحيث:

$$\alpha_n = \alpha + O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

مثال 4.3.2 نفترض أن، لكل $n \geq 1$:

$$\alpha_n = \frac{n+1}{n^2}, \quad \hat{\alpha}_n = \frac{n+3}{n^3}$$

على الرغم من أن:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} \hat{\alpha}_n = 0$$

إلا أن المتتالية $\hat{\alpha}_n$ تتقارب نحو الصفر أسرع بكثير من المتتالية α_n، كما هو موضح في جدول 1.7 باستخدام التقريب بخمس أرقام عشرية.

الجدول 1.7

n	α_n	$\hat{\alpha}_n$
1	2.00000	4.00000
2	0.75000	0.62500
3	0.44444	0.22222
4	0.31250	0.10938
5	0.24000	0.06400
6	0.19444	0.041667
7	0.16327	0.029155

إذا افترضنا أن:

$$\beta_n = \frac{1}{n}, \quad \hat{\beta}_n = \frac{1}{n^2}$$

نجد أن:

$$|\alpha_n - 0| = \frac{n+1}{n^2} = \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 2\beta_n$$

و

$$|\hat{\alpha}_n - 0| = \frac{n+3}{n^3} = \frac{n}{n^3} + \frac{3}{n^3} = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} = \frac{4}{n^2} = 4\hat{\beta}_n$$

إذاً:

$$\alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \hat{\alpha}_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

و منه نستنتج ان معدل تقارب المتتالية $\{\alpha_n\}$ إلى الصفر يشبه معدل تقارب المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$، في حين أن $\{\hat{\alpha}_n\}$ تتقارب إلى الصفر بمعدل مماثل لمعدل تقارب المتتالية الأسرع $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$.

نستخدم أيضًا ترميز *Big-O* لوصف معدل تقارب الدوال.

تعريف 3.3.2 نفترض أن:

$$\lim_{h\to 0} G(h) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0} F(h) = L$$

إذا وجد ثابت موجب K بحيث:

$$|F(h) - L| \leq K|G(h)| \quad \text{لـ قيم صغيرة من كفاية} \quad h,$$

فإننا نكتب:

$$F(h) = L + O(G(h))$$

الدوال التي نستخدمها للمقارنة غالباً ما تكون على الشكل $G(h) = h^p$ حيث $p > 0$، واهتمامنا يكون بأكبر قيمة ممكنة لـ p بحيث:

$$F(h) = L + O(h^p)$$

مثال 5.3.2 في المثال 1.1.2 من القسم 1.1، وجدنا أن كثير الحدود من الدرجة الثالثة في متسلسلة تايلور يعطي:

$$\cos h = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 \cos\xi(h)$$

لبعض العدد $\xi(h)$ بين 0 و h. وبالتالي:

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + \frac{1}{24}h^4 \cos\xi(h)$$

وهذا يعني أن:

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

لأن:

$$|\cos h + \frac{1}{2}h^2 - 1| = \left|\frac{1}{24}h^4 \cos\xi(h)\right| \leq \frac{1}{24}h^4$$

والنتيجة هي أنه كلما $h \to 0$، تتقارب الدالة:

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2$$

إلى 1، بمعدل مشابه لتقارب h^4 إلى الصفر.

