

# Mécanique des fluides

# Chapitre 1

## Introduction - Notions de Base

### 1.1 Qu'est-ce qu'une Compressibilité ?

La compressibilité est le caractère de variation de volume de fluide avec une variation de pression ( $dp$ ), le volume de fluide subit une diminution de volume ( $dV$ ).

L'augmentation de pression entraîne une diminution de volume.

Le coefficient de compressibilité est :

$$\beta = -\frac{dv/v}{dp} = -\frac{dV}{Vdp} \quad \text{Pa}^{-1} ; \text{m}^2/\text{N} \quad (1.1)$$

$\beta$  : coefficient de compressibilité ( $\text{m}^2/\text{N}$ )

$V$  : volume de fluide ( $\text{m}^3$ )

$dV$  : variation de volume ( $\text{m}^3$ )

$dp$  : variation de pression ( $\text{N}/\text{m}^2$ )

### 1.2 Equation d'état, Gaz parfaits :

On recherche l'équation qui lie les paramètres d'état ( $p, v, T$ ). On considère une (U.D.M) d'un gaz parfait dans deux états différents :

**Etat (1) : (P, V, T)**

**Etat (2) : (P', V', T')**

Imaginons un 3<sup>ème</sup> état où la pression est  $P$ , la température est  $T'$ . Etat (3) : ( $P, V'', T'$ ).

On passe à pression constante de l'état (1) à l'état (3), on a donc en vertu de la loi de GAY-LUSSAC.

$$\frac{V}{T} = \frac{V''}{T'} \quad (1.2)$$

On passe de l'état (3) à l'état (2), la température étant constante, on a donc en vertu de la loi de MARIOTTE :

$$P'' \cdot V'' = P' \cdot V' \quad (1.3)$$

En multipliant membre à membre les deux équations (1.2) et (1.3) on obtient :

$$\frac{P V V''}{T} = \frac{P' V' V''}{T'} \rightarrow \frac{P V}{T} = \frac{P' V'}{T'} = \text{cte} \quad (1.4)$$

Pour un gaz parfait on a :

$$\frac{PV}{T} = Cte \quad (1.5)$$

Pour l'unité de masse (UDM) cette constante est appelée ( $r$ ), l'équation d'état devient :

$$PV = rT \quad (1.6)$$

Pour une masse  $m$  de gaz parfait, occupant le volume  $V$  sous la pression  $P$  et à température  $T$ , l'équation d'état devient :

$$PV = mrT \quad (1.7)$$

Pour l'air, qui est considéré comme un gaz parfait,  $r$  vaut : 287 J/kg°K.

Si on considère une masse molaire  $M$  de gaz parfait, elle occupe le volume  $V$ , on peut écrire :

$$PV = MrT = RT \quad (1.8)$$

Avec :  $R=M.r$  tel que  $R$  : constante universelle des gaz parfait indépendante du gaz considéré. Donc pour 1Mole de gaz parfait, l'équation d'état devient

$$Pv = RT \quad (1.9)$$

Ici,  $v$  : représente le volume molaire = 22,4 L

Pour  $n$  moles de gaz parfait occupant un volume  $V$ , sous la pression  $P$  et la température  $T$ , l'équation d'état devient :

$$PV = nRT \quad (1.10)$$

$R=8.32\text{J/Mole } ^\circ\text{K}$  pour tous les gaz.

### 1.3 Qu'est-ce qu'un fluide ?

On peut rencontrer la matière sous trois formes principales :

- l'état solide ;
- l'état liquide ;
- l'état gazeux.

Un *fluide* est un *liquide* ou un *gaz*.

### 1.4 Quelles sont les différences entre un fluide et un solide ?

La matière est constituée de particules de très petite taille qui sont des atomes, des molécules ou des ions. Dans un solide, ces particules sont fortement liées entre elles par des forces électrostatiques et occupent ainsi des positions fixes dans l'espace. Par conséquent, *un solide possède une forme bien déterminée*. Pour le déformer, il faut lui appliquer une contrainte mécanique suffisante pour contrer les forces qui existent entre les particules qui le constituent. Dans le cas des fluides, ces forces sont moins intenses, si bien que les particules sont mobiles

dans l'espace. Par conséquent, le *fluide* peut se déformer spontanément et *ne possède pas de forme propre*.

### 1.5 Quelles sont les différences entre un gaz et un liquide ?

La principale différence entre un gaz et un liquide est que les particules constituant un liquide sont jointives alors que dans le cas d'un gaz ces particules sont beaucoup plus espacées les unes des autres. Cette différence a les deux conséquences suivantes :

- Il est possible de réduire le volume qu'occupe un gaz en le comprimant (en effet, les particules qui le constituent peuvent se rapprocher puisqu'elles ne sont pas jointives) alors que c'est impossible avec un liquide (les particules sont déjà jointives, il est impossible de plus les rapprocher) ;
- Un gaz va occuper tout le volume qui lui est offert alors qu'un liquide va épouser la forme du récipient qui le contient en laissant une surface libre (voir figure 1.1).

