

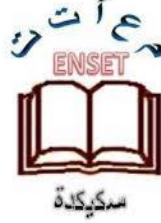
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de L'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Ecole normale supérieure d'Enseignement technologique –Skikda–

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي – سكيكدة –

Département de physique et Chimie.

قسم الفيزياء والكيمياء.



Mémoire de fin d'étude  
مذكرة التخرج

En vue de l'obtention du diplôme: professeur d'enseignement secondaire  
لنيل شهادة أستاذ تعليم ثانوي

الموضوع

دراسة مشكلة الأجسام المتعددة في إطار ميكانيك هاميلتون

من إعداد:

بركة شيماء

ابراهيم بوناب يسرى

لجنة المناقشة:

رئيسا  
مشرفا  
عضوا مناقشا  
عضوا مناقشا

معآت ت – سكيكدة  
معآت ت – سكيكدة  
معآت ت – سكيكدة  
معآت ت – سكيكدة

حساينية عمارة  
مسقالي سمير  
بوعويبة بركات  
جديد نبيل

السنة الجامعية: 2023/2024

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# شكر وعرفان

الحمد لله السميع العليم ذي العزة والفضل العظيم والصلاة والسلام على المصطفى الهادي الكريم وعلى آله وصحبه أجمعين صدقنا لقوله تعالى: " **لئن شكرتم لأزيدنكم** ". الآية 7 - سورة إبراهيم-

نشكر الله العلي القدير الذي أنار لنا درب العلم والمعرفة وأعاننا على إتمام هذا العمل .

كما نتقدم بجزيل الشكر والإمتنان إلى :

الدكتور **سمير مستالجي** لقبوله الإشراف على هذه المذكرة والذي لم يبخل علينا أبداً في نصائحه وتوجيهاته طيلة مدة هذا العمل وخلال مسيرتنا الدراسية في المدرسة فهنيئنا لنا بك وهنيئنا لك روعة العطاء.

أعضاء لجنة المناقشة الأستاذ **حساينية حمامة** بصفته رئيس لجنة المناقشة والأستاذ **بوعويضة بركات** والأستاذ **جديد نبيل** كمناقشين لموضوع مذكرتنا .

إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة أساتذتنا الأفاضل بالمدرسة العليا للأستاذة - سكيكدة - ونخص بالذكر الأستاذ **جمال فتحي**، **بوعويضة بركات** والأستاذة **سيفور الزهرة**.

كما لايفوتنا أن نشكر جميع الموظفين والطاقم الإداري وعلى رأسهم **خريف نصر الدين عزيز** و **خريف فضيلة**.

# إهداء

أتقدم أولا وأخيرا بالشكر لله عزوجل والذي بنعمته تتم الصالحات فالحمد لله حتى يرضى وله الحمد إذا رضى وله الحمد بعد الرضى.

أهدي عملي المتواضع هذا إلى :

أمي التي وهبتني الحياة ليس مرة واحدة بل مرات لاتحصى ولا تعد صديقتي العظيمة في كل خباتي قبل نجاحاتي رفيقة الدرب الحقيقية "لخشين الغالية" حفظها الله ورعاها.

أبي فلذة كبدي واستقامة ظهري و بطلي الأوحد دائما وأبدا منارة حياتي وعزتي وقوتي مصدر الأمن والأمان من شرفني بحمل اسمه "أحمد" حفظه الله ورعاها .

الكتف التي استندت عليها حين خانتني قدامي إخوتي **زاكي ، محمد إسلام ، مهدي** وأختي الصغيرة **ضحى**.

كل عائلتي الكبيرة فردا فردا وأخص بالذكر زوجة عمي **فتيحة بوزيد** وأبناء عمي **فيصل، أيمن** وبنات عمي **نبينا وهدي**.

إلى أمي الثاني ينبوع العنان خالتي **رهيدة**.

إلى بنات خالتي **إيمان أحلام روميساء**.

رفيقة الدرب حبيبة القلب أختي التي لم تلدها أمي صديقتي في السراء والضراء **يسرى إبراهيم بوناب**.

إلى من خففوا عني وطأة الأيام صديقات العمر **منصر أسماء** و**عزيرط ريان**.

إلى التي لم تنساني أبدا من دعواتها واهتمامها **برحال سلسبيل**.

إلى من يعز علي فراقهن عبير هناء دعاء صفاء مروة أحلام يسرى حطابج إيمان خضروش يسرى  
زيروبي ندى لمياء.

إلى رفيقتي وأستاذتي في القرآن بدائية ريان.

زميلاتي في الدفعة جيهان زينب بلقيس مايسة ريان ملاك مروة روفيدة روميضاء مروة عبير أماني ملاك سندس  
حسنة صبة نسو .

شكرا لتلك الظروف التي كانت حافزا للوصول إلى ما أنا عليه الآن حمدا لله دائما وأبدا.

بركة شيماء

# إهداء

( وَآخِرُ وَفَوْزُهُمْ أَنْ لِحْمَدِ رَبِّهِمْ رَبِّ الْعَالَمِينَ )

من قال أنا لما "نالما"

لم تكن الرحلة قصيرة ولا ينبغي لها أن تكون، لم يكن العلم قريبا ولا الطريق كان محفوظا بالتسهيلات، لكنني فعلتها وملتما.

## فعلتما

فعلتما لأجل رمش عين أمي وكذا أبي

كان أمسي ميعاد اليوم، وأصبح عناني اليوم للعين قرة

الحمد لله الذي يسر البدايات وأكمل النهايات وبلغنا الغايات، الحمد لله الذي ماتم جهد الآ بعونه وما ختم سعي إلا بفضل.

يتوق القلب ليخاطب من شذى بذكرهما اللسان وقال فيهما الرحمان " وَقَسَى رُحَى اللَّهِ تَعْبُدُوا لِلَّهِ يَوْمَ

وَيَوْمَ الْآخِرِينَ إِحْسَانًا"

أهدي هذا النجاج إلى من كلله الله بالصيبة والوقار إلى من أحمل اسمه بكل افتخار يامن كنت سندا لي ولازلك الحمد لله الذي مد في عمرك لأكون ثاني خريجة لك يامن حصد الأشواق عن دربي ليمهد لي طريق العلم طاب بك العمر ياسيد الرجال وطبت لي عمرا يا أبي نبض القلب أبي "مولود" حفظك الله ورمحك.

إلى القلب الحنون ونبع الحنان إلى من كانت ملجأى وسندي وممبتي خاليتي وجنة قلبي إلى من بها أخلو وعليها أرتكز حبيبة قلبي أمي "الوزيرة لعرابندي" أطال الله في عمرك يا شمعة تنير دربي.

إلى من قال فيهم عزوجل "سَنَسُدُّ قَسْدَكَ بِأَخِيكَ"

إلى تلك النجوم التي تنير طريقي دوها إلى ضلعي الثابت الذي لا يميل وأمان أيامي إلى  
سندي وملاذي الأول والأخير إلى من شدت عضدي بهم فكانو لي يذابح أرتوي منها إلى  
خيرة أيامي إخوتي "عماد، نصر الدين، ياسين".  
إلى من حبها يجري في عروقي ويلهج بذكرها فؤادي يامن ظفرت بها هدية من الله أهديك  
ما وصلت إليه من نجاح ياملأكي أختي "هيما".  
إلى من كاتفتني ونحن نشق الطريق معا نحو النجاح في مسيرتنا العلمية، إلى من ساندتني  
وخطت معي خطواتي زميلة المشوار ومؤنسة الليالي رفيقة دربي "بركة هيما".  
إلى من لا ينسأهم القلب ولن يغفل عنهم القلم، إلى الزهور التي أينعت في حديقتي وروتني  
من شذى عطرها، إلى بذات خالتي " أسماء، نور الصدي، بهري".  
تتناثر الكلمات حبا وحبا على صفائح الأوراق إلى من أمنت بقدراتي و كان كلامها بلسم جراحي  
إلى من تذكرتني بقوتي إنيته خالي زوجة أخي " أمينة (إيمان)".  
إلى رفيقات المشوار اللاتي قاسمنني لحظاته رعاهم الله ووفقهم وأخص بالذكر : **قداش ونا،  
مونية، أميرة ، ريان، أسماء، بلقيس، مايسة، مروة، ريان، جيمان، أمال، ناريمان، أروى.**  
إلى كل عائلتي فردا فردا وأخص بالذكر جدي عيسى وجدتي.  
إلى كل من دعأ لي في ظهر الغيب  
هذه ثمرة نجاحي هاأنا ذا أجنبيها واهديها لكم

دبراهيم بوناب يسرى

## قائمة الرموز

الرمز	معناه
$P$	كمية الحركة
$G$	ثابت الجذب العام
$q$	الإحداثيات المعممة
$\dot{q}$	السرعات المعممة
$w$	العمل
$T$	الطاقة الحركية
$V$	الكمون
$L$	لاغرانجيان
$H$	هاميلتونيان
$E$	الطاقة الكلية
$M$	الكتلة الكلية للأجسام
$\vec{R}_{cm}$	شعاع الموضع بالنسبة لمركز الكتلة
$v$	حجم جسم صلب
$\sigma$	الكثافة السطحية
$s$	مساحة جسم صلب
$\lambda$	طول جسم صلب
$L$	العزم الحركي
$\mathcal{M}$	عزم القوة
$v$	السرعة
$L_{cm}$	لاغرانجيان مركز الكتلة
$P_{cm}$	كمية الحركة بالنسبة لمركز الكتلة
$\omega$	السرعة الزاوية
$\mu$	الكتلة المختزلة لجسمين

الكمون الفعال	$V_{eff}$
كمون	$u$
الكتلة المختزلة لثلاث أجسام	$\acute{m}$
عزم العطالة	$I$
كتلة الشمس	$M_{\odot}$
$G(m + M_{\odot})$	$\varsigma$
الدول المولدة	$S, F$
ثوابت الحركة	$\alpha_i$
متوسط الإرتياب	$M$
الإرتياب الحقيقي أو الزاوية المقاسة	$f$
زوايا	$\phi, \theta, \chi, \Omega, l$
الطاقة الكلية لكل وحدة كتلة	$h$
نسبة كتلة الكوكب بالنسبة للشمس (إحداثية جديدة )	$\mu$
إحداثيات المرجع الدوار	$\xi, \eta$
إحداثيات المرجع الثابت	$\underline{\xi}, \underline{\eta}$

### قائمة الجداول:

جدول 1: معطيات عامة عن المجموعة الشمسية. .... 121

### قائمة الأشكال:

شكل رقم 1: يمثل مسار كوكب حول الشمس. .... 6

شكل رقم 2: يمثل نواس مزدوج. .... 11

شكل رقم 3: يبين كيف يتم استخدام التفاضل والتكامل للعثور على مسار أقصى أو أدنى قيمة لمتغير

ما [6]. .... 25

شكل رقم 4: يمثل حركة نواس بسيط. .... 26

شكل رقم 5: يمثل مركز كتلة عدة أجسام نقطية [3]. .... 32

شكل رقم 6: يمثل مركز كتلة جسم صلب [3]. .... 33

شكل رقم 7: يمثل العزم الحركي لجسم نقطي [3]. .... 34

شكل رقم 8: يمثل مركز الكتلة لجسمين  $mi$  و  $mc$  [3]. .... 36

شكل رقم 9: يمثل مركز الكتلة لنظام ثنائي الجسم [1]. .... 39

شكل رقم 10: يمثل مدارات نظام مكون من جسمين (قطع ناقص) [1]. .... 41

شكل رقم 11: يمثل المساحة الممسوحة بواسطة الشعاع  $r$  في مدة زمنية  $dt$  [1]. .... 42

شكل رقم 12: يمثل القيم الممكنة لسالب كمون الجذب والقيم الممكنة لقوة الطرد المركزي والكمون

الفعال  $V_{eff}$  [1]. .... 43

شكل رقم 13: يمثل مسار جسم حر [1]. .... 48

شكل رقم 14: يمثل مسارات عشوائية لثلاثة أجسام. .... 49

شكل رقم 15: يمثل مسارات ثلاث نجوم. .... 51

شكل رقم 16: يمثل مذنب هالي أشهر المذنبات الدورية تم تصويره 13ماي 1910 الجسم المستدير

كوكب الزهرة الصورة من مرصد لويل  $Lowell$  [6]. .... 52

- شكل رقم 17: يمثل نظام جاكوبي وهو نظام من ثلاثة أجسام تدور حول مركز كتلة مشترك، يتميز النظام بأن الجسمين يشكلان نظاما ثنائيا بينما الجسم الثالث أكثر ابتعادا [6]. 53
- شكل رقم 18: يمثل الكميات التي تظهر في معادلة هاملتون-جاكوبي ثلاثية الأبعاد [6]. 66
- شكل رقم 19: يمثل الأنظمة الداخلية  $i$  والخارجية  $e$  [6]. 70
- شكل رقم 20: يمثل مرجع الإحداثيات الثابتة  $\xi\eta$  والإحداثيات الدورانية  $\xi\eta$  لثلاثة أجسام [6]. 73
- شكل رقم 21: يمثل مخطط للإمكانات الفعالة لنظام الجاذبية بين الشمس والأرض في المرجع الدوراني نقاط لاغرانج  $L$  الخمسة (الشكل أنشأ من طرف وكالة ناسا  $NASA$ ) [1]. 77
- شكل رقم 22: يمثل منحني إحداثيات نقاط لاغرانج  $L1$ ،  $L2$  و  $L3$  لمختلف قيم  $\mu$  [6]. 79
- شكل رقم 23: طريقة تشغيل المحرر Jupyter lab. 89
- شكل رقم 24: الواجهة الرسمية للمحرر Jupyter lab. 89
- شكل رقم 25: يمثل رسم بياني لحل رقمي لمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ومشتقاتها الأولى... 94
- شكل رقم 26: التمثيل البياني ثلاثي البعد. 97
- شكل رقم 27: التمثيل البياني ثنائي البعد. 97
- شكل رقم 28: صورة المخرج. 99
- شكل رقم 29: مخرج محاكاة نظام جسمين لهما نفس الكتلة. 101
- شكل رقم 30: مسارات نظام جسمين مختلفين في الكتلة. 101
- شكل رقم 31: مثال جسم مركزي وجسم يدور حوله. 102
- شكل رقم 32: الحالة الأولى لنظام ثلاثي الاجسام. 104
- شكل رقم 33: المثال الثاني لنظام ثلاثي الاجسام. 104
- شكل رقم 34: العزم الزاوي للأرض. 114
- شكل رقم 35: مدار الأرض والمشتري في الحالة الطبيعية. 114
- شكل رقم 36: الطاقة الكلية للأرض المحاكاة الأولى. 115
- شكل رقم 37: اضطراب العزم الزاوي للأرض خلال 20 سنة. 116
- شكل رقم 38: تغيير مدار الأرض خلال 20 سنة. 117
- شكل رقم 39: الطاقة الكلية للمحاكات الثانية. 117
- شكل رقم 40: العزم الزاوي الحالة 3. 119

شكل رقم 41: مدار الأرض والمشتري المحاكاة 3. .... 119

شكل رقم 42: الطاقة الكلية الحالة 3. .... 120

## فهرس الموضوعات:

شكر وعران

إهداء

قائمة الجداول

قائمة الأشكال

مقدمة عامة

الفصل الأول: نبذة عن الميكانيك الكلاسيكي

1.1	المقدمة	1
2.1	لمحة تاريخية	1
3.1	تعريف علم الميكانيك	2
4.1	الفضاء الإقليدي والميكانيك الكلاسيكي	2
5.1	أقسام الميكانيك الكلاسيكي	2
1.5.1	ميكانيك نيوتن (1642-1727م)	2
2.5.1	قوانين كبلر	5
3.5.1	الميكانيك التحليلي	6
1.3.5.1	معادلات لاغرانج	14
2.3.5.1	معادلات هاميلتون	19
3.3.5.1	التحويلات القانونية	23
4.5.1	مبدأ هاميلتون للتأثير الأقل (أو مبدأ الفعل الأصغري)	24
29	خاتمة	

الفصل الثاني : مشكلة الأجسام المتعددة.

31	1.2 مقدمة
31	2.2 مركز كتلة عدة أجسام
32	3.2 مركز كتلة جسم صلب
34	4.2 العزم الحركي لعدة أجسام ومبدأ حفظ عزم الحركة
35	5.2 الطاقة الحركية لعدة أجسام ومبدأ حفظ الطاقة
37	6.2 القوة المركزية ثنائية الجسم المحافظة
39	7.2 مسألة الجسمين
41	1.7.2 العزم الحركي $L$
43	2.7.2 معادلات الحركة تحت تأثير قوة مركزية
44	3.7.2 معادلة المدار التفاضلي تحت تأثير قوة مركزية
45	4.7.2 معادلات هاميلتون
46	1.4.7.2 الميزات العامة لحلول معادلات الحركة
49	8.2 مشكلة الأجسام الثلاثة
50	1-8-2 مشكلة الأجسام الثلاثة في الفيزياء الفلكية:
52	2.8.2 معادلات الحركة لثلاثة أجسام
54	3.8.2 ثوابت الحركة في مشكلة الأجسام الثلاثة
55	4.8.2 عزم العطالة لنظام ثلاثي الجسم
70	5.8.2 الصيغة الهاميلتونية لمشكلة الأجسام الثلاثة
72	1.5.8.2 مشكلة الأجسام الثلاثة المنحنية المستوية المقيدة
73	2.5.8.2 معادلات الحركة
77	6.8.2 نقاط لاغرانج
80	9.2 الصيغة الهاميلتونية لعدة أجسام تتفاعل فيما بينها

الخاتمة..... 82

الفصل الثالث : بعض الأمثلة عن المحاكاة العددية .

1.3 مقدمة ..... 84

2.3 لغة برمجية Python ..... 84

1.2.3 مميزات لغة Python ..... 85

2.2.3 عيوب لغة Python ..... 85

3.2.3 أساسيات لغة Python ..... 85

4.2.3 إستخدامات لغة Python ..... 86

3.3 كيفية تشغيل برنامج مكتوب بلغة Python ..... 88

4.3 بعض التطبيقات المهمة في الميكانيك ..... 89

خاتمة عامة..... 124

قائمة المراجع

الملخص

ملاحق

# مقدمة عامة

## مقدمة عامة

إنَّ علم الميكانيك من أهم العلوم تطورا حيث كان تاريخ هذا العلم حافلا بالإكتشافات فطالما جذب سقوط الأجسام على سطح الأرض وحركة الكواكب والأجرام السماوية إنتباه العلماء لمعرفة القوى الخفية وراء ذلك وتفسيرها.

فالحضارات القديمة كالحضارة المصرية مثلا كان لها عدة نظريات لفهم مبدأ حركة الشمس، القمر و النجوم ففي القرن الثامن عشر قبل الميلاد استطاعوا التنبؤ بوقت الخسوف ولكن هذه النظريات كانت لا تخلو من الأساطير، أما أول من توصل لاكتشافات مبنية على حقائق علمية هم الإغريق فقد كان علماءهم يرفضون أي تفسير بعيد عن هذه الحقائق، ورغم ذلك وُجدت أنذاك العديد من المكتشفات والأفكار المبنية على أسس خاطئة فيما يتعلق بمبادئ الحركة إذ بُنيت على أسس العالم "أرسطو".

نتطرق في هذه المذكرة إلى أهم المشاكل التي واجهت العلماء عند دراسة نظام مكون من عدة أجسام في إطار ميكانيك هاميلتون، وكيفية التعامل مع المعادلات المتحصل عليها حيث الهاميلتونيان يتكون من جزئين جزء قابل للحل وجزء غير قابل للحل تحليليا والإعتماد على خوارزميات عددية متطورة باستخدام لغة بايثون لإيجاد حلول تقريبية لهذه الأنظمة .

في أي نظرية علمية وخصوصا في علم الميكانيك يجب أن نبدأ بمفاهيم أولية معينة، وهذا ماسنراه في الفصل الأول حيث تطرقنا لمختلف القوانين التي تسمح لنا بدراسة الحركة الفعلية للأجسام المادية، وأهم أهداف هذه القوانين التنبؤ بكل الطرق الممكنة التي تتحرك فيها منظومة مادية وكذلك نوع الحركة التي ستحدث في ظروف معينة بالإعتماد على قوانين نيوتن، ثم نقوم باتباع طرق متقدمة لتوضيح الحركة باستخدام معادلات "لاغرانج وهاميلتون" وهي على كل حال ليست نظريات مختلفة وإنما يمكن اشتقاقها من قوانين نيوتن.

في الفصل الثاني قمنا بمعالجة أهم المشاكل الفلكية التي شغلت العلماء حيث ننطلق من مسألة الجسمين التي تم حلها من طرف نيوتن بصياغته لقانون الجذب العام، ثم تطرقنا لمشكلة الأجسام الثلاثة وتعتبر مسألة ضرورية لفهم مجموعة متنوعة من العمليات الفلكية وحتى لفهم فئة واسعة من المشاكل في الميكانيك ولهذا السبب جذبت إهتمام علماء الفيزياء والرياضيات لأكثر من ثلاث مائة عام، ومع ذلك لم

يتمكنوا من إيجاد حل رياضي عام، فكان من السهل تحديد المشكلة لكن الصعوبة تكمن في حلها أما السؤال المطروح يحمل بين طياته كيفية التعامل مع نظام مكون من عدة أجسام.

أتاح التطور التكنولوجي التوصل إلى العديد من الحلول لمختلف المشاكل التي عجز الإنسان عن حلها وهنا يأتي دور الآلة في التدخل، إذ أنّ أجهزة الكمبيوتر تعددت وتنوعت برامجها والأهم من ذلك لغات البرمجة وهذا ما سنسلط عليه الضوء في الفصل الثالث، حيث نتبع طرق حديثة ألا وهي المحاكاة الحاسوبية لإجراء عمليات حسابية عديدة لأنظمة فلكية من أجل التنبؤ بحركة هذه الأخيرة ومداراتها العشوائية.

---

الفصل الأول:

نبذة عن الميكانيك

الكلاسيكي.

---

الفصل الأول: نبذة عن الميكانيك الكلاسيكي .**1.1 المقدمة**

سنعرض في هذا الفصل التطور التاريخي للميكانيك الكلاسيكي الذي يعتبر واحد من أقدم وأهم فروع الفيزياء وقد لعب دورا أساسيا في التطور العلمي والتكنولوجي، حيث يُستخدم الميكانيك الكلاسيكي لدراسة مجموعة واسعة من الظواهر الفيزيائية بما في ذلك حركة الكواكب، الأجرام السماوية الأخرى و حركة الأجسام على سطح الأرض.

هناك طريقتان تستخدمان في الميكانيك الكلاسيكي الأول هو المنهج الشعاعي لنيوتن الذي يعتمد على المقادير الشعاعية مثل كمية الحركة، القوة والتسارع والثاني هو المنهج التحليلي لـ Euler1760، Lagrange1776، Hamilton1834 و Jacobi1843 الذي يعتمد على مفهوم الفعل الأصغري وحساب التفاضل والتكامل.

على الرغم من أن الميكانيك الكلاسيكي هو أقدم فروع الفيزياء إلا أنه لاتزال هناك فرص بحثية جديدة في هذا المجال [1].

**2.1 لمحة تاريخية**

تعود أصول الميكانيك الكلاسيكي إلى اليونان القديمة، حيث حاول الفلاسفة مثل أرخميدس (287-212 ق.م) وأرسطو (384-322 ق.م) تفسير حركة الأجسام ومع ذلك كانت النظريات الأرسطية غير دقيقة ولم يتم قبولها بشكل كبير من قبل العلماء بسبب إيمانه على الحدس في تفسير الظواهر الفيزيائية.

في القرن السابع عشر تم إحراز تقدم كبير في الميكانيك الكلاسيكي من قبل علماء مثل كبلر (1571-1636)، غاليلي (1564-1642) ونيوتن (1643-1727). كان نيوتن هو الأكثر شهرة في تطوير قوانين الحركة الثلاثة والتي تشكل أساس الميكانيك الكلاسيكي.

بصرف النظر عن نيوتن قدم العديد من العلماء الآخرين مساهمات مهمة في تطوير الميكانيك الكلاسيكي على سبيل المثال طور كبلر (1571-1636م) القوانين التي تتحكم في حركة الكواكب كما أجرى غاليلي العديد من التجارب التي سلطت الضوء على طبيعة الحركة [1].

**3.1 تعريف علم الميكانيك**

الميكانيك بالمفهوم العام هو العلم الذي يقوم بدراسة حركة الأجسام المادية و ماينتج عنها من عمل وطاقة عن طريق إستخدام مجموعة من القوانين الخاصة به ودراسة التأثير المتبادل بين الأجسام. ويمكن تقسيم علم الميكانيك إلى قسمين لهما خصائص مختلفة الميكانيك الكلاسيكي الذي نتعامل فيه مع الظواهر العيانية و المتغيرات ذات الطبيعة الحتمية وميكانيك الكم الذي نتعامل فيه مع الظواهر على المستوى دون الذري والمتغيرات المنفصلة والإحتمالية بطبيعتها [2].

الميكانيك الكلاسيكي هو فرع من فروع الفيزياء يدرس حركة الأجسام المادية ويعتمد على مجموعة من المبادئ الفيزيائية التي تم تطويرها على مدى قرون من قبل العلماء حيث يستخدم في مجموعة واسعة من التطبيقات بما في ذلك الهندسة، الفيزياء والعلوم الفلكية [1].

**1.4 الفضاء الإقليدي والميكانيك الكلاسيكي**

نعبر عن كل الظواهر الفيزيائية في فضاء فيزيائي يتميز بالتجانس في كل نقاطه و إتجاهاته يمثل هذا الفضاء بفضاء إقليدي نقطي نعرف عليه فضاء شعاعي حيث يعتبر الموضع المتغير الأساسي لهذا الفضاء ويدخل الزمن كوسيط في معادلات الحركة حيث تكون هذه الأخيرة من الدرجة الثانية ولحلها (المعادلات الواصفة للحركة ) يكون بإعطاء شرطين إبتدائيين إما على الموضع الإبتدائي والنهائي أو على الموضع الإبتدائي والسرعة الإبتدائية. قد نعتبر السرعات أيضا كمتغيرات أساسية مستقلة عن الموضع وهو مايسمى بفضاء الطور (الميكانيك التحليلي) حيث يستبدل الشرطين الإبتدائيين بشرط واحد على الثنائية (موضع، كمية حركة) [2].

**1.5 أقسام الميكانيك الكلاسيكي****1.5.1 ميكانيك نيوتن (1642-1727م)**

تعتمد على أعمال نيوتن على وجه الخصوص الذي وضع فيه أسس هذا العلم وتنقسم إلى:

- **الحركيات:** تهتم أساسا بدراسة المسار، السرعة والتسارع حيث ندرس حركة الأجسام دون الإهتمام بأسبابها بمعنى آخر إيجاد المعادلات التي تصف مسار، سرعة و تسارع المتحرك بدلالة الزمن [3].
- **علم السكون أو الستاتيكا:** يدرس الأنظمة الميكانيكية التي تكون فيها الأجسام في حالة سكون وتوازن القوى (سرعتها معدومة) [3].
- **التحريك:** يدرس حركة الأجسام ومسارها، سرعتها وتسارعها مع الأخذ بعين الإعتبار أسبابها، ويعمل على إنشاء معادلات (السرعة، التسارع، المسار) بدلالة القوى المطبقة على هذه الأجسام، يجمع علم التحريك علم السكون الذي يدرس توازن الجسم الساكن وعلم الحركيات [3].

حدد نيوتن مقدار شعاعي يسمى بكمية الحركة  $\vec{P}$  وهو حاصل ضرب الكتلة والسرعة:

$$[1] \quad \vec{P} = m \cdot \dot{\vec{r}} \quad (1 - 1)$$

حيث  $m$  كتلة عددية وهي مقدار ممانعة الجسم لأي تغيير في حالته الحركية الإنتقالية وشعاع السرعة وشعاع كمية الحركة مرتبطان خطيا وقد تم صياغة قوانين نيوتن الثلاثة بدلالة كمية الحركة [3].

### قوانين نيوتن

#### ➤ مبدأ العطالة :

في مرجع عطالي يكون مركز الكتلة أو العطالة لجملة مادية معزولة ساكن أو يتحرك حركة مستقيمة منتظمة.

حيث يصاغ القانون الأول لنيوتن بأسلوب حديث على النحو التالي :

$$[1] \quad \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad (2 - 1)$$

في مرجع (غاليلي) عطالي يكون شعاع السرعة لمركز عطالة الجسم ثابتا إذا وفقط إذا كان مجموع أشعة القوى الخارجية المطبقة على الجملة شعاع معدوم [3].

$$[1] \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad (3 - 1)$$

### • المراجع (الغالبية) العطالية

هو المرجع الذي يتحقق فيه مبدأ العطالية، أي أن كل جسم صلب غير قابل للتشوه لا تؤثر فيه أي قوة خارجية تكون سرعته ثابتة أو ساكن يمكن إعتبره كمرجع عطالي (غاليلي) وهذا يعني أن كل المراجع العطالية متماثلة لكون السكون والحركة المستقيمة المنتظمة شيئ واحد ولهذا فإن المراجع العطالية تضمن حفظ المعادلات الفيزيائية على شكلها لكون الظواهر الفيزيائية هي نفسها في هذه المراجع.

#### ➤ القانون الثاني لنيوتن

ينص القانون الثاني لنيوتن أن التغير في كمية حركة جسم ما تتناسب مع القوة التي تؤثر عليه ويكون هذا التأثير دوماً في اتجاه القوة المؤثرة، فقد وجد نيوتن أنه عندما تتغير حالة الجسم عن السكون أو الحركة المنتظمة تحدث عجلة تسارع  $\vec{a}$  يكون اتجاهها هو نفس اتجاه القوة المؤثرة [3].

$$[1] \quad \sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a} \quad (4 - 1)$$

القوة المطبقة على جسم هي المشتقة الكلية لكمية الحركة بالنسبة للزمن :

$$[1] \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (5 - 1)$$

#### ➤ القانون الثالث لنيوتن

ينص قانون نيوتن الثالث على أنه عندما يتفاعل جسمان فإنهما يطبقان قوى على بعضهما البعض متساوية في الشدة ومتعاكسة في الإتجاه ولهما نفس الحامل ويعرف القانون أيضاً باسم مبدأ الفعلين المتبادلين [3].

$$[1] \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (6 - 1)$$

إذا كانت القوى المؤثرة على جسمين هي الفعل ورد الفعل المتبادل يتم تبسيط المعادلة السابقة إلى :

$$[1] \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0} \quad (7 - 1)$$

وهذا يعني أن كمية الحركة لجسمين يؤثران على بعضهما بقوتي الفعل ورد الفعل ثابتة دوما وهذه النتيجة هي حالة خاصة من مبدأ حفظ كمية الحركة الذي ينص على أن كمية الحركة لمنظومة معزولة لا تتغير مع الزمن [3].

### ➤ قانون الجذب العام

وضع نيوتن القانون العام للجاذبية وينص على أنه إذا كانت  $m_2, m_1$  هما كتلتا جسمين تفصلهما مسافة  $r$  فإن كلا منهما يجذب نحو الآخر بقوة  $\vec{F}$  مقدارها [4]:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (8 - 1)$$

حيث  $G$  مقدار ثابت يسمى ثابت الجذب العام

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{Kg}^2$$

### حدود ميكانيك نيوتن

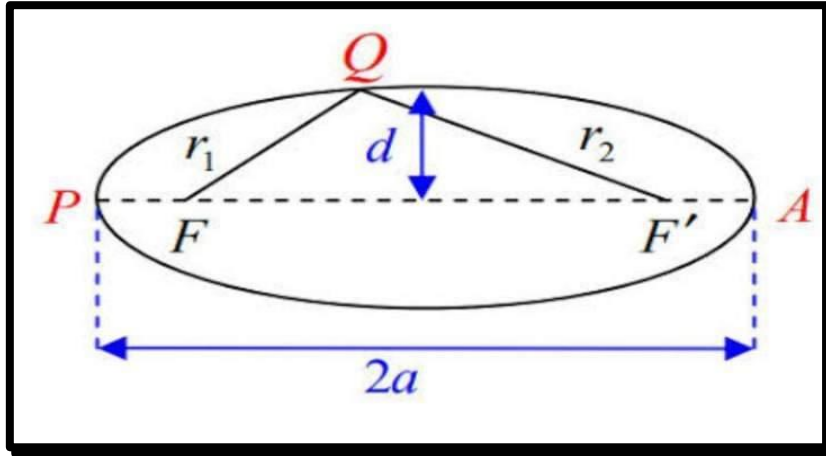
أُكتشف في أوائل القرن العشرين أن النتائج النظرية المختلفة التي تُستنتج من قوانين نيوتن لا تتفق مع بعض النتائج المستنبطة من النظريات الكهرومغناطيسية والظواهر الذرية والتي يمكن إثبات صحتها عمليا وقد أدت هذه التناقضات إلى ظهور الميكانيك النسبي لأينشتاين "*Theory of relativity*" التي غيرت مفاهيم الزمن والفضاء، كما أدت إلى ظهور ميكانيك الكم "*Quantum mechanics*" والميكانيك الإحصائي "*Statistical mechanics*" والإلكتروديناميك "*electrodynamics*". أما بالنسبة للأجسام التي تتحرك بسرعات أقل بكثير من سرعة الضوء والتي لها أبعاد كبيرة إذا ما قُورنت بأبعاد الذرات والجزيئات فإن ميكانيك نيوتن تظل صالحة، لهذا السبب فإنها لا تزال محتفظة بمكانة هامة في العلوم والهندسة [5].

### 2.5.1 قوانين كبلر

أُشتقت قوانين كبلر التي توضّح حركة الكواكب في النظام الشمسي من قبل عالم الفلك لألماني "يوهانس كيبيلر" الذي تمكّن من تحليل ملاحظات عالم الفلك الدنماركي "تيخو براهي" فأعلن عن أول قانونين له في عام 1609م وقانون آخر ثالث في عام 1618م [1].

### ➤ قانون كبلر الأول (قانون المسارات الإهليلجية)

وينصّ على أنّ كلّ كوكب من كواكب النظام الشمسي يتحرك في مدارات إهليلجية بحيث تقع الشمس في إحدى بؤرتيه يعني أنّ المسافة بين الكوكب والشمس تتغير باستمرار مع دوران الكوكب.



شكل رقم 1: يمثل مسار كوكب حول الشمس.

ويستخدم قانون كبلر الأول لحساب نصف المحور الأكبر وهو عبارة عن المحور الأطول وحساب نصف المحور الأصغر وهو المحور الأقصى.

ومن الجدير بالذكر أنه لا تخضع جميع الأجسام مثل المذنبات لقانون كبلر فلا تدور المذنبات حول الشمس في مدار إهليلجي ثابت مثل الكواكب الأخرى.

### ➤ قانون كبلر الثاني (قانون المساحات)

ينص على أن الخط الواصل بين الكوكب والشمس يقطع مساحات متساوية خلال أزمنة متساوية أي أنه لا تتحرك تلك الكواكب بسرعة ثابتة على طول مداراتها بل تتباين السرعات اعتمادا على البعد عن الشمس، فيكون الدوران أو الحركة سريعة كلما كان قريبا من الشمس ويبدأ في التباطؤ كلما زاد بعده عنها (نقطة الحضيض والإوج).

### ➤ قانون كبلر الثالث (قانون الأدوار)

يتناسب مربع الدور لأي كوكب (أي مدة دورانه حول الشمس دورة كاملة) مع مكعب بعد هذا الأخير عن الشمس أي أن النسبة ما بين مكعب المسافة ومربع الزمن دائما تعطي مقدارا ثابتا.

## 3.5.1 الميكانيك التحليلي

ليس هناك تفسير واحد متفق عليه لمصطلح "الميكانيك التحليلي" في مؤلفات الميكانيك فبعض المؤلفون يطابقون الميكانيك التحليلي بالميكانيك النظري، ويرى البعض الآخر بأنه يختص باستنتاج

طرق رياضية عامة لدراسة حركة المجموعة الديناميكية باستخدام طرق تعتمد على مايسمى بمعادلات "لاغرانج وهاميلتون" بدون التطبيق المباشر لقوانين نيوتن للحركة بالرغم من أن هذه المعادلات هي في الحقيقة تطويرا لهذه القوانين. ويستخدم الميكانيك التحليلي للسهولة النسبية لتطبيقه في أي نوع من الإحداثيات، وتتميز طريقة عرض الميكانيك التحليلي بأنه يركز بصورة رئيسية على مبادئ عامة (تفاضلية وتكاملية) ثم تنتج المعدلات التفاضلية الأساسية للحركة من هذه المبادئ بطريقة تحليلية [5].

دراسة الميكانيك التحليلي تعتمد على عدة مفاهيم منها :

### ➤ المجموعة (الأنظمة) الديناميكية

هو مفهوم يطلق على الأجسام المتحركة في الفضاء تحت تأثير قوة خارجية أو داخلية وقد توجد قوى ناتجة عن وجود قيود مثل حركة جسم على سطح معلوم مثل قوى ردود الأفعال حيث أن المجموعة الديناميكية تتخذ مواضع مختلفة عند تغير الزمن تحت شروط ابتدائية ويُعين موضع المجموعة الديناميكية عند أي لحظة بعدد المتغيرات أو الإحداثيات مثل  $(x, y, z)$  أو  $(r, \theta, \varphi)$  أو  $(\rho, \varphi, z)$  وإذا كان هناك  $N$  جسم فإن عدد المتغيرات هي  $3N$  [5].