باب 3

بعض الطرق العددية لحل المعادلات اللاخطية

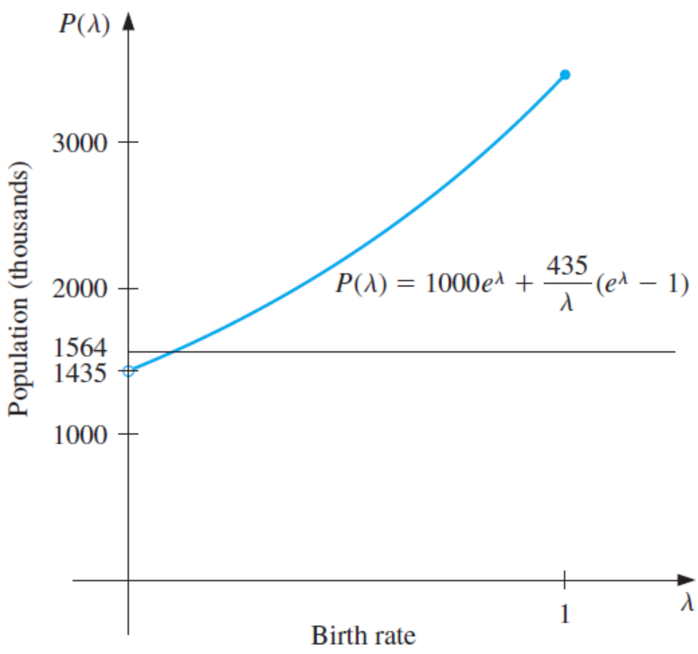
يمكن نمذجة نمو السكان على فترات قصيرة من الزمن من خلال افتراض أن السكان ينمون باستمرار مع الزمن بمعدل يتناسب مع عدد السكان الموجودين في تلك اللحظة. إذا رمزنا بـ $N(t)$ إلى عدد السكان عند الزمن t، وبـ λ إلى معدل الولادة الثابت للسكان، فإن السكان يخضعون للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

حل هذه المعادلة هو:

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

حيث N_0 يمثل عدد السكان الابتدائي.



هذا النموذج الأسي صالح فقط عندما يكون السكان معزولين، أي لا يوجد هجرة. إذا تم السماح بالهجرة بمعدل ثابت v، تصبح المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + v$$

والحل هو:

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$$

نفترض أن هناك مجتمعاً يحتوي على 1,000,000 فرد في البداية، وأن 435,000 فرد يهاجرون إلى المجتمع في السنة الأولى، وأن عدد السكان في نهاية السنة هو 1,564,000 فرد. لتحديد معدل الولادة لهذا المجتمع، يجب أن نحل المعادلة التالية لإيجاد λ:

$$1,564,000 = 1,000,000e^{\lambda} + \frac{435,000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

الطرق العددية التي سيتم مناقشتها في هذا الفصل تُستخدم لتقريب حلول المعادلات من هذا النوع، عندما لا يمكن إيجاد الحلول الدقيقة بطرق جبرية.

3.1 طريقة التنصيف (*Bisection Method*)

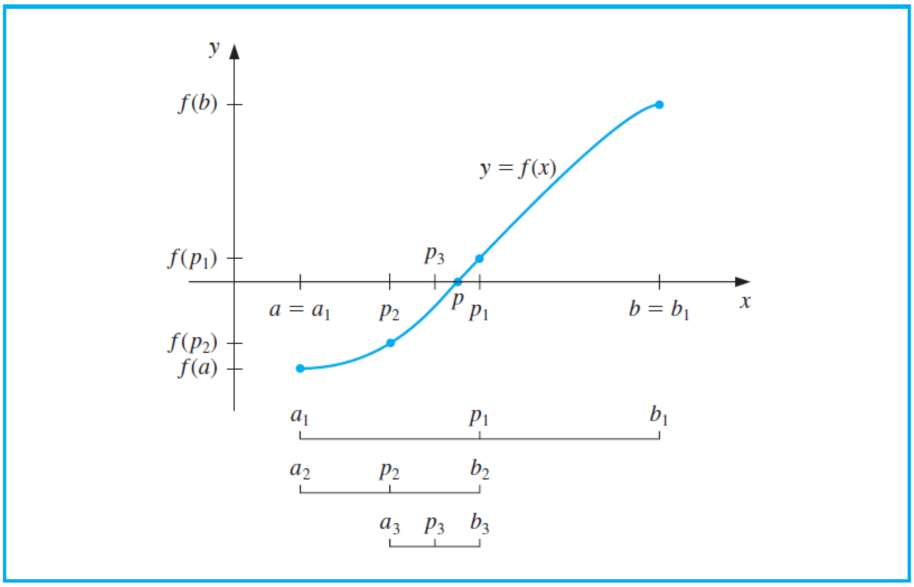
في هذا الفصل، نناقش واحدة من أبسط مشاكل التقريب العددي، وهي **مشكلة إيجاد الجذر** (*root-finding problem*). تتضمن هذه العملية إيجاد **جذر** أو **حل** للمعادلة من الشكل:

$$f(x) = 0$$

لدالة معطاة f. الجذر لهذه المعادلة يُعرف باسم **جذر الدالة** f.
ترجع مشكلة إيجاد حل تقريبي لجذر معادلة إلى عام 1700 قبل الميلاد. إذ يحتوي لوح طيني من حضارة بابل موجود في كلية ييل على رقم ستيني يكافئ تقريباً الجذر التربيعي لـ 2، وكانت النتيجة دقيقة حتى خمس مراتب عشرية. وقد تم الوصول إلى هذه القيمة عن طريق **طريقة التنصيف**.
:شرح طريقة التنصيف تعتمد هذه الطريقة على **نظرية القيمة المتوسطة**. نفترض أن f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$، وأن القيمتين $f(a)$ و$f(b)$ لهما إشارتان متعاكستان. حسب نظرية القيمة المتوسطة، يوجد عدد p في المجال (a, b) **بحيث** $f(p) = 0$.
نبدأ بتعيين:

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

نكرر العملية بناءً على إشارات $f(p_1)$ و $f(a_1)$ أو $f(b_1)$.



خوارزميةالتنصيف:

لإيجاد حل لـ $f(x) = 0$ عندما تكون f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$، بحيث $f(a)$ و$f(b)$ لهما إشارات متعاكسة:

المدخلات:

- نقاط النهاية: a, b
- السماحية: TOL
- أقصى عدد من التكرارات: N_0

النواتج: حل تقريبي p أو رسالة فشل.

-1 عيّن $i = 1$، $FA = f(a)$

-2 بينما $i \leq N_0$ نفّذ الخطوات 3−6:

3. عيّن $p = a + (b - a)/2$

4. احسب $FP = f(p)$.
إذا تحقق $FP = 0$ أو $(b - a)/2 < TOL$،
أخرج p وتوقف. (تم إيجاد الحل بنجاح.)

5. عيّن $i = i + 1$

6. إذا $FA \cdot FP > 0$:
عيّن $a = p$، $FA = FP$
وإلا عيّن $b = p$

3- أخرج:
"فشلت العملية بعد N_0 تكرار. $N_0 = \ldots$"
(لم تنجح الطريقة.)

يمكن تطبيق إجراءات توقف إضافية في الخطوة 4 من خوارزمية التنصيف أو في أي من التقنيات التكرارية الأخرى في هذا الفصل. على سبيل المثال، يمكن اختيار مقدار تحمُّل $\varepsilon > 0$ وتوليد المتتالية $p_1, p_2, \ldots, p_N$ حتى يتحقق أحد الشروط التالية:

1- الفرق بين القيمتين الأخيرتين:

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon \tag{3.1}$$

2- الخطأ النسبي:

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad \text{حيث} \quad p_N \neq 0 \tag{3.2}$$

3- القيمة المطلقة للدالة:

$$|f(p_N)| < \varepsilon \tag{3.3}$$

رغم ذلك، قد تظهر صعوبات عند استخدام هذه الشروط، مثل تذبذب القيم أو تقارب $f(p_n)$ من الصفر دون أن تكون p_n قريبة من الجذر.
لبدء خوارزمية التنصيف، يجب أن نحدد مجال $[a, b]$ بحيث:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

كل خطوة تقسم المجال إلى النصف. من الأفضل استخدام أصغر مجال تحتوي على الجذر لزيادة الكفاءة.

مثال 1.1.3 لدينا:

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$$

نلاحظ أن:

$$f(-4) \cdot f(4) < 0, \qquad f(0) \cdot f(1) < 0$$

لذا يمكن استخدام أي من المجالين.

مثال 2.1.3 المعادلة

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

تحتوي على جذر في المجال $[1, 2]$، لأن $f(1) = -5$ و $f(2) = 14$. **تعطي خوارزمية التنصيف (*Bisection Algorithm*)** القيم الموضحة في الجدول 2.1.