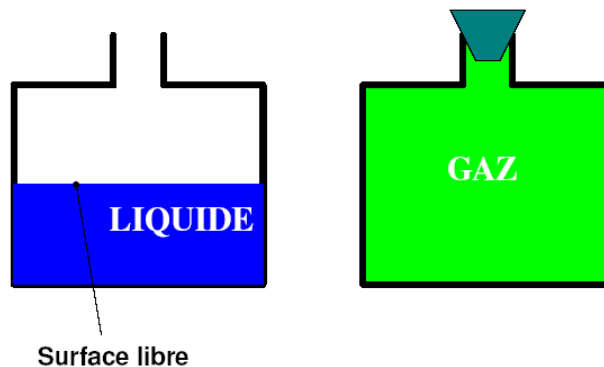


FIG. 1.1 – Différence de comportement d'un gaz et d'un liquide dans un récipient

### 1.6 Qu'est-ce que la mécanique des fluides ?

La mécanique des fluides est la branche de la physique qui s'intéresse à l'étude des forces et des énergies mises en jeu dans les fluides ainsi qu'aux caractéristiques des écoulements.

### 1.7 A quoi sert la mécanique des fluides ?

Le champ d'application de la mécanique des fluides est extrêmement large et varié. En effet, dès qu'on se trouve en présence d'un fluide en écoulement et que l'on veut comprendre ou prévoir son comportement, il faut faire appel à la mécanique des fluides. On peut ainsi citer les domaines d'application suivants qui démontrent cette grande variété :

- L'écoulement du sang à l'intérieur des veines et artères ;
- Les prévisions météorologiques qui doivent tenir compte de la circulation des masses d'air ;

- L'étude aérodynamique des véhicules et de l'écoulement de l'air ou de l'eau autour de ceux-ci ;
- Le dimensionnement d'un réseau d'eau urbaine ;
- ....

En génie chimique-génie des procédés, les fluides en circulation sont omniprésents. Il est donc nécessaire de comprendre ce qui se passe lors de leur écoulement afin de concevoir, dimensionner et choisir convenablement les réseaux dans lesquels ils circulent. La mécanique des fluides permettra ainsi :

- de déterminer le diamètre optimal d'une conduite ;
- de choisir la pompe qui permettra de satisfaire aux conditions requises pour la circulation d'un fluide dans un réseau donné ;
- de prévoir la consommation d'énergie d'un appareil utilisé pour la circulation d'un fluide (pompe, compresseur ou ventilateur) ;
- de mieux comprendre le fonctionnement des appareils de mesure et de régulation ;

## 1.8 Quelques propriétés des fluides :

### 1.8.1 Masse volumique :

#### 1.8.1.1 Définition – Unités :

Les fluides (liquide ou gaz) sont pesants. Cela signifie qu'un volume donné de fluide (par exemple  $1 \text{ m}^3$ ) représente une masse bien définie. Toutefois cette masse sera différente pour chaque fluide. Ainsi,  $1 \text{ m}^3$  d'eau possédera une masse de 1000 kg, alors qu' $1 \text{ m}^3$  de mercure possédera une masse de 13600 kg. On peut ainsi définir pour chaque fluide une grandeur appelée *masse volumique* qui est le rapport de la masse  $m$  de fluide et du volume  $V$  qu'occupe cette masse (voir équation 1.1). On utilisera le symbole  $\rho$  (la lettre grecque rho) pour désigner la masse volumique.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.11)$$

L'unité de la *masse volumique* dans le système d'unité international (S.I.) est le *kilogramme par mètre cube*, abrégé  $\text{kg/m}^3$ . On veillera donc à exprimer *la masse en kg* et *le volume en  $\text{m}^3$* .

**Exemple 1 :** On a vu précédemment qu' $1 \text{ m}^3$  d'eau représentait une masse de 1000 kg.

La masse volumique de l'eau sera donc :

$$\rho_{\text{eau}} = \frac{1000}{1} = 1000 \text{ kg/m}^3.$$

Pour le mercure, nous avons vu qu'1 m<sup>3</sup> avait une masse de 13600 kg. Par conséquent, il vient:

$$\rho_{\text{mercure}} = \frac{13600}{1} = 13600 \text{ Kg} / \text{m}^3$$

On trouvera dans la table 1.1, les masses volumiques de divers fluides usuels. On peut constater ici que les masses volumiques des liquides sont beaucoup plus grandes que celles des gaz (environ 1000 fois). Ce phénomène s'explique par le fait que les particules constituant un liquide sont jointives. Aussi, l'ensemble des particules est plus compact et un volume plus réduit contient donc une plus grande masse.

TAB. 1.1 – Masses volumiques de fluides usuels

Fluide	Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )
Eau (à température ambiante)	1000
Eau de mer	1020—1030
Mercure	13600
Air (à 20 °C et à pression atmosphérique)	1,2
Vapeur d'eau (à 100 °C et à pression atmosphérique)	0,6
Ethanol (alcool éthylique)	789
Huile végétale	910—940
Huile minérale (lubrifiants)	880—940
Essence	700—750
Kérosène	780—820
Pétrole	870

Nous avons vu que l'unité de la masse volumique dans le système international (SI) d'unités était le kg/m<sup>3</sup>. Il existe toutefois d'autres unités rassemblées dans le tableau 1.2. On y trouve aussi l'équivalence avec l'unité SI.