### ➤ أنواع الأنظمة الديناميكية

- الأنظمة الهولونومية: أنظمة ديناميكية مفروض عليها قيود هندسية أو تفاضلية يمكن تكاملها أو الإثنتين معا وتكون الإحداثيات المعممة مستقلة والأنظمة المفروض عليها قيود هندسية فقط تكون هولونومية [5].
- الأنظمة غير الهولونومية : أنظمة ديناميكية مفروض عليها قيود لايمكن تكاملها ويمكن التعبير عن القيود غير الهولونومية في شكل معادلات تربط بين المتغيرات الديناميكية للنظام [5].
- الأنظمة الزمنية وغير الزمنية: الأنظمة الزمنية هي الأنظمة التي تتعلق بالزمن مثل نظام التحكم في تغير درجة الحرارة والأنظمة غير الزمنية لاتتعلق بالزمن مثل نظام الحسابات الرياضية [5].
- الأنظمة تامة القيد وغير تامة القيد: يقال أن الأنظمة تامة القيد عندما يمكن التعبير عن جميع القيود المفروضة على النظام بمعادلات من الشكل  $f(q_1, q_2, \dots, q_3, t) = 0$  وإلا يقال عنها أنها غير تامة القيد [5].

## ➤ القيود وأنواعها

المجموعة الديناميكية قد تكون حرة أي بدون قيود مثل حركة جسم مقذوف من نقطة على سطح الأرض تحت تأثير الجاذبية، وهناك مجموعة ديناميكية مقيدة حيث تُوجد قيود معينة تؤدي إلى أن يكون هناك شروط على مواضع وسرعة أجسام المجموعة. وتُعرف القيود بأنها العلاقات التي تربط بين المتغيرات في النظام الديناميكي كما تلعب دورا مهما في تحديد حركة النظام حيث تُحدد عدد المتغيرات وبالتالي تُحدد عدد التكاملات الثابتة التي يمكن إيجادها [5]. يمكن التعبير عن الشروط أو القيود بمعادلة من الشكل  $f(\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha, t) = 0$  وتسمى معادلة القيد حيث:

$$\alpha = 1, 2, \dots, N$$

ومعنى ذلك أن مواضع وسرعات الأجسام لاتأخذ إلا قيما معينة تحقق المعادلة السابقة، ومن ثم نصنف القيود إلى:

- **القيود التفاضلية أو الكينماتيكية:** هي قيود تفرض على موضع أو سرعة أو تسارع النظام في وقت معين تستخدم لوصف مجموعة واسعة من الأنظمة الديناميكية تكون معادلتها من الشكل:

$$f(\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha, t) = 0 \quad (9 - 1)$$

ظهور السرعات  $\dot{\vec{r}}_\alpha$  في معادلة القيد بشكل صريح يسمى بالقيود الكينماتيكية [5].

- **القيود الهندسية:** تعرف القيود الهندسية بأنها العلاقات التي تربط بين إحداثيات الأجسام في الفضاء تستخدم هذه القيود لوصف التفاعلات بين الأجسام معادلتها من الشكل:

$$f(\vec{r}_\alpha, t) = 0 \quad (10 - 1)$$

وهنا في معادلة القيد لاتظهر السرعة وتسمى بالمجموعة الهولونومية [5].

- **القيود المستقر زمنيا:** هو قيد لايتضمن الزمن في معادلاته بمعنى آخر فإن قيمة القيد لاتتغير بتغير الزمن وسميت المجموعة الديناميكية بالمجموعة الإسكليرونومية *Scleronomic* [5].

- **القيود غير المستقر زمنيا:** هو قيد يتضمن الزمن في معادلاته بمعنى آخر قيمة القيد تتغير مع الزمن وسميت المجموعة الديناميكية بالمجموعة الريونومية *Rheonomic* [5].

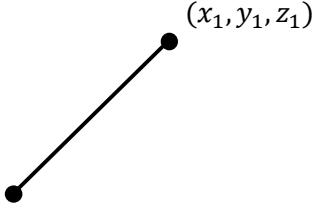
### مثال

جسم  $A$  وجسم  $B$  متصلان بساق ذات كتلة مهملة طولها ثابت  $a$

تكون معادلة القيد من الشكل [5]:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = a^2$$

وهي مجموعة هولونومية سكليرونومية



أما إذا كانت طول الساق تتغير مع الزمن بحيث تكون  $b \cos \omega t$

فإن معادلة القيد تصبح:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = b^2 \cos^2 \omega t$$

وهي مجموعة هولونومية ريونومية .

### ➤ الإحداثيات المعممة

هي الكميات التي تحدد المكان (مكان الجسم) عند كل لحظة تحديدا تاما ليس لها شكل محدد تحدد على حسب المسألة، رأينا أن موضع الجسم في الفضاء يمكن تعيينه بثلاث إحداثيات قد تكون هذه الإحداثيات ديكارتية (كارتيذية) أو كروية أو أسطوانية، ونحتاج إلى إحداثيتين فقط إذا كان الجسم مقيد الحركة في مستو أو سطح ثابت، بينما إذا كان الجسم يتحرك على خط مستقيم أو منحنى ثابت فعندئذ يكفي إحداثة واحدة.

في حالة منظومة ديناميكية مكونة من  $N$  من الأجسام نحتاج إلى  $3N$  من الإحداثيات لتعيين مواضع هذه الأجسام في وقت واحد بصورة كاملة، ومعنى هذا أن موضع المجموعة الديناميكية يتحدد إذا علم  $3N$  من الكميات القياسية المستقلة والتي تسمى إحداثيات معمة ونرمز لهذه الإحداثيات بالرموز:

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

### معادلات التحويل بين الإحداثيات

إذا كان شعاع موضع الجسم رقم  $i$  في مجموعة ديناميكية مكونة من  $N$  نقطة مادية فيمكن

كتابة شعاع الموضع  $\vec{r}_i$  بالنسبة لمجموعة المحاور الكارتيزية  $xyz$  كالتالي [5]:

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \quad (11 - 1)$$

حيث:  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  أشعة الوحدة في إتجاه المحاور الثلاثة المتعامدة، يمكن كتابة علاقات التحويل بين

الإحداثيات الكارتيزية  $x_i, y_i, z_i$  الإحداثيات المعممة  $q_1, q_2, \dots, q_n$  على النحو التالي:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \right\} \quad (12 - 1)$$

حيث:  $t$  يمثل الزمن ويمكن كتابة العلاقة (12 - 1) في صيغة شعاعية على الشكل :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (13 - 1)$$

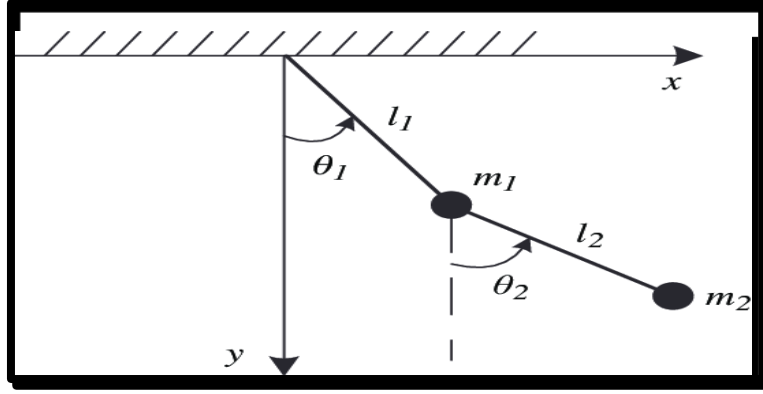
أو أكثر إختصارا على الشكل :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_\alpha, t) \quad (14 - 1)$$

حيث :  $i = 1, 2, \dots, N$        $\alpha = 1, 2, \dots, n$

### مثال

إيجاد الإحداثيات المعممة التي تحدد حركة كتلتين في نواس مزدوج مقيد الحركة في مستوى الإحداثيات المعممة هما:  $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$  حيث واضح من الشكل أن  $\theta_1$  و  $\theta_2$  يحددان موضعي الكتلتين  $m_1, m_2$  على الترتيب [5].



شكل رقم 2 : يمثل نواس مزدوج

$$x_1 = l_1 \cos \theta_1$$

$$y_1 = l_1 \sin \theta_1$$

$$x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2$$

$$y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

### ➤ السرعات المعممة

السرعات المعممة هي المعادلات الزمنية للإحداثيات المعممة وعددها يساوي عدد الإحداثيات المعممة و تساوي عدد درجات الحرية أي أن [5]:

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

$$q_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt} \quad (15 - 1)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n \quad \text{حيث:}$$

### ➤ درجات الحرية للمجموعة الديناميكية

هي الإزاحات الافتراضية المستقلة والتي تتفق مع القيود المفروضة أوهي عدد الإحداثيات المعممة (إحداثيات مستقلة) اللازمة لتعيين موضع الجسم [5].

فمثلا:

- حركة جسم في خط مستقيم له درجة حرية واحدة  $q_1 = x$  لتحديد موضعه ويلاحظ إذا وجدت قيود فإنها تقلل عدد درجات الحرية.

- حركة جسم في مستوي له درجتان حرية  $q_1 = x, q_2 = y$  أو  $q_1 = r, q_2 = \theta$  وفي الفراغ له ثلاث درجات حرية وهكذا فمنظومة تتكون من  $N$  جسم يكون لها  $3N$  درجات حرية .

### ➤ القوى المعممة

إذا انتقل جسم مسافة عنصرية  $\partial \vec{r}$  تحت تأثير قوة  $\vec{F}$  فإن العمل  $\partial w$  المبذول من هذه القوة عندئذ يكون [5]:

$$\partial w = \vec{F} \partial \vec{r} = F_x \partial x + F_y \partial y + F_z \partial z \quad (16 - 1)$$

ويمكن أن يكتب في الصورة المختصرة التالية:

$$\partial w = \sum_i F_i \partial r_i \quad (17 - 1)$$

والعلاقة السابقة تصح كذلك لمجموعة مكونة من عدد كبير من الأجسام فلجسم واحد تأخذ  $i$  القيم من 1 إلى 3 ومن أجل  $N$  جسم تأخذ  $i$  القيم من 1 إلى  $3N$ .

لنعبر عن  $\partial r_i$  بدلالة الإحداثيات المعممة فنجد أن :

$$\partial w = \sum_i^{3N} (F_i \sum_{\alpha}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_{\alpha}} \partial q_{\alpha}) \quad (18 - 1)$$

والتي يمكن كتابتها من الشكل:

$$\partial w = \sum_{\alpha}^n (\sum_i^{3N} F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_{\alpha}}) \partial q_{\alpha} \quad (19 - 1)$$

والتي يمكن وضعها من الشكل:

$$\partial w = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \partial q_{\alpha} \quad (20 - 1)$$

حيث:

$$Q_{\alpha} = \sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_{\alpha}} \quad (21 - 1)$$

الكمية  $Q_{\alpha}$  المعرفة بالمعادلة (21 - 1) تسمى بالقوة المعممة المرافقة للإحداثية المعممة  $q_{\alpha}$  [5].

### ➤ الطاقة الحركية $T$ وكمية الحركة $P$

بفرض أن كتلة الجسم رقم  $i$  هي  $m_i$  والتي تؤثر عليه قوة  $\vec{F}_i$  فإذا كان شعاع موضع الجسم عند أي لحظة زمنية  $t$  هي [5]:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_\alpha, t) \quad (22 - 1)$$

وحيث أن الطاقة الحركية  $T$  تعطى من  $T = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$  (للجسم  $i$ ) فإن طاقة الحركة للمنظومة المكونة من  $N$  جسم تكون كالتالي [5]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (23 - 1)$$

مما سبق:

$$\vec{r}_i = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (24 - 1)$$

وهذه المعادلة تعطي سرعة الجسم  $i$  عند اللحظة  $t$ :

$$2.T = m_i (\dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i) \quad (25 - 1)$$

$$2T = m \left[ \sum_\alpha \sum_\beta \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \right) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + 2 \sum_\alpha \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_\alpha + \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (26 - 1)$$

وإذا كانت  $\vec{r}_i$  لا تتعلق بالزمن فإن:

$$2T = \sum \sum A_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad (27 - 1)$$

حيث:

$$A_{\alpha\beta} = m_i \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \right) \quad (28 - 1)$$

وكمية الحركة تعطى بالعلاقة:

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (29 - 1)$$

وتسمى بكمية الحركة المعممة المرافقة للإحداثية المعممة  $q_\alpha$  والتي يمكن إيجادها من عبارة الطاقة الحركية:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (30 - 1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (31 - 1)$$

### ➤ تقسيم المجموعات الديناميكية

يمكن تقسيم المجموعات الديناميكية على أنها مجموعات محافظة أو غير محافظة إذا كانت جميع القوى المؤثرة على مجموعة أجسام يمكن اشتقاقها من كمون فإن المجموعة تسمى مجموعة محافظة وهذا يعبر رياضيا كالتالي:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad (32 - 1)$$

وفيما عدا ذلك تكون المجموعة غير محافظة [5].

وبأخذ دوران الطرفين في المعادلة (32 - 1) نجد أن :

$$\text{curl} \vec{F} = -\text{curl} \overrightarrow{\text{grad}} V \rightarrow \text{curl} \vec{F} = \vec{0} \quad (33 - 1)$$

أي أن إذا كانت المجموعة محافظة فيكون دوران القوة في هذه الحالة يساوي الصفر أما إذا كان دوران القوة لايساوي الصفر فإن المجموعة تكون غير محافظة وبالتالي فالمجموعة المحافظة (النظام المحافظ هو نظام معزول لايتبادل طاقة مع المحيط حيث لايتأثر بالقوة الخارجية ولا من قوى مشتتة كالاحتكاك) وهناك تعريف آخر للمجموعة المحافظة هو : "مجموع طاقتي الحركة وطاقة الكمون لأي نظام محافظ يساوي مقدار ثابت لا يتعلق بالزمن [5]".

### 1.3.5.1 معادلات لاغرانج

معادلات لاغرانج هي مجموعة من المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية التي يمكن إستخدامها لوصف حركة الأجسام في مجال القوى تم تطويرها في القرن الثامن عشر، تعبر معادلات لاغرانج عن مبدأ الفعل الأصغري والذي ينص على أن الحركة الفعلية للجسم هي الحركة التي تقلل من العمل الإجمالي المطبق على هذا الأخير [5].

### ➤ معادلات لاغرانج للمجموعات تامة القيد

قبل إيجاد معادلات لاغرانج سنعطي بعض العلاقات الرياضية التي نحتاجها [5]:

• العلاقة الأولى

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (34 - 1)$$

حيث :  $i = 1, 2, \dots, N$  (رقم الجسم)  $\alpha = 1, 2, \dots, n$  (رقم الإحداثيات المعممة).

• العلاقة الثانية

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \quad (35 - 1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left( \frac{d}{dt} \right) \quad (36 - 1) \quad \text{أي أن:}$$

أي يمكن تبديل موضعي التفاضل الكلي والجزئي.

إذا فرضنا مجموعة ديناميكية هولونومية مكونة من جسم كتلته  $m_i$  وله الإحداثيات المعممة  $q_\alpha$  وتؤثر عليه قوة  $\vec{F}_i$  فإذا كان  $\vec{r}_i$  شعاع موضع الجسم عند اللحظة  $t$  فإنه من قانون نيوتن الثاني تكون معادلة الحركة [5]:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \quad (37 - 1)$$

بضرب طرفي المعادلة في  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$  نحصل على :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (38 - 1)$$

ولدينا :

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (39 - 1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} + \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \quad (40 - 1)$$

$$= \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} + \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \quad (41 - 1)$$

$$\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \quad (42 - 1)$$

بالتعويض من (41 - 1) في (38 - 1) بعد الضرب في  $m_i$  واستخدام المعادلة (29 - 1) يكون:

$$\vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \quad (43 - 1)$$

وبالنسبة لمجموعة  $N$  من الأجسام حيث كتلة الجسم  $i$  هي  $m_i$  يمكن وضع العلاقة السابقة كالآتي:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \quad (44 - 1)$$

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}$$

$\dot{\vec{r}}_i$  شعاع سرعة الجسم ومن ثم يمكن وضع العلاقة السابقة بدلالة الطاقة الحركية:

$$T = \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} = m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \quad (45 - 1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \quad (46 - 1)$$

بالتعويض من المعادلة (45 - 1) و(46 - 1) في المعادلة (44 - 1) نحصل على :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (47 - 1)$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة لاغرانج للحركة للأنظمة الهولونومية وهي عبارة عن مجموعة معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية وعددها يساوي عدد درجات الحرية ويجب التذكر أن لكل إحداثية معممة  $q_\alpha$  ترافقها معادلة لاغرانج بينما لكل جسم ترافقه معادلة نيوتن للحركة. إذا كان لدينا  $N$  جسم فإن الطاقة الحركية ستكون بالشكل:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i \quad (48 - 1)$$

باشتقاق العلاقة بالنسبة إلى  $q_\alpha$  ومرة أخرى بالنسبة إلى  $q_\alpha$  :

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \quad (49 - 1)$$

وأن :

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (50 - 1)$$

في حالة ما إذا كانت المجموعة الديناميكية محافظة أي يمكن اشتقاق القوى المؤثرة على المجموعة من دالة كمون  $V$  وبحيث أن  $V$  دالة في الإحداثيات المعممة وقد يدخل الزمن حسب ما إذا كان القيد مستقر أو غير مستقر زمنياً مع ملاحظة أنها لا تحتوي على السرعات المعممة [5].

$$V = V(q_\alpha) \quad (52 - 1)$$

$$V = V(q_\alpha, t) \quad (53 - 1)$$

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (54 - 1)$$

وأن :

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (55 - 1)$$

بالتعويض من المعادلة (54 - 1) في (47 - 1) نتحصل على :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad (56 - 1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (T - V) = 0 \quad (57 - 1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} (T - V) \right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (T - V) = 0 \quad (58 - 1)$$

ومن المعادلة (58 - 1) أدخل لاغرانج الدالة الجديدة  $L$  التي هي دالة في  $q_\alpha, \dot{q}_\alpha$  والزمن  $t$  حيث :

$$L = T - V \quad (59 - 1)$$

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

بتعويض (59 - 1) في (58 - 1) نتحصل على:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (60 - 1)$$

وهذه ماتسمى بمعادلة لاغرانج.

➤ **معادلات لاغرانج للمجموعات غير تامة القيد**

نفرض وجود  $m$  معادلة قيد من الشكل :

$$\sum_\alpha A_\alpha dq_\alpha + A dt = 0, \sum_\alpha B_\alpha dq_\alpha + B dt = 0 \quad (61 - 1)$$

أو بصورة مكافئة :

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} + A = 0, \sum_{\alpha} B_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} + B = 0 \quad (62 - 1)$$

بحيث يكون لدينا  $m < n$  حيث  $n$  هو عدد الإحداثيات  $q_{\alpha}$ .

المعادلات (61 - 1) و (62 - 1) قد يمكن تكاملها أو لايمكن ذلك للحصول على علاقة تشمل جميع الإحداثيات المعممة  $q_{\alpha}$  إذا كان لايمكن تكاملها فإن القيود تكون غير تامة أو غير ممكنة التكامل و إلا فإنها تكون تامة أو ممكنة التكامل [5].

تصبح معادلات لاغرانج من الشكل:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} = \delta_{\alpha} + \lambda_1 A_{\alpha} + \lambda_2 B_{\alpha} + \dots \quad (63 - 1)$$

حيث تسمى  $\lambda_1, \lambda_2$  مضاعفات لاغرانج إذا كانت القوى محافظة فإنه يمكن كتابة العلاقة بدلالة لاغرانج  $L = T - V$  من الشكل :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = \lambda_1 A_{\alpha} + \lambda_2 B_{\alpha} + \dots \quad (64 - 1)$$

ملاحظة

النتائج السابقة يمكن تطبيقها على المجموعات تامة القيد حيث أن شرط القيد بعد التفاضل يمكن تحويله على الشكل التالي:

$$\delta(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$$

أومن الشكل :  $\sum_{\alpha} \frac{\partial \delta}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial \delta}{\partial t} dt$  والتي هي نفسها المعادلة (1 - 61) [5].

➤ معادلات لاغرانج والقوى الدفعية

القوة الدفعية هي قوة كبيرة يكون تأثيرها لفترة صغيرة، نفرض وجود قوة دفع  $Q_{\alpha}$  خلال فترة زمنية  $\Delta t$  انطلاقاً من معادلة لاغرانج وبالضرب في  $dt$  وبالمكاملة على المجال  $[t, t + \Delta t]$  نحصل على:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) dt - \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} \right) dt = \int_t^{t+\Delta t} Q_{\alpha} dt \quad (65 - 1)$$

لم يتم استخدام دالة لاغرانج كون أن القوة غير مشتقة من كمون وبذلك فالمتغير هنا هو الطاقة الحركية وبمأن الطاقة الحركية لا تتغير بدلالة الموضع فإن الحد الثاني يندم بعد الضرب في  $dt$  :

$$\left[ \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_{\alpha}} \right]_t^{t+\Delta t} = I \quad (66 - 1)$$

وهذا هو نفس المفهوم في قوانين نيوتن حيث أن الدفع هو التغير في كمية الحركة أثناء فترة الحركة وعند حساب الدفع سنأخذ في عين الاعتبار أن هناك قوى لها تغير طفيف يمكن إهمالها مثل القوى المرنة والتصادمات وأيضا التغير الطفيف في إحداثيات المجموعة [5].

2.3.5.1 معادلات هاميلتون

معادلات هاميلتون لحركة المجموعة الديناميكية تعتمد على دالة تسمى دالة هاميلتون ويرمز لها بالرمز  $H$  وهي دالة في الإحداثيات المعممة وكميات الحركة المعممة والزمن ولا تظهر السرعة المعممة  $\dot{q}_{\alpha}$  فيها أي أن :

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) \quad (67 - 1)$$

$$H = H(q_\alpha, p_\alpha, t)$$

حيث :  $p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$  هي كمية الحركة المعممة.

وسنرى كيفية تكوين معادلات هاملتون والتي هي أساس لما يسمى ديناميك هاميلتون "Hamilton Dynamics" (وهي طريقة لمعالجة الديناميك التحليلي) التي هي أسهل وأشمل وتتميز عن معادلات لاغرانج بأنها مجموعة من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى التي عددها  $2n$  بينما نعلم أن معادلات لاغرانج هي عدد  $n$  من المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية والإستخدام الأكثر لمعادلات هاميلتون يكون في ميكانيك الكم والميكانيك الإحصائي [5].

### ➤ تعريف دالة هاملتون

كون العالم هاملتون دالة هاملتون إنطلاقا من دالة لاغرانج حيث عرفنا من قبل أن دالة لاغرانج تعتمد على الإحداثيات والسرعات المعممة وقد يوجد الزمن أو لا من ثم يمكن كتابة الدالة من الشكل [5]:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \quad (68 - 1)$$

$$d\mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} dt \quad (69 - 1)$$

لدينا مما سبق:

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad \text{كمية الحركة المعممة :}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \text{معادلة لاغرانج :}$$

ومنه:

$$d\mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} dt \quad (70 - 1)$$

والتي يمكن كتابتها من الشكل:

$$d\mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha dq_\alpha + d \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_\alpha dp_\alpha + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} dt \quad (71 - 1)$$

$$d(\sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L) = -\sum_{\alpha=1}^n \dot{p}_{\alpha} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (72 - 1)$$

واعتبر هاملتون المقدار مابين القوسين مساويا للدالة  $H$  أي :

$$H = (\sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L(q_{\alpha}, \dot{q}_{\alpha}, t)) \quad (73 - 1)$$

### ➤ استنتاج معادلات هاملتون

أولاً: إذا كانت دالة هاملتون دالة في الإحداثيات المعممة وكمية الحركة حيث:

$$H = \sum_{\alpha=1}^n (p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L)$$

$$dH = \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha} d\dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} \quad (74 - 1)$$

بالتعويض عن  $p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$  و  $\dot{p}_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}$  ينتج أن:

$$dH = \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} \quad (75 - 1)$$

من معادلات لاغرانج :

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) = \frac{d}{dt} (p_{\alpha}) = \dot{p}_{\alpha} \quad (76 - 1)$$

بالتعويض في المعادلة (75 - 1) ينتج أن :

$$dH = \sum_{\alpha=1}^n \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^n \dot{p}_{\alpha} dq_{\alpha} \quad (77 - 1)$$

وحيث أن دالة هاميلتون دالة في الإحداثيات المعممة وكميات الحركة المعممة أي

إذا  $H = H(p_{\alpha}, q_{\alpha})$  :

$$dH = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} \quad (78 - 1)$$

بمقارنة العلاقتين السابقتين نجد أن:

$$\dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}, \quad \dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \quad (79 - 1)$$

المعادلة (1 - 79) تمثل معدلات هاملتون وهي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى وعددها  $2n$  وهي متماثلة ، وهذا يعني في الهاملتونيان ندرس حركة إحداثيات أي نقطة في الفراغ ذات  $2n$  من الأبعاد  $p_\alpha, q_\alpha$  وترسم هذه النقطة مسارا في الفراغ أثناء حركة المجموعة في الفراغ وتتحكم في حركة هذه النقطة أو حركة المجموعة ككل معادلات هاملتون [5].

### ملاحظة

دالة هاملتون التي لاتتعلق بالزمن تظل ثابتة أثناء الحركة وتساوي الطاقة الكلية للمجموعة وهذا يتضح من المعادلة [5]:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{q}_\alpha - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{p}_\alpha \\ &= -\sum \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha + \sum q_\alpha \dot{p}_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (80 - 1)$$

بالتكامل فإن:

$$H = \text{const} = E \quad (81 - 1)$$

حيث  $E$  ثابت يمثل مقدار الطاقة الكلية للمجموعة وطبقا لنظرية أويلر للدوال المتجانسة يكون :

$$\sum_{\alpha=1}^n q_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = 2T \quad (82 - 1)$$

وحيث أن طاقة الوضع للمجموعة المحافظة لا تتعلق بالسرعات فإن:

$$\sum \dot{q}_\alpha p_\alpha = 2T \quad (83 - 1)$$

وبالتعويض عن ذلك في دالة هاملتون يكون :

$$H = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = 2T - (T - V) = T + V = E \quad (84 - 1)$$

وتكون دالة هاملتون التي لاتتعلق بالزمن هي الطاقة الكلية للمجموعة الديناميكية ويكون مقدارها ثابت أثناء الحركة (المجموعة الديناميكية محافظة).

**ثانياً:** إذا كانت دالة هاملتون تتعلق بالزمن أي أن :

$$L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \quad \text{وكذلك} \quad H = H(q_\alpha, p_\alpha, t)$$

في هذه الحالة تكون  $dH$  كالتالي :

$$dH = \sum p_{\alpha} d\dot{q}_{\alpha} + \sum \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} - \sum \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (85 - 1)$$

بتعويض  $p_{\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$  ،  $\dot{p}_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}$  في المعادلة السابقة نجد :

$$dH = \sum \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum \dot{p}_{\alpha} dq_{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (86 - 1)$$

حيث أن:  $H = H(p_{\alpha}, q_{\alpha}, t)$

إذن:

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (87 - 1)$$

بمقارنة المعادلة (86 - 1) ، (87 - 1) نحصل على :

$$\dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \quad , \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \quad , \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (88 - 1)$$

نجد أنه إذا كانت  $L$  تتعلق بالزمن فإن  $H$  كذلك تتعلق بالزمن والعكس صحيح.

### 3.3.5.1 التحويلات القانونية

تلعب التحويلات القانونية دورا رئيسيا في جعل عملية حل المسائل الديناميكية أكثر سهولة حيث يمكن تحويل معادلات الحركة إلى صورة أخرى يمكن معاملتها بسهولة أكبر من المعادلات الأصلية .

فلحل مسألة ديناميكية يجب صياغتها رياضيا وذلك باختيار الإحداثيات المعممة المناسبة وتكوين  $H$  و  $L$  ثم كتابة معادلات لاغرانج وهاميلتون حيث يتوقف سهولة الحل للمسائل الديناميكية عادة على الإختيار المناسب للإحداثيات المعممة (يمكن اختيار أنواع أخرى بينها إحداثيات مهملة ) وواضح أنه كلما زادت الإحداثيات المهملة زادت سهولة الحل الرياضي .

وعلى سبيل المثال إذا أمكن تحويل مجموعة الإحداثيات المعممة إلى مجموعة جديدة بحيث تكون بعض هذه الإحداثيات الجديدة مهملة ومن أنواع التحويلات التي يمكن دراستها تلك التي لاتغير معادلات لاغرانج وهاميلتون .

فإذا فرضنا أن  $q_\alpha, p_\alpha$  هما الإحداثيات وكميات الحركة القديمة لنظام ديناميكي وأن  $Q_\alpha, P_\alpha$  هي المواضع وكميات الحركة الجديدة فتكون معادلات التحويل من الإحداثيات القديمة الجديدة هي:

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$$

$$P_\alpha = P_\alpha(q_\alpha, p_\alpha, t)$$

### 4.5.1 مبدأ هاميلتون للتأثير الأقل (أو مبدأ الفعل الأصغري)

من المسائل الأكثر شيوعاً في الرياضيات في حساب التغيرات هي مسألة إيجاد المنحنى  $y(x)$  الذي يصل بين النقطتين  $x = a, x = b$  بحيث يكون التكامل [5]:

$$I = \int_a^b F(x, y, \dot{y}) dx \quad (89 - 1)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} \quad \text{حيث:}$$

تقوم فكرة حساب التغيرات على أساس البحث عن قيم دنيا *minimum* أو عظمى *maximum* للكميات التي يمكن التعبير عنها بالتكامل .

والمطلوب هو البحث عن منحنى  $y(x)$  يجعل قيمة التكامل  $I$  قيمة عظمى أو صغرى والشرط الضروري لذلك هو تحقق معادلة أولير التالية:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (90 - 1)$$

ولإثبات ذلك نفرض أن منحنى  $y$  أزيح بمقدار صغير فإن :

$$I = \int F dx \quad (91 - 1)$$

$$\delta I = \int \delta F dx \quad (92 - 1)$$

نضع:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y \quad (93 - 1)$$

باستخدام التكامل بالتجزئة نتحصل على:

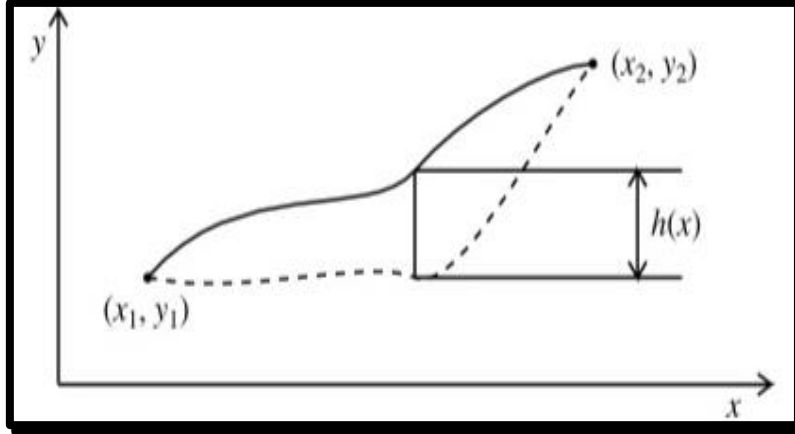
$$\delta I = \frac{\partial y}{\partial x} \delta y - \int \delta y \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx \quad (94 - 1)$$

عند  $x = a, x = b$  يكون  $\delta y = 0$  وبالتالي الحد الأول ينعدم ويصبح لدينا :

$$\delta I = \int \delta y \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx = 0 \quad (95 - 1)$$

وفي الأخير نتحصل على معادلة أويلر من الشكل التالي:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (96 - 1)$$



شكل رقم 3: يبين كيف يتم استخدام التفاضل والتكامل للعثور على مسار أقصى أو أدنى قيمة لمتغير ما [6].

ملاحظة

يمكن تعميم هذه النتيجة للفراغ متعدد الأبعاد

$$I = \int_a^b F(x_1, y_1, y_2, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n) dx \quad (97 - 1)$$

والشرط الضروري حتى يكون للتكامل قيمة عظمى أو صغرى هو تحقق معادلة أويلر [5].

➤ استنتاج معادلات لاغرانج من مبدأ هاميلتون

من خلال مادرسناه في الميكانيك وجدنا أنه يعتمد على قوانين نيوتن وعند إستنتاج معدلات

لاغرانج لحركة منظومة ديناميكية تم الإنطلاق من القانون الثاني لنيوتن .

توجد طريقة أخرى لإشتقاق معادلات لاغرانج والتي تعتمد على قاعدة هاميلتون للتغاير

"HamiltonVariationalPrinciple" والتي تنص على أن حركة أي منظومة من عدة أجسام

أوحى جسم واحد تحدث بشرط أن يكون للتكامل التالي نهاية عظمى أو صغرى [5] :

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_n, t) dt \quad (98 - 1)$$

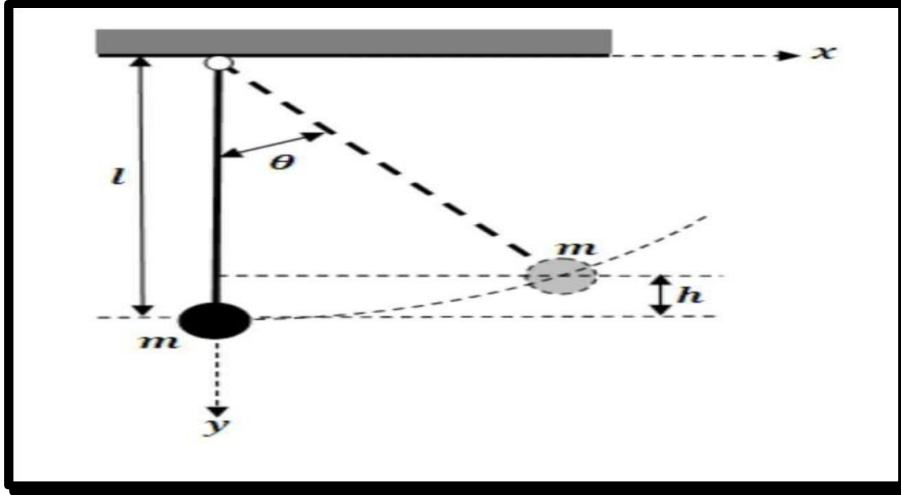
حيث  $L = T - V$  دالة لاغرانج للنظام الديناميكي وكما تم التوضيح سابقا أن التغير الحادث هو أن التكامل يكون نهاية عظمى أو صغرى (في معظم الأحوال نهاية صغرى)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (99 - 1)$$

سنفرض أن دالة لاغرانج دالة في الإحداثيات المعممة  $q_\alpha$  والسرعات المعممة  $\dot{q}_\alpha$  الشرط اللازم لكي يكون للتكامل نهاية صغرى هو تحقق العلاقة التالية:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right) = 0 \quad (100 - 1)$$

**مثال:** إيجاد دالة لاغرانج للنواس البسيط ومعادلة الحركة [5].



شكل رقم 4: يمثل حركة نواس بسيط.

الإحداثيات المعممة في هذه الحالة هي  $\theta$  أي أن:

لدينا دالة لاغرانج:

$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

حيث  $T$  تمثل الطاقة الحركية للنواس :

$$v = l\dot{\theta}$$

لدينا :

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

ومنه تصبح عبارة الطاقة الحركية:

$$V = mgl(1 - \cos \theta)$$

و  $V$  هي الطاقة الكامنة:

تصبح دالة لاغرانج في هذه الحالة:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{معادلة لاغرانج:}$$

وباعتبار أن:  $q = \theta, \dot{q} = \dot{\theta}$  فإن معادلة لاغرانج تصبح على النحو التالي:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

نجد الآن المشتقات الجزئية كالتالي:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) = -mgl \sin \theta$$

$$ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad \text{ومنه نجد أن:}$$

لدينا:  $\sin \theta = \theta$  وذلك باعتبار  $\theta$  زاوية الإزاحة صغيرة نحصل على:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

بوضع  $\omega^2 = \frac{g}{l}$  نحصل على معادلة الحركة للنواس:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

**مثال 2:** حل المثال السابق باستعمال معادلات هاملتون:

الإحداثية المعممة  $q = \theta$

$$H = T + V$$

لدينا دالة هاملتون:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad v = l\dot{\theta} \quad , \quad T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

الطاقة الحركية:

$$V = mgl(1 - \cos \theta)$$

الطاقة الكامنة:

$$H = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

تصبح دالة هاملتون:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$$

معادلات هاملتون:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p}{ml^2} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = l^2\dot{\theta}$$

لدينا:

$$H = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{p^2}{ml^2}\right)^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

ومنه :

$$H = \frac{1}{2} \frac{p^2}{ml^2} + mgl(1 - \cos \theta)$$

$$\dot{p} = -mgl \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{p}$$

$$\frac{p}{ml^2} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{\theta}$$

$$\dot{p} = ml^2\ddot{\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

$\sin \theta = \theta$  باعتبار  $\theta$  زاوية الإزاحة صغيرة نحصل على معادلة الحركة :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

**خاتمة**

تناولنا في هذا الفصل ثلاث مجموعات من المعادلات وهي تشكل مايسمى بالميكانيك الكلاسيكي (قوانين نيوتن، معادلات لاغرانج، مبادئ هاملتون) وقد لعبت هذه الأخيرة دورا مهما في تفسير الظواهر الفيزيائية وخاصة حركة الأجسام، وهي علاقات تصف تفاعل جسمين أو كتلتين فيما بينهما من خلال قوة تدعى القوة المركزية. فكيف يكون شكل هذه المعادلات إذا كان التفاعل بين أكثر من جسمين وهذا مانصادفه في الفيزياء الفلكية وميكانيك الكم لوجود عدة أجسام تتفاعل فيما بينها.