بعد 13 تكرارًا، يكون:

$$p_{13} = 1.365112305$$

تقريباً للجذر p، بخطأ قدره:

$$|p - p_{13}| < |b_{14} - a_{14}| = |1.365234375 - 1.365112305| = 0.000122070.$$

وبما أن $|a_{14}| < |p|$، فإنه:

$$\frac{|p - p_{13}|}{|p|} < \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} \leq 9.0 \times 10^{-5},$$

لذا فإن التقريب صحيح على الأقل إلى **أربعة أرقام** .
القيمة الدقيقة للجذر p، حتى تسعة منازل عشرية، هي:

$$p = 1.365230013.$$

لاحظ أن p_9 أقرب إلى p من p_{13}.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1.0	2.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	1.25	−1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	−0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	−0.35098
6	1.34375	1.375	1.359375	−0.09641
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	−0.03215
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	−0.01605
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	−0.00799
12	1.364746094	1.365234375	1.364990235	−0.00396
13	1.364990235	1.365234375	1.365112305	−0.00194

قد يبدو أن التقريب p_{13} هو الأفضل، وقد تظن أن هذا صحيح لأن $|f(p_{13})| < |f(p_9)|$، ولكن لا يمكننا التأكد من ذلك إلا إذا كانت القيمة الحقيقية للجذر معروفة.
ملاحظة: طريقة التنصيف، على الرغم من وضوحها المفاهيمي، إلا أنها تعاني من عيوب كبيرة. فهي بطيئة في التقارب (أي أن N قد يصبح كبيراً قبل أن يكون $|p-p_N|$ صغيراً بما فيه الكفاية)، كما يمكن بشكل غير مقصود التخلي عن تقريب وسطي جيد. ومع ذلك، فإن لهذه الطريقة خاصية مهمة، وهي أنها **دائمًا ما تتقارب إلى حل**، ولذلك تُستخدم غالباً كنقطة انطلاق للطرق الأكثر كفاءة التي سنعرضها لاحقًا في هذا الفصل.

نظرية 3.1.1 إذا كانت $f \in C[a,b]$ و $f(a)\cdot f(b) < 0$، فإن خوارزمية التنصيف تنتج متتالية $\{p_n\}$ تقترب من جذر الدالة وتحقق:

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad \text{عندما} \quad n \geq 1$$

رغم أن خوارزمية التنصيف بطيئة في التقارب، إلا أنها دائمًا ما تؤدي إلى حل تقريبي مضمون، لذا تُستخدم غالباً كبداية لطرق عددية أكثر كفاءة.

3.2 طريقة نيوتن *Newton's Method*

تُعد طريقة نيوتن (أو طريقة نيوتن-رافْسون) واحدة من أقوى وأكثر الطرق العددية شهرةً لحل مشاكل إيجاد الجذور. هناك العديد من الطرق لتقديم طريقة نيوتن.
إذا كنا نرغب فقط في الحصول على خوارزمية، يمكننا النظر إلى هذه الطريقة من الناحية البيانية، كما هو الحال غالباً في حساب التفاضل و التكامل. من جهة آخرى فان طريقة نيوتن تعتبر وسيلة لتحقيق تقارب أسرع مما تقدمه الأنواع الأخرى من الطرق التكرارية. كذلك فان طريقة نيوتن تعتمد في انشائها على كثيرات حدود تايلور و التي سنناقشها لاحقا.
نفترض أن الدالة $f \in C^2[a,b]$. لنفترض أن $p_0 \in [a,b]$ هو تقريب للحل p للمعادلة $f(x) = 0$، بحيث أن $f'(p_0) \neq 0$ و $|p - p_0|$ صغير. لنأخذ كثير حدود تايلور من الرتبة الاولى للدالة $f(x)$ بجوار p_0، ونحسب قيمتها عند $x = p$:

$$f(p) = f(p_0) + (p-p_0)f'(p_0) + \frac{(p-p_0)^2}{2} f''(\xi(p)),$$

حيث تقع $\xi(p)$ بين p و p_0. وبما أن $f(p) = 0$، فإن هذه المعادلة تصبح:

$$f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p-p_0)^2}{2} f''(\xi(p)) = 0.$$