TAB. 1.2 – Unités de masse volumique

Unité	Equivalence en kg/m <sup>3</sup>
g/cm <sup>3</sup>	1 g/cm <sup>3</sup> =1000 kg/m <sup>3</sup>
kg/L	1 kg/L=1000 kg/m <sup>3</sup>
g/L	1 g/L=1 kg/m <sup>3</sup>
lb/ft <sup>3</sup> (livres par pieds au cube)	1 lb/ft <sup>3</sup> =16,01846 kg/m <sup>3</sup>

### 1.8.1.2 Densité :

Afin d'éviter les problèmes d'unités lorsqu'on donne la valeur de la masse volumique d'un fluide, on a introduit la notion de *densité*. La densité d'un fluide est définie comme le rapport de la masse volumique de ce fluide (exprimée dans une unité quelconque) sur la masse volumique de l'eau (exprimée dans la même unité). L'équation 1.2 permet de calculer la densité que l'on notera par la lettre *d*.

$$\rho_{\text{Fluide}} = \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{eau}}} \quad (1.12)$$

Il est impératif d'exprimer la masse volumique du fluide et celle de l'eau dans la même unité. La densité est donc une grandeur qui n'a donc pas d'unité (on dit qu'elle est sans dimension). Sa valeur ne dépend pas du système d'unité utilisé.

**Exemple 2 :** On a vu que la masse volumique du mercure était de  $13600 \text{ kg/m}^3$  et celle de l'eau de  $1000 \text{ kg/m}^3$ . En  $\text{lb/ft}^3$  (unité anglo-saxonne), on aura :

$$\rho_{\text{eau}} = 62,43 \text{ lb/ft}^3$$

$$\rho_{\text{mercure}} = 849,02 \text{ lb/ft}^3$$

On peut calculer la densité à partir de ces deux systèmes d'unités :

$$d_{\text{mercure}} = \frac{13600}{1000} = 13,6$$

$$d_{\text{mercure}} = \frac{849,02}{62,43} = 13,6$$

On voit bien sur cet exemple que la densité ne dépend pas du système d'unités employé.

### 1.8.1.3 Notion de fluide compressible/incompressible :

Nous avons vu précédemment (voir § 1.1.3) qu'il était possible de comprimer un gaz, c'est à dire de réduire le volume occupé par une masse donnée de ce gaz. Par exemple, si l'on emprisonne de l'air dans une seringue, on peut faire varier le volume occupé par cette masse d'air en exerçant une pression sur le piston. La même opération est impossible avec un liquide. On dit que les gaz sont *compressibles* alors que les liquides sont *incompressibles*.

Cette propriété des gaz a par conséquent une influence sur leur masse volumique.

Reprenons l'exemple de la seringue :

**Exemple 3 :** Remplissons d'air une seringue de volume  $V_1=20 \text{ ml}$  (soit  $20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ ). Dans les conditions atmosphériques cette seringue contiendra alors une masse d'air  $m_1=24 \cdot 10^{-3} \text{ g}$  (soit  $24 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ ). La masse volumique  $\rho_1$  de l'air contenu initialement sera donc :

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{24 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

Comprimons, à l'aide du piston, cette masse d'air jusqu'à un volume  $V_2=10 \text{ ml}$ .

La masse d'air contenue dans la seringue est toujours la même, c'est à dire  $m_1$ . La masse volumique  $\rho_2$  de l'air comprimé est alors :

$$\rho_2 = \frac{m_1}{V_2} = \frac{24 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6}} = 2,4 \text{ kg/m}^3$$

On peut ainsi constater qu'en comprimant le gaz, on a augmenté sa masse volumique.

En fait, en comprimant le gaz, nous avons augmenté sa pression.

Ainsi, on pourra dire que *la masse volumique d'un gaz dépend de la pression de celui-ci*. De plus, *la masse volumique des gaz dépend aussi fortement de la température*. C'est pourquoi dans le tableau 1.1 donnant les masses volumiques de certains fluides usuels, nous

avons pris soin de donner pour les gaz les valeurs de la pression et de la température auxquelles ont été mesurées ces masses volumiques.

L'équation 1.3 suivante permet de calculer la masse volumique d'un gaz en fonction des conditions de pression et de température :

$$\rho_{\text{gaz}} = \frac{0,001.P.M}{R.(273,15 + T)} \quad (1.14)$$

Avec  $P$  la pression du gaz exprimée en Pascal (Pa),  $T$  la température du gaz exprimée en °C,  $R$  la constante des gaz parfaits qui vaut 8,314 J/mol. °C et  $M$  la masse molaire du gaz exprimée en g/mol. Nous avons dit précédemment que les liquides étaient, contrairement aux gaz, incompressibles. Ceci implique que la masse volumique des liquides ne varie pas. En réalité, on observe que la masse volumique des liquides varie *très faiblement* avec la température et encore plus faiblement avec la pression. Ainsi, la masse volumique de l'eau à 0° vaut 1000 kg/m<sup>3</sup> alors qu'à 100° elle vaut 959 kg/m<sup>3</sup>. Une telle précision n'est en général nécessaire que pour des calculs très précis. On peut alors trouver la masse volumique des liquides en fonctions de la température dans des tables.

### 1.9 Expression des contraintes tangentielles : viscosité

Tous les fluides réels présentent une certaine viscosité, en ce sens que toute variation de vitesse en leur sein (on parle de gradient de vitesse) se traduit par l'apparition de forces internes de friction tendant à provoquer une homogénéisation des vitesses. Dans le cas où l'on néglige ces phénomènes, le fluide est qualifié de parfait. Cependant cette simplification ne pourra jamais être adoptée au voisinage d'une paroi où les forces de viscosité imposent au fluide d'avoir la même vitesse que celle-ci (condition de non glissement).