وجد العلماء قديما صعوبة في تفسير حركة نظام مكون من جسمين، لكن سرعان ماتم التوصل إلى الحل باكتشاف نيوتن للجاذبية ومن ثم وضعه لقانون الجذب العام، فكيف يا ترى يمكن تفسير بعض الظواهر لنظام متعدد الأجسام.

---

## الفصل الثاني:

### مشكلة الأجسام المتعددة

---

الفصل الثاني: مشكلة الأجسام المتعددة.**1.2 مقدمة**

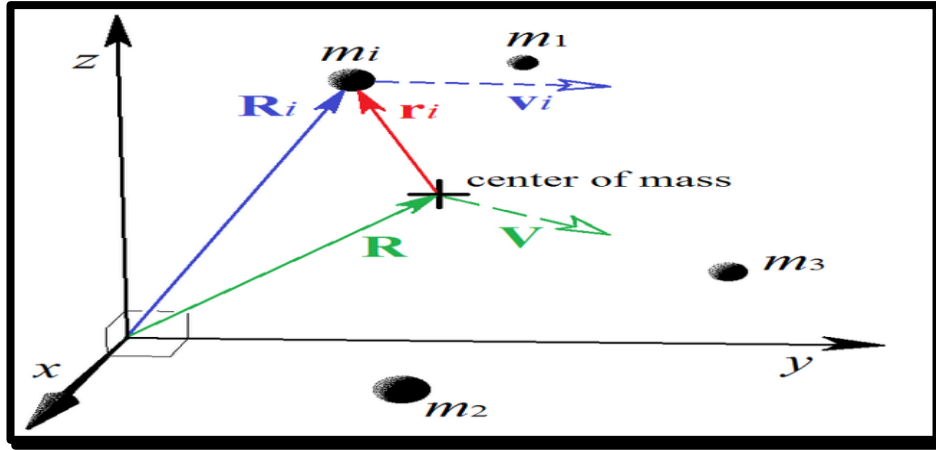
في القرن السابع عشر حل العالمان كيبلر ونيوتن معادلات حركة الأجسام الثنائية وهي معادلات تصف حركة جسمين يؤثران على بعضهما بقوة الجاذبية .

إن مسألة الجسمين قد تم التعبير عنها بمعادلات أساسية معروفة ومع ذلك عندما نضيف جسما ثالثا تصبح مشكلة معقدة مما يعني أنه من الصعب العثور على معادلات تصف حركة الأجسام الثلاثة وهي شكل خاص من معادلات  $N$  جسم.

**2.2 مركز كتلة عدة أجسام**

تتألف الأجسام التي ندرسها في الطبيعة من عدد كبير من الذرات والجزيئات التي يمكن أن تكون القوى المتبادلة بينها ضعيفة جدا بحيث يمكن اعتبار كل واحد منها متحركا بشكل مستقل عن الآخر كما يمكن أن تكون القوى المتبادلة بينها كبيرة لا يمكن إهمالها مثل الأجسام السائلة والصلبة. عند دراسة حركة منظومة مؤلفة من عدد كبير من الأجسام خاضعة لقوى خارجية نحدد النقطة التي تؤثر عندها محصلة هذه القوى ثم نحاول دراسة حركة أجزاء المنظومة بالنسبة لهذه النقطة التي نطلق عليها اسم "مركز الكتلة" [3].

نعرف موضع مركز كتلة عدة أجسام نعتبرها نقطية  $m_1, m_2, m_3, \dots$  موجودة في المواضع  $r_1, r_2, r_3, \dots$  على الترتيب كما في الشكل (5):



شكل رقم 5: يمثل مركز كتلة عدة أجسام نقطية [3].

بالعلاقة:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} \quad (1-2)$$

$$M\vec{R}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots \quad (2-2)$$

أو:

حيث:  $M$  الكتلة الكلية للأجسام .

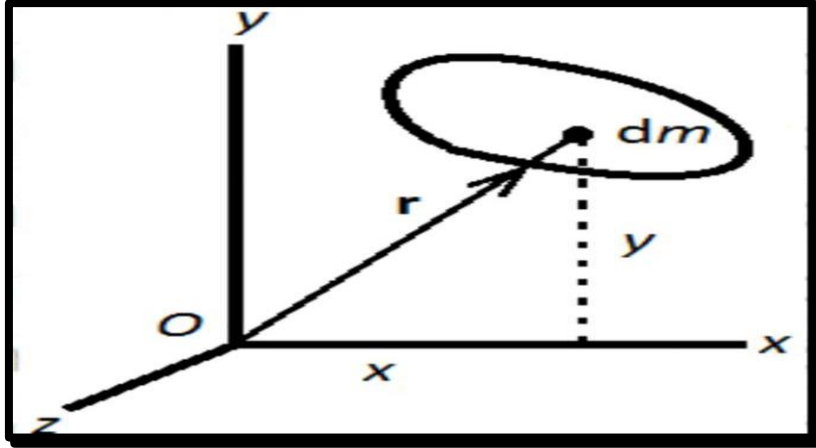
$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots \quad (3-2)$$

مع العلم أن مركز كتلة نظام معين لا تكون بالضرورة داخل النظام كما يمكن ألا تنطبق على أي نقطة منه كمركز كتلة حلقة دائرية متجانسة حيث تقع عند نقطة المركز (الخالية) [3].

### 3.2 مركز كتلة جسم صلب

يمكن تحويل العلاقة (1-2) لإيجاد موضع مركز كتلة جسم صلب بتجزئته إلى عدد كبير من الجسيمات العنصرية بحيث يمكن اعتبار أي منها نقطة مادية  $dm$  حجمها  $dv$  شعاع موضعها  $r$  يصبح مركز الكتلة معرف بالعلاقة [3]:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad (4-2)$$



شكل رقم 6: يمثل مركز كتلة جسم صلب [3].

بتعريف الكثافة الحجمية للمادة  $\rho$  في الجسم الصلب عند الموضع  $r$  بالعلاقة:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dv} \quad (5 - 2)$$

تصبح العلاقة (2 - 4) بالشكل التالي :

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho dv \quad (6 - 2)$$

$v$  : حجم الجسم الصلب .

يمكن الحصول على مركبات شعاع مركز الكتلة من العلاقة (2 - 6) فنكتب :

$$Z = \frac{1}{M} \int z \rho dv , Y = \frac{1}{M} \int y \rho dv , X = \frac{1}{M} \int x \rho dv$$

إذا كان الجسم الصلب مستويا ذو كثافة سطحية  $\sigma$  :

$$\sigma = \frac{dm}{ds} \quad (7 - 2)$$

$S$  : مساحة الجسم الصلب .

تصبح العلاقة (2 - 6) من الشكل:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \sigma ds \quad (8 - 2)$$

إذا كان الجسم الصلب متوزعا بشكل طولي ذو كثافة خطية  $\lambda$ :

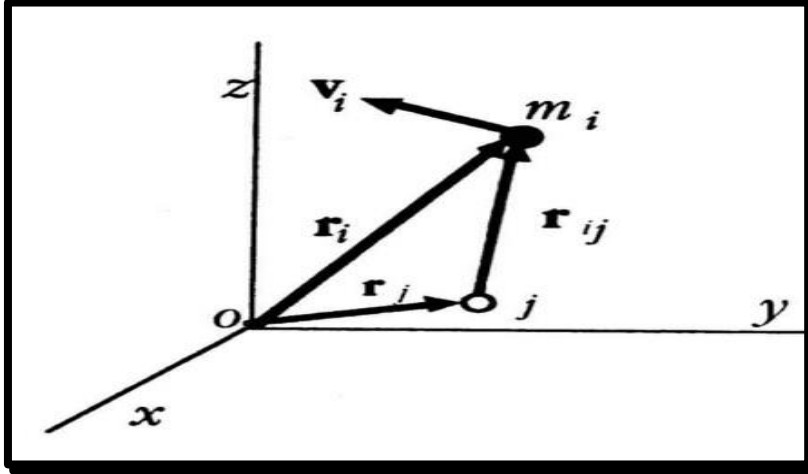
$\lambda$  : طول الجسم الصلب.

تصبح العلاقة (2 - 6) من الشكل:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \lambda dl \quad (9 - 2)$$

## 4.2 العزم الحركي لعدة أجسام ومبدأ حفظ عزم الحركة

لدينا جسم ذو كتلة  $m_i$  في الموضع  $\vec{r}_i$  ولتحديد عزمه الحركي بالنسبة للنقطة  $z$  المحددة بالشعاع  $\vec{r}_j$  كما في الشكل 7 [3]:



شكل رقم 7: يمثل العزم الحركي لجسم نقطي [3].

فنكتب:

$$\vec{L}_{ij} = \vec{r}_{ij} \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_{ij} \times \vec{p}_i \quad (10 - 2)$$

حيث:  $\vec{v}_i$  سرعة الجسم  $i$  و  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  شعاع من النقطة  $z$  إلى موضع الجسم  $i$

إذا كانت لدينا مجموعة من الأجسام  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$  متواجدة في المواضع  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_N$  عندئذ يكون العزم الحركي الكلي بالنسبة للنقطة  $z$  هو

$$\vec{L}_j = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{ij} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_{ij} \times \vec{p}_i) \quad (11 - 2)$$

نفرض أن النقطة  $z$  ثابتة أي أن  $\vec{r}_j = 0$  عندئذ نجد من العلاقة السابقة:

$$\frac{d\vec{L}_j}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N (\vec{r}_{ij} \times \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d\vec{r}_{ij}}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_{ij} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] \quad (12 - 2)$$

لكن:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{r}_{ij}}{dt} \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{dt} \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i = 0 \quad (13 - 2)$$

كما أن :

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_{ij} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_i \quad (14 - 2)$$

فإذا وضعنا:

$$\vec{M}_j = \sum_{i=1}^N \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_i \quad (15 - 2)$$

حيث  $M_j$  عزم القوى الخارجية الكلية المؤثرة على الأجسام بالنسبة للنقطة  $z$  وذلك بفرض أن عزم القوى الداخلية المتبادلة بين هذه الأجسام بالنسبة لـ  $z$  معدوم.

حيث تصبح العلاقة (2 - 12) كالتالي:

$$\vec{M}_j = \frac{d\vec{L}_j}{dt} \quad (16 - 2)$$

من العلاقة (2 - 16) نستنتج أن تغير العزم الحركي لعدة أجسام حول نقطة بالنسبة للزمن تساوي عزم القوى الخارجية الكلي ويمثل قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية.

انطلاقاً من العلاقة (2 - 16) :

$$\vec{M}_j = 0 \Rightarrow \vec{L}_j = \text{ثابت} \quad (17 - 2)$$

### ➤ مبدأ حفظ العزم الحركي

إن مبدأ حفظ العزم الحركي من أهم مبادئ الحفظ في الفيزياء خاصة في الفيزياء الكمية لأن أهم القوى الطبيعية كالجاذبية والكهرومغناطيسية مركزية وعزمها معدوم بالنسبة لمركز القوة لذا فإن الأنظمة الطبيعية كالذرات أو الأجرام السماوية تتحرك بعزم حركي ثابت دوماً وهي في حالة مستقرة [3].

## 5.2 الطاقة الحركية لعدة أجسام ومبدأ حفظ الطاقة

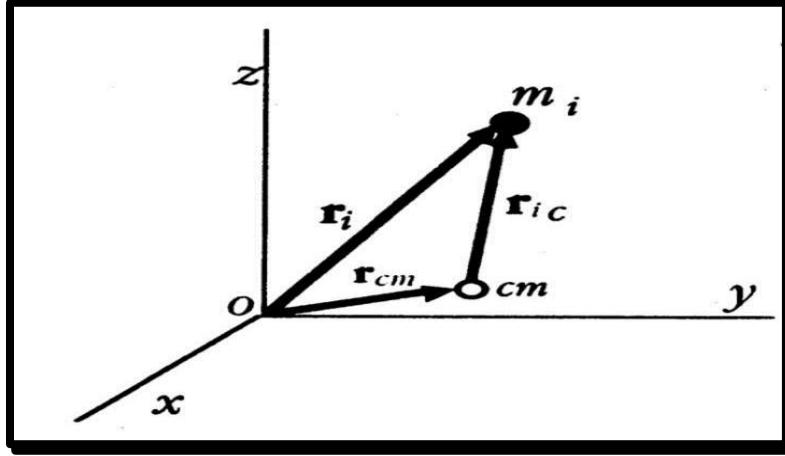
تكتب علاقة الطاقة الحركية لعدة أجسام بالشكل:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) \quad (18 - 2)$$

فإذا تم تحديد موضع الجسم  $m_i$  بالنسبة لمراقب ثابت بالشعاع  $\vec{r}_i$  وبالنسبة لمركز الكتلة بالشعاع  $\vec{r}_{ic}$

وموضع مركز الكتلة بالنسبة لنفس المراقب الثابت بالشعاع  $\vec{r}_{cm}$  كما هو موضح في الشكل 8 [3]:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{ic} + \vec{r}_{cm} \quad (19 - 2)$$



شكل رقم 8: يمثل مركز الكتلة لجسمين  $m_c$  و  $m_i$  [3].

باشتقاق العبارة (2 - 19) تصبح :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{ic} + \vec{v}_{cm} \quad (20 - 2)$$

حيث  $\vec{v}_{cm}$  سرعة مركز الكتلة و  $\vec{v}_{ic}$  سرعة الجسم بالنسبة لهذا المركز .

ومن تم نكتب العلاقة (2 - 18) بالشكل :

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{ic} + \vec{v}_{cm}) \cdot (\vec{v}_{ic} + \vec{v}_{cm}) \quad (21 - 2)$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{ic}^2 + \sum_i m_i (\vec{v}_{ic} \cdot \vec{v}_{cm}) \quad (22 - 2)$$

لكن :

$$\sum_i m_i (\vec{v}_{ic} \cdot \vec{v}_{cm}) = 0 \quad (23 - 2)$$

كما أن :

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{cm}^2 = \frac{1}{2} \vec{v}_{cm}^2 \sum_i m_i = \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2 \quad (24 - 2)$$

فتصبح  $T$  بالشكل :

$$T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (25 - 2)$$

فالطاقة الحركية لعدة أجسام هي مجموع الطاقة الحركية للحركة الإنتقالية لمركز الكتلة (الحد الأول من الطرف الأيمن للعلاقة (2 - 25) بالإضافة لمجموع الطاقة الحركية لكل الأجسام بالنسبة لمركز الكتلة الحد الثاني من الطرف الأيمن للعلاقة (2 - 25))

من جهة أخرى إذا كانت القوى المؤثرة على المنظومة محافظة عندئذ يمكن إيجاد الطاقة الكامنة من الشكل :

$$V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \quad (26 - 2)$$

أي تعتمد على مواضع الأجسام فقط ، عندئذ نكتب الطاقة الميكانيكية الكلية للمنظومة بالشكل :

$$E = T + V = \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{ic}^2 + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \quad (27 - 2)$$

في هذه الحالة يمكن إيجاد القوة المؤثرة على الجسم  $i$  من طاقة وضعه بكتابة :

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \quad (28 - 2)$$

حيث يدل المؤثر  $\nabla_i$  على أن عملية الإشتقاق تتم بالنسبة للجسم  $i$  . من ثم نجد مركبات  $\vec{F}_i$  على المحاور الإحداثية بكتابة :

$$F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (29 - 2)$$

## 6.2 القوة المركزية ثنائية الجسم المحافظة

هي قوة تؤثر على جسمين وتؤدي إلى دورانها حول بعضهما البعض تعمل على تقليل المسافة بينهما تتعلق هذه القوة فقط بموضع الجسم ولا تتعلق بسرعه أو تسارعه مما يعني أن العمل الناتج عن هذه القوة مستقل عن مسار الحركة .

القوة المركزية ثنائية الجسم المحافظة مهمة في الفيزياء بسبب الدور المحوري الذي تلعبه قوى كولوم والجاذبية في الطبيعة.

تلعب قوة كولوم دورا في الكهرومغناطيسية والفيزياء الجزيئية والذرية والنووية ، بينما تلعب قوة الجاذبية دورا مشابها في علم الفيزياء الفلكية [1].

## أنواعها:

القوة الكهروستاتيكية (قوة كولوم): هي قوة مركزية ثنائية الجسم تنشأ هذه القوة بين الأجسام المشحونة كهربائياً تتسبب هذه القوة في دوران الإلكترونات حول النواة الذرية [1].

الجاذبية: هي قوة مركزية ثنائية الجسم تنشأ هذه القوة بين جميع الأجسام في الكون تتسبب الجاذبية في دوران الكواكب حول الشمس والأقمار حول الكواكب [1].

## خصائصها:

أ- **محافظة:** تتعلق فقط بموضع الجسم أي أن القوة لا تتعلق بالزمن بالإضافة إلى ذلك فإن العمل الذي تقوم به في تحريك جسم بين نقطتين مستقل عن المسار [1].

ب- **ثنائية الجسم:** القوة بين جسمين تتعلق فقط بالمواقع النسبية للجسمين المتفاعلين ولا تتأثر بقرب أجسام أخرى، بالنسبة للقوى الثنائية المؤثرة على  $N$  جسم، فإن القوة المؤثرة على الجسم 1 هي مجموع القوى المركزية بسبب التفاعلات مع كل الأجسام الأخرى البالغ عددها  $(N - 1)$  وهذا يختلف عن قوى الأجسام الثلاثة حيث تتأثر القوة بين أي جسمين بقرب جسم ثالث [1].

ت- **مركزية:** يتعلق مجال القوة المركزية بالمسافة  $r_{12}$  من منشأ (أصل) القوة عند النقطة 1 إلى موقع الجسم عند النقطة 2 والقوة موجهة على طول الشعاع الذي يربطهما  $\vec{r}_{12}$  تجمع القوة المركزية ثنائية الجسم المحافظة بين الخصائص المذكورة أعلاه ويمكن التعبير عنها على النحو التالي:

$$\vec{F}_{21} = f(r_{12})\vec{r}_{12}$$

يمتلك مجال القوة  $\vec{F}_{21}$  مقدارا  $f(r_{12})$  يتعلق فقط بمقدار شعاع البعد بينهما  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  بين منشأ القوة عند النقطة 1 والنقطة 2 حيث تؤثر القوة وتوجه على طول الخط الذي يربطهما أي  $\vec{r}_{12}$ .

إذا كانت القوة المركزية المكونة من جسمين محافظة فيمكن كتابتها على أنها تدرج الكمون

الذي يعد دالة للمسافة من مركز مجال القوة :

$$\vec{F}_{21} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}_{12})$$

إن القدرة على تمثيل القوة المركزية المحافضة بواسطة دالة الكمون  $V(r)$  تبسط إلى حد كبير معالجة القوى المركزية [1].

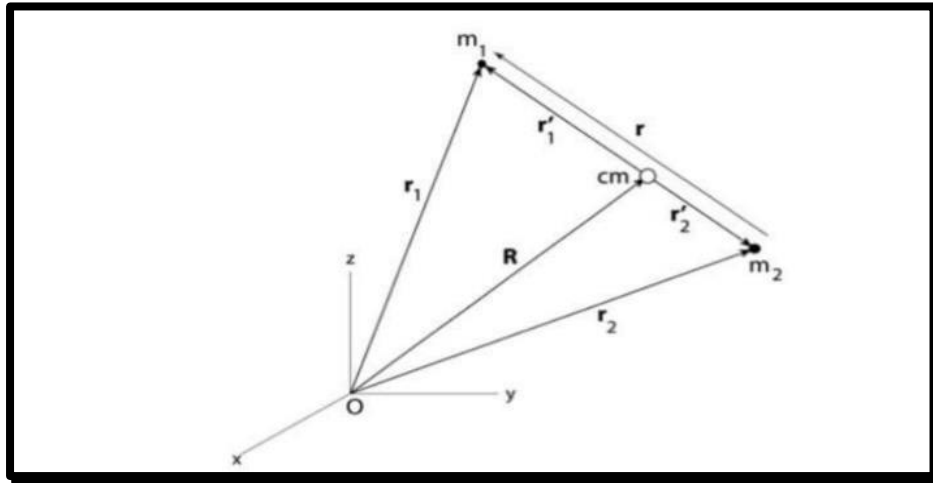
تعد قوة كولوم (القوة الكهروستاتيكية) وقوى الجاذبية قوى مركزية ثنائية محافظة , بينما تمتلك القوة النووية بين النكليونات في النواة مكونات ثلاثية الأجسام .

يعد التفاعل بين جسمين من خلال قوة مركزية ثنائية أبسط نظام يمكن النظر فيه لكن المعادلة  $\vec{F}_{21} = f(r_{12})\vec{r}_{12}$  قابلة للتطبيق بالتساوي على  $N$  جسم تتفاعل من خلال قوة مركزية ثنائية لأن مبدأ التراكب ينطبق على القوى المركزية الثنائية المحافضة [1].

## 7.2. مسألة الجسمين

إذا كانت لدينا منظومة مكونة من جسمين  $m_1$  و  $m_2$  خاضعين لقوة مركزية حيث  $\vec{r}_1$  و  $\vec{r}_2$  شعاعا الموضع لكل جسم تتطلب دراسة حركة تفاعلها مع بعض إحداثيات مكانية ثلاث لكل منهما.

نظرا لأن القوة المركزية الثنائية تتعلق فقط بالبعد  $(\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  بين الجسمين فمن الأنسب فصل درجات الحرية الستة إلى 3 إحداثيات مكانية للحركة النسبية  $\vec{r}$  بالإضافة إلى 3 إحداثيات مكانية لموقع مركز الكتلة  $\vec{R}$  [1].



شكل رقم 9: يمثل مركز الكتلة لنظام ثنائي الجسم [1].

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}'_1 \quad (30 - 2)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}'_2$$

من خلال تعريف مركز الكتلة :

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (31 - 2)$$

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{0} \quad (32 - 2) \quad \text{و}$$

$$-\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \quad (33 - 2) \quad \text{لذلك:}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\vec{r}_1 \quad (34 - 2) \quad \text{ومنه:}$$

يصبح لدينا:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad (35 - 2)$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad (36 - 2)$$

بتعويض العلاقتين (36 - 2) و (35 - 2) في العلاقة (30 - 2) نجد:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} + \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{aligned} \quad (37 - 2)$$

أي أن الشعاعان  $\vec{r}_1$  و  $\vec{r}_2$  بدلالة شعاع الموضع لمركز الكتلة  $\vec{R}$  وشعاع الموضع  $\vec{r}$  للحركة النسبية في إطار مركز الكتلة.

بافتراض أن القوة المركزية بين جسمين محافظة يمكن كتابة لاغرانجيان المنظومة لجسمين على النحو التالي:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{r}}_2|^2 - V(r) \quad (38 - 2)$$

باشتقاق المعادلتين (37 - 2) بالنسبة للزمن وتعويضهما في العلاقة (38 - 2) نتحصل على

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{M}|\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\vec{r}}|^2 - V(r) \quad (39 - 2)$$

$$\mathbf{M} = m_1 + m_2 \quad (40 - 2) \quad \text{وتعطي الكتلة الإجمالية ب:}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{أما عبارة الكتلة المختزلة فتعطي ب:}$$

أو بالشكل التالي :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

يمكن فصل لاغرانجيان الكلي إلى قسمين منفصلين حيث:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{M}|\dot{\vec{R}}|^2 + \mathbf{L}_{cm} \quad (41 - 2)$$

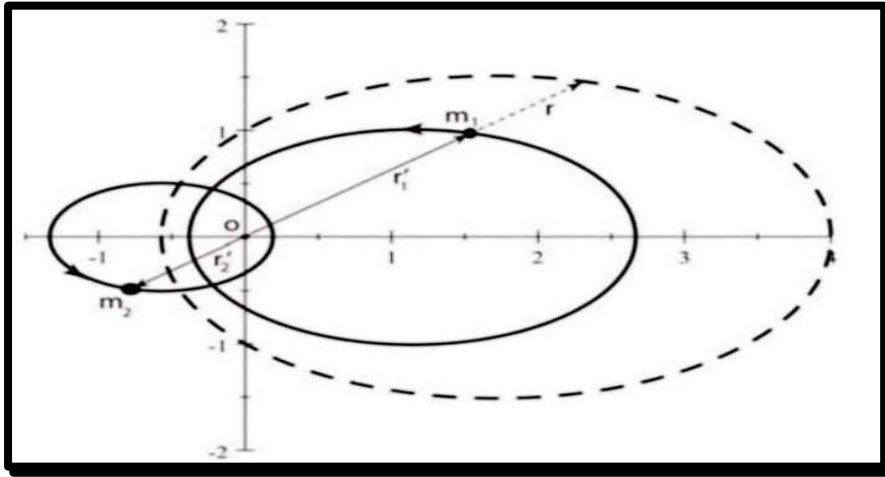
$$L_{cm} = \frac{1}{2}\mu|\dot{\vec{r}}|^2 - V(r) \quad (42 - 2)$$

نفرض عدم وجود قوى خارجية تؤثر إذن  $\frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = 0$  يمكن كتابة معادلات لاغرانج بالنسبة للإحداثية  $R$  من الشكل :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = \frac{d\vec{P}_{cm}}{dt} = 0 \quad (43 - 2)$$

وهذا يعني أنه بالنسبة لقوة مركزية فإن كمية الحركة لمركز الكتلة مقدار ثابت حيث :

$$\vec{P}_{cm} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = M\dot{\vec{R}} \quad (44 - 2)$$



شكل رقم 10: يمثل مدارات نظام مكون من جسمين (قطع ناقص) [1].

من الملائم العمل في إطار مركز الكتلة باستخدام لاغرانجيان الفعال  $L_{cm}$  حيث تنعدم الطاقة الحركية  $\frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2$  الخاصة بحركة مركز الكتلة ويتم إعتبارها طاقة الأجسام المتصادمة، وبالتالي في مركز الكتلة تم إختزال المشكلة إلى مشكلة مكافئة لجسم واحد بكتلة  $\mu$  تتحرك حول مركز قوة ثابت مع مسار معطى بواسطة  $\vec{r}$  وهو المسافة بين موضع الجسمين  $m_1$  و  $m_2$  كما هو مبين في الشكل [1](10).

### 1.7.2 العزم الحركي $\vec{L}$

نلاحظ أنّ العزم الحركي لدوران جسمين حول مركز الكتلة تكون السرعة  $\omega$  متطابقة عند

تقييمهما في المختبر أو في تمثيل مكافئ لجسمين [1]:

$$\vec{L} = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega = \mu r^2 \omega \quad (45 - 2)$$

يؤدي لاغرانج مركز الكتلة إلى العلاقتين التاليتين فيما يتعلق بشعاع العزم الحركي:

1/ تقع الحركة بالكامل في المستوي المتعامد مع الإتجاه الثابت لشعاع العزم الحركي الكلي حيث:

$$\vec{L} \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{r} = 0 \quad (46 - 2)$$

أي أن شعاع نصف القطر موجود في المستوي المتعامد مع شعاع العزم الحركي الكلي وبالتالي فمن الممكن التعبير عن لاغرانجيان مركز الكتلة بدلالة الإحداثيات القطبية  $(r, \psi)$  بدلا من الإحداثيات الكروية يصبح من الشكل:

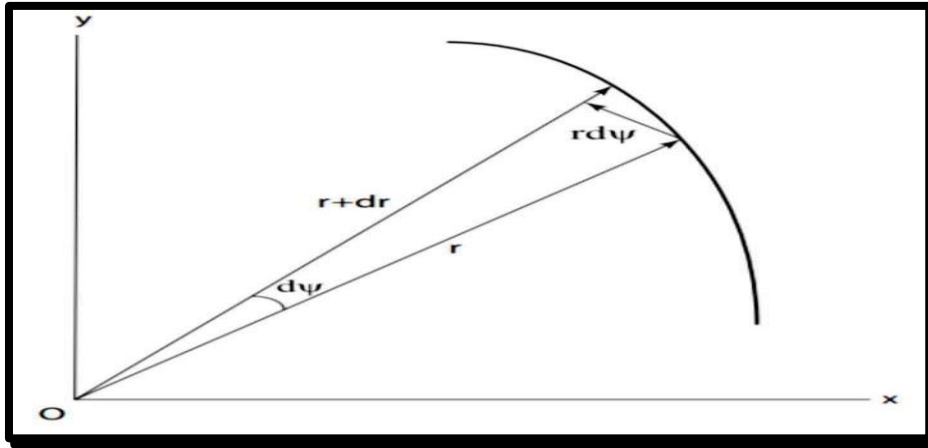
$$L_{cm} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2) - V(r) \quad (47 - 2)$$

2/ إذا كان الكمون متماثل كرويا فإن الزاوية القطبية تكون دائرية حسب نظرية "نوتر" فإن العزم

الحركي  $\vec{p}_\psi \equiv \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  مقدار ثابت حيث  $\frac{\partial L_{cm}}{\partial \psi} = 0$  وبالتالي معادلات لاغرانج تشير إلى:

$$\dot{\vec{p}}_\psi = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{cm}}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad (48 - 2)$$

$$\vec{p}_\psi = \frac{\partial L_{cm}}{\partial \dot{\psi}} = \mu r^2 \dot{\psi} = \vec{p}_\psi \vec{L} \quad (49 - 2)$$



شكل رقم 11: يمثل المساحة المسوحة بواسطة الشعاع  $r$  في مدة زمنية  $dt$  [1].

يوضح الشكل (11) تفسيراً هندسياً للمعادلة (49 - 2) حيث يسمح شعاع نصف القطر مساحة  $dA$  في

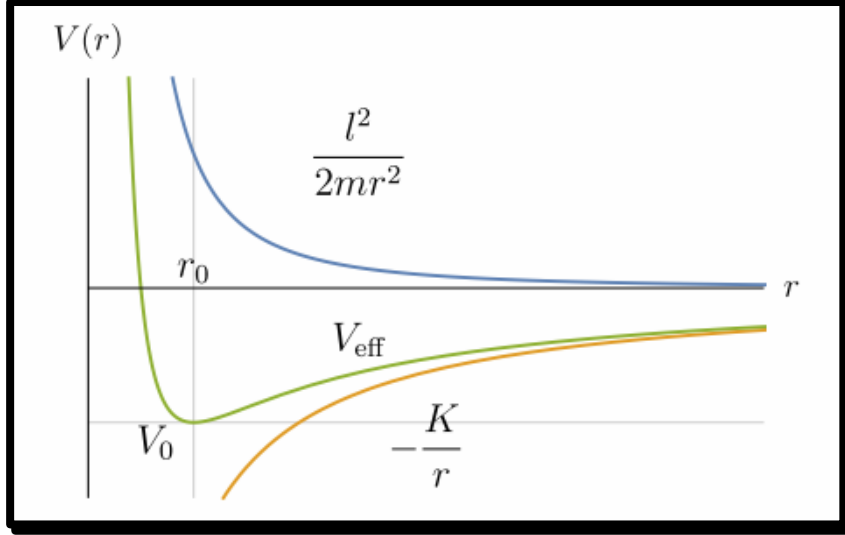
مدة زمنية  $dt$ :

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} dt \quad (50 - 2)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} \quad (51 - 2)$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu \vec{r} \times \vec{v} = 2\mu \frac{d\vec{A}}{dt} \quad \text{و يعطى العزم الحركي بـ:}$$

### 2.7.2 معادلات الحركة تحت تأثير قوة مركزية



شكل رقم 12: يمثل القيم الممكنة لسالب كمون الجذب  $-\frac{K}{r}$  والقيم الممكنة لقوة الطرد المركزي  $\frac{L^2}{2mr^2}$  والكمون الفعال  $V_{eff}$  [1].

يمكن تحديد معادلات الحركة لجسمين يتفاعلان عبر قوة مركزية محافظة باستخدام لاغرانجيان مركز الكتلة  $L_{cm}$  المعطى بالمعادلة (2-47) [1]:

حيث:

$$\Lambda_r L_{cm} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\mu \dot{r}) - \mu r \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (2-53)$$

$$\dot{\psi} = \frac{L}{\mu r^2} \quad (2-54) \quad \text{لكن:}$$

وبالتالي فإن المعادلة الشعاعية للحركة تعطى بـ:

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3} \quad (2-55)$$

وباستعمال الإحداثيات القطبية فإن  $\Lambda_\psi L_{cm} = 0$  يؤدي إلى المعادلة:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \mu r^2 \dot{\psi} \quad (56 - 2)$$

أعطت معادلات لاغرانج معادلتين للحركة واحدة تتعلق بنصف القطر  $r$  والأخرى تتعلق بالزاوية القطبية  $\psi$  حيث أن شعاع التسارع هو مجرد بيان لقوانين نيوتن للحركة لمركبة شعاع القوة  $F_r$  في نظام مركز الكتلة .

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3} \quad (57 - 2)$$

تمثل معادلة الحركة الشعاعية لجسم يتحرك بحركة مركزية تنص على أن شعاع القوة المؤثرة على الجسم تساوي مجموع القوى المركزية والقوى الطاردة المركزية .

يمكن كتابة هذه المعادلة بدلالة الكمون الفعال، حيث تعطى عبارة هذا الأخير بـ:

$$V_{eff}(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (58 - 2)$$

وتصبح معادلة الحركة من الشكل :

$$F_r = \mu \ddot{r} = \frac{\partial V_{eff}(r)}{\partial r} \quad (59 - 2)$$

يتم استخدام معادلات لاغرانج لإشتقاق معادلات الحركة لجسم يتحرك بحركة مركزية وهي طريقة فعالة يمكن استخدامها لحل المشكلات في الميكانيك الكلاسيكي.

### 3.7.2 معادلة المدار التفاضلي تحت تأثير قوة مركزية

ترتبط معادلة المدار التفاضلية بشكل الحركة المدارية في الإحداثيات القطبية المستوية بالإعتماد على القوة المركزية بين جسمين حيث يمكن تبسيط معادلة المدار إنطلاقاً من تحويلات " binet " الذي يعتمد على الشكل الوظيفي لـ  $F_r$ ، أفضل تحويل يمكن إستعماله والذي يمكن تعريفه على أنه [1]:

$$u \equiv \frac{1}{r} \quad (60 - 2)$$

$$\psi = \frac{Lu^2}{\mu} \quad (61 - 2)$$

من تعريف المتغير الجديد نكتب :

$$\frac{dr}{dt} = -u^{-2} \frac{du}{dt} = -u^{-2} \frac{du}{d\psi} \dot{\psi} = -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\psi} \quad (62 - 2)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\psi} \right) = -\left( \frac{Lu}{\mu} \right)^2 \frac{d^2u}{d\psi^2} \quad (63 - 2)$$

بتعويض المعادلة (63 - 2) في معادلة لاغرانج القطرية يعطي :

$$\frac{d^2u}{d\psi^2} + u = -\frac{\mu}{L^2} \frac{1}{u^2} F \left( \frac{1}{u} \right)$$

ترتبط معادلة "binet" للمدار التفاضلي إرتباطا مباشرا وتحدد الشكل العام لمسار مدار جسمين حيث يعد هذا الشكل ضروريا لفهم الحركة المدارية لجسمين يتفاعلان عن طريق قوة مركزية .

#### 4.7.2 معادلات هاميلتون

نظرا لأن لاغرانج مركز الكتلة  $L_{cm}$  لايتعلق بالزمن فإن:

$$\frac{dH_{cm}}{dt} = -\frac{\partial L_{cm}}{\partial t} = 0 \quad (64 - 2)$$

وبالتالي يعتبر هاميلتون مركز الكتلة  $H_{cm}$  ثابت حركة ونظرا للتحويل إلى إحداثيات مركز الكتلة قد يتعلق بالزمن فإن  $H_{cm} \neq E$  أي أنها لاتساوي الطاقة الإجمالية لأن الطاقة الحركية لحركة مركزالكتلة(مضمنة) قد تم حذفها نظرا لعدم وجود أي تحول [1].

$$H_{cm} = T_{cm} + V = E_{cm} \quad (65 - 2) \quad \text{إذن :}$$

أي أن هاميلتون مركز الكتلة  $H_{cm}$  يساوي الطاقة الكلية لمركز الكتلة ويمكن كتابته باستخدام الكمون الفعال  $V_{eff}$ .

$$H_{cm} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{p_r^2}{2\mu} + V_{eff}(r) = E_{cm} \quad (66 - 2)$$

يمكن التعبير على هاميلتون مركز الكتلة من خلال معادلة الطاقة للمدار في المجال المركزي باستخدام المتغير  $u = \frac{1}{r}$  .