تفترض طريقة نيوتن أن $|p - p_0|$ صغير، وبالتالي فإن الحد الذي يحتوي على $(p - p_0)^2$ أصغر بكثير، لذا:

$$f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) \approx 0$$

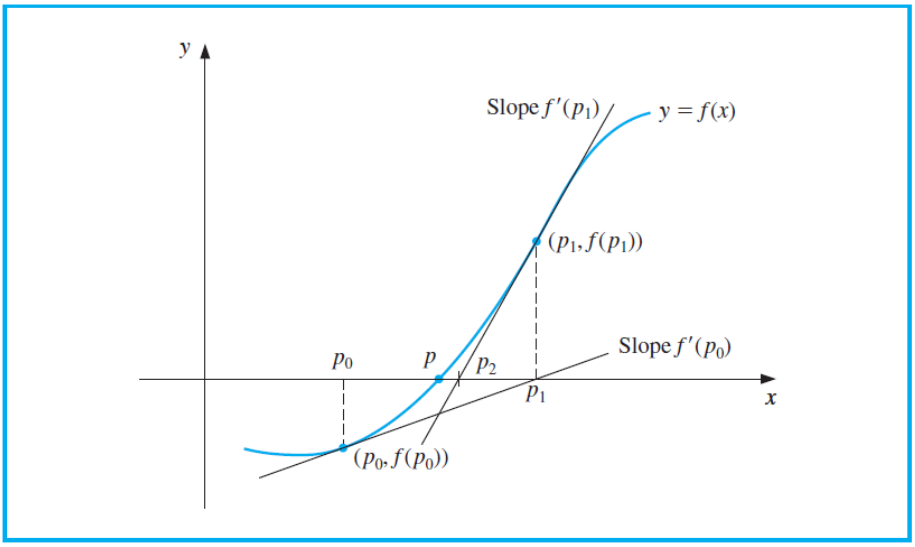
بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ p، نحصل على:

$$p_1 \equiv p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \approx p$$

وهذا يمهّد الطريق لطريقة نيوتن، التي تبدأ بتقريب ابتدائي p_0، وتُولِّد المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ حسب العلاقة:

$$n \geq 1 \quad \text{لـ} \quad , p_n = \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} - p_{n-1}$$

يُوضّح الشكل كيف يتم الحصول على هذه التقريبات باستخدام مماسات متتالية. نبدأ بالتقريب الابتدائي p_0، حيث يكون p_1 هو تقاطع المماس مع محور x عند النقطة $(p_0, f(p_0))$، ثم يكون p_2 هو تقاطع المماس عند $(p_1, f(p_1))$، وهكذا. ونتبع خوارزمية طريقة نيوتن هذا الإجراء.



خوارزمية طريقة نيوتن

لإيجاد حل للمعادلة $f(x) = 0$ ابتداءً من تقريب ابتدائي p_0:

المُدخلات:

- التقريب الابتدائي p_0

- السماحية TOL
- الحد الأقصى لعدد التكرارات N_0

المُخرجات: الحل التقريبي p أو رسالة فشل.

1- عيّن $i = 1$

2- طالما $i \leq N_0$، نفّذ ما يلي:

ا) احسب:

$$p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = p$$

ب) إذا كان:

$$|p - p_0| < TOL$$

أخرج p و **توقف.**
(نجحت العملية)

ج) ضع $i = i + 1$

د) ضع $p_0 = p$

3- إذا لم يتحقق الشرط خلال N_0 تكرارًا، أخرج الرسالة:

فشلت الطريقة بعد N_0 تكرارًا، حيث $N_0 = \ldots$؛ (لم تنجح العملية)
توقف.

شروط التوقف في طريقة نيوتن:

يمكن استخدام متباينات التوقف التي تم استخدامها في طريقة التنصيف مع طريقة نيوتن أيضًا. أي أنه يتم اختيار سماحية $\varepsilon > 0$، ثم نُحسب $p_1, p_2, \ldots, p_N$ حتى يتحقق أحد الشروط التالية:

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon \tag{3.4}$$

أو

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad \text{حيث} \quad p_N \neq 0 \tag{3.5}$$