#### a) Écoulement de Couette, coefficient de viscosité (ou viscosité dynamique)

Considérons l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux plaques planes et parallèles dont les dimensions transversales sont très supérieures à la distance,  $h$ , qui les sépare (Fig. 1.2). L'une de ces plaques est maintenue fixe, alors que l'autre est entraînée à vitesse constante ( $U$ ) sous l'effet d'une force par unité de surface (donc une contrainte) notée  $\tau$ . Pour certains fluides (air, eau, ...), le profil de vitesse est linéaire, et la force exercée est proportionnelle au gradient de la vitesse.

$$u(z) = Uz/h \text{ et } \tau = \text{constante } U/h \quad (1.15)$$

Un fluide présentant un tel comportement est qualifié de newtonien. L'hypothèse de Newton consiste en la généralisation suivante :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.16)$$

La constante  $\mu$  est appelée coefficient de viscosité du fluide. Il dépend fortement de la température, et dans une moindre mesure, de la pression du fluide.

**Remarque 1 :** en général, la viscosité augmente avec la température dans le cas des gaz, mais diminue dans le cas des liquides.

**Remarque 2:** il ne faut pas confondre coefficient de viscosité ( $\mu$  et viscosité cinématique (ou dynamique), notée  $\nu$ , et définie par

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.17)$$

Comme on le verra plus tard en démontrant les équations de Navier-Stokes, cette dernière rend mieux compte que  $\mu$  de l'impact de la viscosité d'un fluide sur son mouvement. Attention aux idées reçues, à 20°C, sous la pression normale, la viscosité dynamique de l'air sec (15.1 E-6 SI) est plus importante que celle de l'eau (1.008 E-6 SI).

**Question :** *quelles sont les dimensions de  $\mu$  et de  $\nu$ ?*

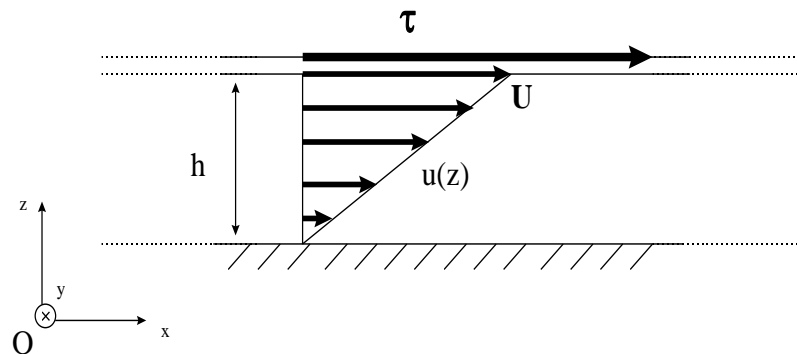


FIG. 1.2 – Schéma de l'expérience de Couette

### b) Interprétation moléculaire de la viscosité :

Remarque qualitative : la contrainte est due à un échange de molécules plus ou moins rapides entre deux particules fluides adjacentes et de vitesses moyennes différentes.

Remarque sur les unités : Une contrainte s'exprime en Pa (donc en  $\text{N/m}^2$ ), ce qui peut aussi se mettre sous la forme  $(\text{kg.m.s}^{-1})/(\text{m}^2.\text{s})$ . Elle peut donc être interprétée comme un flux de quantité de mouvement à travers la surface de séparation entre les deux particules fluides.

c) **Remarque complémentaire** : viscosité et couche limite, écoulement établi et écoulement non établi

Lorsque l'on injecte dans une conduite cylindrique un fluide dont le profil de vitesse est initialement uniforme (Fig.1.3), l'existence de forces de viscosité nécessairement très importantes (pourquoi ?) au niveau des parois se traduit par le développement progressif d'une couche limite (régime non établi). Lorsque le profil de vitesse devient indépendant de l'abscisse de la section étudiée, le régime est dit établi.

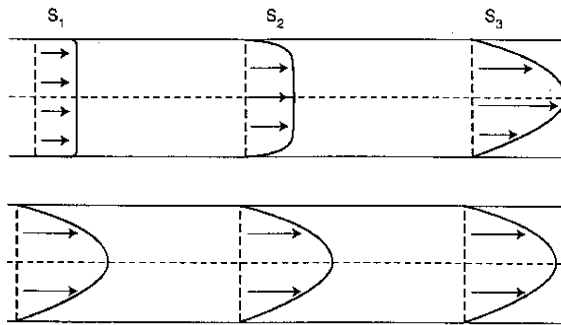


FIG. 1.3 – le profil de vitesse

## Chapitre 2

### Equation de base

#### 2.1. Notion de Débit :

##### 2.1.2 Définitions – Unités :

En génie chimique-génie des procédés, il est essentiel de pouvoir connaître la quantité de matière qui circule à l'intérieur des différents éléments du procédé (conduites, pompes, réacteurs,). Par conséquent, il est nécessaire de définir la notion de débit.