تعطى معادلة الطاقة للمدار بـ:

$$\frac{L^2}{2\mu} \left[ \left( \frac{du}{d\psi} \right)^2 + u^2 \right] + V(u^{-1}) = E_{cm} \quad (67 - 2)$$

يسمح إنحفاظ الطاقة باستخدام الهاميلتونيان لحل المشكلات بشكل مباشر على سبيل المثال في حال الكمونات ذات التماثل الكروي حيث:

$$H_{cm} = \frac{\mu r^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = E_{cm} \quad (68 - 2)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E_{cm} - V - \frac{L^2}{2\mu r^2})} \quad (69 - 2)$$

ويمكن الحصول على الزمن بالإعتماد على التكامل:

$$t = \int \frac{\pm dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E_{cm} - V - \frac{L^2}{2\mu r^2})}} + constant \quad (70 - 2)$$

$$dt = \frac{\pm dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E_{cm} - V - \frac{L^2}{2\mu r^2})}} \quad (71 - 2) \quad \text{و}$$

إعتمادا على المعادلة (54 - 2) نكتب:

$$d\psi = \frac{Ldt}{\mu r^2} = \frac{\pm Ldr}{r^2 \sqrt{2\mu (E_{cm} - V - \frac{L^2}{2\mu r^2})}} \quad (72 - 2)$$

$$\psi = \int \frac{\pm Ldr}{r^2 \sqrt{2\mu (E_{cm} - V - \frac{L^2}{2\mu r^2})}} + constant \quad (73 - 2) \quad \text{لذلك}$$

وهذه الأخيرة تعطي العلاقة بين الإحداثيات الزاوية والإحداثيات القطرية التي تحدد المسار وعلى الرغم من أن المعادلتين (73 - 2) و(69 - 2) تعطيان حلا عاما إلا أنه يمكن إستخلاص الحل تحليلي فقط لأشكال معينة من قوانين القوى وتختلف هذه الحلول بالنسبة للتفاعلات التجاذبية والتفاعلات التنافرية [1].

### 1.4.7.2 الميزات العامة لحلول معادلات الحركة

من المفيد النظر إلى الميزات العامة لحلول معادلات الحركة المعطاة بواسطة تمثيل الجسم الواحد المكافئ لحركة الجسمين، حيث تعتمد هذه المدارات على طاقة مركز الكتلة  $E_{cm}$  وهناك 5 احتمالات إعتمادا على طاقة الكتلة المركزية الإجمالية [1].

1/  $E_{cm} > 0$  المسار قطع زائد له مسافة دنيا ولكن ليس هناك حد أقصى، يتم إعطاء أقرب

مسافة بالعلاقة  $\dot{r} = 0$  في نقطة التحول  $E_{cm} = V + \frac{L^2}{2\mu r^2}$ .

$E_{cm} = 0$  /2 المسار هنا عبارة عن قطع مكافئ .

في هذه الحالة يكون للمسار حد أدنى وحد أقصى للمسافة الشعاعية التي

يكون عندها  $\dot{r} = 0$  عند نقاط التحول والطاقة الحركية مساوية للصفر لذا  $E_{cm} = V + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

أما بالنسبة لقانون الجذب  $\vec{F}(r) = \frac{K}{r^2} \vec{r}$  وهو قانون كبلر الأول فإن المسار هو قطع ناقص

يتراوح فيه نصف القطر من  $r_{min}$  إلى  $r_{max}$  يدور شعاع نصف القطر بزاوية  $\Delta\psi$  ويعطى

بالعلاقة:

$$\Delta\psi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\pm L dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E_{cm} - V - \frac{L^2}{2\mu r^2})}} \quad (74 - 2)$$

يصف الشكل العام شكل وردة وهو منحنى مغلق فقط إذا كان  $\Delta\psi$  كسرا منطقيًا ل  $2\pi$  .

في هذه الحالة  $r$  ثابتا مما يعني أن المسار دائريا.  $E_{cm} = V_{min}$  /4

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E_{cm} - V - \frac{L^2}{2\mu r^2})} = 0 \quad (75 - 2)$$

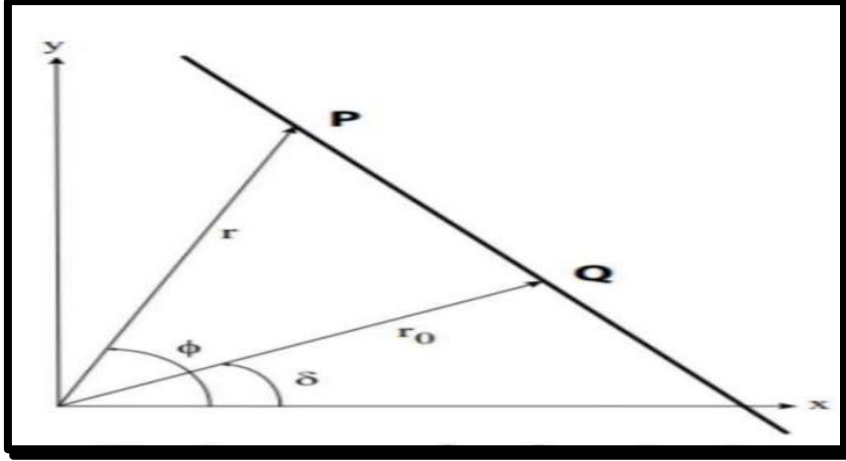
في هذه الحالة يكون الجذر التربيعي تخيليا ولا يوجد حل حقيقي بشكل عام.  $E_{cm} < V_{min}$  /5

مثال: معادلة الحركة لجسم حر [1] :

$$\frac{d^2u(\phi)}{d\phi^2} + u(\phi) = 0 \quad (76 - 2)$$

$$u(\phi) = \frac{1}{r_0} \cos(\phi - \delta) \quad (77 - 2)$$

$$r(\phi) = \frac{r_0}{\cos(\phi - \delta)} \quad (78 - 2)$$



شكل رقم 13: يمثل مسار جسم حر [1].

$$\vec{F}(r) = \frac{K}{r^2} \vec{r} \quad (79 - 2)$$

$$V(r) = \frac{K}{r} \quad (80 - 2)$$

$$\frac{d^2u}{d\psi^2} + u = -\frac{\mu}{L^2} \frac{1}{u^2} k u^2 = -\frac{\mu k}{L^2} \quad (81 - 2)$$

$$y \equiv u + \frac{\mu k}{L^2} \quad (82 - 2)$$

$$\frac{d^2y}{d\psi^2} + y = 0 \quad (83 - 2)$$

$$y = B \cos(\psi - \psi_0) \quad (84 - 2)$$

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{\mu k}{L^2} [1 + \epsilon \cos(\psi - \psi_0)] \quad (85 - 2)$$

$$\epsilon \equiv B \frac{L^2}{\mu k} \quad (86 - 2)$$

$$\psi = \int \frac{\pm du}{\sqrt{\frac{2\mu E_{cm}}{L^2} + \frac{2\mu k}{L^2} u - u^2}} + constant \quad (87 - 2)$$

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{\mu k}{L^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2E_{cm}L^2}{\mu k^2}} \cos(\psi - \psi_0) \right] \quad (88 - 2)$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_{cm}L^2}{\mu k^2}} \quad (89 - 2)$$

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{\mu k}{L^2} [1 + \epsilon \cos(\psi)] = -\frac{\mu k}{L^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2E_{cm}L^2}{\mu k^2}} \cos(\psi) \right] \quad (90 - 2)$$

$$r_{min} = -\frac{L^2}{\mu k [1 + \epsilon]} \quad (91 - 2)$$

$$a = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max}) = \frac{1}{2} \left( \frac{L^2}{\mu k[1+\epsilon]} + \frac{L^2}{\mu k[1-\epsilon]} \right) = \frac{L^2}{\mu k[1-\epsilon^2]} \quad (92 - 2)$$

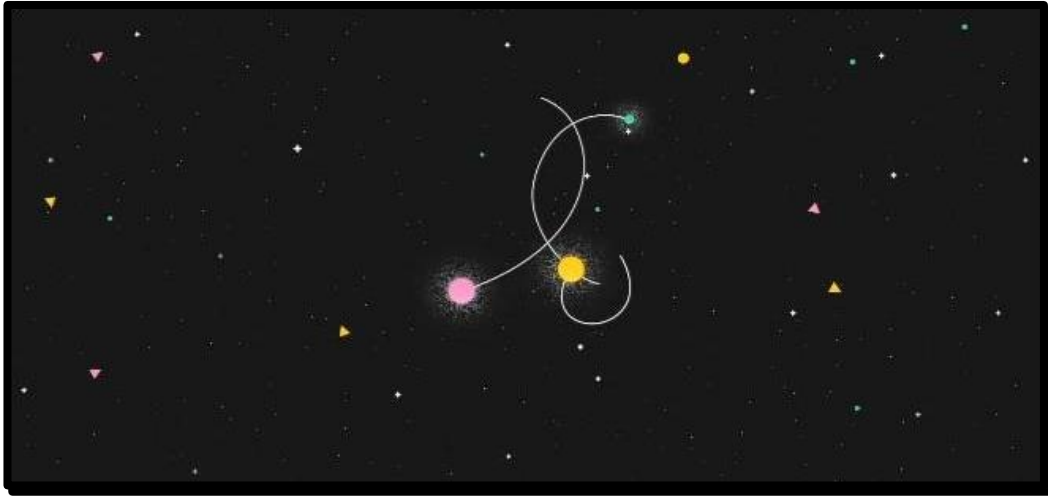
$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{L^2}{\mu k\sqrt{1-\epsilon^2}} \quad (93 - 2)$$

$$k = -Gm_1m_2$$

$$A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{\pi L}{\sqrt{-\mu k}} a^{\frac{3}{2}} \quad (94 - 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\psi} = \frac{L}{2\mu}$$

## 8.2 مشكلة الأجسام الثلاثة



شكل رقم 14: يمثل مسارات عشوائية لثلاثة أجسام.

إن مسألة الأجسام الثلاثة التي تصف تفاعل ثلاث كتل من خلال الجاذبية دون أي قيود على مواقعها الابتدائية وسرعاتها قد جذبت العديد من العلماء لأكثر من 300 عام ومن بينهم العالم "نيوتن" حيث تعتبر مشكلة الأجسام الثلاثة ضرورية لفهم مجموعة متنوعة من العمليات الفلكية وحتى لفهم فئة واسعة من المسائل في الميكانيك فكان من السهل على العلماء تحديد معادلات 3 أجسام تتفاعل فيما بينها ولكن من الصعب حلها [6].

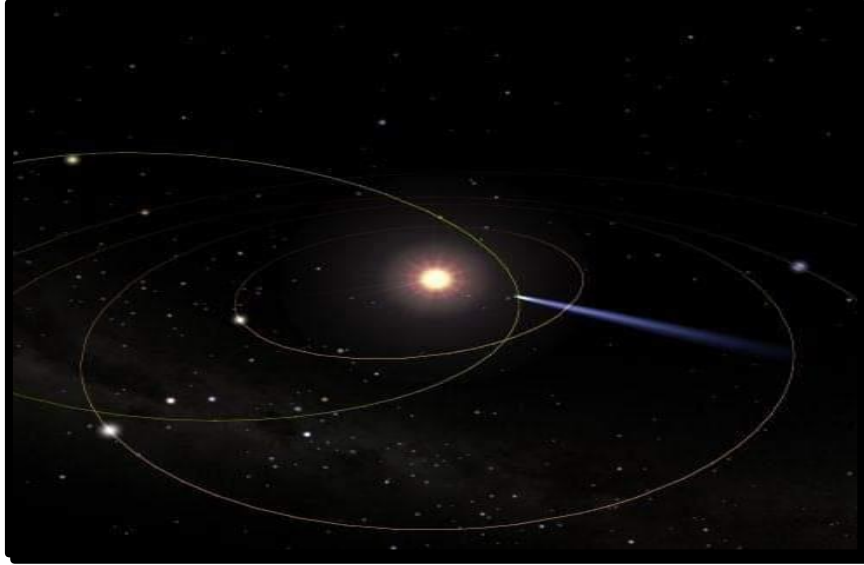
بالنسبة لمسألة الجسمين المقابلة لـ  $N = 2$  أعطى نيوتن حلا دوريا مغلق الشكل ومع ذلك بالنسبة لمشكلة ثلاثة أجسام  $N = 3$  يصعب العثور على مدارات دورية حيث تحصل Euler و Lagrange على مدار واحد عام 1740 وكلاهما لنظام ثلاثي بثلاث كتل متساوية.

ووجد العالم Poincare عام 1890 أن مسارات نظام ثلاثي الأجسام فوضوية أي غير دورية وتكون حساسة للظروف الأولية أي ما يعرف بتأثير الفراشة.

### 2-8-1 مشكلة الأجسام الثلاثة في الفيزياء الفلكية:

في الفيزياء الفلكية عندما ندرس تفاعل ثلاث أجسام (شمس، أرض، قمر) هنا سنتعامل مع نظام ثنائي وجسم ثالث وكمثال على ذلك نأخذ شمس وأرض كنظام ثنائي يمكن معاملته ككيان واحد مع خصائص داخلية معينة يتم وصفه من خلال كتلة مكوناته وطاقته وعزمه الحركي حيث يتفاعل هذا الكيان الثنائي مع الجسم الثالث (القمر) مرة واحدة أو بشكل متكرر مما يغير الخصائص الداخلية للثنائي في الوقت نفسه يمتص الجسم الثالث أي طاقة يتم إخراجها من النظام الثنائي وذلك من أجل الحفاظ على الطاقة الكلية [6].

في الوقت الحالي يتم تحفيز علم الفيزياء الفلكية لثلاث أجسام بشكل أساسي من خلال الحاجة إلى فهم دور الثنائيات في تطور النظم النجمية في معظم الأوقات يتصرف الثنائي تماما مثل نجم واحد في نظام نجمي تكون المسافات بين النجوم كبيرة مقارنة بأحجامها ومدارات الثنائيات القريبة لفترة قصيرة نسبيا يتفاعل الثنائي والنجم الثالث بقوة فيتشكل ثنائي جديد ونجم ثالث جديد المشهد تكمن أهمية هذه العملية في قدرتها على إعادة توزيع الطاقة والعزم الحركي بكفاءة [6].

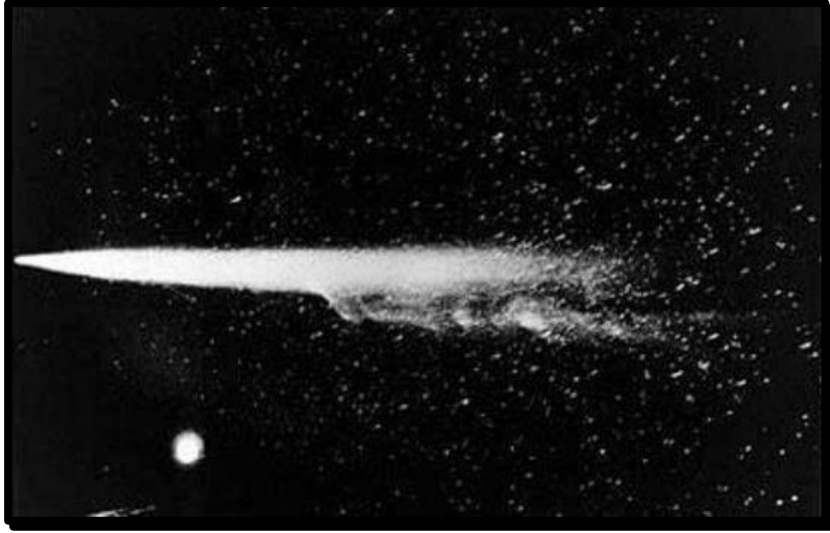


شكل رقم 15: يمثل مسارات ثلاث نجوم.

#### • المذنبات قصيرة الأمد

حيث يعتبر أصل المذنبات قصيرة الأمد من أقدم مشاكل الأجسام الثلاثة وهي مذنبات ذات فترة مدارية تقل عن 200 سنة يعتقد أنها نشأت من سحابة أورث وهي سحابة ضخمة من الجليد والصخور التي تقع على بعد حوالي سنة ضوئية من الشمس، عندما يقترب مذنب هالي من الشمس يمكن أن تجذبه جاذبية أحد الكواكب مثل المشتري إلى مدار قصير الأمد، في هذه الحالة الأجسام الثلاثة هي الشمس والكوكب والمذنب وهنا يتم استخدام التقريبات لحساب مدار المذنب بعد مروره بالقرب من الكوكب.

إنّ النظرية التي فسرت أصل المذنبات قصيرة الأمد هي نظرية الإلتقاط وهناك العديد من الأدلة التي تدعم هذه النظرية على سبيل المثال نجد أن المذنبات قصيرة الأمد تكون لها مدارات مائلة للغاية مما يشير إلى أنها تأثرت بكوكب كبير بالإضافة إلى ذلك تكون هذه الأخيرة غنية بالماء دلالة على أنها نشأت من سحابة أورث [6].



شكل رقم 16: يمثل مذنب هالي أشهر المذنبات الدورية تم تصويره 13ماي 1910 الجسم  
المستدير كوكب الزهرة الصورة من مرصد لويل *Lowell* [6].

### 2.8.2 معادلات الحركة لثلاثة أجسام

لدينا:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G \sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (96 - 2)$$

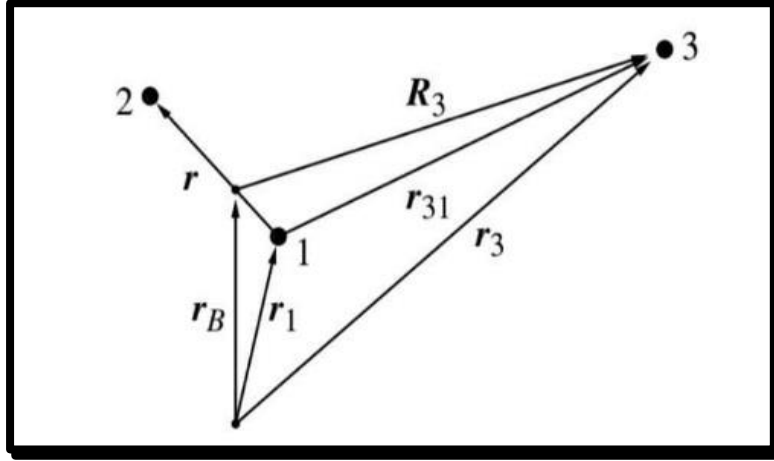
$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G \left( m_2 \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + m_3 \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} \right) \quad (97 - 2)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -G \left( m_3 \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} + m_1 \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \right) \quad (98 - 2)$$

باستعمال دالة لاغرانج لصياغة معادلات الحركة يتم استخدام الفرق في الإحداثيات بدلا من الإحداثيات نفسها، للحصول على التسارع بين الجسمين 1 و 2 نقوم بطرح المعادلة (2 - 98) من المعادلة (2 - 97) نجد [6]:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_{12} &= -G \left[ (m_2 + m_1) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + m_3 \left( \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} + \frac{\vec{r}_{32}}{r_{32}^3} \right) \right] \\ &= -G \left[ M \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + m_3 \left( \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} + \frac{\vec{r}_{32}}{r_{32}^3} + \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} \right) \right] \\ &= G \left( m_3 W - M \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \end{aligned} \quad (99 - 2)$$

$$W = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3} \quad \text{حيث: (100 - 2)}$$



شكل رقم 17: يمثل نظام جاكوبي وهو نظام من ثلاثة أجسام تدور حول مركز كتلة مشترك، يتميز النظام بأن الجسمين يشكلان نظاما ثنائيا بينما الجسم الثالث أكثر ابتعادا [6].

في نظام إحدائيات جاكوبي يعتبر نظام ثلاثة أجسام مكونا من جزأين ثنائي محدد بوضوح وجسم ثالث بعيد نسبيا كما موضح في الشكل (2 - 14) حيث يتم استخدام مركز كتلة الثنائي كنقطة مرجعية موضعها  $r_B$  وشعاع الموضع النسبي للثنائي هو  $r_{21} = r$ .

من تعريف مركز الكتلة (2 - 1):

$$\begin{aligned} \vec{r}_B &= \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_1} \vec{r}_1 \\ &= \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{aligned} \quad (101 - 2)$$

أو من الشكل:

$$\begin{aligned} \vec{r}_B &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_2 \\ &= \vec{r}_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{aligned} \quad (102 - 2)$$

نسمي شعاع موضع الجسم الثالث بالنسبة لمركز الكتلة  $R_3 = r_3 - r_B$  عندها نكتب:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{31} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \vec{R}_3 + \vec{r}_B - \vec{r}_1 = \vec{R}_3 + \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_{32} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = \vec{R}_3 + \vec{r}_B - \vec{r}_2 = \vec{R}_3 - \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r}\end{aligned}\quad (103 - 2)$$

$$\begin{aligned}\frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r}_{31} + \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r}_{32} &= \left( \frac{m_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2} \right) \vec{R}_3 + \left( \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} \right) \vec{r} \\ \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r}_{31} + \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r}_{32} &= \vec{R}_3\end{aligned}\quad (104 - 2)$$

باستخدام المعادلات (99 - 2) و(104 - 2) فإن معادلات الحركة هي :

$$\ddot{\vec{r}} = -G \left[ (m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} + m_3 \left( \frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3} - \frac{\vec{r}_{32}}{r_{32}^3} \right) \right] \quad (105 - 2)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{R}}_3 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_{31} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}}_{32} \\ &= G \left[ m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} W - M \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3} + m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} (-W) - M \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\vec{r}_{32}}{r_{32}^3} \right] \\ &= -GM \left( \frac{m_1}{m_1+m_2} \frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3} + \frac{m_2}{m_1+m_2} \frac{\vec{r}_{32}}{r_{32}^3} \right)\end{aligned}\quad (106 - 2)$$

إذا كان  $r_{31} \approx r_{32} \approx R_3, r \ll R_3$  تصبح معادلتا الحركة (105 - 2) و(106 - 2) من الشكل:

$$\ddot{\vec{r}} = -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (107 - 2)$$

$$\ddot{\vec{R}}_3 = -GM \frac{\vec{R}_3}{R_3^3} \quad (108 - 2)$$

حيث المعادلتين (107 - 2) و(108 - 2) منفصلتين وتظهر أن حركة الجسمين الأول والثاني تشبه حركة جسمين في مدار إهليلجي حول بعضها البعض وحركة الجسم الثالث تشبه حركة جسم في مدار إهليلجي حول مركز كتلة الجسمين الأول والثاني ومع ذلك فإن هذه المعادلات ليست دقيقة تماماً لأنها لاتأخذ في الاعتبار التفاعلات بين الأجسام الثلاثة .

### 3.8.2 ثوابت الحركة في مشكلة الأجسام الثلاثة

العزم الحركي في نظام مكون من ثلاث أجسام يكون بالصيغة التالية [6]:

$$\vec{L} = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 + m_3 \vec{r}_3 \times \dot{\vec{r}}_3 \quad (109 - 2)$$

أما في نظام إحداثيات مركز الكتلة عبارة العزم الحركي تصبح لعبارة بالشكل التالي:

$$\vec{L} = \frac{m_1 m_2 m_3}{M} \left( \frac{\vec{r}_{12} \times \dot{\vec{r}}_{12}}{m_3} + \frac{\vec{r}_{23} \times \dot{\vec{r}}_{23}}{m_1} + \frac{\vec{r}_{31} \times \dot{\vec{r}}_{31}}{m_2} \right) \quad (110 - 2)$$

وفي نظام جاكوبي من الشكل:

$$\vec{L} = \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \dot{m}(\vec{R}_3 \times \dot{\vec{R}}_3) \quad (111 - 2)$$

$\dot{m}$  تمثل الكتلة المختزلة لثلاثة أجسام:

$$\dot{m} = \frac{m_3(m_1+m_2)}{M} \quad (112 - 2)$$

يطلق على المستوي المكون من مركز الكتلة والعمودي على  $L$  بالمستوى الثابت عندما  $L = 0$  تكون الحركة محصورة في مستوي يحتوي على جميع الأشعة الأربعة  $\vec{r}, \vec{r}, \vec{R}_3, \vec{R}_3$  وتسمى بالفضاء المتحرك هذه لأشعة تمثل مواقع الأجسام الثلاثة ومركز الكتلة.

- في مشكلة الأجسام الثلاثة فإن مركز الكتلة للنظام هو النقطة التي تتوازن فيها جميع القوى إذا افترضنا أن  $L = 0$  أي أن جميع الأجسام الثلاثة تقع على نفس الخط حيث مركز الكتلة يكون على هذا الخط .

### ➤ تكامل الطاقة لمشكلة الأجسام الثلاثة

تكامل الطاقة هي معادلة تصف كيفية تغير طاقة النظام بمرور الوقت حيث تتكون من طاقة حركية وكامنة من الشكل [6]:

$$E = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2) - G \left( \frac{m_1 m_2}{r_{21}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \quad (113 - 2)$$

### 4.8.2 عزم العطالة لنظام ثلاثي الجسم

في نظام ثلاثي الجسم يمكن حساب عزم العطالة اعتماداً على إحداثيات مركز الكتلة باستخدام الصيغة التالية [6]:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 \quad (114 - 2)$$

باستخدام صيغة لاغرانج :

$$I = \frac{m_1 m_2 m_3}{M} \left( \frac{r_{21}^2}{m_3} + \frac{r_{13}^2}{m_2} + \frac{r_{32}^2}{m_1} \right) \quad (115 - 2)$$

باستخدام صيغة جاكوبي :

$$I = \mu r^2 + mR_3^2 \quad (116 - 2)$$

باشتقاق عزم العطالة مرتين بالنسبة للزمن:

$$\dot{I} = 2m_1\dot{r}_1 \cdot \dot{r}_1 + 2m_2\dot{r}_2 \cdot \dot{r}_2 + 2m_3\dot{r}_3 \cdot \dot{r}_3 \quad (117 - 2)$$

$$\ddot{I} = 2m_1(v_1^2 + \dot{r}_1 \cdot \ddot{r}_1) + 2m_2(v_2^2 + \dot{r}_2 \cdot \ddot{r}_2) + 2m_3(v_3^2 + \dot{r}_3 \cdot \ddot{r}_3) \quad (118 - 2)$$

ومنه يترتب على ذلك :

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2T + V = 2E - V \quad (119 - 2)$$

### ➤ مسألة الجسمين في ميكانيك هاميلتون في بعدين

تعطى الطاقة الحركية لكوكب كتلته  $m$  بالنسبة للشمس باستعمال الإحداثيات القطبية هي [6]:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \quad (120 - 2)$$

والطاقة الكامنة:

$$V = -\frac{\varsigma m}{r} \quad (121 - 2)$$

$$\varsigma = G(m + M_\odot) \quad \text{حيث:}$$

كمية الحركة المقابلة للإحداثيات  $r$  و  $\phi$  هي:

$$p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \quad (122 - 2)$$

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

بأخذ العلاقات التالية :

$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\varsigma}{r}$$

$$k = r^2\dot{\phi} = \sqrt{a\varsigma(1 - e^2)} \quad (123 - 2)$$

$$h = -\frac{\varsigma}{2a}$$

يعطى الهاميلتونيان بدلالة الإحداثيات  $r$  و  $\phi$  وكمية حركتهم المترافقة بالصيغة التالية:

$$H = T + V = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) - \frac{\zeta m}{r} \quad (124 - 2)$$

وبما أن  $h$  هي الطاقة الإجمالية لكل وحدة كتلة فلدينا أيضا :

$$H = mh \quad (125 - 2)$$

نظرا لأن الجاذبية الكونية تتعلق بالبعد فقط فمن الطبيعي استخدام الإحداثيات القطبية ثم يكون الهاميلتونيان دوري  $\phi$  حيث يمكننا استخدام هذه النتيجة مباشرة ومع ذلك سنقوم بجميع الحسابات بالتفصيل لنرى كيف تتصرف الإحداثيات القطبية في حل معادلات هاميلتون-جاكوبي [6].

سنحاول إيجاد نظام إحداثيات يكون فيه الهاميلتونيان معدوما، لتكن الدالة المولدة لهذا التحويل هي :

$$S = S(r, \phi, p_1, p_2, t) \quad (126 - 2)$$

حيث  $p_1$  و  $p_2$  هما كميتا الحركة الجديدتين وتكونا ثابتتين حيث تعطي معادلة هاميلتون-جاكوبي :

$$H \left( r, \frac{\partial S}{\partial r}, \frac{\partial S}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

و

$$\frac{1}{2m} \left( \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right) - \frac{\zeta m}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (127 - 2)$$

هناك طريقة عامة من أجل حل هذه المعادلات التفاضلية الجزئية وهي فصل المتغيرات وبافتراض أنه يمكن التعبير عن الحل بـ:

$$S(r, \phi, t) = S_r(r) + S_\phi(\phi) + S_t(t) \quad (128 - 2)$$

حيث  $S_r$  تتعلق فقط بالبعد  $r$ ،  $S_\phi$  تتعلق بالزاوية  $\phi$  و  $S_t$  تتعلق بالزمن  $t$ ، ثم نقوم باستبدال هذا الحل في المعادلة (127 - 2).

$$\frac{1}{2m} \left( \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dS_\phi}{d\phi} \right)^2 \right) - \frac{\zeta m}{r} = - \frac{dS_t}{dt} \quad (129 - 2)$$

الجانب الأيسر هو دالة  $r$  و  $\phi$  فقط أما الجانب الأيمن يتعلق بالزمن، لايمكن للمعادلة أن تتحقق إلا إذا كان للطرفين نفس القيمة الثابتة حيث نشير لهذه الأخيرة بـ  $\alpha_1$  ونتحصل على :

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = -\alpha_1$$

$$\frac{1}{2m} \left( \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dS_\phi}{d\phi} \right)^2 \right) - \frac{\zeta m}{r} = \alpha_1$$

في المعادلة الأخيرة  $\left( \frac{dS_\phi}{d\phi} \right)^2$  يتعلق فقط بـ  $\phi$  وبالتالي يجب أن يكون لدينا ثابتا آخر  $\alpha_2$  ومنه تصبح لدينا ثلاث معادلات تفاضلية لتحديد الدالة المولدة S:

$$\frac{dS_t}{dt} = -\alpha_1$$

$$\frac{dS_\phi}{d\phi} = \alpha_2 \quad (130 - 2)$$

$$\frac{dS_r}{dr} = \sqrt{2m \left( \alpha_1 + \frac{\zeta m}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}$$

فتصبح الدالة المولدة S بالصيغة التالية :

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_2 \phi + \int dr \sqrt{2m \left( \alpha_1 + \frac{\zeta m}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} \quad (131 - 2)$$

لا نحتاج إلى تقييم التكامل بل إلى مشتقاته فقط ، نستخدم ثوابت التكامل  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  للتعبير عن كميتا الحركة الجديدة [6].

$$p_1 = \alpha_1$$

$$p_2 = \alpha_2$$

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial p_1} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} \quad (132 - 2)$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial p_2} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}$$

تحديد قيمة الثوابت  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  حيث :

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = H - \alpha_1 = 0$$

لدينا :

$$\alpha_1 = H = mh \quad (133 - 2)$$

وبالتالي فإن  $\alpha_1$  (كمية الحركة  $p_1$ ) هو الطاقة الكلية في إطار إحداثيات المرجع الشمسي باستخدام خصائص الدالة المولدة لدينا :

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = p_\phi$$

ورأينا سابقا أن  $\frac{\partial S}{\partial \phi} = \alpha_2$  لذلك :

$$\alpha_2 = p_\phi = mr^2 \dot{\phi} = mk = m\sqrt{a\zeta(1-e^2)} \quad (134-2)$$

ويعبر هذا عن طول ناقل كمية الحركة للكوكب فتصبح كمية الحركة الجديدة بالصيغة التالية :

$$p_1 = \alpha_1 = mh = -\frac{m\zeta}{2a} \quad (135-2)$$

$$p_2 = \alpha_2 = m\sqrt{a\zeta(1-e^2)}$$

يتم الحصول على الإحداثيات الجديدة  $Q_1$  و  $Q_2$  بواسطة الدالة المولدة :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \int \frac{m dr}{\sqrt{2m\left(\alpha_1 + \frac{\zeta m}{r}\right) - \left(\frac{\alpha_2}{r}\right)^2}} \\ &= -t + I_1 \\ Q_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \phi - \frac{\alpha_2}{m} \int \frac{m dr}{r^2 \sqrt{2m\left(\alpha_1 + \frac{\zeta m}{r}\right) - \left(\frac{\alpha_2}{r}\right)^2}} \end{aligned} \quad (136-2)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \phi - \frac{\alpha_2}{m} \int \frac{m dr}{r^2 \sqrt{2m\left(\alpha_1 + \frac{\zeta m}{r}\right) - \left(\frac{\alpha_2}{r}\right)^2}} \\ &= \phi - \frac{\alpha_2}{m} I_2 \end{aligned}$$

بعد تقييم التكاملين  $I_1$  و  $I_2$  وهما الجزء الأكثر تعقيدا في المشكلة نبدأ باستبدال قيم  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  التي تم الحصول عليها في (135-2) :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{m dr}{\sqrt{2m\left(-\frac{m\zeta}{2a} + \frac{m\zeta}{r}\right) - \frac{m^2 a \zeta (1-e^2)}{r^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-\frac{r^2}{a} + 2r - a(1-e^2)}} \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{m dr}{r^2 \sqrt{2m \left( -\frac{m\zeta}{2a} + \frac{m\zeta}{r} \right) - \frac{m^2 a \zeta (1-e^2)}{r^2}}} \quad (137-2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int \frac{dr}{r \sqrt{-\frac{r^2}{a} + 2r - a(1-e^2)}}$$

الطريقة المعتاد إستعمالها هي الإرتياب المركزي مما يسهل علينا تبسيط هذه التكاملات بشكل كبير حيث نستبدل  $r$  بـ  $E$ :

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (138-2)$$

$$dr = ae \sin E dE$$

تقييم التكامل  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int \frac{a(1 - e \cos E) ae \sin E dE}{\sqrt{-a(1 - e \cos E)^2 + 2a(1 - e \cos E) - a(1 - e^2)}}$$

$$= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\zeta}} \int \frac{e \sin E (1 - e \cos E) dE}{-1 + 2e \cos E - e^2 \cos^2 E + 2 - 2e \cos E - 1 + e^2}$$

$$= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\zeta}} \int \frac{e \sin E (1 - e \cos E) dE}{e \sin E} \quad (139-2)$$

$$= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\zeta}} \int (1 - e \cos E) dE$$

$$= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\zeta}} (E - e \sin E)$$

العامل  $a^{-3/2} \zeta^{-1/2}$  هو معكوس متوسط الحركة وبالتالي:

$$Q_1 = -t + I_1 = -t + \frac{1}{n} (E - e \sin E) = -t + \frac{M}{n}$$

وبما أن متوسط الإرتياب  $M$  يعطى بـ  $M = n(t - \tau)$ :

$$Q_1 = -\tau \quad (140-2)$$

وبالتالي فإن المتغير  $Q_1$  وقت الحضيض الشمسي (مع الإشارة سالبة).

حساب التكامل  $I_2$  يبدأ بطريقة مماثلة:

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int \frac{ae \sin E dE}{a(1 - e \cos E)\sqrt{ae \sin E}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a\zeta(1 - e^2)}} \int \frac{\sqrt{1 - e^2} dE}{1 - e \cos E} \quad (141 - 2)$$

نحتاج هنا إلى إستبدال آخر يشبه التكامل المعبر عنه بالعلاقة  $\sin \phi = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}$  حيث  $\phi$  هي الإرتياب الحقيقي نرمز لهذا الأخير بالرمز  $f$  فنحصل على :

$$\sin f = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}$$

باشتقاق العبارة :

$$\cos f df = \sqrt{1 - e^2} \frac{(1 - e \cos E) \cos E - e \sin^2 E}{(1 - e \cos E)^2} dE$$

$$= \sqrt{1 - e^2} \frac{\cos E - e}{(1 - e \cos E)^2} dE$$

$$= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} \cos f dE$$

ومنه :

$$df = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} dE$$

تكامل  $I_2$  هو  $df$  وقيمة التكامل هي  $f$  وبالتالي المتغير  $Q_2$  هو :

$$Q_2 = \phi - \frac{\alpha_2}{m} I_2 = \phi - \frac{\alpha_2}{m} \frac{f}{\sqrt{a\zeta(1 - e^2)}} = \phi - f$$

$$f = \phi - Q_2 \quad (142 - 2)$$

يتم قياس الإرتياب الحقيقي  $f$  من نقطة الحضيض الشمسي ومن بعض الإتجاهات العشوائية وبالتالي يجب أن يكون  $Q_2$  المسافة الزاوية للحضيض الشمسي من هذا الإتجاه العشوائي إذا كان هذا الأخير العقدة الصاعدة فإن  $Q_2$  هو مجرد وسيط الحضيض الشمسي  $\omega$  [6].

وبالتالي :

$$\begin{aligned} K &= 0 \\ Q_1 &= -\tau \\ Q_2 &= \omega \quad (143 - 2) \\ p_1 &= mh \\ p_2 &= m\sqrt{a\zeta(1 - e^2)} \end{aligned}$$

تم إيجاد إطار إحداثيات يختفي فيه الهاميلتونيان وتصبح جميع الإحداثيات وكمية الحركة ثابتة بمعنى آخر المتغيرات القانونية في معدلات الحركة هي أيضا ثابتة تكامل المعدلات [6].