أو

$$|f(p_N)| < \varepsilon \tag{3.6}$$

يُستخدم الشكل (3.4) من هذه المتباينات في الخطوة 4 من الخوارزمية . يجب ملاحظة أن المتباينة (3.6) قد لا تُعطي معلومات كافية عن الخطأ الحقيقي $|p_N - p|$.
تُعتبر طريقة نيوتن طريقة تكرارية من الشكل:

$$g(p_{n-1}) = p_n$$

حيث:

$$g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \tag{3.7}$$

في الواقع، هذا هو التكرار الذي تم استخدامه لتحقيق التقارب السريع.
من الواضح من المعادلة (3.7) أن طريقة نيوتن لا يمكن أن تستمر إذا كان $f'(p_{n-1}) = 0$ لاجل قيمة ل n. وسنرى لاحقًا أن الطريقة تكون أكثر فاعلية عندما تكون الدالة f بعيدة عن الصفر بالقرب من الجذر p.
ملاحظات هامة:

- إذا كانت المشتقة $f(x)$تساوي صفراً، فإن الطريقة تتوقف أو تفشل.
- الطريقة تحتاج إلى دالة قابلة للاشتقاق، ويجب حساب المشتقة في كل خطوة.
- إذا كان التخمين الابتدائي قريباً من الجذر، فإن التقارب يكون سريع جداً (أحياناً يتضاعف عدد الأرقام الصحيحة في كل خطوة!)

نظرية 1.2.3 تقارب طريقة نيوتن
لتكن$f \in C^2[a,b]$ إذا كان هناك $p \in [a,b]$ بحيث $f(p) = 0$ و $f'(p) \neq 0$، فإنه يوجد عدد موجب $\delta > 0$ بحيث أن طريقة نيوتن تُولّد متتالية $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو p لأي تقريب ابتدائي $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

البرهان. يعتمد البرهان على تحليل طريقة نيوتن تكرارية بالشكل:

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad \text{من اجل} \quad n \geq 1$$

حيث:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

نأخذ عدداً $k \in (0,1)$. نبحث عن مجال $[p-\delta, p+\delta]$ بحيث:

- تكون g معرفة على هذه المجال.
- تحقق $g([p-\delta,p+\delta]) \subseteq [p-\delta,p+\delta]$
- تحقق $|g'(x)| \leq k$ لكل $x \in [p-\delta,p+\delta]$

بما أن f مستمرة و $f'(p) \neq 0$، فإن $\delta_1 > 0$ بحيث $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in [p-\delta_1,p+\delta_1] \subseteq [a,b]$.
إذاً، g معرفة ومستمرة على هذه المجال.
نحسب مشتقة g كما يلي:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

وبما أن $f \in C^2[a,b]$، فإن $g \in C^1[p-\delta_1,p+\delta_1]$.
بما أن $f(p) = 0$ بحسب الفرض، فإن:

$$g(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0$$

وبما أن الدالة g مستمرة و $0 < k < 1$، وجود $\delta > 0$ بحيث:

$$x \in [p-\delta,p+\delta] \quad \text{لكل} \quad |g'(x)| \leq k \quad \text{و} \quad 0 < \delta < \delta_1$$

الآن نريد أن نُثبت أن g تُحوّل المجال $[p-\delta,p+\delta]$ إلى نفسها.
إذا كان $x \in [p-\delta,p+\delta]$، فإن مبرهنة القيمة المتوسطة تُعطينا عدداً $\xi \in (x,p)$ بحيث:

$$|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x-p|$$

وبما أن $g(p) = p$، نحصل على:

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x-p| \leq k|x-p| < |x-p|$$

وبما أن $|x-p| < \delta$، فإن:

$$|g(x) - p| < \delta \Rightarrow g(x) \in [p-\delta,p+\delta]$$

إذاً، g تُحوّل المجال إلى نفسها.
وبما أن جميع فروض مبرهنة النقطة الثابتة محققة، فإن المتتالية:

$$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{حيث} \quad n \geq 1 \text{ لـ} \; p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})},$$

تتقارب إلى الجذر p.
تتقارب المتتالية إلى p لأي $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

تنص النظرية على أنه، تحت فرضيات معقولة، فإن طريقة نيوتن تتقارب بشرط اختيار قيمة ابتدائية قريبة من الجذر. ويفُهم من ذلك أيضًا أن الثابت k الذي يقُيِّد مشتقة الدالة g، والذي يدل بالتالي على سرعة تقارب الطريقة، يتناقص ليقترب من الصفر كلما استمر الإجراء. هذا الاستنتاج مهم في **نظرية طريقة نيوتن**، لكنه نادرًا ما يطُبق عمليًا لأنه لا يعُطينا وسيلة واضحة لتحديد قيمة δ.