Considérons, par exemple, une conduite (voir figure 2.1) dans laquelle circule un fluide. On appellera section de passage la surface à travers laquelle s'écoule le fluide (hachurée sur la figure). Le débit s'écoulant à travers cette section de passage représentera alors la quantité de matière (exprimée par une masse ou un volume) qui passe à chaque unité de temps (c'est-à-dire chaque seconde, chaque minute, chaque heure, selon l'unité de temps choisie) à travers cette section. Si on a choisi d'exprimer la quantité de matière, alors on parlera de *débit massique*. Si on a choisi d'utiliser un volume on parlera de *débit volumique*. On notera  $Q_m$  le débit massique et  $Q_v$  le débit volumique.

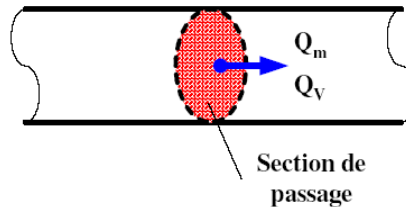


FIG. 2.1 – Fluide en écoulement dans une conduite

Par conséquent si une masse  $m$  de fluide traverse la section de passage pendant un intervalle de temps  $t$ , on pourra calculer le débit massique  $Q_m$  de la manière suivante :

$$Q_m = \frac{m}{t} \quad (2.1)$$

De même, si un volume  $V$  franchit la section de passage pendant l'intervalle de temps  $t$ , on calculera le débit volumique  $Q_v$  de la manière suivante :

$$Q_v = \frac{V}{t} \quad (2.2)$$

Les unités du système international pour la masse étant le kg, pour le volume le  $m^3$  et pour le temps la seconde (s), l'unité du système international pour le débit massique sera le kg/s et pour le débit volumique le  $m^3/s$ . Il est bien sûr possible d'exprimer masse, volume et temps dans d'autres unités. Par exemple, si on choisit le gramme (g) comme unité de masse et la

minute (min) comme unité de temps, le débit massique sera donné en g/min. De même, si on choisit le litre (L) comme unité de volume et l'heure (h) comme unité de temps, les débits volumiques seront exprimés en L/h.

**Exemple 4 :** Débit d'eau dans une installation sanitaire

On prélève pendant 1 minute et 17 secondes de l'eau à un robinet d'eau sanitaire à l'aide d'un récipient. On a ainsi prélevé une masse de 12,33 kg. On a donc :

$$m = 12,33 \text{ kg}$$

$$t = 1 \text{ min } 17 \text{ s} = 77 \text{ s}$$

On peut par conséquent calculer le débit massique d'eau  $Q_m$  disponible sur ce robinet

$$\rho = \frac{m}{t} = \frac{12,33}{77} = 0,16 \text{ Kg / s}$$

**Exemple 5 :** Dans une unité de fabrication de benzène (qui est un hydrocarbure liquide à température ambiante) on stocke le produit final dans plusieurs cuves. Ces cuves parallélépipédiques ont pour dimensions :

- Longueur  $L=10$  m
- Largeur  $l=4$  m
- Hauteur  $h=2,5$  m

Il faut une heure, 12 minutes et 37 secondes pour remplir une cuve.

Il est ainsi possible de déterminer le débit volumique  $Q_{V \text{ Benzène}}$  de benzène produit.

Le volume  $V$  de la cuve est :

$$V = L \cdot l \cdot h = 10 \cdot 4 \cdot 2,5 = 100 \text{ m}^3$$

Le temps de remplissage  $t$  vaut :

$$t = 1 \text{ h } 12 \text{ min } 37 \text{ s} = 1 \cdot 3600 + 12 \cdot 60 + 37 = 4357 \text{ s}$$

On peut alors déterminer  $Q_{V \text{ Benzène}}$ :

$$Q_{V \text{ Benzène}} = \frac{V}{t} = \frac{100}{4357} = 0,023 \text{ m}^3 / \text{s}$$

**2.1.2 Relation entre débit massique et débit volumique :**

Nous avons vu qu'il existe une relation entre masse et volume (équation 2.1) :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$m = \rho \cdot V \tag{2.3}$$

Or nous avons vu précédemment que :

$$Q_m = \frac{m}{t}$$

En remplaçant  $m$  dans l'expression précédente par la relation 2.3, on obtient :

$$Q_m = \frac{\rho \cdot V}{t} = \rho \cdot \frac{V}{t} \quad (2.4)$$

Par conséquent, on peut écrire la relation suivante entre débit massique et débit volumique :

$$Q_m = \rho \cdot Q_v \quad (2.5)$$

Ou encore :

$$Q_v = \frac{Q_m}{\rho} \quad (2.6)$$

**Exemple 6 :** Si nous reprenons l'exemple 4, nous avons un débit massique  $Q_m$  de 0,16 kg/s. Il est alors possible de calculer le débit volumique. En effet, la masse volumique de l'eau vaut:

$$\rho_{eau} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Il vient donc :

$$Q_v = \frac{Q_m}{\rho_{eau}} = \frac{0,16}{1000} = 0,16 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$

On peut exprimer ce débit volumique dans une unité plus adaptée, par exemple le L/min. En effet :

$$1 \text{ m}^3/\text{s} = 1000 \text{ L/s} = 60 \cdot 1000 = 60000 \text{ L/min}$$