وبما أن الهاميلتونيان الأصلي لا يتعلق بالزمن فإن :

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

توضح أن  $S_1$  يجب أن يكون  $-\alpha_1 t$  حيث  $\alpha_1$  هي القيمة الثابتة لـ  $H$  حيث هذا الأخير  $\phi$  لا يتعلق بالزاوية فإنه يترتب على معادلات هاميلتون للحركة أن كمية الحركة  $p_\phi$  ثابتة وبالتالي :

$$p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{dS_\phi}{d\phi}$$

حيث:  $S$  يجب أن يكون  $\alpha_2 \phi$  ثابتا أيضا .

يمكن كتابة جزء الدالة المولدة المقابلة للإحداثيات القطبية مباشرة دون الحاجة إلى فصل المتغيرات في معادلات هاميلتون - جاكوبي .

### ➤ مشكلة الجسمين في ميكانيك هاميلتون (ثلاثة أبعاد)

الطاقة الحركية للكوكب في الإحداثيات الكروية:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

تعطى الطاقة الكامنة بـ:

$$V = -\frac{\zeta m}{r}$$

كمية الحركة المترافقة للإحداثيات الكروية :

$$p_r = m\dot{r} \quad (144 - 2)$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

$$p_\phi = mr^2 \cos \theta \dot{\phi}$$

تعطى معادلة هاميلتون لجسمين بدلالة الإحداثيات الكروية بالشكل التالي :

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \cos^2 \theta} \right) - \frac{\zeta m}{r} \quad (145 - 2)$$

ومعادلة هاميلتون-جاكوبي بالشكل :

$$\frac{1}{2m} \left( \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right) - \frac{\zeta m}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (146 - 2)$$

يمكن حل معادلة هاميلتون-جاكوبي باستخدام الحل التجريبي :

$$S_t(t) + S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\phi(\phi) = 0 \quad (147 - 2)$$

يتم تقسيم معادلة هاميلتون - جاكوبي إلى أربع معادلات من الشكل التالي :

$$\frac{dS_t}{dt} = -\alpha_1$$

$$\frac{dS_\phi}{d\phi} = \alpha_2$$

$$\left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \theta} = \alpha_3^2 \quad (148 - 2)$$

$$\left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{r^2} = 2m \left( \alpha_1 + \frac{\zeta m}{r} \right)$$

وقبل المتابعة سندرس معنى الثوابث  $\alpha_i$  حيث كان لدينا من قبل العلاقة التالية:

$$\alpha_1 = mh \quad (149 - 2)$$

لإيجاد قيمة الثابت  $\alpha_2$  نستخدم المعادلة (148 - 2) ونلاحظ أن مشتق الدالة المولدة على الجانب

الأيسر هو كمية الحركة  $p_\phi$ :

$$\alpha_2 = \frac{\partial S}{\partial \phi} = p_\phi = mr^2 \cos^2 \theta \dot{\phi}$$

نظراً لأن إسقاط شعاع نصف القطر على المستوى  $xy$  هو  $r \cos \theta$  وإسقاط شعاع السرعة هو  $r \dot{\phi} \cos \theta$  يمكن أن نجزم أن  $\alpha_2$  هو إسقاط الجداء الشعاعي لـ  $r$  و  $\dot{r}$ ، نبحت عن المركبة  $z$  لعزم الحركة الدوراني  $mr \times \dot{r}$  ويتم الحصول على هذه المركبة عن طريق أخذ مبدأ أشعة الإسقاطات  $mr$  و  $\dot{r}$  في المستوي  $xy$  فإن المركبة  $z$  لكمية الحركة هي [6]:

$$mr \cos \theta r \cos \theta \dot{\phi} = mr^2 \cos^2 \theta \dot{\phi} = \alpha_2$$

وبالتالي فإن الثابت  $\alpha_2$  هو المركبة  $z$  لكمية الحركة و يمكن كتابته كالتالي:

$$\alpha_2 = m\sqrt{a\zeta(1-e^2)} \cos l \quad (150-2)$$

إيجاد قيمة الثابت  $\alpha_3$ :

$$\alpha_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \theta}} = \sqrt{p_\theta^2 + \frac{p_\theta^2}{\cos^2 \theta}}$$

$$= \sqrt{m^2 r^4 \dot{\theta}^2 + \frac{m^2 r^4 \cos^4 \theta \dot{\phi}^2}{\cos^2 \theta}} \quad (151-2)$$

$$= mr^2 \sqrt{\dot{\theta}^2 + \cos^2 \theta \dot{\phi}^2}$$

$$= mr^2 \dot{f}$$

حيث  $f$  هو الإرتياب الحقيقي ويمثل الزاوية المقاسة في إتجاه الحركة وهي كمية الحركة الكلية :

$$\alpha_3 = m\sqrt{a\zeta(1-e^2)} \quad (152-2)$$

تعطى كمية الحركة الجديدة بـ:

$$p_1 = \alpha_1 = mh \quad (153-2)$$

$$p_2 = \alpha_2 = m\sqrt{a\zeta(1-e^2)} \cos l$$

$$p_3 = \alpha_3 = m\sqrt{a\zeta(1-e^2)}$$

بعد ذلك نبحت عن إحداثيات جديدة عن طريق الدالة المولدة :

$$S = -t\alpha_1 + \phi\alpha_2 + \int d\theta \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \theta}} + \int dr \sqrt{2m \left(\alpha_1 + \frac{\zeta m}{r}\right) - \frac{\alpha_3^2}{r^2}} \quad (154-2)$$

الإحداثيات الجديدة عبارة عن مشتقات كالتالي:

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \int \frac{m dr}{\sqrt{2m \left( \alpha_1 + \frac{\zeta m}{r} \right) - \frac{\alpha_3^2}{r^2}}} = -t + I_1$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \phi - \alpha_2 \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \theta}}} = \phi - \alpha_2 I_3 \quad (155 - 2)$$

$$Q_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \alpha_3 \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \theta}}} - \frac{\alpha_3}{m} \int \frac{m dr}{r^2 \sqrt{2m \left( \alpha_1 + \frac{\zeta m}{r} \right) - \frac{\alpha_3^2}{r^2}}} = \alpha_3 \left( I_4 - \frac{I_3}{m} \right)$$

حيث أن  $I_1$  و  $I_2$  التكاملات التي تم تقييمها في القسم السابق [6].

يتعين علينا حساب التكاملين  $I_3$  و  $I_4$ ، نبدأ بـ  $\alpha_3 I_4$  نكتب  $\alpha_2$  و  $\alpha_3$  بدلالة العناصر المدارية:

$$\alpha_3 I_4 = \alpha_3 \int \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \theta}}} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{(\alpha_2)^2}{\alpha_3^2 \cos^2 \theta}}}$$

$$= \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 l}{\cos^2 \theta}}} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 l}} \quad (156 - 2)$$

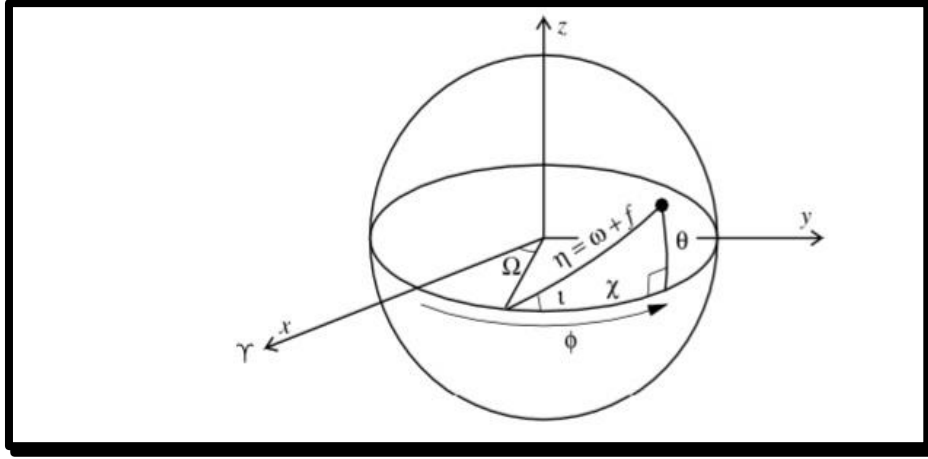
نستبدل الزاوية  $\theta$  بـ  $\eta$  المقاسة من العقدة الصاعدة الموضحة في الشكل 17. باستعمال الدوال المثلثية

نحصل على عبارة الجيب  $\sin$ :

$$\frac{\sin \theta}{\sin l} = \frac{\sin \eta}{\sin \pi/2}$$

أو

$$\sin \theta = \sin l \sin \eta \quad (157 - 2)$$



شكل رقم 18: يمثل الكميات التي تظهر في معادلة هاملتون-جاكوبي ثلاثية الأبعاد [6].

العلاقة (2 - 156) تعطي لنا الصيغ اللازمة لتحويل التكامل من الشكل:

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 l \sin^2 \eta} \quad (2 - 158)$$

$$\cos \theta d\theta = \sin l \cos \eta d\eta$$

بتعويض العبارة (2 - 158) في (2 - 156) نحصل على:

$$\alpha_3 I_4 = \int \frac{\sin l \cos \eta d\eta}{\sqrt{1 - \sin^2 l \sin^2 \eta - \cos^2 l}} \quad (2 - 159)$$

$$= \int \frac{\sin l \cos \eta d\eta}{\sqrt{\sin^2 l (1 - \sin^2 \eta)}} = \int d\eta = \eta$$

وفي الأخير نتحصل على :

$$\alpha_3 I_4 = \eta \quad (2 - 160)$$

يتم تقييم التكامل المتبقي بطريقة مماثلة نبدأ بحذف الثوابت  $\alpha_2$  و  $\alpha_3$  [6]:

$$\begin{aligned} \alpha_2 I_3 &= \alpha_2 \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta \sqrt{\alpha_3^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2 \theta}}} \\ &= \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta \sqrt{1 - \frac{(\frac{\alpha_2}{\alpha_3})^2}{\cos^2 \theta}}} \quad (2 - 161) \\ &= \int \frac{\cos l d\theta}{\cos^2 \theta \sqrt{1 - \frac{\cos^2 l}{\cos^2 \theta}}} \end{aligned}$$

باستعمال العلاقات المثلثية نجد:

$$\tan \theta \cot l = \sin \chi \quad (162 - 2)$$

وبالتالي:

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \cos \chi \tan l d\chi \quad (163 - 2)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \sin^2 \chi \tan^2 l$$

التعويض في التكامل (161 - 2) يعطي :

$$\begin{aligned} \alpha_2 I_3 &= \int \frac{\cos l \cos \chi \tan l d\chi}{\sqrt{1 - (1 + \sin^2 \chi \tan^2 l) \cos^2 l}} \\ &= \int \frac{\sin l \cos \chi d\chi}{\sqrt{1 - \cos^2 l - \sin^2 \chi \sin^2 l}} \quad (164 - 2) \\ &= \int \frac{\sin l \cos \chi d\chi}{\sqrt{\sin^2 l (1 - \sin^2 \chi)}} \\ &= \int d\chi = \chi \end{aligned}$$

وبالتالي الإحداثيات الجديدة تكتب من الشكل:

$$Q_1 = -t + I_1 = -t + \frac{M}{n} \quad (165 - 2)$$

$$Q_2 = \phi - \alpha_2 I_3 = \phi - \chi$$

$$Q_3 = \alpha_3 I_4 - \frac{\alpha_3}{m} I_2 = \eta - \frac{\alpha_3}{m \sqrt{a\zeta(1 - e^2)}} f = \eta - f$$

كما ذكرنا سابقا  $Q_1 = -\tau$  من الشكل (18) يمكننا أن نرى أن  $\phi - \chi$  هو خط طول العقدة الصاعدة و  $\eta - f$  هو وسيط الحضيض الشمسي وبالتالي يمكننا التعبير عن الإحداثيات الأساسية بدلالة العناصر المدارية المألوفة بطريقة بسيطة [6].

$$Q_1 = -\tau$$

$$Q_2 = \Omega \quad (166 - 2)$$

$$Q_3 = \omega$$

تعطى كمية الحركة المقابلة بالعلاقة التالية:

$$p_1 = mh = -\frac{m\zeta}{2a}$$

$$p_2 = m\sqrt{a\zeta(1-e^2)} \cos l \quad (167-2)$$

$$p_3 = m\sqrt{a\zeta(1-e^2)}$$

لقد قمنا الآن بحل معادلة هاملتون - جاكوبي لجسمين بشكل كامل حيث جميع المتغيرات الأساسية هي ثابت مثل العناصر المدارية القياسية يمكن استخدامها لتحديد موقع الكوكب [6].

### عناصر ديلوناي

لقد وجدنا طريقة بسيطة لوصف نظام مكون من جسمين وهي عبارة عن إطار إحداثيات يختفي فيه الهاميلتونيان وجميع المتغيرات في معادلات الحركة وهي نفسها ثابت تكامل المعادلات [6]. سنقدم مجموعة مختلفة من المتغيرات الأساسية التي تستخدم بشكل متكرر في الميكانيك الفلكي تظهر كتلة الكوكب كثابت مضاعف في الهاميلتونيان وكمية الحركة القانونية يمكن حذفها وهكذا نحصل على المتغيرات القانونية المبسطة التالية [6]:

$$q_1 = -\tau$$

$$q_2 = \Omega$$

$$q_3 = \omega$$

$$p_1 = -\frac{\zeta}{2a} \quad (168-2)$$

$$p_2 = m\sqrt{a\zeta(1-e^2)} \cos l$$

$$p_3 = m\sqrt{a\zeta(1-e^2)}$$

باستثناء الإحداثية  $q_1$  فإن الإحداثيات  $q_2, q_3$  عبارة عن زوايا، لجعل مجموعة الإحداثيات أكثر إتساقاً نستبدل  $q_1$  بمتوسط الإرتياب  $M = n(t - \tau)$  مع الحفاظ على الإحداثيات الأخرى.

$$h = q_2 = \Omega$$

$$g = q_3 = \omega$$

$$l = n(t + q_1) \quad (169-2)$$

$$H = p_2 = m\sqrt{a\zeta(1-e^2)} \cos l$$

$$G = p_3 = m\sqrt{a\zeta(1-e^2)}$$

$$L = ?$$

$h$  كما لا يجب الخلط بينها وبين  $h$  (الطاقة لكل وحدة كتلة المعرفة سابقاً)،  $g$  و  $l$  هي الإحداثيات الجديدة اصطلح على تسميتها بهذه الرموز.

يتعين علينا البحث عن الهاميلتونيان الجديد  $K$  والعزم الحركي  $L$  بطريقة تظل مجموعة المتغيرات أساسية

$$F = \left( nL - \frac{3\zeta}{2a} \right) (t + q_1) + q_2 H + q_3 G \quad (170 - 2)$$

الدالة  $F$  سوف تقوم بتوليد التحويل الصحيح، إن الثابت الموجود في الحد الأول ضروري لجعل المتغيرات الجديدة بسيطة وبالتالي نحصل على :

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial q_1} = -\frac{3\zeta}{2a} + nL$$

و

$$L = \frac{1}{n} \left( -\frac{\zeta}{2a} + \frac{3\zeta}{2a} \right) = \frac{\zeta}{an} = \frac{\zeta}{a\sqrt{\zeta}a^{-3/2}} = \sqrt{a\zeta}$$

يكتب الهاميلتونيان الجديد  $K$  (الهاميلتون القديم  $H$  معدوم) بالصيغة التالية:

$$K = \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{3\zeta}{2a} + \frac{\zeta}{a} = -\frac{\zeta}{2a} = -\frac{\zeta^2}{2L^2}$$

يتم وصف مدار الكوكب بالكميات التالية :

$$l = n(t - \tau) = M$$

$$g = \omega$$

$$h = \Omega$$

$$L = \sqrt{a\zeta} \quad (171 - 2)$$

$$G = \sqrt{a\zeta(1 - e^2)}$$

$$H = \sqrt{a\zeta(1 - e^2)} \cos l$$

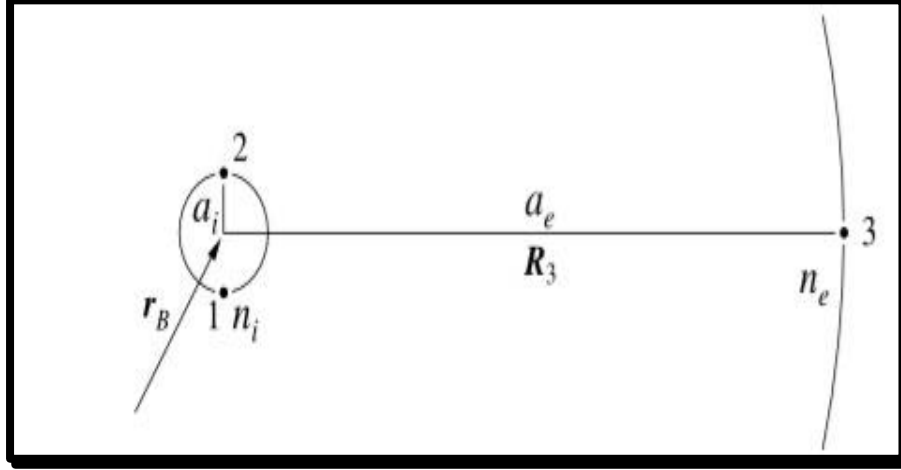
$$K = -\frac{\zeta^2}{2L^2}$$

تسمى هذه الكميات بعناصر ديلوناي.

### 5.8.2 الصيغة الهاميلتونية لمشكلة الأجسام الثلاثة

بالنسبة لمشكلة الأجسام الثلاثة يكون من المناسب عادة استخدام نموذج جاكوبي وعناصر "ديلوناي

"Delaunay" لوصف كل من المدار الداخلي  $i$  والمدار الخارجي  $e$  كما هو موضح في الشكل (19).



شكل رقم 19: يمثل الأنظمة الداخلية ( $i$ ) والخارجية ( $e$ ) [6].

باستخدام العناصر المتأرجحة نكتب:

$$\begin{aligned}
 l_i &= M_i & L_i &= n_i a_i^2 \\
 g_i &= \omega_i & G_i &= n_i a_i^2 \sqrt{1 - e_i^2} \\
 h_i &= \Omega_i & H_i &= n_i a_i^2 \sqrt{1 - e_i^2} \cos l_i & (172 - 2) \\
 l_e &= M_e & L_e &= n_e a_e^2 \\
 g_e &= \omega_e & G_e &= n_e a_e^2 \sqrt{1 - e_e^2} \\
 h_e &= \Omega_e & H_e &= n_e a_e^2 \sqrt{1 - e_e^2} \cos l_e
 \end{aligned}$$

يتم حساب العناصر المتأرجحة من القيم الأساسية كمايلي :

$$a_i = \left( \frac{2}{r} - \frac{v^2}{Gm_B} \right)^{-1}$$

$$a_e = \left( \frac{2}{R_3} - \frac{V_3^2}{GM} \right)^{-1}$$

$$n_i = \sqrt{Gm_B/a_i^3}$$

$$n_e = \sqrt{GM/a_e^3} \quad (173 - 2)$$

$$e_i = \sqrt{1 + \frac{(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 - r^2 v^2}{Gm_B a_i}}$$

$$e_e = \sqrt{1 + \frac{(\vec{R}_3 \cdot \dot{\vec{R}}_3)^2 - R_3^2 V_3^2}{GM a_e}}$$

ويتم إيجاد القيمتان الأوليتان عن طريق حل المحور شبه الرئيسي من الصيغة  $v = \sqrt{\zeta \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$  للسرعة المدارية ويتم إعطاء الحركات المتوسطة  $n_i$  و  $n_e$  بواسطة  $n = \frac{2\pi}{p} = \sqrt{\zeta a^{-\frac{2}{3}}}$  أخيراً نتبع الإنحرافات من العلاقة [6]  $k = \sqrt{a\zeta(1 - e^2)} = r\sqrt{v^2 - \dot{r}^2}$ .

يكتب الهاميلتونيان من الشكل:

$$H = -\frac{\zeta^2}{2L_i^2} - \frac{m^2}{2L_e^2} + Gm_3 \left( \frac{m_B}{R_3} - \frac{m_1}{r_{13}} - \frac{m_2}{r_{23}} \right) \quad (174 - 2)$$

ومعادلات هاميلتون للحركة من الشكل:

$$\begin{aligned} \dot{L}_i &= -\frac{\partial H}{\partial l_i} & \dot{L}_e &= -\frac{\partial H}{\partial l_e} \\ \dot{G}_i &= -\frac{\partial H}{\partial g_i} & \dot{G}_e &= -\frac{\partial H}{\partial g_e} \\ \dot{H}_i &= -\frac{\partial H}{\partial h_i} & \dot{H}_e &= -\frac{\partial H}{\partial h_e} \\ \dot{l}_i &= -\frac{\partial H}{\partial L_i} & \dot{l}_e &= -\frac{\partial H}{\partial L_e} \\ \dot{g}_i &= -\frac{\partial H}{\partial G_i} & \dot{g}_e &= -\frac{\partial H}{\partial G_e} \\ \dot{h}_i &= -\frac{\partial H}{\partial H_i} & \dot{h}_e &= -\frac{\partial H}{\partial H_e} \end{aligned} \quad (175 - 2)$$

لكي نتمكن من حل هذه المعادلات علينا التعبير على القيم  $r_{13}, R_3$  و  $r_{23}$  في الهاميلتونيان بدلالة عناصر "ديلوناوي" *"Delaunay"* هذه ليست مهمة سهلة وتجعل إستخدام الطريقة الهاميلتونيانة أكثر صعوبة مما يبدو عليه في البداية .

يمكن كتابة المكونات الثلاثة للعزم الحركي الكلي باستخدام عناصر ديلوناوي *"Delaunay"* على النحو التالي:

$$L = (K_i \sin h_i + K_e \sin h_e - K_i \sin h_i - K_e \sin h_e, H_i + H_e) \quad (176 - 2)$$

حيث :

$$K_i = \sqrt{G_i^2 - H_i^2}, \quad K_e = \sqrt{G_e^2 - H_e^2} \quad (177 - 2)$$

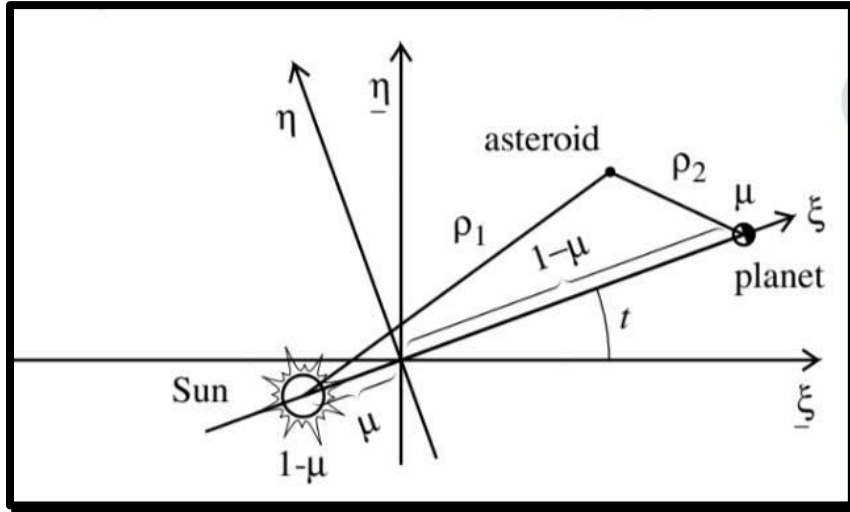
### 1.5.8.2 مشكلة الأجسام الثلاثة المنحنية المستوية المقيدة

بعد مسألة الجسمين تأتي الأنظمة الأكثر تعقيدا والتي تتكون من ثلاثة أجسام ومثال على ذلك (شمس، كوكب، كويكب) حيث يتم فرض بعض الافتراضات للحفاظ على النظام بسيطا وتعني كلمة مقيد هنا أن كتلة الكويكب صغيرة جدا لا تؤثر بشكل كبير على حركة الأجرام الأساسية (الشمس والكوكب) تتحرك الأجرام الأساسية في مدارات دائرية ويفترض أن الكويكب يتحرك في نفس المستوي حيث يمكن إهمال الاضطرابات الناجمة عن الجسم الثالث ويتم حساب مواضع الأجرام الأساسية تحليليا [6].

#### ➤ أنظمة الإحداثيات

تستخدم أنظمة الإحداثيات لتحديد موقع جسم ما في الفضاء في مشكلة الأجسام الدائرية المقيدة حيث يتم استخدام نظام إحداثيات خاص يجعل خصائص النظام تعتمد على إحداثية واحدة  $\mu$  والتي تمثل نسبة كتلة الكوكب إلى الشمس [6].

- يتم إختيار وحدة الكتلة بحيث تكون كتلة الشمس  $1 - \mu$  هذا يعني أن كتلة الكوكب هي  $\mu$ .
- المسافة بين النجوم الأساسية هي وحدة المسافة حيث تكون المسافة بين الكوكب والشمس من مركز الكتلة  $\mu - 1$  وعلى  $\mu$  التوالي.
- يتم إختيار وحدة الزمن بحيث يكون متوسط حركة النجوم الأساسية هو  $n = 1$  وبالتالي فإن متوسط الإنحراف يساوي الزمن.



شكل رقم 20: يمثل مرجع الإحداثيات الثابتة  $\underline{\xi}\underline{\eta}$  والإحداثيات الدورانية  $\underline{\xi}\underline{\eta}$  لثلاثة أجسام [6].

ومن هنا يتبع أن ثابت الجاذبية عبارة عن وحدة حيث المعامل المتبقي الوحيد هو  $\mu$  لوصف المدارات نحتاج أولاً إلى إطار جانبي ثابت  $\underline{\xi}\underline{\eta}$  يكون أصلها في مركز كتلة النظام كما هو موضح في الشكل (20) في هذا المرجع تكون مواضع الأجسام الأساسية متعلقة بالزمن كالتالي [6]:

$$\begin{aligned} \text{الشمس} \quad & \begin{cases} \underline{\xi} = -\mu \cos t \\ \underline{\eta} = -\mu \sin t \end{cases} \\ \text{كوكب} \quad & \begin{cases} \underline{\xi} = (1 - \mu) \cos t \\ \underline{\eta} = (1 - \mu) \sin t \end{cases} \end{aligned} \quad 178 - 2$$

الأشياء تبدو أبسط في مرجع الدراسة تكون فيه الأجسام الأساسية ثابتة لذلك سنستخدم أيضاً مرجع هيليو مركزي (مبدؤه مركز الشمس)  $\underline{\xi}\underline{\eta}$  ولكن مع توجيه المحور الموجب  $\xi$  في اتجاه الكوكب.

يدور المرجع الشمسي بسرعة زاوية  $n = 1$  في هذا الأخير إحداثيات الشمس هي  $(-\mu, 0)$  وإحداثيات الكوكب  $(1 - \mu, 0)$  نرسم لموقع الكويكب ب  $\xi, \eta$  والمسافة بين الكويكب والشمس والكوكب على التوالي بواسطة  $\rho_1$  و  $\rho_2$  [6].

### 2.5.8.2 معادلات الحركة

إن معادلات نيوتن للحركة في المرجع الدوراني مطلوبة الآن انطلاقاً من معادلات هاميلتون في المرجع الفلكي باستعمال مبدأ العطالة ومن ثم نستخدم تحويلاً قانونياً للحصول على المعادلات في المرجع الدوراني (المتزامن) [6].

باستخدام كمية الحركة المترافقة المقابلة للإحداثيات  $\xi$  و  $\eta$  بواسطة  $p_{\xi}$  و  $p_{\eta}$  فإن هاميلتون الكويكب هو [6]:

$$\underline{H} = \frac{1}{2}(\rho_{\xi}^2 + \rho_{\eta}^2) - \frac{1-\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2} \quad (179 - 2)$$

حيث:

$$\rho_1 = \left( (\underline{\xi} + \mu \cos t)^2 + (\underline{\eta} + \mu \sin t)^2 \right)^{1/2}$$

$$\rho_2 = \left( (\underline{\xi} - (1 - \mu) \cos t)^2 + (\underline{\eta} - (1 - \mu) \sin t)^2 \right)^{1/2} \quad (180 - 2)$$

ترتبط الإحداثيات  $\xi$ ،  $\eta$  و  $\xi$ ،  $\eta$  بالمعادلات التالية :

$$\underline{\xi} = \xi \cos t - \eta \sin t$$

$$\underline{\eta} = \xi \sin t + \eta \cos t \quad (181 - 2)$$

يمكن تحقيق التحويل إلى المرجع الدوراني  $\xi\eta$  باستخدام الدالة المولدة التالية:

$$F = F(p_{\xi}, p_{\eta}, \xi, \eta)$$

$$= - \left( (\xi \cos t - \eta \sin t) p_{\xi} - (\xi \sin t + \eta \cos t) p_{\eta} \right) \quad (182 - 2)$$

حيث أن هذا يعطي فقط المعادلة (181 - 2) للإحداثيات:

$$\underline{\xi} = - \frac{\partial F}{\partial p_{\xi}} = \xi \cos t - \eta \sin t$$

$$\underline{\eta} = - \frac{\partial F}{\partial p_{\eta}} = \xi \sin t + \eta \cos t$$

كمية الحركة الجديدة :

$$p_{\xi} = - \frac{\partial F}{\partial \xi} = p_{\xi} \cos t + p_{\eta} \sin t$$

$$p_{\eta} = - \frac{\partial F}{\partial \eta} = -p_{\xi} \sin t + p_{\eta} \cos t \quad (183 - 2)$$

التحويل الذي تم تطبيقه على الجسم ماهو إلا دوران وبالتالي تظل مجموع مربعات كمية الحركة ثابتة وهو أمر يسهل التحقق منه باستخدام المعادلات (183 - 2)

$$p_{\underline{\xi}}^2 + p_{\underline{\eta}}^2 = p_{\xi}^2 + p_{\eta}^2$$

الهاميلتونيان الجديد يكتب من الشكل:

$$H = \underline{H} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2}(p_{\underline{\xi}}^2 + p_{\underline{\eta}}^2) - \frac{1-\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2} + \xi p_{\underline{\xi}} \sin t + \eta p_{\underline{\xi}} \cos t - \xi p_{\underline{\eta}} \cos t + \eta p_{\underline{\eta}} \sin t$$

يمكن كتابة العبارات الأربعة الأخيرة على النحو التالي:

$$\xi (p_{\underline{\xi}} \sin t - p_{\underline{\eta}} \cos t) + \eta (p_{\underline{\xi}} \cos t + p_{\underline{\eta}} \sin t) = \xi(-p_{\eta}) + \eta p_{\xi}$$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$H = \frac{1}{2}(p_{\underline{\xi}}^2 + p_{\underline{\eta}}^2) + p_{\xi}\eta - p_{\eta}\xi - \frac{1-\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2} \quad (184 - 2)$$

حيث:

$$\rho_1^2 = (\xi + \mu)^2 + \eta^2$$

$$\rho_2^2 = (\xi - (1 - \mu))^2 + \eta^2 \quad (185 - 2)$$

- معادلات الحركة للكويكب في المرجع التزامني: يتم اشتقاق معادلات الحركة من خلال استخدام مبدأ هاميلتون [6]:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\xi}} = p_{\xi} + \eta$$

$$\dot{\eta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\eta}} = p_{\eta} - \xi$$

$$\dot{p}_{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \right) + p_{\eta} \quad (186 - 2)$$

$$\dot{p}_{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \right) - p_{\xi}$$

نتحصل على معادلات نيوتن للحركة بحذف كمية الحركة من (2 - 186).

يتم العثور على مشتقات كمية الحركة من المعادلتين الأوليتين [6]:

$$\dot{p}_{\xi} = \dot{\xi} - \dot{\eta}$$

$$\dot{p}_{\eta} = \dot{\eta} + \dot{\xi}$$

عند التعويض في العبارة (3 - 186) نجد:

$$\dot{\xi} - \dot{\eta} = \dot{\eta} + \dot{\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \right)$$

$$\dot{\eta} + \dot{\xi} = -\dot{\xi} + \dot{\eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \right)$$

وبالتالي معادلات الحركة هي:

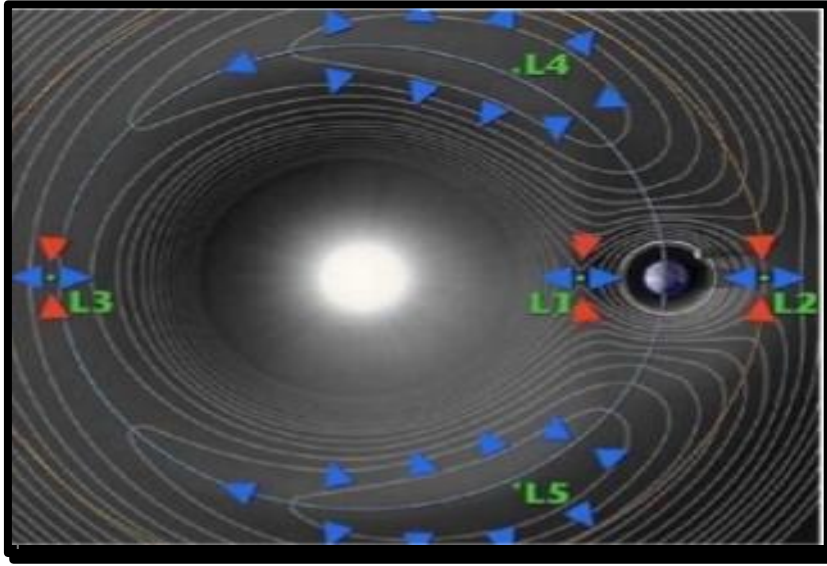
$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\end{aligned}\quad (187 - 2)$$

حيث تعتبر  $\Omega$  إمكانية فعالة وتعطى بـ:

$$\Omega = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}\quad (188 - 2)$$

الترميز  $-2\dot{\eta}$  و  $2\dot{\xi}$  يشير إلى تأثير كوريوليس وهي ظاهرة تحدث في الأنظمة الدورانية أما  $\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)$  يشير إلى كمون الطرد المركزي وهو القوة التي تسحب الأجسام بعيدا عن محور الدوران .

## 6.8.2 نقاط لاغرانج



شكل رقم 21: يمثل مخطط للإمكانات الفعالة لنظام الجاذبية بين الشمس والأرض في المرجع الدوراني نقاط لاغرانج  $L$  الخمسة (الشكل أنشأ من طرف وكالة ناسا NASA) [1].

تحتوي المعادلة  $\Omega$  على خمس نقاط أساسية خاصة في النظام الشمسي وهي  $L_1 \dots L_5$  حيث يمكن لجسم صغير مثل القمر الصناعي أن يدور حول جسمين أكبر مثل الشمس والأرض دون الحاجة إلى أي دافع [1].

- النقطة  $L_1$  :

تقع النقطة  $L_1$  بين الشمس والأرض على بعد حوالي 1.5 مليون كيلومتر من الأرض في هذه النقطة تتوازن قوى جاذبية الشمس والأرض مما يسمح للقمر الصناعي بالدوران حول الأرض.

- النقطة  $L_2$  :

تقع النقطة  $L_2$  خلف الأرض على بعد حوالي 1.5 مليون كيلومتر من الأرض في هذه النقطة تتوازن قوى جاذبية الشمس والقمر مما يسمح للقمر الصناعي بالدوران حول الأرض.

- النقطة  $L_3$  :

تقع النقطة  $L_3$  أمام الأرض على بعد حوالي 1.5 مليون كيلومتر من الأرض في هذه النقطة تتوازن قوى جاذبية الشمس والقمر ،مما يسمح للقمر الصناعي بالدوران حول الأرض.

- النقطة  $L_4$  :

تقع النقطة  $L_4$  إلى جانب الأرض و في نفس مدارها حول الشمس ولكنها تتقدم على الأرض بحوالي 45 درجة في هذه النقطة تتوازن قوى جاذبية الشمس والأرض والقمر مما يسمح للقمر الصناعي بالدوران حول الأرض.

• النقطة  $L_5$ :

تقع النقطة  $L_5$  إلى جانب الأرض وفي نفس مدارها حول الشمس ولكنها تتأخر عن الأرض بحوالي 45 درجة في هذه النقطة تتوازن قوى جاذبية الشمس والأرض والقمر مما يسمح للقمر الصناعي بالدوران حول الأرض.