في التطبيقات العملية، يتم اختيار قيمةأولية، وتوليد تقريبات متتالية باستخدام طريقة نيوتن. غالبًا ما تتقارب هذه التقريبات بسرعة نحو الجذر، أو يتضح أن التقارب غير موجود.

رغم أن **طريقة نيوتن طريقة قوية جدًا**، إلا أن لها نقطة ضعف رئيسية وهي الحاجة إلى معرفة مشتقة f عند كل تقريب. وفي كثير من الأحيان، تكون $f'(x)$ أصعب حسابًا من $f(x)$، وتحتاج إلى عمليات حسابية أكثر.

وللتغلب على مشكلة حساب المشتقة في طريقة نيوتن، نقُدم تعديلًا بسيطًا عليها. بالتعريف:

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

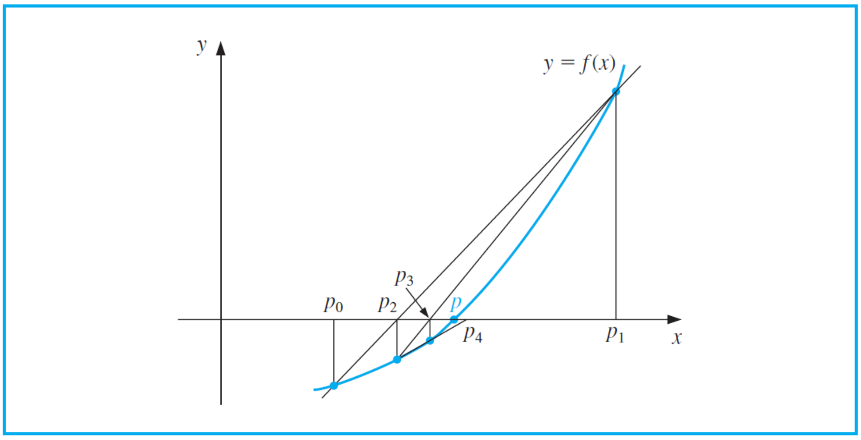
بأخذ $x = p_{n-2}$، نحصل على:

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

وباستخدام هذا التقريب لمشتقة f في صيغة نيوتن، نحصل على:

$$p_n = p_{n-1} - f(p_{n-1}) \cdot \frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

وهذه هي صيغة **طريقة نيوتن المعُدّلة بدون مشتقة**، وتعُرف أيضًا باسم **طريقة القاطع (*Secant Method*)**.



3.3 طريقة القاطع (*Secant Method*)

تُسمّى هذه الطريقة طريقة القاطع (***Secant Method***)، وتُعرض في الخوارزمية . بدايةً من التقريبين الابتدائيين p_0 وp_1، فإن التقريب p_2 هو **نقطة تقاطع المحور** x مع الخط الواصل بين النقطتين $(p_0, f(p_0))$ و$(p_1, f(p_1))$.
أما التقريب p_3، فهو نقطة تقاطع المحور x مع الخط الواصل بين النقطتين $(p_1, f(p_1))$ و$(p_2, f(p_2))$، وهكذا.

خوارزمية طريقة القاطع (*Secant Method*)

لإيجاد حل للمعادلة $f(x) = 0$ باستخدام تقريبين أوليين p_0 و p_1:

المدخلات:

- التقريبين الابتدائيين p_0 و p_1
- القيمة المسموح بها للخطأ TOL
- الحد الأقصى لعدد التكرارات N_0

المخرجات: تقريب للحل p أو رسالة فشل.

الخطوات:

1- ضع $i = 2$، و $q_0 = f(p_0)$، و $q_1 = f(p_1)$.