On a donc :

$$Q_v = 0,16 \cdot 10^{-3} \cdot 60000 = 9,6 \text{ L/min}$$

### 2.1.3 Relation entre débit et vitesse :

Lorsqu'un fluide s'écoule, les particules qui le composent sont animées d'une certaine vitesse. Reprenons l'exemple de l'écoulement d'un fluide au sein d'une conduite, en supposant que toutes les particules se trouvant dans la section de passage (hachurée sur la figure 2.2(a)) au temps  $t = 0$  sont animées de la vitesse moyenne  $U_{moy}$ . Après un intervalle de temps  $t$ , ces particules vont se retrouver dans une section distante d'une longueur  $l$  de la section initiale (voir figure 2.2(b)). On peut alors calculer cette longueur  $l$  :

$$l = U_{moy} \cdot t \quad (2.7)$$

La surface de la section de passage étant  $S$ , on peut alors calculer le volume  $V$  de fluide qui est

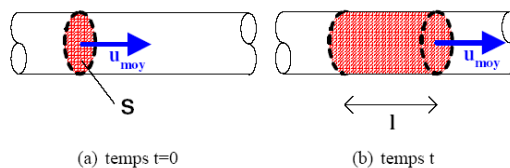


FIG. 2.2 – Écoulement dans une conduite au cours de l'intervalle de temps  $t$   
 Passé à travers la section de passage pendant l'intervalle de temps  $t$  :

$$V = l.S = U_{\text{moy}}.t.S \quad (2.8)$$

On peut donc aisément calculer le débit volumique s'écoulant à travers notre section de passage:

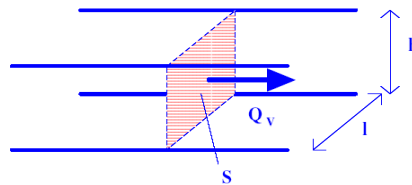
$$Q_V = \frac{V}{t} = \frac{U_{\text{moy}}.t.S}{t} = U_{\text{moy}}.S \quad (2.9)$$

On a donc les relations suivantes entre débit volumique et vitesse et entre débit massique et vitesse :

$$Q_V = U_{\text{moy}}.S \quad (2.10)$$

$$Q_m = \rho.U_{\text{moy}}.S \quad (2.11)$$

**Exemple 7 :** Considérons une gaine de ventilation dans laquelle circule de l'air. Cette gaine est de section rectangulaire (largeur  $l=30$  cm, hauteur  $h=50$  cm). Le débit volumique d'air circulé est de  $5400 \text{ m}^3/\text{h}$ . On désire connaître la vitesse moyenne de l'air dans la conduite.



Il faut tout d'abord calculer la section de passage  $S$  de l'air :

$$S = l \cdot h = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15 \text{ m}^2$$

On peut maintenant calculer la vitesse du fluide sachant que  $Q_V = U \cdot S$ .

$$U = \frac{Q_V}{S} = \frac{5400/3600}{0,15} = 10 \text{ m/s}$$

## 2.2 Bilans de matière :

### 2.2.1 Qu'est-ce qu'un bilan de matière ?

Au sein d'un procédé, on rencontre de nombreux organes dans lesquels circulent des fluides. Ces organes peuvent comporter plusieurs entrées et plusieurs sorties. Il est très souvent nécessaire d'établir des relations entre les quantités de matière sortantes et entrantes, c'est à dire plus précisément entre les débits entrants et sortants. Effectuer un *bilan de matière* consistera alors à recenser les différents flux de matière et à en établir une sorte de comptabilité. Les relations ainsi établies entre les différents débits permettront alors d'établir des relations entre les différentes vitesses.

### 2.2.2 Comment écrire un bilan de matière ?

#### 2.2.2.1 Bilan de matière sur une conduite :

Reprenons toujours l'exemple d'une conduite. Toutefois, celle-ci peut ne pas avoir une section constante (voir figure 2.3).

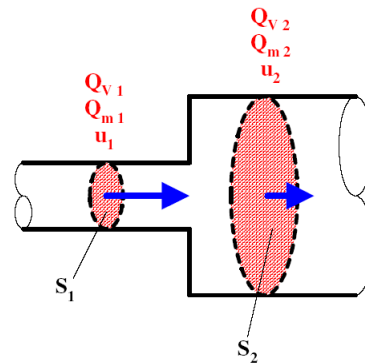


FIG. 2.3 – Conduite avec changement de section

Si l'on considère que l'écoulement est bien établi, c'est à dire qu'il a eu le temps de se stabiliser, les débits, les vitesses et les différentes propriétés du fluide dans les différentes parties de la conduite seront par conséquent constants. On dit que le *régime permanent* est établi. Considérons maintenant la masse  $m_1$  de fluide traversant la section  $S_1$  (petite section de la conduite) pendant l'intervalle de temps  $t$ . On souhaite déterminer la masse  $m_2$  de fluide traversant la section  $S_2$  pendant ce même intervalle de temps  $t$ . La masse de fluide compris entre les sections  $S_1$  et  $S_2$  devra rester constante puisque le régime permanent est établi. Par conséquent, si pendant le temps  $t$  il rentre dans cette partie de la conduite une masse  $m_1$ , il faut que la même masse en sorte pendant le même temps. Si cette condition n'était pas vérifiée, il y aurait une augmentation ou une diminution de la masse de fluide contenu entre les deux sections. On a donc  $m_1 = m_2$ . On peut alors établir la relation suivante entre les débits :

$$Q_{m1} = \frac{m_1}{t} = \frac{m_2}{t} = Q_{m2} \quad (2.12)$$

On a donc la conservation du débit massique qu'on écrit :

$$Q_{m1} = Q_{m2} \quad (2.13)$$

Il paraît maintenant légitime de se poser la question de savoir si le *débit volumique* se conserve aussi. La relation liant débit massique et volumique, nous permet alors d'écrire :

$$\rho_1 \cdot Q_{v1} = \rho_2 \cdot Q_{v2} \quad (2.14)$$

Où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont les masses volumiques dans les sections  $S_1$  et  $S_2$  de la conduite.