نجد مواقع هذه النقاط بحل معادلات الحركة (2 - 187) حيث نجد لها حلا بسيطا [6]:

$$\xi = \eta = 0 \quad (189 - 2)$$

عندما تؤول مشتقات  $\Omega$  إلى الصفر يمكن للجسم الثالث أن يبقى ساكنا عند هذه النقطة

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0 \quad (190 - 2)$$

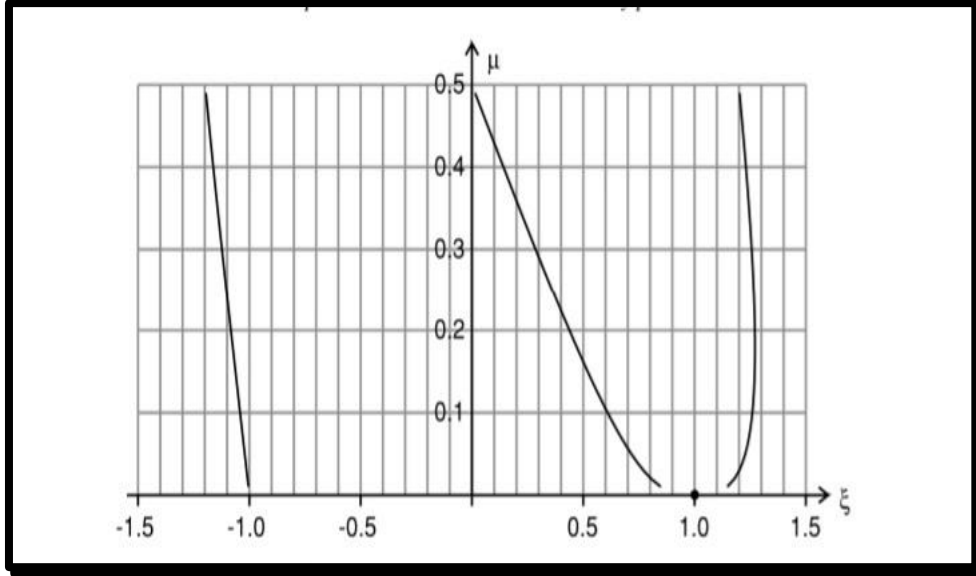
عند حساب هذه المشتقات نتحصل على معادلتين لنقاط لاغرانج كالتالي:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \xi - \frac{(1-\mu)(\xi+\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(\xi-(1-\mu))}{\rho_2^3} = 0 \quad (191 - 2)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \eta - \frac{(1-\mu)\eta}{\rho_1^3} - \frac{\mu\eta}{\rho_2^3} = 0 \quad (192 - 2)$$

نعوض في المعادلة (2 - 192) بالقيمة  $\eta = 0$  وبالتالي نتحصل على معادلة واحدة وعند حلها نراعي إشارات الجذور التربيعية من الشكل:

$$\xi - \frac{(1-\mu)(\xi+\mu)}{[(\xi+\mu)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu(\xi-(1-\mu))}{[(\xi-(1-\mu))^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (193 - 2)$$



شكل رقم 22: يمثل منحنى إحداثيات نقاط لاغرانج  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_3$  لمختلف قيم  $\mu$  [6].

يتطلب تبسيط تلك المعادلات الإهتمام بإشارات الجذور التربيعية علي يمين كل من الأجسام الأساسية، تكون  $\xi + \mu$  و  $\xi - (1 - \mu)$  قيم موجبة بينما الأجسام الأساسية سالبة ويتم أخذ الفرع السالب للجذر التربيعي وعلى يسار هذه الأجسام تكون كل القيم سالبة و بالتالي تنشأ المعادلات الثلاثة التالية [6]:

$$1 - \mu < \xi \quad \xi - \frac{1-\mu}{(\xi+\mu)^2} - \frac{\mu}{(\xi-(1-\mu))^2} = 0$$

$$-\mu < \xi < 1 - \mu \quad \xi - \frac{1-\mu}{(\xi+\mu)^2} + \frac{\mu}{(\xi-(1-\mu))^2} = 0 \quad (194 - 2)$$

$$\xi < -\mu \quad \xi + \frac{1-\mu}{(\xi+\mu)^2} + \frac{\mu}{(\xi-(1-\mu))^2} = 0$$

مبدئياً المعادلات الناتجة من الدرجة الخامسة لكن لكل واحدة جذر واحد في النطاق التي تكون صالحة فيه يمكن حل المعادلات بسهولة بالطرق العددية لقيم  $L_1$  و  $L_2$  و  $L_3$  من أجل قيم مختلفة لـ  $\mu$  عندما يكون  $\eta \neq 0$  وبإستغلال العلاقة (192 - 2) نتحصل على [6]:

$$1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} = 0 \quad (195 - 2)$$

بضرب  $\mu + \xi$  في العلاقة (195 - 2) ثم طرحها من العلاقة (192 - 2) تصبح العلاقة من الشكل:

$$\frac{\mu}{\rho_2^3} - \mu = 0 \quad (196 - 2)$$

من أجل  $\rho_2 = 1$

بضرب  $\xi - (1 - \mu)$  في العلاقة (192 - 2) نتحصل على :

$$\xi - (1 - \mu) - \frac{(1-\mu)(\xi-(1-\mu))}{\rho_1^3} - \frac{\mu(\xi-(1-\mu))}{\rho_2^3} = 0 \quad (197 - 2)$$

بطرح العلاقة (197 - 2) من العلاقة (191 - 2) نتحصل على :

$$1 - \mu - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} = 0 \quad (198 - 2)$$

$$(\xi - (1 - \mu))^2 + \eta^2 = 1$$

$$(\xi + \mu)^2 + \eta^2 = 1 \quad (199 - 2)$$

$$\xi = \frac{1}{2} - \mu$$

$$\eta = \pm \sqrt{3/2} \quad (200 - 2)$$

## 9.2 الصيغة الهاميلتونية لعدة أجسام تتفاعل فيما بينها

مشكلة الأجسام المتعددة هي مشكلة رياضية معقدة صادفت العديد من العلماء في ميكانيك الكم وعلم الفلك عند التعامل مع مجموعة من الأجسام تتفاعل فيما بينها بواسطة قوة مركزية تم العثور على عدد قليل من الحلول الخاصة لكن لم يتم العثور على حل عام وهذا راجع لوجود قيد رياضي لكل متغير إذ يجب أن تكون هناك معادلة واحدة على الأقل كما يعرف هذا السلوك بالفوضوي أو العشوائي من قبل الفيزيائيين وهو سمة مهمة لدراسة هذا النظام.

هذه المشكلة ذات تطبيقات واسعة في الفيزياء الفلكية إذ تتعلق بحركة عدة أجسام تحت تأثير جاذبيتهم كحركة النظام الشمسي حيث تدور الكواكب حول الشمس وفق مدارات إهليلجية يمكن وصف حركة هذا النظام بواسطة معادلات رياضية تحليلية .

عبارة لاغرانج لعدة أجسام تتفاعل فيما بينها بواسطة قوة محافظة

$$L = T - V$$

الطاقة الحركية لعدة أجسام :

$$T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

عبارة الكمون لعدة أجسام :

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

أو بالشكل التالي :

$$V = G \sum_i m_i \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}} \quad (201 - 2)$$

ومنه الشكل العام للاغرانجيا الكلي يكتب:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathbf{M} v_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - G \sum_i m_i \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}} \quad (202 - 2)$$

عبارة هاميلتون لعدة أجسام :

$$H = T + V$$

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{M} v_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + G \sum_i m_i \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}} \quad (203 - 2)$$

تعتبر نظرية الإضطرابات متعددة الأجسام من أهم الطرق الأساسية لدراسة نظام مكون من  $N$  جسم عن طريق هاميلتوني مكون من جزء قابل للحل وجزء غير قابل للحل تحليليا حيث تستخدم عندما لانجد حل نظري لهذه الأنظمة .

**الخاتمة**

تطرقنا في هذا الفصل لدراسة كيفية تفاعل الأجسام السماوية مع بعضها البعض والصعوبات التي واجهت علماء الفيزياء في إيجاد حل عام لوصف سلوك حركتها نظرا أن للنظام حركة فوضوية اكتشف العالم بوانكاريه أن المشكلة تظهر حساسية عالية للمواضع الأساسية وسرعة الأجسام، في القرن العشرين أتاح تطور أجهزة الكمبيوتر إمكانية إعادة صياغة المشكلة بمساعدة عملية المحاكاة التي تحاكي حركة الأجسام تعتمد خوارزميات المحاكاة الكلاسيكية على طرق عددية متطورة لحساب مدارات الأجسام بدقة كبيرة وهذا ما سنراه في الفصل الموالي.

---

## الفصل الثالث:

أمثلة عن المحاكاة العددية

---

الفصل الثالث: أمثلة عن المحاكاة العددية.

**1.3 مقدمة**

تطرقنا في الفصل السابق إلى أن مشكلة الأجسام المتعددة هي مشكلة معقدة على الرغم من عدم وجود حل عام إلا أن هناك العديد من الأساليب التقريبية التي تم تطويرها لدراسة هذا النظام ألا وهي استعمال الحاسوب بالإعتماد على خوارزميات عديدة والتي سوف نستخدم البعض منها لدراسة هذا النظام المعقد و الفوضوي عن طريق لغة Python.

برزت لغة البرمجة Python في السنوات الأخيرة كأحدى أهم لغات البرمجة وأكثرها إنتشاراً، وذلك لكونها لغة سهلة التعلم وتعد حالياً الخيار الأنسب للمبتدئين للإنتقال في عالم البرمجة، بالإضافة لذلك فهي مناسبة للإستخدام في مختلف المجالات ومنها تعلم الآلة وتحليل البيانات وتطوير الويب Web ومما يساهم في تبني Python من قبل الكثيرين هو توفر دعم هائل جداً في مجتمعات المبرمجين وامتلاكها مجموعة واسعة من المكتبات التي تختصر الكثير من التحديات وتسهل عمل المبرمجين.

**2.3 لغة برمجية Python**

هي لغة برمجة عالية المستوى ابتكرها Guido Van Rossum أثناء عمله في مركز أبحاث Centrum Wiskunde and Informatica عام 1986، وقد استسقى هذه اللغة من عدة لغات من أمثال سابقة : ABC, Icon, C++ حيث استمر تطوير هذه اللغة وإضافة الكثير من المزايا عليها في كل إصدار جديد منها.

وتعتبر Python من اللغات النصية التي لا تحتاج إلى بناء لتشغيل البرنامج المكتوب بها وهي من اللغات السهلة والمنظمة بشكل صارم مما أهلها لتكون الخيار الأول في صنف اللغات الأكاديمية التي تعتمد في الجامعات، وكذلك الشركات مثل:

- Yahoo
- Google
- NASA
- RealNetworks

**1.2.3 مميزات لغة Python**

- ✓ تتميز لغة Python أنها لغة قابلة للفهم وبالتالي التزايد والإقبال الكبير لتعلمها
- ✓ لاحتياج إلى بناء أو ربط مثل لغة : C, C++, Fortran وغيرهم من لغات البرمجة.
- ✓ تقوم بالعمل على مختلف المجالات مثل الذكاء الاصطناعي وتطوير التطبيقات وتحليل البيانات وغيرها.
- ✓ دعم أنواع البيانات والعمليات عالية المستوى.
- ✓ تحميل آلي لوحدات C و C++.

**2.2.3 عيوب لغة Python**

- بطيء في الأداء بالمقارنة مع اللغات البرمجية كونه لا يتم تحويل البرنامج إلى لغة الآلة ما يستلزم وجود وسيط بين البرنامج والآلة مما يبطئ أدائها.
- تحجز مساحة كبيرة من الذاكرة.

**3.2.3 أساسيات لغة Python**

لا تختلف أساسيات لغة Python عن أي أساسيات لغة برمجية أخرى إذ أن هذه القواعد والأساسيات تشترك بها لغات البرمجة وفيها ما يلي:

- الثوابت: عبارة عن قيم لا يمكن تغييرها حتى نهاية تنفيذ البرنامج.
- المتغيرات: تستخدم لحفظ قيمة معينة، وهي عكس الثوابت نستطيع تبديل قيمة هذه المتغيرات أثناء التنفيذ دون حصول أي مشاكل وتنقسم المتغيرات إلى:
  - أرقام (Numbers (INT, Float, complex)
  - نصوص Strings
  - منطقية Boolians
  - جداول Lists, Dictionaries, Tuples.

- **الحلقات التكرارية:** هذه الحلقات تعمل على تنفيذ كود عملية ما أكثر من مرة حسب القيم المحددة لها ومن خلالها تختصر الكثير من الأكواد التي قد تضعف أداء البرنامج.
- **الدوال Function:** الدوال عبارة عن مجموعة أوامر مجمعة في مكان واحد وتنفذ عندما يتم استدعائها عند الحاجة حيث يحتوي Python على مجموعة كبيرة من الدوال الجاهزة مثل Print و min() و max() تسمى Built in Functions. و الدوال التي يقوم المبرمج بتعريفها تسمى User Defined Functions.
- **الجمل الشرطية:** من أجل كتابة برامج جديدة غالبا ما نحتاج أن نضع شروط لتنفيذ عملية ما وهذه الجمل هي التي تساعدنا على فعل.

### 4.2.3 استخدامات لغة Python

من أهم استخدامات وتطبيقات لغة Python

- **برمجة تطبيقات سطح المكتب:**  
تستخدم لغة Python في إنشاء أي نوع من تطبيقات سطح المكتب سواء لوحة تحكم، تطبيق صور، فيديو أو لعبة معينة كما يمكن عمل ذلك بواجهات رسومية أيضا.
- **تطوير المواقع الإلكترونية:**  
قدرة هذه اللغة على تطوير مواقع Web.
- **تحليل إحصاء البيانات وتنظيمها:**  
في الوقت الراهن توجد كمية كبيرة من المعلومات التي نحتاج أن نقوم بتحليلها واحصائها وتنظيمها على أفضل شكل وبما أن Python لغة مرنة وسهلة التعلم وسريعة في هذه المهام فهي الخيار الأنسب لفعل ذلك.
- **برمجة بوت الرد الآلي:**  
تعد لغة Python انسب خيار لكي تقوم بصنع تطبيق يقوم بعمل مهامك المتكررة ويقوم أيضا بالرد على الأسئلة وما شابهها من أمور بصفة آلية فقط أنت تقوم بإدخال المعطيات وهو يقوم ببقية الأمر.
- **تطوير الذكاء الاصطناعي:**

لغة Python تستخدم في الذكاء الاصطناعي بسبب قدرتها على التعامل مع البيانات المعقدة بكل سلاسة أيضا لأنها تمتلك العديد من الخوارزميات والمكاتب الخاصة بالذكاء الاصطناعي.

• **برامج التصميم والرسومات:**

تستطيع هذه اللغة ان تقوم بواسطتها برامج التصميم والرسومات العادية والثنائية والمتحركة أيضا وتوجد الكثير من البرامج تستعمل Python في برامجها مثل Gimp و Blender.

**أهم محررات أكواد Python**

توجد العديد من البرامج التي تستطيع أن تقوم بكتابة الأوامر البرمجية لـ Python من أفضلها:

• برنامج Pay Charm.

• برنامج spyder .

• برنامج Visual Studio Code .

• برنامج Thonny .

• برنامج jupyterLab.

تمتلك لغة البرمجة Python الكثير من المكتبات الجاهزة والمتوفرة في مجالات متعددة مع توفر إرشادات عن كيفية إستخدامها، ولا يسعنا ذكرها لذلك وفيما يلي سوف نذكر أهم مكتبات Python التي إستخدمت في هذا العمل:

• مكتبة numpy تستخدم في الحساب بصفة عامة البسيطة منها والمعقدة كما تسمح بإيجاد حلول المعادلات التفاضلية و التعامل مع المصفوفات بطريقة سهلة حديثة وسريعة أفضل من الطرق التقليدية.

• مكتبة Matplotlib تختص في علم البيانات بشكل عام وهي من أشهر المكاتب في تمثيل البيانات في بعدين أو ثلاثة أبعاد.

• مكتبة Turtle وهي مكتبة خاصة بالرسم الثنائي البعد مع تحريك العناصر المصورة وتتبع المسار.

• مكتبة Scipy تستخدم في مجال العلوم والهندسة حيث تحتوي على العديد من الخوارزميات الرياضية في حالات عديدة يمكنها أن تكون بديل لمكتبة numpy لكن غالبا تكون مكتملة لها.

- مكتبة Sympy وهي مكتبة تعمل نفس عمل المكتبتين numpy و scipy لكنها لا تعطينا حلول رقمية ولكن معادلات تحليلية للحلول أي وبتعبير آخر فإنها تكتب الشكل العام لحل معادلة معينة سواء أكانت معادلة خطية أو معادلة تفاضلية وسوف نعطي مثال على ذلك لاحقاً.
- مكتبة pylab وهي جزء من مكتبة Matplotlib مخصصة للتمثيل البياني وكذلك تحليل البيانات.

### 3.3 كيفية تشغيل برنامج مكتوب بلغة Python

يعرف البرنامج في Python باختصار على أنه سلسلة من تعليمات وضعت لتنفيذ أمر ما، بما أن لغة Python نصية، فإنه يتوجب أن يكون لدينا مفسر اللغة فقط لتشغيل البرنامج وللحصول على هذا الأخير نذهب إلى موقع لغة Python ونقوم بتنزيل المفسر حسب النظام المعمول به:

في هذا العمل إستخدمنا الإصدار python-3.12.2-amd64، وهو آخر إصدار ثابت لغاية كتابة هذه المذكرة. وهو إصدار متكامل يحتوي على أغلب المكتبات المستعملة. غير أنه وإن اقتضت الحاجة أن نثبت مكتبة جديدة يكفي أن نفعل ذلك من خلال كتابة الامر الموالي في شاشة الأوامر "cmd" أو Terminal:

```
pip install name_of_library
```

بحيث أن name\_of\_library هو اسم المكتبة المراد تثبيتها. لكتابة البرنامج سنحتاج إلى محرر نصوص ثم حفظ الملف بلاحقة py بعد ذلك ندخل إلى سطر الأوامر ونكتب:

```
python my_file.py
```

بحيث my\_file.py هو إسم الملف المراد تشغيله. يمكن كذلك تشغيل البرنامج والتأكد من فعاليته مباشرة من خلال برنامج الكتابة المستعمل هذا يضمن لنا صحة العمل الذي نقوم به.

في هذا العمل إستخدمنا برنامج Spyder و Jupyter lab هذا الأخير يكون متضمن في إصدار python-3.12.2، لتشغيل Jupyter lab يكفي أن نكتب الامر التالي : Jupyter lab في شاشة الاوامر « cmd » فتنفتح تلقائياً نافذة داخل متصفح الإنترنت المستعمل.

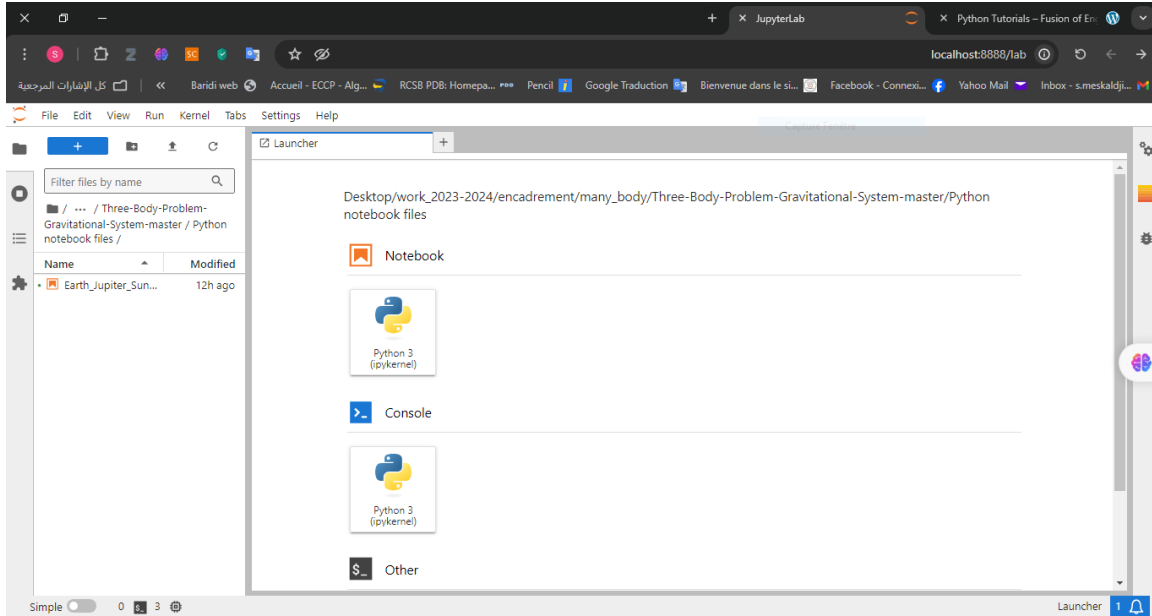
```

C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
Microsoft Windows [version 10.0.19045.4291]
(c) Microsoft Corporation. Tous droits réservés.

C:\Users\DANIEL>jupyter lab

```

شكل رقم 23: طريقة تشغيل المحرر Jupyter lab.



شكل رقم 24: الواجهة الرسمية للمحرر Jupyter lab.

يمكننا عندها فتح Notebook الذي يسمح لنا بكتابة البرنامج وتتبع تطبيقه خطوة خطوة، أو فتح برنامج قد تمت كتابته سالفًا. لكن في هذه الحالة الأخيرة، من أجل تنفيذ البرنامج علينا فتح console وتشغيل البرنامج من خلال الامر: `python name_of_file.py` أو `ipython name_of_file.py`.

### 4.3 بعض التطبيقات المهمة في الميكانيك

سوف نعرض فيما يلي عدد من التطبيقات المكتوبة بلغة Python و التي نحتاجها لحل مسائل في الميكانيك عموما والميكانيك السماوية على شكل خاص ونبدأ بأسهلها إلى الأصعب. نهدف من خلال ذلك تعلم كيفية البرمجة بلغة Python من جهة ومن جهة ثانية تحضير مكتبات خاصة من أجل كتابة البرنامج الشامل لحل مسألة أجسام متعددة ومعرفة أيها يمكن أن نجد له حل تحليلي واضح وأيها لا يمكن إيجاد حلول تحليلية لها. أي أنه لن تكون لها سوى حلول رقمية.

1- حل معادلة خطية من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد :

تعد هذه المسألة من المسائل الشائعة في الفيزياء وطريقة حلها معروفة والبرنامج الموالي يسمح لنا بإيجاد الحلول مهما كانت وهنا نميز كما هو معلوم ثلاثة حالات : وجود حلين حقيقيين، وجود حل واحد حقيقي و وجود حلين مركبين وذلك بحسب إشارة المحدد  $\Delta$ . المعادلة من الشكل :  $a.x^2 + b.x + c = 0$  حيث أن كل من  $a, b, c$  عبارة عن ثوابت.

### البرنامج

```
import numpy as np
def slso(a, b, c):
    # حساب المحدد
    delta = b**2 - 4*a*c
    if a==0:
        root = -c/b
        return root
    elif delta > 0:
        # حلين متباينين
        root_1 = (-b + np.sqrt(delta)) / (2*a)
        root_2 = (-b - np.sqrt(delta)) / (2*a)
        return root_1, root_2
    elif delta == 0:
        # حل حقيقي واحد
        root = -b / (2*a)
        return root
    else:
        # حلين مركبين
        real_part = -b / (2*a)
        imag_part = np.sqrt(np.abs(delta)) / (2*a)
        root_1 = complex(real_part, imag_part)
```

### الشرح

نبدأ أولاً بتحميل المكتبة التي سوف تساعدنا على الحل، في هذه الحالة حملنا المكتبة numpy لكن كان في الإمكان تحميل المكتبة math أو scipy.

نعرف بعدها الدالة slso و هي الدالة التي سوف تقوم بالحساب، حيث ولتفادي الخطأ تقوم بحساب المحدد :

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

إذا كان  $a$  معدوم فإن المسألة تتحول إلى معادلة من الدرجة الأولى ولها حل وحيد :

$$x = -\frac{c}{b}$$

وإلا هنالك ثلاثة حالات ممكنة :

$\Delta > 0$ :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2.a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$\Delta = 0$ :

$$x = \frac{-b}{2.a}$$

$\Delta < 0$ :

```
root_2 = complex(real_part, -imag_part)
```

```
return root_1, root_2
```

# مثال تطبيقي

```
a = 1
```

```
b = -3
```

```
c = 2
```

```
roots = slso(a, b, c)
```

```
if type(roots) == tuple:
```

```
    print(f"Roots: {roots[0]} and {roots[1]}")
```

```
else:
```

```
    print(f"Root: {roots}") [1]
```

$$x_1 = \frac{-b + j\sqrt{\Delta}}{2.a}; x_2 = \frac{-b - j\sqrt{\Delta}}{2.a}$$

حيث  $z$  هو العدد التخيلي.

تقوم الدالة بإرجاع قيم الحلول ليتم في الأخير طباعتها على الشاشة.

2- الطريقة التكرارية : في كثير من المسائل التي يمكن أن تصادفنا، نجد تلك المسائل التي لا يمكن إيجاد حلول مباشرة. بحيث أن عدد المعادلات يكون أقل من عدد المتغيرات أو أن هناك ارتباط بين المتغير ونفسه ولا يمكننا فصله ليكون طرفا مستقل. لذلك نضطر إلى استخدام الطرق التكرارية بحيث ننطلق من قيم مختارة للمتغيرات فيما عدا واحد ونحسب قيمة وبعد ذلك نعوضه في المعادلة الأساسية لنجد قيمة جديدة للدالة التي نتخذها قيمة جديدة للمتغيرات ونعيد الكرة حتى نحصل على تقارب محدد بين القيمة الجديدة والقيمة التي قبلها.

فيما يلي نقدم برنامج بسيط يشرح الطريقة التكرارية وكيفية استخدامها :

```
Import math
```

```
def sqrt_iter(n, initialGuess, epsilon):
```

```
    itr = 0
```

```
    while initialGuess > 0:
```

```
        newGuess = ((initialGuess + n / initialGuess) / 2.0)
```

```
        initialGuess = newGuess
```

```
        difference = initialGuess**2 - n
```

```
        if abs(difference) <= epsilon:
```

```
            itr += 1
```

```

break
itr += 1
return initialGuess, itr
# تجربة البرنامج
square_root, iterations = sqrt_iter(250, 1, 0.0000001)
print('square root:', square_root)
print('number of iterations:', iterations)

```

المخرج :

square root: 15.811388300842157

number of iterations: 8

نلاحظ أن النتيجة صحيحة بالتقريب المطلوب وتطلب ذلك 8 خطوات بالرغم من أن الرقم المفروض من أجل الإنطلاق كان بعيد جدا عن النتيجة لكن عند تغييره إلى 15 مثلا نجد ما يلي :

square root: 15.81138830084921

number of iterations: 3

أي تحصلنا على نفس النتيجة لكن بعد 3 خطوات فقط. هذا يشير أن عدد الخطوات يرتبط مباشرة بنقطة الإنطلاق.

### حل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ذات مجهول واحد:

لا تخلوا مسألة فيزيائية في الكثير من فروع الفيزياء من المعادلات التفاضلية وبدرجات مختلفة وعدد مختلف من المجهول. لذلك من الضروري معرفة كيفية حل هذه المسائل. نقدم هنا مثال لحل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بمتغير واحد وذلك بطريقتين.

لنكن المعادلة التفاضلية التالية:

$$\ddot{x} + k_1\dot{x} + k_2 \sin(x) = 0$$

حيث أن  $x$  المتغير و  $k_i$  ثوابت.

- الطريقة الرقمية باستخدام Odeint():

الخطوة الأولى التي يجب القيام بها عند حل المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية هي تحويلها إلى نظام من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى. أي أن الخطوة الأولى هي تحويل المعادلات التفاضلية العادية إلى شكل من أشكال فضاء الحالة. نقدم متغيرات فضاء الحالة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned}$$

بإجراء هذا التحويل نحصل على معادلتين من الشكل:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_2 - k_2 \sin(x_1) \end{aligned}$$

هاتين المعادلتين يمكن كتابتهما على الشكل:

$$\dot{x} = f(x)$$

بحيث:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -k_1 x_2 - k_2 \sin(x_1) \end{bmatrix}$$

بعد ذلك يصبح الحل ممكن بإستخدام المكتبات المناسبة وفيما يلي البرنامج الخاص [2]:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

def rightSideODE(x,t,k1,k2):
    dxdt=[x[1],-k1*x[1]-k2*np.sin(x[0])]
    return dxdt

# تحديد الشروط الابتدائية
x0=[0,1]

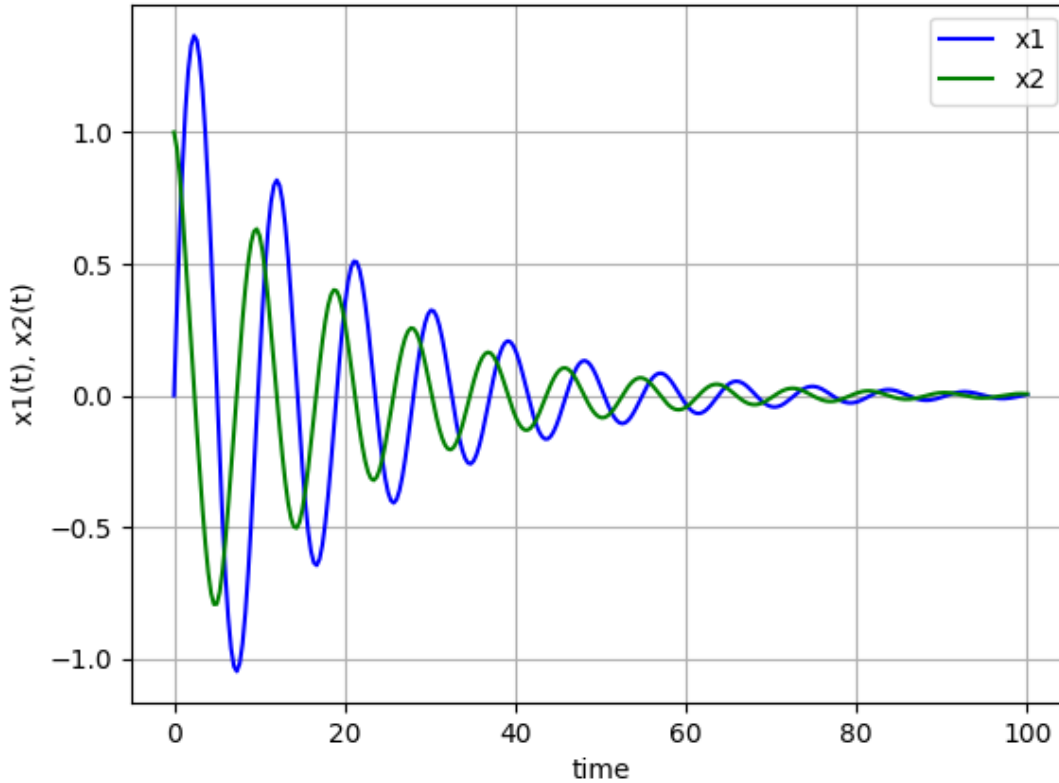
# تحديد مجال الدراسة "الحساب"
timePoints=np.linspace(0,100,300)

# إعطاء قيم الثوابت
k1=0.1
k2=0.5

# حل المعادلة
solutionOde=odeint(rightSideODE,x0,timePoints, args=(k1,k2))

# تمثيل الحل بيانيا
plt.plot(timePoints, solutionOde[:, 0], 'b', label='x1')
plt.plot(timePoints, solutionOde[:, 1], 'g', label='x2')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('time')
plt.ylabel('x1(t), x2(t)')
plt.grid()
plt.savefig('simulation.png')
plt.show()
```

المخرج:



شكل رقم 25: يمثل رسم بياني لحل رقمي لمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ومشتقاتها الأولى.

نلاحظ أن الحلول تكون على شكل منحنيات غير أنه يمكن حفظ النتائج بشكل أرقام في ملف. نذكر أن  $x_1$  هو الحل ويمثل الموضع أما  $x_2$  فهي السرعة والتغير يكون بالنسبة إلى الزمن. كما أننا استخدمنا كذلك مكتبة تسمح لنا بحفض البيان على شكل صورة.

- الشكل التحليلي:

باستخدام المكتبة sympy نقوم بكتابة البرنامج التالي [3]:

```
from sympy import Function, Symbol, dsolve, sin
k1=0.1
k2=0.5
f = Function('f')
x = Symbol('x')
f(x).diff(x, x) + k1 * f(x).diff(x) + k2 * sin(x)
```

```
print(dsolve(f(x).diff(x, x) + k1 * f(x).diff(x) + k2 * sin(x), f(x)))
```

حيث قمنا أولاً بتحميل الدوال التي نحتاج لإيجاد الحل بعدها أعطينا قيم الثوابت ثم عرفنا الدالة والمتغير وكانت المرحلة الأخيرة هي كتابة المعادلة التفاضلية وإخراج الحل العام لها وهو على الشكل :

```
Eq(f(x), C1 + C2*exp(-0.1*x) + 0.495049504950495*sin(x) + 0.049504950495*cos(x))
```

$$f(x) = C_1 + C_2 * e^{-0.1*x} + 0.495 * \sin(x) + 0.0495 * \cos(x)$$

وهذا كما نلاحظ عبارة عن حل تحليلي للمعادلة و الثابتين  $C_1$  و  $C_2$  يحددان من الشروط الابتدائية. نشير هنا أن المكتبة sympy تمتلك مجموعة كبيرة من الدوال لا يسعنا عددا هنا لكنها تعتبر كنز كبير للباحث. لكن وبطبيعة الحال لا يمكنها إيجاد أشكال تحليلية لجميع المسائل.

### إيجاد القيم الذاتية والاشعة الذاتية:

إن معادلات القيم الذاتية تحتل مكانة كبيرة في الفيزياء وخاصة في ميكانيك الكم وبعض الفروع الأخرى، لذا يعد من المهم معرفة كيفية إيجاد حلول هذه المعادلات باستخدام لغة البرمجة Python والمثال الموالي يعطينا نظرة على كيفية عمل ذلك [4]:

```
import numpy as np
```

```
# تحديد مصفوفة مربعة
```

```
A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6],
              [7, 8, 9]])
```

```
# حساب القيم الذاتية والاشعة الذاتية
```

```
eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(A)
```

```
# طباعة النتائج
```

```
print("Eigenvalues : ")
print(eigenvalues)
print("\nEigenvectors : ")
print(eigenvectors)
```

النتائج:

```
Eigenvalues:
[ 1.61168440e+01 -1.11684397e+00 -1.30367773e-15]
```

```
Eigenvectors:
[[-0.23197069 -0.78583024 0.40824829]
 [-0.52532209 -0.08675134 -0.81649658]
 [-0.8186735 0.61232756 0.40824829]]
```

التمثيل البياني الثلاثي الأبعاد [3]:

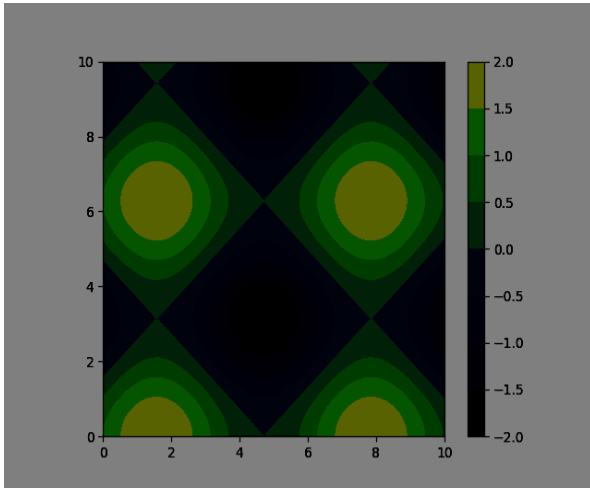
من بين الأدوات المهمة التي يحتاجها الفيزيائي التمثيل البياني للمتغيرات في الأبعاد الثلاثة والمثال الموالي مهم جدا لفهم كيفية استعمال هذه الخاصية بكل سهولة بلغة Python وذلك عن طريق استخدام مكتبات متخصصة ك : matplotlib و mpl\_toolkits

```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import cos, sin, linspace, meshgrid
# مثال
x = linspace(0, 10, 100)
y = linspace(0, 10, 100)
X, Y = meshgrid(x, y)