2- **طالما أن** $i \le N_0$ **نفّذ** الخطوات من 3 إلى 6:

أ) احسب $p = p_1 - \dfrac{q_1(p_1 - p_0)}{q_1 - q_0}$

ب) إذا كان $|p - p_1| < TOL$، فاكتب p (نجحت الطريقة) وتوقف.

ج) زد i بمقدار 1.

د) ضع القيم: $p_0 = p_1$,$q_0 = q_1$,$p_1 = p$,$q_1 = f(p)$.

3- إذا انتهت التكرارات دون نجاح، اطبع "فشلت الطريقة بعد N_0 تكراراً"، وتوقف.

ملاحظات :

1- طريقة القاطع لا تحتاج إلى مشتقة $f(x)$

2- طريقة القاطع أسرع من طريقة التقسيم النصفي

مثال 1.3.3 نريد حل:
$f(x) = cos(x) - x$ نبدأ بـ:

$$p_0 = 0.5$$

$$p_1 = \frac{4}{\pi} \approx 0.785$$

بعد 5 خطوات فقط نحصل على:
$p_5 = 0.7390851332$ نفس النتيجة التي حصلنا عليها من نيوتن

الخاتمة:

في ختام هذه المذكرة، التي جاءت بعنوان **الحلول العددية للمعادلات اللاخطية**، قمنا باستعراض وتحليل مجموعة من الطرائق العددية التي تهدف إلى إيجاد حلول تقريبية للمعادلات اللاخطية، والتي تشكل جزءًا جوهرياً من مسائل الرياضيات التطبيقية والهندسة والعلوم الحاسوبية.
لقد بدأنا بتعريف المعادلات اللاخطية وبيان أهميتها في النمذجة الرياضية للعديد من الظواهر الفيزيائية والهندسية، حيث أن العديد من المسائل الواقعية لا يمكن نمذجتها بدقة باستخدام معادلات خطية فقط. وعليه، يصبح من الضروري اللجوء إلى تقنيات عددية فعالة للتعامل مع هذه المعادلات المعقدة.
استعرضنا في هذا العمل أشهر الطرق العددية المستخدمة في حل المعادلات اللاخطية الأحادية، مثل:

- طريقة التقدير الثنائي (*Bisection Method*)
- طريقة نيوتن-رافسون (*Newton-Raphson Method*)
- طريقة القاطع (*Secant Method*)

وقمنا بتحليل كل طريقة من حيث المبادئ الأساسية التي تقوم عليها، شروط استخدامها، سرعة التقارب، الدقة العددية، ومواطن القوة والضعف. كما قمنا بمقارنة هذه الطرق من خلال تطبيقات عملية وأمثلة توضيحية، مما أتاح لنا فهماً أعمق لأداء كل طريقة تحت ظروف مختلفة.
أظهرت نتائج الدراسة أن اختيار الطريقة المثلى يعتمد على عدة عوامل، من بينها توفر المشتقة، اختيار القيم الابتدائية، مدى حساسية الدالة، وسلوكها في جوار الجذر. كما تبين أن الطرق التكرارية، رغم بساطتها، قد تكون فعالة جداً متى توفرت الشروط المناسبة لتقاربها.
إن أهمية هذا الموضوع لا تقتصر فقط على الإطار الأكاديمي، بل تمتد لتشمل مجالات متعددة مثل تصميم الأنظمة، تحسين الأداء، والنمذجة العددية، مما يجعل دراسة هذه الأساليب العددية أمرًا ضرورياً لكل من يشتغل في مجالات الرياضيات التطبيقية أو الحوسبة العلمية.

وفي الختام، نأمل أن تكون هذه المذكرة قد أسهمت في توضيح أهمية الحلول العددية للمعادلات اللاخطية، وفتحت آفاقاً جديدة للبحث والتطوير في هذا المجال الحيوي. كما نطمح أن تكون بمثابة مرجع أولي للطلبة والباحثين المهتمين بهذا التخصص، ودافعاً لهم نحو المزيد من الاستكشاف والإبداع العلمي.

المصادر

[1] Richard, L., and J. Burden. "Douglas faires, numerical analysis." (2011).

[2] Yalda, Qani. "Numerical Solution of Nonlinear Equations in Maple." International Journal for Research in Applied Sciences and Biotechnology 8.4 (2021): 34-37.