Dans le cas des fluides incompressibles, c'est à dire les liquides, la masse volumique reste constante. Par conséquent, on aura  $\rho_1 = \rho_2$ , et donc :

$$Q_{v1} = Q_{v2} \quad (2.15)$$

On peut donc dire que *pour les liquides le débit volumique se conserve*.

Dans le cas des fluides compressibles, c'est à dire les gaz, il se peut que la pression et la température du fluide soient différentes dans les sections  $S_1$  et  $S_2$  de la conduite. Or la masse volumique d'un gaz dépend de ces deux paramètres. On aura donc  $\rho_1 \neq \rho_2$  et par conséquent :

$$Q_{V1} \neq Q_{V2} \quad (2.16)$$

On peut maintenant s'interroger sur la vitesse moyenne du fluide dans les sections 1 et 2. En utilisant l'équation 2.11, on a :

$$\rho_1 \cdot U_1 \cdot S_1 = \rho_2 \cdot U_2 \cdot S_2 \quad (2.17)$$

Ce qui nous donne pour  $U_2$  la vitesse dans la section  $S_2$  :

$$U_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdot U_1 \quad (2.18)$$

On voit alors bien que si les sections  $S_1$  et  $S_2$  sont différentes, ou si la masse volumique du fluide varie, la vitesse dans les 2 sections seront différentes. Un cas particulier très important est celui des *fluides incompressibles* pour lesquels  $\rho_1 = \rho_2$ . On a alors :

$$U_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot U_1 \quad (2.19)$$

La variation de vitesse est alors uniquement fonction du rapport des sections de passage  $S_1$  et  $S_2$ .

- Si  $\frac{S_1}{S_2} > 1$  alors  $> U_1$  ;
- Si  $\frac{S_1}{S_2} < 1$  alors  $< U_1$  ;

En d'autres termes, lorsque la section d'une conduite diminue, la vitesse du fluide augmente ; et lorsque la section du fluide augmente la vitesse diminue. Il faut toutefois garder en tête que le débit reste le même dans les deux sections.

**Exemple 8 :** Reprenons le cas de la figure 2.3. On considérera que la conduite est cylindrique. Le petit diamètre  $D_1$  vaut 10 mm et le grand diamètre  $D_2$  vaut 20 mm. Le débit volumique d'eau  $Q_{V1}$  circulant dans cette conduite est 8 L/min.

On souhaite alors connaître le débit volumique  $Q_{V2}$ , les débits massiques  $Q_{m1}$  et  $Q_{m2}$  ainsi que les vitesses moyennes  $U_1$  et  $U_2$ .

L'eau est un fluide incompressible donc le débit volumique se conserve. On peut donc écrire :

$$Q_{V2} = Q_{V1} = 10L/\text{min} = \frac{10}{60} = 0,167 \text{ L/s} = 0,167 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

On obtient facilement les débits massiques :

$$Q_{m1} = \rho_{eau} \cdot Q_{V1} = 1000 \cdot 0,167 \cdot 10^{-3} = 0,167 \text{ Kg/s}$$

$$Q_{m2} = Q_{m1} = 0,167 \text{ Kg/s}$$

Pour calculer les vitesses, il faut d'abord calculer les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  :

$$S_1 = \pi \cdot \frac{D_1^2}{4} = \pi \cdot \frac{0.01^2}{4} = 7,85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$S_2 = \pi \cdot \frac{D_2^2}{4} = \pi \cdot \frac{0.02^2}{4} = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Il vient alors :

$$U_1 = \frac{Q_{V1}}{S_1} = \frac{0,167 \cdot 10^{-3}}{7,85 \cdot 10^{-5}} = 2,12 \text{ m/s}$$

$$U_2 = \frac{Q_{V2}}{S_2} = \frac{0,167 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 10^{-4}} = 0,53 \text{ m/s}$$

On constate bien qu'en augmentant la section de la conduite la vitesse du fluide diminue. On aurait aussi pu calculer  $u_2$  de la manière suivante :

$$U_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot U_1 = \frac{7,85 \cdot 10^{-5}}{3,14 \cdot 10^{-4}} \cdot 2,12 = 0,53 \text{ m/s}$$

### 2.2.2.2 Bilan de matière sur un embranchement :

Considérons maintenant le cas d'un embranchement sur une conduite (voir figure 2.4). Deux flux de matière traversent les sections  $S_1$  et  $S_2$  avec des débits massiques respectifs  $Q_{m1}$  et  $Q_{m2}$ . Ils se mélangent pour donner naissance au troisième flux qui traverse la section  $S_3$  avec un débit massique  $Q_{m3}$ .