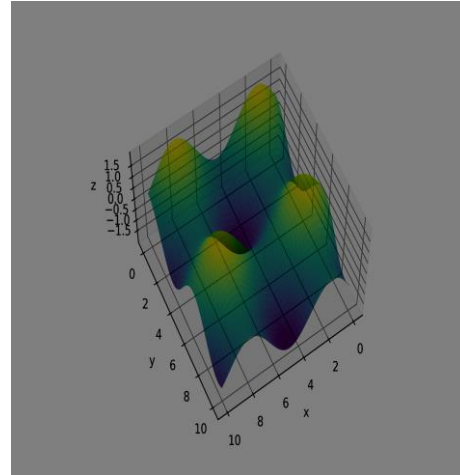
# التمثيل البياني ثنائي البعد
Z = sin(X) + cos(Y)

fig = plt.figure()
plt.contourf(X, Y, Z, cmap='viridis')
plt.axis('scaled')
plt.colorbar()
plt.savefig('contour1.png') # حفظ الصورة الثنائية البعد
# التمثيل البياني الثلاثي البعد
fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis', linewidth=0, antialiased=True,
alpha=0.5)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
# الزاوية
ax.view_init(60, 60)
plt.savefig('3Dplot1.png', dpi=600) # حفظ الصورة الثلاثية البعد بدقة 600 نقطة في البوصة
plt.show() # إظهار الصورة
```

الصور المحفوظة للمثال :



شكل رقم 27 : التمثيل البياني ثنائي البعد.



شكل رقم 26 : التمثيل البياني ثلاثي البعد

### محاكاة تبسيطية لحركة الكواكب :

محاكاة حركة ثنائية البعد لكواكب المجموعة الشمسية ضمن مسارات دائرية كتقريب. يمكن من خلال هذا البرنامج تعلم كيفية إنشاء كائنات بصفات معينة من حجم، لون وموضع ابتدائي وجعلها تتحرك حركة متحكم فيها بخطوات معينة. هذه مجرد دراسة حركية بسيطة يمكننا جعلها أكثر تعقيدا بإدخال معادلات ديناميكية تعتمد على حساب تأثير الجاذبية الشمسية على الكوكب كل على حدا، لكن المشكلة هنا أنه لا يمكننا تمثيل المجموعة الشمسية في الأبعاد الثلاثة.

في هذا البرنامج استخدمنا مكتبة رياضيات بسيطة  $\text{math}$  تحتوي على كل الدوال التي يمكننا استخدامها وخاصة منها  $\text{COS}$  و  $\text{sin}$ ، وككل لغات البرمجة يجب التنبيه على أن الزوايا يجب أن تكون بوحدة الراديان وليس الدرجات [5].

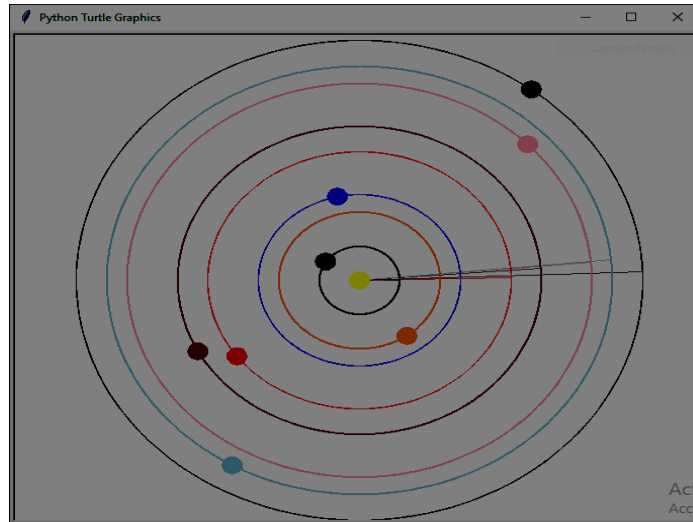
```
import turtle # تحميل مكتبة turtle
import math # تحميل مكتبة math للحسابات ويمكن تعويضها مكتبة أخرى
from math import * # تحميل كل الدوال المتوفرة في المكتبة *

screen = turtle.Screen() # إنشاء الشاشة
screen.tracer(60)
sun = turtle.Turtle() # تشكيل كائن الشمس
sun.shape('circle') # شكل الشمس
sun.color('yellow') # لون الشمس
class Planet(turtle.Turtle): # تعريف الكائن كوكب
```

```

def __init__(self,name,radius, color): # متغيرات الدالة
# تهيئة الدالة
super().__init__(shape='circle')
self.name = name
self.radius = radius
self.c = color
self.color(self.c)
self.up()
self.pd()
    self.angle = 0
    def move(self): # تحديد حسابات تحرك الكائن
        x = self.radius*cos(self.angle) # الزوايا تكون بالراديان
        y = self.radius*sin(self.angle)
        self.goto(sun.xcor()+x,sun.ycor()+y)
# أسماء الكواكب على شكل كائنات
mercury = Planet("Mercury", 40, 'grey')
venus = Planet("Venus", 80, 'orange')
earth=Planet("Earth", 100,'blue')
mars = Planet("Mars", 150, 'red')
jupiter=Planet("Jupiter",180, 'brown')
saturn=Planet("Saturn",230, 'pink')
uranus=Planet("Uranus",250, 'light blue')
neptune=Planet("Neptune",280, 'black')
# إضافة الكواكب إلى القائمة
myList = [ mercury, venus,earth, mars,jupiter,saturn,uranus,neptune]
while True:# شرط التشغيل والإستمرار
    screen.update() #تحديث الشاشة
    for i in myList:
        i.move() # تحريك الكائنات من القائمة
0.0 #x radians خطوات التحرك بالـ
    mercury.angle += 0.05
    venus.angle += 0.03
    earth.angle += 0.01
    mars.angle += 0.007
    jupiter.angle += 0.02
    saturn.angle += 0.018
    uranus.angle += 0.016
    neptune.angle += 0.005

```



شكل رقم 28: صورة المخرج.

بعد إجراء بعض التطبيقات التي سمحت لنا بتعلم كيفية البرمجة بلغة Python، نمر الآن إلى إجراء مجموعة من التطبيقات المتعلقة بموضوعنا ألا وهو إجراء دراسة ديناميكية لأنظمة متعددة الأجسام. للإشارة فهناك ما لانهاية من الحالات الممكنة تتعلق أساسا بالأبعاد الفضائية والكتل بالإضافة إلى الشروط الابتدائية ومعظم هذه الحالات لا يمكن أن نجد لها حلول تحليلية.

فيما يخص عملنا فسوف نميز ثلاثة أنظمة وهي: نظام من كتلتين وهنا سوف ندرس حالتين أين يكون الفرق في الكتلة بين الجسمين كبير أو متساو 'متقارب'. النظام الثاني يتكون من ثلاثة أجسام متساوية الكتلة في الحالة الأولى وجسم كتلته كبيرة جدا مقارنة بكتلة الجسمين الآخرين. أما النظام الأخير فهو نموذج عن المجموعة الشمسية مبسط نسبيا بحيث لن نأخذ بعين الاعتبار سوى التأثيرات الجاذبية بين الكواكب وبعضها البعض والكواكب مع الشمس، ونزاع تأثير الأقمار للكواكب التي تمتلك أقمارا كالأرض. القوى الوحيدة المؤثرة على كل الاجسام فيما يلي من العمل هي قوى جاذبية نجمة عن الكتل، كما أن نظام الكتلتين هو نظام ثنائي البعد كما تم البرهنة عليه سابقا.

### نظام الكتلتين:

نبدأ أولا بكتابة برنامج شامل يمكن من خلاله حساب ديناميكيا موضع، سرعة وتسارع نظام مشكل من كتلتين مع تمثيل الموضع "المسارات" بيانيا.

فيما يلي نص البرنامج:

تحميل المكتبات الضرورية#[4]

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp # دالة المكاملة
```

```

import matplotlib.pyplot as plt # دالة الرسم والحفظ

# الشروط الابتدائية
Y = [-1, #x1
      0, # y1
      1, # x2
      0, # vx1
      0.5, # vy1
      0, # vx2
      -0.5] # vy2

def objects(t, y):
    m1 = 1 # كتلة الجسم الأول
    m2 = 1 # كتلة الجسم الثاني
    f = np.zeros(8)
    f[0] = y[4]
    f[1] = y[5]
    f[2] = y[6]
    f[3] = y[7]

    f[4] = -m2*(y[0]-y[2])/(((y[0]-y[2])**2+(y[1]-y[3])**2)**(3/2))
    f[5] = -m2*(y[1]-y[3])/(((y[0]-y[2])**2+(y[1]-y[3])**2)**(3/2))
    f[6] = -m1*(y[2]-y[0])/(((y[2]-y[0])**2+(y[3]-y[1])**2)**(3/2))
    f[7] = -m2*(y[3]-y[1])/(((y[2]-y[0])**2+(y[3]-y[1])**2)**(3/2))

    return(f)

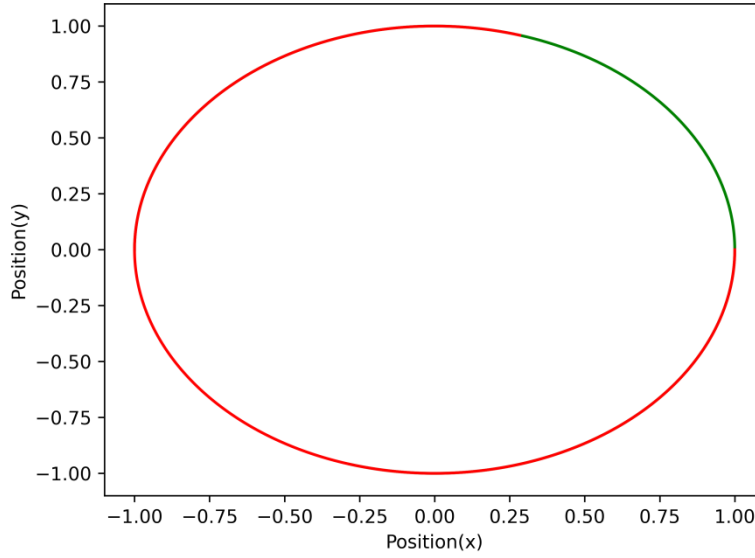
N = 10000
T = 0.001 #N*T=10
t = np.linspace(0,N*T,N) # تحديد مجال الزمن وعدد النقاط

# إيجاد الحلول
solution = solve_ivp(fun = objects, t_span = [0,N*T], y0 = Y, t_eval = t, rtol = 1e-10)

# رسم المنحنى
plt.plot(solution.y[0],solution.y[1],'-g')
plt.plot(solution.y[2],solution.y[3],'-r' )
plt.ylabel("Position(y)")
plt.xlabel("Position(x)")
plt.savefig('2D_orbit_tow_body.png', dpi=600)
plt.show()

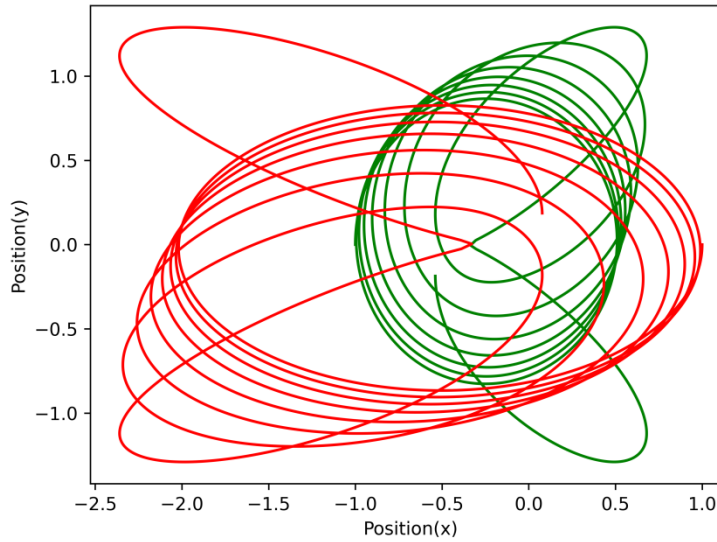
```

النتيجة:



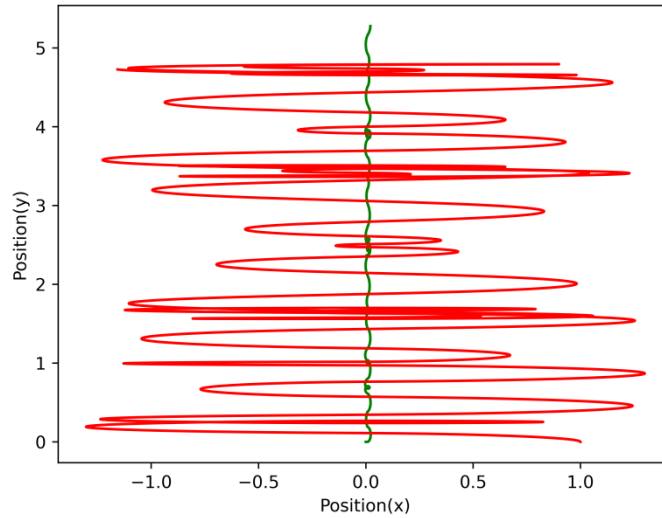
شكل رقم 29: مخرج محاكاة نظام جسمين لهما نفس الكتلة.

نلاحظ أن الجسمين يدوران في مسار متطابق حول مركز الكتلة. في المثال الموالي نغير كتلة الجسم الأول إلى 2 فنحصل على النتيجة التالية:



شكل رقم 30: مسارات نظام جسمين مختلفين في الكتلة.

نلاحظ في هذه الحالة أن المدارات أصبحت تبدو عشوائية ويمكن أن تؤدي إلى التصادم بين الجسمين. في المثال الموالي جعلنا الجسم الأول في المركز مع كتلة 100 والجسم الثاني في نفس موقعه السابق لكن بسرعة  $v_y=1$  فتحصلنا على النتيجة الموالية:



شكل رقم 31: مثال جسم مركزي وجسم يدور حوله.

نلاحظ أن الجسم الثاني (اللون الاحمر) يتخذ مدارا حول الجسم الاول الذي يفوقه في الكتلة 100 ضعف، لكن وبالرغم كن أن الجسم الاول وضع في المركز وبسرعة إبتدائية منعدمة، إلا أنه أخذ في التحرك مع الجسم الاول في مسار متعرج. من خلال هذه الأمثلة يتجلى لنا أنه كما كان منتظرا فإن الشروط الإبتدائية تلعب دورا حاسما في تطور الجملة وأن الحصول على جملة مستقرة مع الزمن يتطلب شروط دقيقة ومدروسة بعناية بالغة.

### حالة الأجسام الثلاثة:

نعم البرنامج السابق ليصبح التعامل مع ثلاثة أجسام كما هو موضح فيما يلي [2]:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt
```

# الشروط الإبتدائية #

```
Y = [ 0,#x1
      0,#y1
      -1,#x2
      0,#y2
      1,#x3
      0,#y3
      0,#vx1
      0,#vy1
      0,#vx2
```

```

1,#vy2
0,#vx3
-1] #vy3
def objects(t, y):
    m1 = 1
    m2 = 1
    m3 = 1
    f = np.zeros(12)
    f[0] = y[6]
    f[1] = y[7]
    f[2] = y[8]
    f[3] = y[9]
    f[4] = y[10]
    f[5] = y[11]
    f[6] = -m2*(y[0]-y[2])/(((y[0]-y[2])**2+(y[1]-y[3])**2)**(3/2)) \
        -m3*(y[0]-y[4])/(((y[0]-y[4])**2+(y[1]-y[5])**2)**(3/2))
    f[7] = -m2*(y[1]-y[3])/(((y[0]-y[2])**2+(y[1]-y[3])**2)**(3/2)) \
        -m3*(y[1]-y[5])/(((y[0]-y[4])**2+(y[1]-y[5])**2)**(3/2))
    f[8] = -m1*(y[2]-y[0])/(((y[2]-y[0])**2+(y[3]-y[1])**2)**(3/2)) \
        -m3*(y[2]-y[4])/(((y[2]-y[4])**2+(y[3]-y[5])**2)**(3/2))
    f[9] = -m1*(y[3]-y[1])/(((y[2]-y[0])**2+(y[3]-y[1])**2)**(3/2)) \
        -m3*(y[3]-y[5])/(((y[2]-y[4])**2+(y[3]-y[5])**2)**(3/2))
    f[10] = -m1*(y[4]-y[0])/(((y[4]-y[0])**2+(y[5]-y[1])**2)**(3/2)) \
        -m2*(y[4]-y[2])/(((y[4]-y[2])**2+(y[5]-y[3])**2)**(3/2))
    f[11] = -m1*(y[5]-y[1])/(((y[4]-y[0])**2+(y[5]-y[1])**2)**(3/2)) \
        -m2*(y[5]-y[3])/(((y[4]-y[2])**2+(y[5]-y[3])**2)**(3/2))

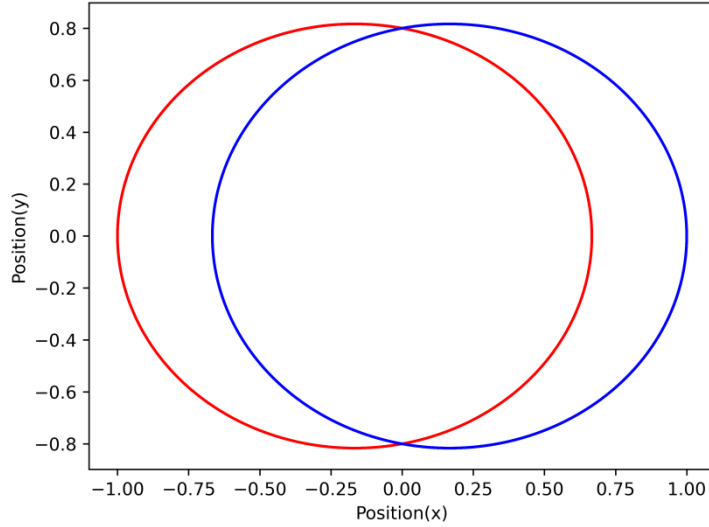
    return(f)

N = 10000
T = 0.001 #N*T=10
t = np.linspace(0,N*T,N)
solution = solve_ivp(fun = objects, t_span = [0,N*T], y0 = Y, t_eval = t, rtol = 1e-10)

plt.plot(solution.y[0],solution.y[1],'-g') #(x1, y1) Planet 1 in green
plt.plot(solution.y[2],solution.y[3],'-r') #(x2, y2) Planet 2 in red
plt.plot(solution.y[4],solution.y[5],'-b') #(x3, y3) Planet 3 in blue
plt.ylabel("Position(y)")
plt.xlabel("Position(x)")
plt.savefig('2D_orbit_three_body.png', dpi=600) # حفظ الصورة الثلاثية البعد بدقة 600 نقطة في البوصة في البوصة
plt.show()

```

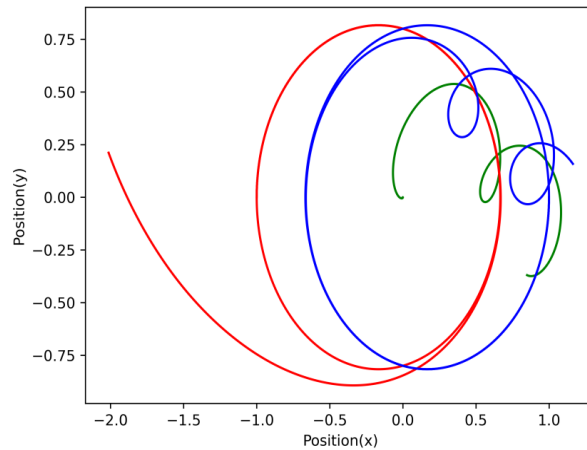
بدأنا بشروط إبتدائية مماثلة للمثال السابق بالنسبة للجسم الثاني والثالث لكن بالنسبة إلى الجسم الأول فوضعناه في المركز دون سرعة إبتدائية، مع تساوي في الكتل. فحصلنا على النتيجة الموائية:



شكل رقم 32: الحالة الأولى لنظام ثلاثي الاجسام.

نلاحظ أن الجسم الأول يبقى ساكنا كونه في مركز كتلة الجملة أما الجسمين 2 و3 فيتخذان مدار مستقر إهليلجي لكل منهما. وهذه النتيجة كانت منتظرة.

في المثال الثاني قمنا بتغيير سرعة الجسم الثالث وفق محور الترتيب إلى  $v_{y3} = 1.00000001$  فكانت النتيجة حدوث إضطراب كبير في حركة المجموعة كما هو موضح في البيان الموائي ليتلاشى النظام في الأخير ويصبح كل جسم حر:



شكل رقم 33: المثال الثاني لنظام ثلاثي الاجسام.

نلاحظ أن أي تغيير ولو كان بسيطاً في الشروط الابتدائية يؤدي إلى تغيير كبير في الحالة الديناميكية للجملة. ومع تأكيدنا من سلامة البرامج التي تمت كتابتها أصبح من الضروري المرور إلى برنامج أكثر تعقيداً حيث نعرف فيه الدوال التي استخدمت لحد الآن بشكل أكثر عمومية وهذا حتى نتمكن من استخدامها على حالات مقارنة لما هو موجود في الكون بداية من المجموعة الشمسية.

### نظام الكتل الثلاثة (الشمس، الأرض و المشتري):

فيما يلي سوف نعرض مقترح لبرنامج يسمح لنا بدراسة نموذج لثلاثة أجسام مهمة في النظام الشمسي ألا وهي الشمس كونها الجسم المسيطر والمركزي للمجموعة الشمسية، الأرض وهو الكوكب الذي نعيش عليه ولأجل التبسيط حالياً لا نأخذ بعين الاعتبار القمر على الرغم من أن تأثيره على الأرض ليس مهملاً، و كوكب المشتري أكبر وأثقل كواكب المجموعة الشمسية. في هذه المرحلة كذلك سوف نعتبر أن الحركة تكون ثنائية البعد، أي نعتبر أن كل الأجسام متواجدة في نفس المستوى.

في البداية نقوم بتحميل مختلف المكتبات التي سوف نحتاج إليها:

```
import time
import math
import numpy as np
import pylab as py
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation
from matplotlib import rc
```

بعد ذلك نقوم بتعريف مختلف الدوال التي نحتاج من أجل الحسابات والاستظهار البياني [6]:

# دالة الرسوم المتحركة الأولية: رسم خلفية كل إطار

```
def init():
    line1.set_data([], [])
    line2.set_data([], [])
    ttl.set_text("")
    return (line1,line2,ttl)
```

```
def force_es(r): # دالة حساب القوة بين الارض والشمس
    F = np.zeros(2)
    Fmag = GG*Me*Ms/(np.linalg.norm(r)+1e-20)**2
    theta = math.atan(np.abs(r[1])/(np.abs(r[0])+1e-20))
    F[0] = Fmag * np.cos(theta)
    F[1] = Fmag * np.sin(theta)
    if r[0] > 0:
        F[0] = -F[0]
    if r[1] > 0:
        F[1] = -F[1]

    return F
```

```
def force_js(r): # دالة حساب القوة بين المشتري و الشمس
    F = np.zeros(2)
    Fmag = GG*Mj*Ms/(np.linalg.norm(r)+1e-20)**2
    theta = math.atan(np.abs(r[1])/(np.abs(r[0])+1e-20))
    F[0] = Fmag * np.cos(theta)
    F[1] = Fmag * np.sin(theta)
    if r[0] > 0:
        F[0] = -F[0]
    if r[1] > 0:
        F[1] = -F[1]

    return F
```

```
def force_ej(re,rj): # دالة حساب القوة بين الارض والمشتري
    r = np.zeros(2)
    F = np.zeros(2)
    r[0] = re[0] - rj[0]
```

```

r[1] = re[1] - rj[1]
Fmag = GG*Me*Mj/(np.linalg.norm(r)+1e-20)**2
theta = math.atan(np.abs(r[1])/(np.abs(r[0])+1e-20))
F[0] = Fmag * np.cos(theta)
F[1] = Fmag * np.sin(theta)
if r[0] > 0:
    F[0] = -F[0]
if r[1] > 0:
    F[1] = -F[1]

return F

def force(r,planet,ro,vo): # دالة حساب محصلة القوى
    if planet == 'earth':
        return force_es(r) + force_ej(r,ro)
    if planet == 'jupiter':
        return force_js(r) - force_ej(r,ro)

def dr_dt(t,r,v,planet,ro,vo): # دالة السرعة
    return v

def dv_dt(t,r,v,planet,ro,vo): # دالة التسارع
    F = force(r,planet,ro,vo)
    if planet == 'earth':
        y = F/Me
    if planet == 'jupiter':
        y = F/Mj
    return y

```

# دوال حل المعادلات التفاضلية

def EulerSolver(t,r,v,h):

```

z = np.zeros([2,2])
r1 = r + h*dr_dt(t,r,v)
v1 = v + h*dv_dt(t,r,v)
z = [r1, v1]
return z

```

def EulerCromerSolver(t,r,v,h):

```

z = np.zeros([2,2])
r = r + h*dr_dt(t,r,v)
v = v + h*dv_dt(t,r,v)
z = [r, v]
return z

```

def RK4Solver(t,r,v,h,planet,ro,vo):

```

k11 = dr_dt(t,r,v,planet,ro,vo)
k21 = dv_dt(t,r,v,planet,ro,vo)

k12 = dr_dt(t + 0.5*h,r + 0.5*h*k11,v + 0.5*h*k21,planet,ro,vo)
k22 = dv_dt(t + 0.5*h,r + 0.5*h*k11,v + 0.5*h*k21,planet,ro,vo)

k13 = dr_dt(t + 0.5*h,r + 0.5*h*k12,v + 0.5*h*k22,planet,ro,vo)
k23 = dv_dt(t + 0.5*h,r + 0.5*h*k12,v + 0.5*h*k22,planet,ro,vo)

k14 = dr_dt(t + h,r + h*k13,v + h*k23,planet,ro,vo)
k24 = dv_dt(t + h,r + h*k13,v + h*k23,planet,ro,vo)

y0 = r + h * (k11 + 2.*k12 + 2.*k13 + k14) / 6.
y1 = v + h * (k21 + 2.*k22 + 2.*k23 + k24) / 6.

```

```
z = np.zeros([2,2])
```

```
z = [y0, y1]
```

```
return z
```

```
def KineticEnergy(v): # دالة حساب الطاقة الحركية
```

```
vn = np.linalg.norm(v)
```

```
return 0.5*Me*vn**2
```

```
def PotentialEnergy(r): # دالة حساب الطاقة الكامنة
```

```
fmag = np.linalg.norm(force_es(r))
```

```
rmag = np.linalg.norm(r)
```

```
return -fmag*rmag
```

```
def AngMomentum(r,v): # دالة حساب العزم الزاوي
```

```
rn = np.linalg.norm(r)
```

```
vn = np.linalg.norm(v)
```

```
r = r/rn
```

```
v = v/vn
```

```
rdotv = r[0]*v[0]+r[1]*v[1]
```

```
theta = math.acos(rdotv)
```

```
return Me*rn*vn*np.sin(theta)
```

```
def AreaCalc(r1,r2): # دالة حساب المساحة الممسوحة من طرف شعاع الموضع
```

```
r1n = np.linalg.norm(r1)
```

```
r2n = np.linalg.norm(r2)
```

```
r1 = r1 + 1e-20
```

```
r2 = r2 + 1e-20
```

```
theta1 = math.atan(abs(r1[1]/r1[0]))
```

```
theta2 = math.atan(abs(r2[1]/r2[0]))
```

```

m = 0.5*(r1n+r2n)
del_theta = np.abs(theta1 - theta2)
return 0.5*del_theta*rn**2

```

```

def mplot(fign,x,y,xl,yl,clr,lbl): # دالة رسم البيانات
    py.figure(fign)
    py.xlabel(xl)
    py.ylabel(yl)
    return py.plot(x,y,clr, linewidth =1.0,label = lbl)

```

بعد تعريف مختلف الدوال التي سوف تستعمل يأتي الآن التطبيق "برنامج التطبيق" والذي نبدأه بتحديد

قيم الثوابت المستعملة في مختلف العمليات الحسابية وهي على النحو التالي:

```

Me = 6e24 # كتلة الأرض Kg
Ms = 2e30 # كتلة الشمس in Kg
Mj = 1.9e27 # كتلة المشتري Kg

G = 6.673e-11 # ثابت الجذب العام

RR = 1.496e11 # الوحدة الفلكية km (= 1 AU)
MM = 6e24 # الكتلة المرجعية (كتلة الأرض)
TT = 365.2424*24*60*60.0 # الزمن المرجعي (السنة الأرضية)

FF = (G*MM**2)/RR**2 # وحدة الكتلة
EE = FF*RR # وحدة الطاقة

GG = (MM*G*TT**2)/(RR**3) # ثابت التناسب

Me = Me/MM # الكتلة المرجعية للأرض
Ms = Ms/MM # الكتلة المرجعية للشمس
Mj = Mj/MM # الكتلة المرجعية للمشتري

ti = 0 # الزمن المرجعي
tf = 120 # الزمن النهائي بالسنوات

N = 365*tf # عدد النقاط المحسوبة لكل سنة
t = np.linspace(ti,tf,N) # المجال الزمني للحساب

h = t[2]-t[1] # خطوات الزمن

```

الخطوة التالية هي تهيئة مختلف المتغيرات:

```

KE = np.zeros(N)      # الطاقة الحركية
PE = np.zeros(N)      # الطاقة الكامنة
AM = np.zeros(N)      # العزم الزاوي
AreaVal = np.zeros(N) # المساحة الممسوحة من طرف شعاع الموضع
r = np.zeros([N,2])   # شعاع موضع الارض
v = np.zeros([N,2])   # شعاع سرعة الارض
rj = np.zeros([N,2])  # شعاع موضع المشتري
vj = np.zeros([N,2])  # شعاع سرعة المشتري
ri = [1496e8/RR,0]    # الموضع الابتدائي للأرض
rji = [5.2,0]         # الموضع الابتدائي للمشتري
vv = np.sqrt(Ms*GG/ri[0]) # طولية سرعة الارض الابتدائية
vvj = 13.06e3 * TT/RR # طولية سرعة المشتري الابتدائية
vi = [0, vv*1.0]      # اتجاه شعاع السرعة الابتدائية بحيث يكون عمودي على شعاع الموضع (الأرض)
vji = [0, vvj*1.0]   # اتجاه شعاع السرعة الابتدائية بحيث يكون عمودي على شعاع الموضع (المشتري)

```

تهيئة المجال بالقيم الابتدائية #

```

t[0] = ti
r[0,:] = ri
v[0,:] = vi
rj[0,:] = rji
vj[0,:] = vji
KE[0] = KineticEnergy(v[0,:])
PE[0] = PotentialEnergy(r[0,:])
AM[0] = AngMomentum(r[0:],v[0,:])
AreaVal[0] = 0

```

حل المعادلات التفاضلية عن طريق إختيار إحدى الدوال المعرفة سابقا هنا إستخدمنا وهي طريقة رانج-

كونا المستوى الرابع RK4Solver:

```

for i in range(0,N-1):
    [r[i+1:],v[i+1,:]] = RK4Solver(t[i],r[i:],v[i:],h,'earth',rj[i:],vj[i,:])
    [rj[i+1:],vj[i+1,:]] = RK4Solver(t[i],rj[i:],vj[i:],h,'jupiter',r[i:],v[i,:])
    KE[i+1] = KineticEnergy(v[i+1,:])
    PE[i+1] = PotentialEnergy(r[i+1,:])
    AM[i+1] = AngMomentum(r[i+1:],v[i+1,:])
    AreaVal[i+1] = AreaVal[i] + AreaCalc(r[i:],r[i+1,:])

```

في الأخير نأتي إلى إخراج النتائج وتمثيلها بيانيا من خلال هذه الأسطر:

```
lbl = 'orbit'
```

```

py.plot(0,0,'ro',linewidth = 7)
mplot(1,r[:,0],r[:,1],r'$x$ position (AU)',r'$y$ position (AU)','blue','Earth')
mplot(1,rj[:,0],rj[:,1],r'$x$ position (AU)',r'$y$ position (AU)','green','Super Jupiter')
py.ylim([-9, 9])

py.axis('equal')
mplot(2,t,KE,r'Time, $t$ (years)',r'Kinetic Energy, $KE$ ($\times$'+str("%. *e"% (2,
EE))+ ' Joule)', 'blue', 'KE')
mplot(2,t,PE,r'Time, $t$ (years)',r'Potential Energy, $KE$ ($\times$'+str("%. *e"% (2,
EE))+ ' Joule)', 'red', 'PE')
mplot(2,t,KE+PE,r'Time, $t$ (years)',r'Total Energy, $KE$ ($\times$'+str("%. *e"% (2,
EE))+ ' Joule)', 'black', 'Total Energy')
q=py.legend(loc = 0)
q.draw_frame(False)
py.ylim([-180, 180])

mplot(3,t,AM,r'Time, $t$ (years)',r'Angular Momentum','black',lbl)
py.ylim([4, 8])

mplot(4,t,AreaVal,r'Time, $t$ (years)',r'Sweepled Area ($AU^2$)', 'black',lbl)

def animate(i):
    earth_trail = 40;
    jupiter_trail = 200;
    tm_yr = 'Elapsed time = ' + str(round(t[i],1)) + ' years'
    ttl.set_text(tm_yr)
    line1.set_data(r[i:max(1,i-earth_trail):-1,0], r[i:max(1,i-earth_trail):-1,1])
    line2.set_data(rj[i:max(1,i-jupiter_trail):-1,0], rj[i:max(1,i-jupiter_trail):-1,1])

    return (line1,line2)
fig, ax = py.subplots()
ax.axis('square')
ax.set_xlim((-7.2, 7.2))
ax.set_ylim((-7.2, 7.2))
ax.get_xaxis().set_ticks([])
ax.get_yaxis().set_ticks([])
# مسار الأرض
ax.plot(0,0,'o',markersize = 9, markerfacecolor = "#FDB813",markeredgecolor
="#FD7813" )
line1, = ax.plot([], [], 'o-',color = '#d2eeff',markevery=10000, markerfacecolor =
'#0077BE',lw=2)
# مسار المشتري

```

```

line2, = ax.plot([], [], 'o-',color = '#e3dccb',markersize = 8, markerfacecolor =
'#f66338',lw=2,markevery=10000)

ax.plot([-6,-5],[6.5,6.5], 'r-')
ax.text(-4.5,6.3,r'1 AU = $1.496 \times 10^8$ km')
ax.plot(-6,-6.2,'o', color = '#d2eeff', markerfacecolor = '#0077BE')
ax.text(-5.5,-6.4,'Earth')
ax.plot(-3.3,-6.2,'o', color = '#e3dccb',markersize = 8, markerfacecolor = '#f66338')
ax.text(-2.9,-6.4,'Super Jupiter (500x mass)')
ax.plot(5,-6.2,'o', markersize = 9, markerfacecolor = "#FDB813",markeredgecolor
="#FD7813")
ax.text(5.5,-6.4,'Sun')
ttl = ax.text(0.24, 1.05, " ", transform = ax.transAxes, va='center')

```

يمكننا من خلال السطر الاوامر التالية جعل صورة حركة الجملة تتحرك وتظهر المسار:

```

anim = animation.FuncAnimation(fig, animate, init_func=init, frames=4000, interval=5,
blit=True)

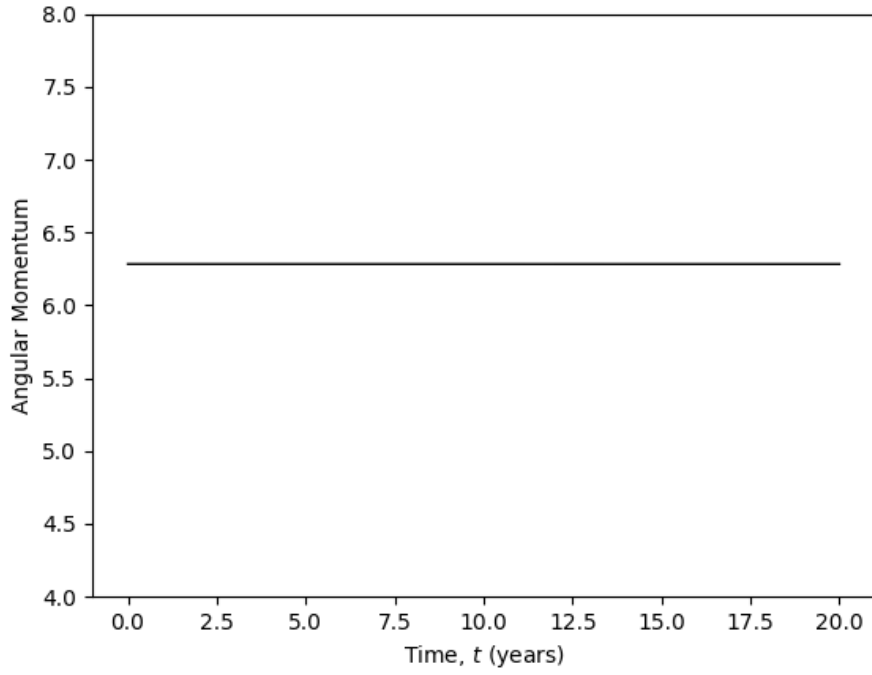
```

```

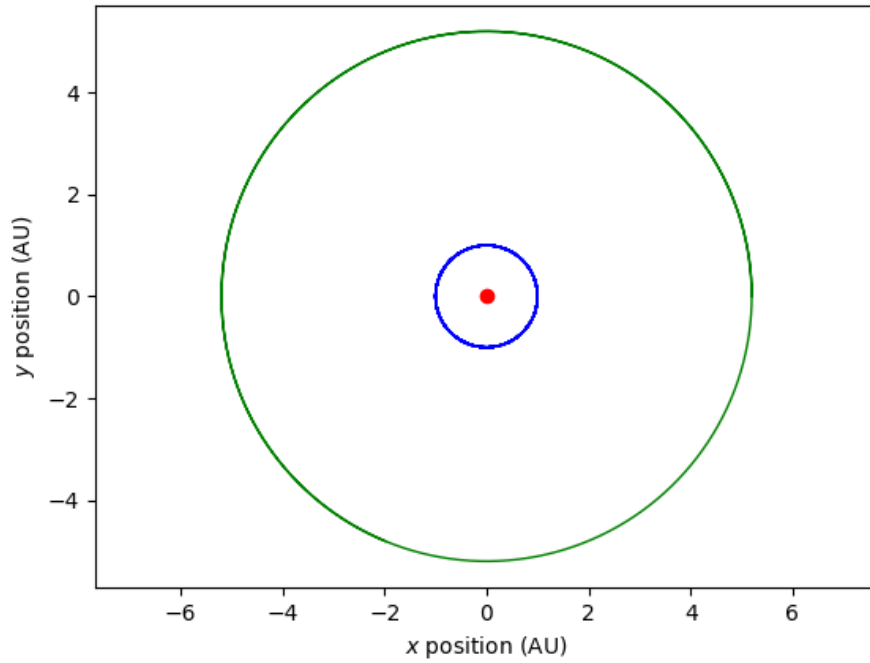
plt.show()

```

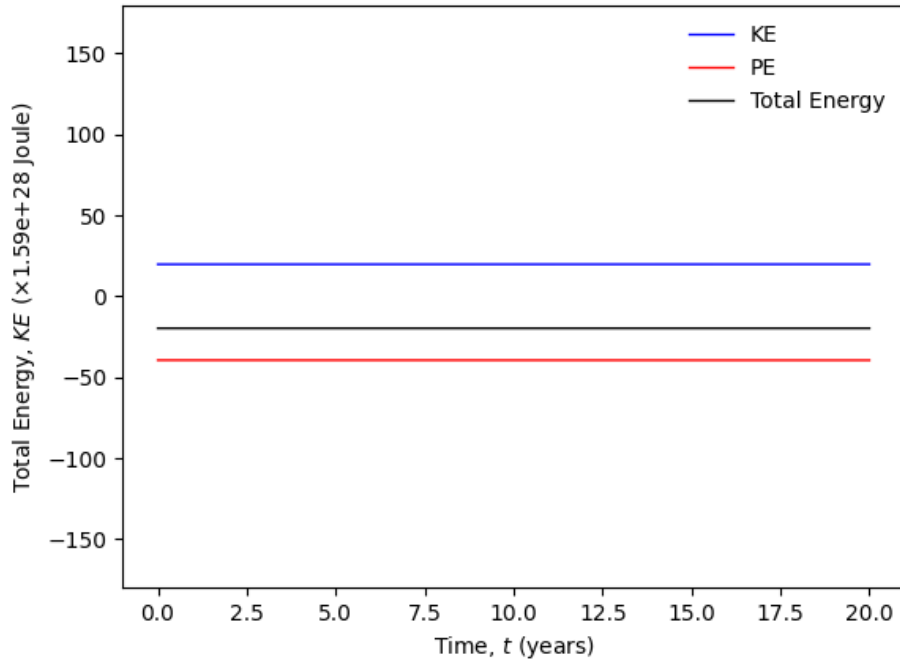
في المحاكاة الأولى أخذنا المعطيات المعروفة من كتل وسرعات و مسافات فكانت نتائج المحاكاة على النحو الممثل في البيانات الموالية:



شكل رقم 34: العزم الزاوي للأرض.

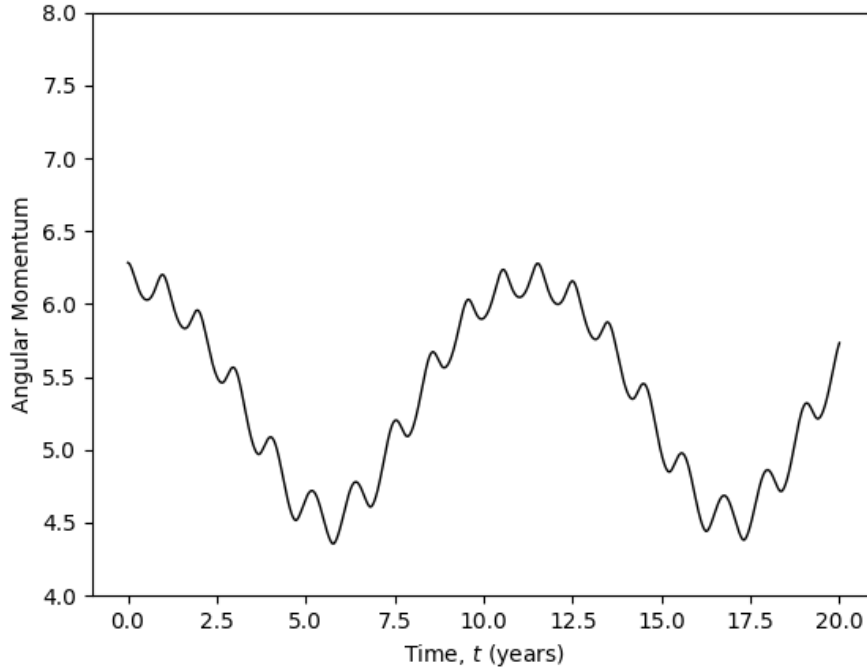


شكل رقم 35: مدار الأرض والمشتري في الحالة الطبيعية.



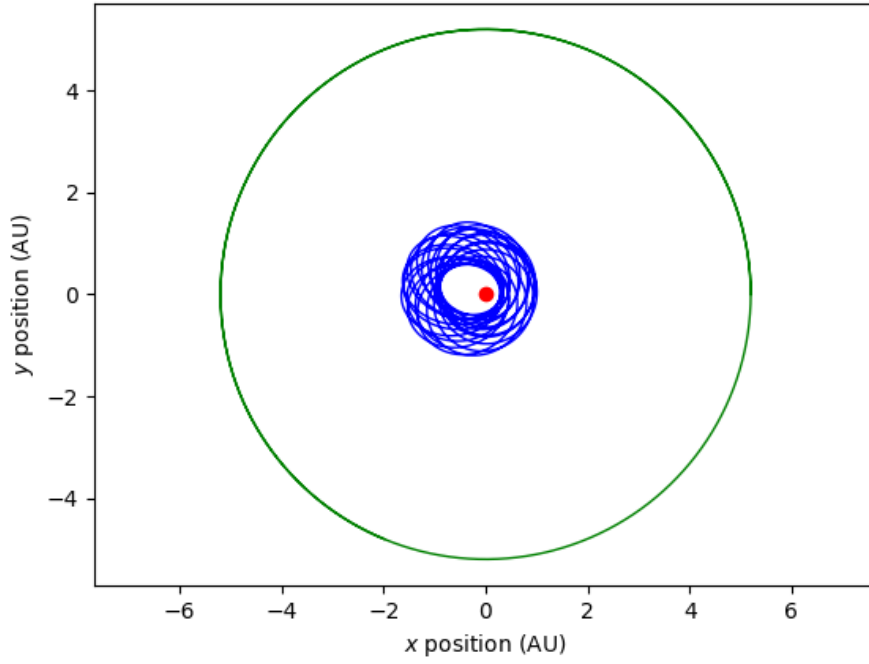
شكل رقم 36: الطاقة الكلية للأرض المحاكاة الأولى.

من خلال النتائج نلاحظ أن كل من العزم زاوي والمدار وكذلك الطاقة الحركية والكامنة للأرض مستقرة لذلك نقوم في المرحلة الثانية بغير كتلة المشتري إلى 500 ضعف فنحصل على النتائج التالية:

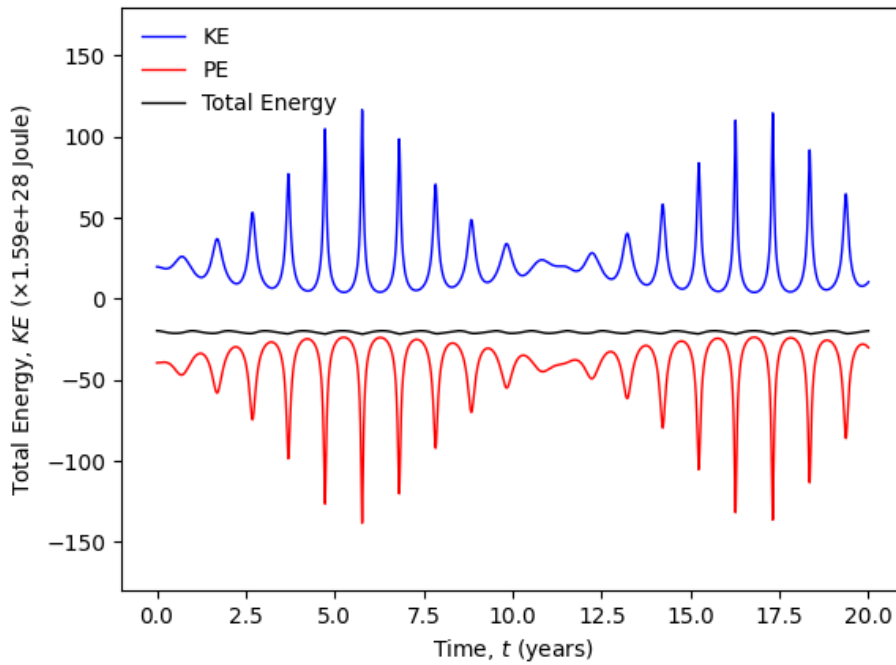


شكل رقم 37: اضطراب العزم الزاوي للأرض خلال 20 سنة.

إن تغيير الكتلة المعيارية للمشتري إلى 500 ضعف أدت إلى إحداث اضطرابات لا يمكن إهمالها على العزم الزاوي ونفس الملاحظة نجدها بالنسبة للمدار وكذلك كل من الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للكوكب غير أن الطاقة الكلية فنجد أن شدة الاضطرابات صغيرة بالمقارنة وتأخذ شكل دالة جيبية. من منحنى الطاقة نلاحظ أن الاضطرابات شبه دورية ودورها يقارب 12 سنة.

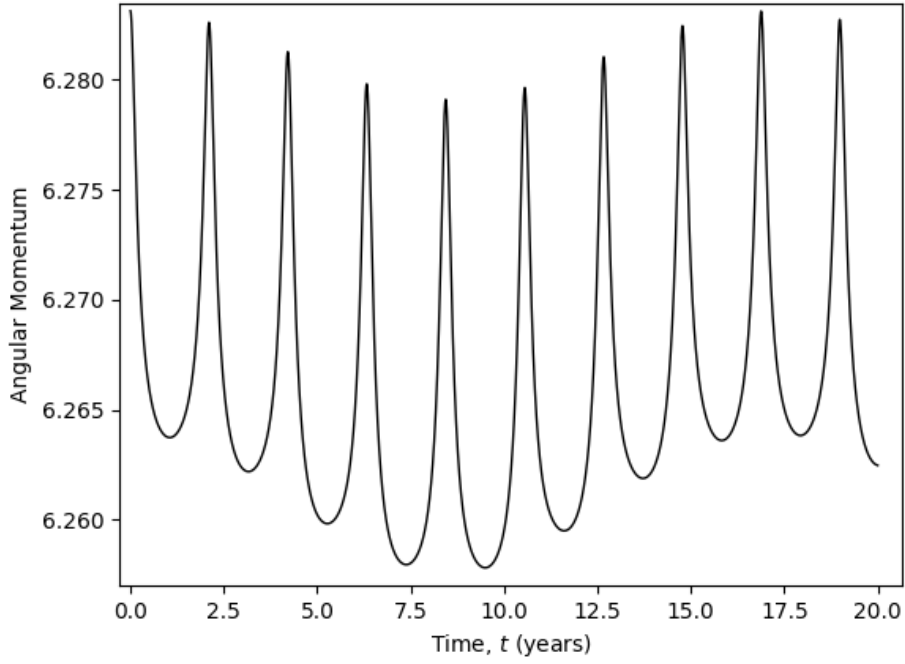


شكل رقم 38: تغير مدار الأرض خلال 20 سنة.

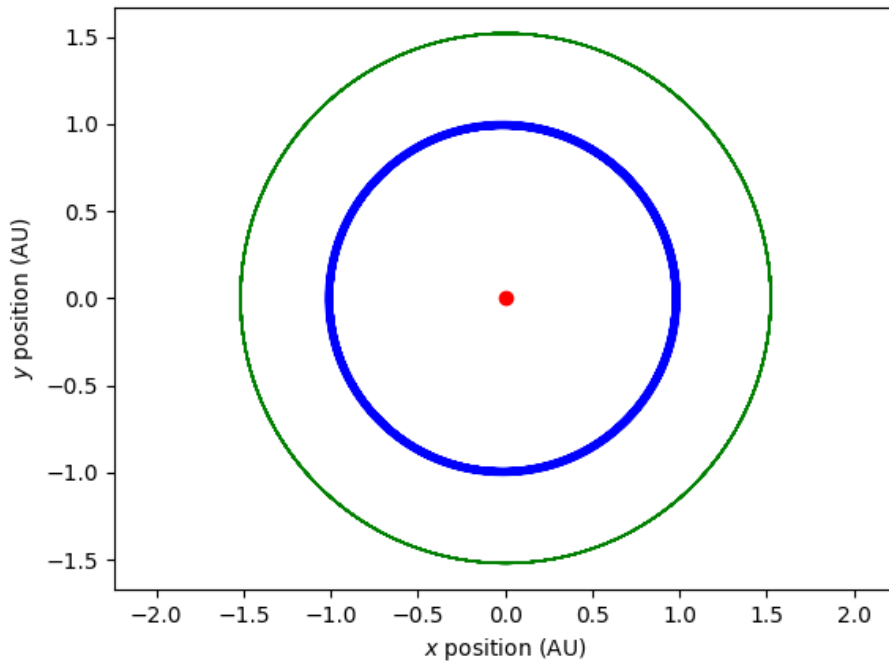


شكل رقم 39: الطاقة الكلية للمحاكاة الثانية.

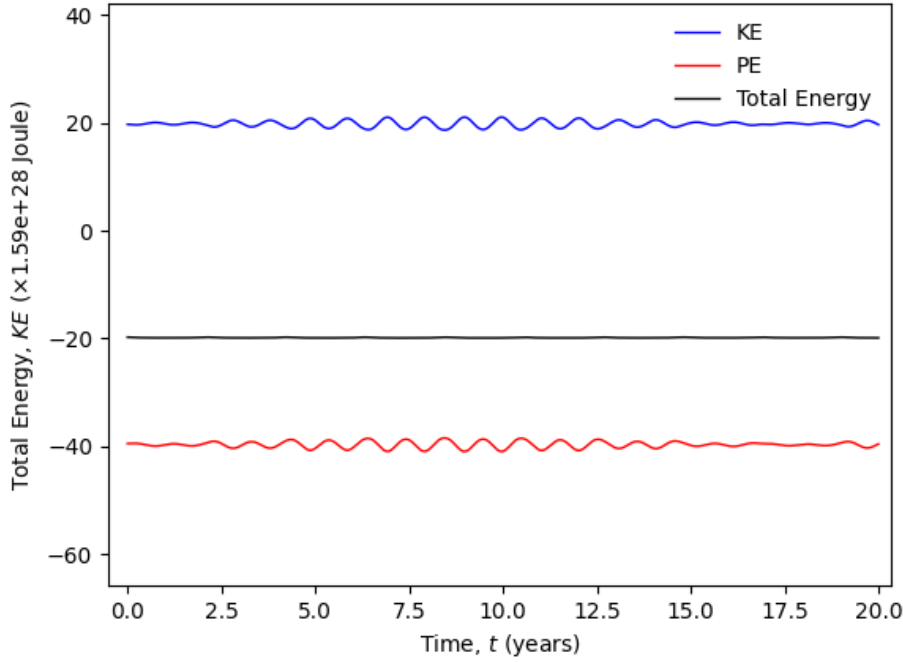
في المحاكاة المولوية نعيد قيمة كتلة المشتري إلى قيمتها الاصلية ولكن نغير من قيمه المدارية فنضعه مكان كوكب المريخ (المسافة و السرعة المدارية) فنحصل على النتائج المولوية:



شكل رقم 40: العزم الزاوي الحالة 3.



شكل رقم 41: مدار الأرض والمشتري المحاكاة 3.



### شكل رقم 42: الطاقة الكلية الحالة 3.

نلاحظ كذلك في هذه الحالة أن تغيير مدار المشتري يؤثر بشكل محسوس على مدار الأرض فهو يؤثر على العزم الزاوي للمدار وكذلك كل من الطاقة الحركية والطاقة الكامنة وبطبيعة الحال على المدار. غير أن الطاقة الكلية تبقى ثابتة وهذا ما يدل على أن الجملة محافظة.

يعد هذا البرنامج لبنة أولى لإنجاز محاكاة ديناميكية للمجموعة الشمسية وكذلك للمسائل المتعددة الاجسام في العالم الماكروسكوبي. حيث نأمل إتمامه لدراسة الجملة في الابعاد الثلاثة بعدما أعطى نتائج مقبولة في بعدين.

فيما يلي جدول يوثق أهم المعطيات المعروفة عن كواكب المجموعة الشمسية والتي يجب أن تؤخذ بعين الإعتبار عند أي حسابات.

جدول 1: معطيات عامة عن المجموعة الشمسية.

عطارد	الزهرة	الأرض	القمر	المريخ	المشتري	زحل	أورانوس	نبتون	
0.330	4.87	5.97	0.073	0.642	1898	568	86.8	102	الكتلة ( $10^{24} \text{kg}$ )
4879	12104	12756	3475	6792	142984	120536	51118	49528	القطر (km)
5429	5243	5514	3340	3934	1326	687	1270	1638	الكثافة ( $\text{kg/m}^3$ )
3.7	8.9	9.8	1.6	3.7	23.1	9.0	8.7	11.0	تسارع الجاذبية ( $\text{m/s}^2$ )
4.3	10.4	11.2	2.4	5.0	59.5	35.5	21.3	23.5	سرعة الإفلات (m/s)
1407.6	-5832.5	23.9	655.7	24.6	9.9	10.7	-17.2	16.1	دوران الذاتي (ساعات)
57.9	108.2	149.6	0.384*	228.0	778.5	1432.0	2867.0	4515.0	البعد عن الشمس ( $10^6 \text{km}$ )
46.0	107.5	147.1	0.363*	206.7	740.6	1357.6	2732.7	4471.1	الحضيض ( $10^6 \text{km}$ )
69.8	108.9	152.1	0.406*	249.3	816.4	1506.5	3001.4	4558.9	الأوج ( $10^6 \text{km}$ )
88.0	224.7	365.2	27.3*	687.0	4331	10,747	30,589	59,800	مدة السنة (يوم)
47.4	35.0	29.8	1.0*	24.1	13.1	9.7	6.8	5.4	السرعة المدارية (km/s)
7.0	3.4	0.0	5.1	1.8	1.3	2.5	0.8	1.8	ميل المدار (°)
0.206	0.007	0.017	0.055	0.094	0.049	0.052	0.047	0.010	الانحراف المداري
0.034	177.4	23.4	6.7	25.2	3.1	26.7	97.8	28.3	الانحراف عن المدار (°)
0	0	1	0	2	95	146	28	16	عدد الأقمار

(\* ) بالنسبة إلى الأرض

مع العلم أن كتلة الشمس :  $M_{\{Sol\}} = 1.989 * 10^{30} \text{Kg}$

وثابت الجذب العام :  $k_G = 6.67 * 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{Kg}^2$

## خاتمة

قدمنا في هذا الفصل نبذة عن البرمجة وعن لغة البرمجة Python التي تم استخدامها من أجل إنجاز برنامج يحاكي الحالة الديناميكية لجملة متعددة الأجسام بداية بمحاولات على الجمل ثنائية الأجسام ووصولاً إلى جملة مكونة من ثلاثة أجسام بحالات متباينة من حيث الكتلة الموضع والسرعة. ولقد بدى جليا من خلال النتائج المتحصل عليها أن لمثل هذه المسائل عدد لا نهائي من الحلول بحسب الشروط الابتدائية، و من غير الممكن إيجاد حلول عامة تحليلية سوى لعدد قليل منها وفق شروط معينة.

---

خاتمة عامة

---

## خاتمة عامة

تتمحور هذه المذكرة حول دراسة نظام مكون من عدة أجسام تتفاعل فيما بينها باستخدام الدوال اللاغرانجية والمعادلات الحركية الهاميلتونية لوصف حركة هذه الأجسام، تعتبر هذه الأخيرة أداة مهمة لحل مجموعة متنوعة من المشاكل الفيزيائية بما في ذلك الجمل ذات الدرجة العالية من الحرية والطاقة الكبيرة.

في البداية استعرضنا أهم المعادلات المستخدمة لتفسير الظواهر الفيزيائية، ثم تطرقنا إلى دراسة أنظمة متعددة ونخص بالذكر النظم الفلكية وطرق معالجتها وذلك بعد العجز عن إيجاد حل عام لوصف حركة هذه الأخيرة، ومن ثم قمنا بالإعتماد على عملية المحاكاة الحاسوبية بلغة البرمجة Python للوصول إلى الحلول.

بعد الحصول على النتائج وتفسيرها وجدنا أن لمثل هذه المسائل عدد لانتهائي من الحلول وذلك راجع للشروط الابتدائية.

---

# قائمة المراجع

---

## 1. قائمة مراجع الفصل الأول والثاني

- [1] D. Cline, Variational Principles In Classical Mechanics, United States: University of Rechester River Campus Libraries, 2018-2019.
- [2] W. B. Christian Gruber, Mécanique Générale, Suisse: Presses Polytechnique et Universitaires Romandes, 01/06/1997(2éme édition).
- [3] د.ق. ميرزا, مدخل إلى الميكانيك التقليدي, البحرين : قسم الفيزياء - جامعة البحرين - 1999/06/30 .
- [4] د.ك. واصف , أساسيات الفيزياء الكلاسيكية والمعاصرة , مصر- القاهرة- : دار النشر للجامعات - مصر 2005 .
- [5] أ.إ.ح. / أ.أ.ع. ا. د. ف. سيد , الميكانيكا التحليلية , مصر - أسبوط - مكتبة الرشد .
- [6] M. a. H. Karttunen, The Three-body problem, United States of America: Cambridge University Press, new york, 2005.

## قائمة مراجع الفصل الثالث

- [1] «python,» [En ligne]. Available: <https://docs.python.org/3/>. [Accès le 10 06 2024].
- [2] «numpy,» [En ligne]. Available: <https://numpy.org/doc/>. [Accès le 10 06 2024].
- [3] «matplotlib,» [En ligne]. Available: <https://matplotlib.org/stable/index.html>. [Accès le 10 06 2024].
- [4] «scipy,» [En ligne]. Available: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/>. [Accès le 10 06 2024].
- [5] «matplotlib/pylab,» [En ligne]. Available: <https://matplotlib.org/stable/api/pylab.html>. [Accès le 10 06 2024].
- [6] «python/turtle,» [En ligne]. Available: <https://docs.python.org/3/library/turtle.html>. [Accès le 10 06 2024].

## الملخص:

قمنا خلال هذا العمل بدراسة مشكلة الأجسام المتعددة وهي موضوع معقد في ميكانيك هاميلتون حيث صب اهتمامنا على دراسة تفاعل النظم الفلكية كالنظام الشمسي، وذلك باستخدام مفهوم الطاقة والقوى المحافظة وركزنا على الإطار الهاميلتوني الذي يستخدم التحويلات الرياضية لوصف الأنظمة الديناميكية بشكل أكثر فعالية مما يتيح لنا فهم حركتها وتفاعلاتها بشكل أفضل، في الأخير تحصلنا على معادلات يصعب إيجاد حلول تحليلية لها مما جعلنا نعتمد على المحاكاة الحاسوبية والحسابات الرقمية وذلك باستخدام خوارزميات عددية بلغة بايثون لدراسة حركة هذه الأنظمة.

**الكلمات المفتاحية:** الأجسام المتعددة، الهاميلتونيان، الأنظمة الفلكية، المحاكات الحاسوبية، بايثون.

## Abstract:

In this study, we have examined the many-body problem, a complex subject in Hamiltonian mechanics. Our focus was on the interaction of astronomical systems such as the solar system, using the concept of energy and conservative forces. We favored the Hamiltonian framework, which uses mathematical transformations to more effectively describe dynamic systems, allowing us to better understand their movement and interactions. Ultimately, we obtained equations for which it is difficult to find analytical solutions, leading us to rely on computer simulations and numerical calculations using numerical algorithms in Python to study the motion of these systems.

**Key words:** Many-body, Hamiltonian, Astronomical systems, Computer simulation, Python.

## Résumé :

Dans cette étude, nous avons étudié le problème à plusieurs corps, un sujet complexe en mécanique Hamiltonienne. Notre attention s'est portée sur l'interaction des systèmes astronomiques tels que le système solaire, en utilisant le concept d'énergie et de forces conservatrices. Nous avons privilégié le cadre Hamiltonien, qui recourt à des transformations mathématiques pour décrire plus efficacement les systèmes dynamiques, nous permettant ainsi de mieux comprendre leur mouvement et leurs interactions. En fin de compte, nous avons obtenu des équations pour lesquelles il est difficile de trouver des solutions analytiques, ce qui nous a amenés à nous appuyer sur des simulations informatiques et des calculs numériques à l'aide d'algorithmes numériques en Python pour étudier le mouvement de ces systèmes.

**Mots clé:** Corps multiples, Hamiltonien, Systèmes astronomiques, Simulation par ordinateur, Python.

---

الملاحق

---

```

1  import time
2  import math
3  import numpy as np
4  import pylab as py
5
6  import matplotlib.pyplot as plt
7  import matplotlib.animation as animation
8  from matplotlib import rc
9  from IPython.display import HTML
10
11 # initialization animation function: plot the background of each frame
12 def init():
13     line1.set_data([], [])
14     line2.set_data([], [])
15     ttl.set_text('')
16
17     return (line1,line2,ttl)
18
19
20 def force_es(r):
21     F = np.zeros(2)
22     Fmag = GG*Me*Ms/(np.linalg.norm(r)+1e-20)**2
23     theta = math.atan(np.abs(r[1])/(np.abs(r[0])+1e-20))
24     F[0] = Fmag * np.cos(theta)
25     F[1] = Fmag * np.sin(theta)
26     if r[0] > 0:
27         F[0] = -F[0]
28     if r[1] > 0:
29         F[1] = -F[1]
30
31     return F
32
33 def force_js(r):
34     F = np.zeros(2)
35     Fmag = GG*Mj*Ms/(np.linalg.norm(r)+1e-20)**2
36     theta = math.atan(np.abs(r[1])/(np.abs(r[0])+1e-20))
37     F[0] = Fmag * np.cos(theta)
38     F[1] = Fmag * np.sin(theta)
39     if r[0] > 0:
40         F[0] = -F[0]
41     if r[1] > 0:
42         F[1] = -F[1]
43
44     return F
45
46
47 def force_ej(re,rj):
48
49     r = np.zeros(2)
50     F = np.zeros(2)
51     r[0] = re[0] - rj[0]
52     r[1] = re[1] - rj[1]
53     Fmag = GG*Me*Mj/(np.linalg.norm(r)+1e-20)**2
54     theta = math.atan(np.abs(r[1])/(np.abs(r[0])+1e-20))
55     F[0] = Fmag * np.cos(theta)
56     F[1] = Fmag * np.sin(theta)
57     if r[0] > 0:
58         F[0] = -F[0]
59     if r[1] > 0:
60         F[1] = -F[1]
61
62     return F
63
64
65 def force(r,planet,ro,vo):
66     if planet == 'earth':
67         return force_es(r) + force_ej(r,ro)
68     if planet == 'jupiter':
69         return force_js(r) - force_ej(r,ro)

```

```

70
71
72 def dr_dt(t,r,v,planet,ro,vo):
73     return v
74
75
76 def dv_dt(t,r,v,planet,ro,vo):
77     F = force(r,planet,ro,vo)
78     if planet == 'earth':
79         y = F/Me
80     if planet == 'jupiter':
81         y = F/Mj
82     return y
83
84 # Differential equation solvers
85 # =====
86 def EulerSolver(t,r,v,h):
87     z = np.zeros([2,2])
88     r1 = r + h*dr_dt(t,r,v)
89     v1 = v + h*dv_dt(t,r,v)
90     z = [r1, v1]
91     return z
92
93 def EulerCromerSolver(t,r,v,h):
94     z = np.zeros([2,2])
95     r = r + h*dr_dt(t,r,v)
96     v = v + h*dv_dt(t,r,v)
97     z = [r, v]
98     return z
99
100 def RK4Solver(t,r,v,h,planet,ro,vo):
101     k11 = dr_dt(t,r,v,planet,ro,vo)
102     k21 = dv_dt(t,r,v,planet,ro,vo)
103
104     k12 = dr_dt(t + 0.5*h,r + 0.5*h*k11,v + 0.5*h*k21,planet,ro,vo)
105     k22 = dv_dt(t + 0.5*h,r + 0.5*h*k11,v + 0.5*h*k21,planet,ro,vo)
106
107     k13 = dr_dt(t + 0.5*h,r + 0.5*h*k12,v + 0.5*h*k22,planet,ro,vo)
108     k23 = dv_dt(t + 0.5*h,r + 0.5*h*k12,v + 0.5*h*k22,planet,ro,vo)
109
110     k14 = dr_dt(t + h,r + h*k13,v + h*k23,planet,ro,vo)
111     k24 = dv_dt(t + h,r + h*k13,v + h*k23,planet,ro,vo)
112
113     y0 = r + h * (k11 + 2.*k12 + 2.*k13 + k14) / 6.
114     y1 = v + h * (k21 + 2.*k22 + 2.*k23 + k24) / 6.
115
116     z = np.zeros([2,2])
117     z = [y0, y1]
118     return z
119
120 # =====
121
122
123 def KineticEnergy(v):
124     vn = np.linalg.norm(v)
125     return 0.5*Me*vn**2
126
127 def PotentialEnergy(r):
128     fmag = np.linalg.norm(force_es(r))
129     rmag = np.linalg.norm(r)
130     return -fmag*rmag
131
132 def AngMomentum(r,v):
133     rn = np.linalg.norm(r)
134     vn = np.linalg.norm(v)
135     r = r/rn
136     v = v/vn
137     rdotv = r[0]*v[0]+r[1]*v[1]
138     theta = math.acos(rdotv)

```

```

139     return Me*rn*vn*np.sin(theta)
140
141 def AreaCalc(r1,r2):
142     r1n = np.linalg.norm(r1)
143     r2n = np.linalg.norm(r2)
144     r1 = r1 + 1e-20
145     r2 = r2 + 1e-20
146     theta1 = math.atan(abs(r1[1]/r1[0]))
147     theta2 = math.atan(abs(r2[1]/r2[0]))
148     rn = 0.5*(r1n+r2n)
149     del_theta = np.abs(theta1 - theta2)
150     return 0.5*del_theta*rn**2
151
152 def mplot(fign,x,y,xl,yl,clr,lbl):
153     py.figure(fign)
154     py.xlabel(xl)
155     py.ylabel(yl)
156     return py.plot(x,y,clr, linewidth =1.0,label = lbl)
157
158
159 #code
160
161 Me = 5.97e24           # Mass of Earth in kg
162 Ms = 1.989e30        # Mass of Sun in kg
163 Mj = 1.898e27        # Mass of Jupiter
164
165 G = 6.673e-11        # Gravitational Constant
166
167 RR = 1.496e11        # Normalizing distance in km (= 1 AU)
168 MM = 5.97e24         # Normalizing mass
169 TT = 365.2424*24*60*60.0 # Normalizing time (1 year)
170
171 FF = (G*MM**2)/RR**2 # Unit force
172 EE = FF*RR           # Unit energy
173
174 GG = (MM*G*TT**2)/(RR**3)
175
176 Me = Me/MM           # Normalized mass of Earth
177 Ms = Ms/MM           # Normalized mass of Sun
178 Mj = Mj/MM           # Normalized mass of Jupiter
179
180 ti = 0               # initial time = 0
181 tf = 20              # final time = 20 years
182
183 N = 365*tf           # 100 points per year
184 t = np.linspace(ti,tf,N) # time array from ti to tf with N points
185
186 h = t[2]-t[1]       # time step (uniform)
187
188 # Initialization
189 KE = np.zeros(N)    # Kinetic energy
190 PE = np.zeros(N)    # Potential energy
191 AM = np.zeros(N)    # Angular momentum
192 AreaVal = np.zeros(N)
193
194 r = np.zeros([N,2]) # position vector of Earth
195 v = np.zeros([N,2]) # velocity vector of Earth
196 rj = np.zeros([N,2]) # position vector of Jupiter
197 vj = np.zeros([N,2]) # velocity vector of Jupiter
198
199 ri = [1496e8/RR,0]   # initial position of earth
200 rji = [1.5241,0]     # initial position of Jupiter
201
202 vv = np.sqrt(Ms*GG/ri[0]) # Magnitude of Earth's initial velocity
203
204 vvj = 24.1e3 * TT/RR # Magnitude of Jupiter's initial velocity
205
206 vi = [0, vv*1.0]    # Initial velocity vector for Earth.Taken to be
along y direction as ri is on x axis.

```

```

207 vji = [0, vvj*1.0] # Initial velocity vector for Jupiter
208
209 # Initializing the arrays with initial values.
210 t[0] = ti
211 r[0,:] = ri
212 v[0,:] = vi
213 rj[0,:] = rji
214 vj[0,:] = vji
215
216 """
217 t1 = dr_dt(ti,ri,vi)
218 t2 = dv_dt(ti,ri,vi)
219 print t1
220 print t2
221 """
222 KE[0] = KineticEnergy(v[0,:])
223 PE[0] = PotentialEnergy(r[0,:])
224 AM[0] = AngMomentum(r[0:],v[0,:])
225 AreaVal[0] = 0
226
227 for i in range(0,N-1):
228     [r[i+1:],v[i+1,:]] = RK4Solver(t[i],r[i:],v[i:],h,'earth',rj[i:],vj[i:])
229     [rj[i+1:],vj[i+1,:]] = RK4Solver(t[i],rj[i:],vj[i:],h,'jupiter',r[i:],v[i:])
230
231     KE[i+1] = KineticEnergy(v[i+1,:])
232     PE[i+1] = PotentialEnergy(r[i+1,:])
233     AM[i+1] = AngMomentum(r[i+1:],v[i+1,:])
234     AreaVal[i+1] = AreaVal[i] + AreaCalc(r[i:],r[i+1,:])
235
236
237 lbl = 'orbit'
238 py.plot(0,0,'ro',linewidth = 7)
239 mplot(1,r[:,0],r[:,1],r'$x$ position (AU)',r'$y$ position (AU)','blue','Earth')
240 mplot(1,rj[:,0],rj[:,1],r'$x$ position (AU)',r'$y$ position (AU)','green','Jupiter')
241 py.ylim([-9, 9])
242
243 py.axis('equal')
244 mplot(2,t,KE,r'Time, $t$ (years)',r'Kinetic Energy, $KE$ ($\times$'+str("%.1e"%(2, EE
245 ))+' Joule)','blue','KE')
246 mplot(2,t,PE,r'Time, $t$ (years)',r'Potential Energy, $PE$ ($\times$'+str("%.1e"%(2,
247 EE))+ ' Joule)','red','PE')
248 mplot(2,t,KE+PE,r'Time, $t$ (years)',r'Total Energy, $KE$ ($\times$'+str("%.1e"%(2, EE
249 ))+' Joule)','black','Total Energy')
250
251 q=py.legend(loc = 0)
252 q.draw_frame(False)
253 py.ylim([-180, 180])
254
255 mplot(3,t,AM,r'Time, $t$ (years)',r'Angular Momentum','black',lbl)
256 py.ylim([4, 8])
257
258 mplot(4,t,AreaVal,r'Time, $t$ (years)',r'Swept Area ($AU^2$)','black',lbl)
259
260 # Animation function. Reads out the position coordinates sequentially
261 def animate(i):
262     earth_trail = 40;
263     jupiter_trail = 200;
264     tm_yr = 'Elapsed time = ' + str(round(t[i],1)) + ' years'
265     ttl.set_text(tm_yr)
266     line1.set_data(r[i:max(1,i-earth_trail):-1,0], r[i:max(1,i-earth_trail):-1,1])
267     line2.set_data(rj[i:max(1,i-jupiter_trail):-1,0], rj[i:max(1,i-jupiter_trail):-1,1
268     ])
269
270     return (line1,line2)
271
272 # Function for setting up the animation
273
274 fig, ax = py.subplots()
275 ax.axis('square')
276 ax.set_xlim((-7.2, 7.2))

```

```

272 ax.set_ylim((-7.2, 7.2))
273 #ax.get_xaxis().set_ticks([]) # enable this to hide x axis ticks
274 #ax.get_yaxis().set_ticks([]) # enable this to hide y axis ticks
275
276 ax.plot(0,0,'o',markersize = 9, markerfacecolor = "#FDB813",markeredgecolor = "#FD7813"
)
277 line1, = ax.plot([], [], 'o-',color = '#d2eeff',markevery=10000, markerfacecolor =
'#0077BE',lw=2) # line for Earth
278 line2, = ax.plot([], [], 'o-',color = '#e3dccb',markersize = 8, markerfacecolor =
'#f66338',lw=2,markevery=10000) # line for Jupiter
279
280
281 ax.plot([-6,-5],[6.5,6.5],'r-')
282 ax.text(-4.5,6.3,r'1 AU = $1.496 \times 10^8$ km')
283
284 ax.plot(-6,-6.2,'o', color = '#d2eeff', markerfacecolor = '#0077BE')
285 ax.text(-5.5,-6.4,'Earth')
286
287 ax.plot(-3.3,-6.2,'o', color = '#e3dccb',markersize = 8, markerfacecolor = '#f66338')
288 ax.text(-2.9,-6.4,'Jupiter')
289
290 ax.plot(5,-6.2,'o', markersize = 9, markerfacecolor = "#FDB813",markeredgecolor =
"#FD7813")
291 ax.text(5.5,-6.4,'Sun')
292 ttl = ax.text(0.24, 1.05, '', transform = ax.transAxes, va='center')
293
294
295 # Call animation function
296 anim = animation.FuncAnimation(fig, animate, init_func=init, frames=4000, interval=5,
blit=True)
297
298 plt.show()
299

```