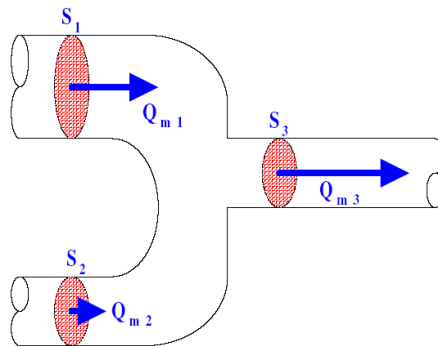


FIG. 2.4 – Embranchement sur une conduite

En considérant toujours l'écoulement en régime permanent, on peut reproduire le raisonnement précédemment établi pour la conduite. La quantité de matière comprise entre les sections  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  doit rester constante. Par conséquent, pendant un même intervalle de temps il doit rentrer autant de matière dans cette zone (entre les trois surfaces) qu'il doit en sortir. Le débit massique net de matière entrant sera donc la somme des débits entrant  $Q_{m1}$  et  $Q_{m2}$ . On pourra alors écrire le bilan de matière suivant :

$$Q_{m1} + Q_{m2} = Q_{m3} \quad (2.20)$$

De plus, si le fluide est incompressible, c'est à dire s'il est un liquide, alors on pourra également écrire la conservation du débit volumique :

$$Q_{V1} + Q_{V2} = Q_{V3} \quad (2.21)$$

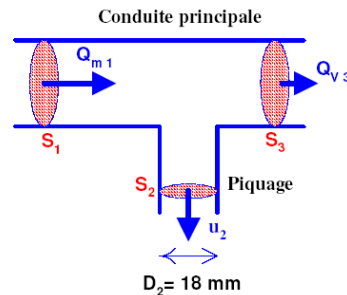
On pourra aussi établir une relation entre les vitesses :

$$\rho_1 \cdot U_1 \cdot S_1 + \rho_2 \cdot U_2 \cdot S_2 = \rho_3 \cdot U_3 \cdot S_3 \quad (2.22)$$

Et si on est en présence d'un liquide, ce qui implique que  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ , alors on pourra écrire :

$$U_1 \cdot S_1 + U_2 \cdot S_2 = U_3 \cdot S_3 \quad (2.23)$$

**Exemple 9 :** Considérons une conduite principale dans laquelle circule de l'essence de densité  $\rho_{essence} = 0,72$ . Le débit massique  $Q_{m1}$  d'essence entrant dans la conduite est de 3 tonnes par heures. On réalise un piquage sur la conduite principale pour alimenter une conduite secondaire cylindrique de 18 mm de diamètre. On sait que la vitesse moyenne  $U_2$  du fluide dans cette conduite secondaire est de 0,9 m/s. On souhaite connaître le débit volumique  $Q_{V3}$  sortant de la conduite principale.



L'essence étant un fluide incompressible, le bilan de matière revient à écrire la conservation du débit volumique :

$$Q_{V1} = Q_{V2} + Q_{V3}$$

D'où :

$$Q_{V3} = Q_{V1} - Q_{V2}$$

On peut alors calculer  $Q_{V1}$  et  $Q_{V2}$  :

$$Q_{V1} = \frac{Q_{m1}}{\rho_1} = \frac{3.1000 / 3600}{0,72.1000} = 1,16.10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$Q_{V2} = S_2 \cdot U_2 = \frac{\pi \cdot 0,018^2}{4} \cdot 0,9 = 2,29.10^{-4} \text{ m}^3 / \text{s}$$

On peut alors calculer  $Q_{V3}$  :

$$Q_{V3} = Q_{V1} - Q_{V2} = 1,16 \cdot 10^{-3} - 2,29 \cdot 10^{-4} = 9,28 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 / \text{s}$$

### 2.2.2.3 Cas général :

En reprenant le raisonnement suivi pour les deux cas précédemment étudiés, on peut comprendre comment écrire un bilan de matière sur tout système fonctionnant en régime permanent.

Ce système peut être un élément d'un procédé ou même le procédé dans son ensemble.

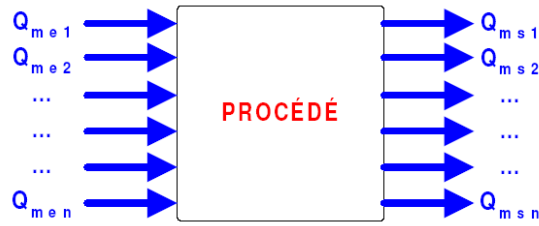


FIG. 2.5 – Bilan de matière sur un procédé

Sur la figure 2.5, on voit un procédé représenté par une *boîte* dans laquelle entrent et sortent des flux de matière auxquels sont associés des débits massiques ( $Q_{me}$  pour les débits entrants et  $Q_{ms}$  pour les débits sortants). Le bilan de matière consistera alors à écrire que la somme des débits massiques entrants est égale à la somme des débits massiques sortants :

$$Q_{me1} + Q_{me2} + \dots + Q_{men} = Q_{ms1} + Q_{ms2} + \dots + Q_{msn} \quad (2.24)$$

De plus pour les liquides on pourra écrire la conservation du débit volumique puisque la masse volumique d'un liquide est constante :

$$Q_{ve1} + Q_{ve2} + \dots + Q_{ven} = Q_{vs1} + Q_{vs2} + \dots + Q_{vsn} \quad (2.25)$$

### 2.3 Théorème d'Euler :

Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc.

Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{avec} \quad \vec{P} = m\vec{V}_G : \text{quantité de mouvement.} \quad (2.26)$$

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent.

#### Enoncé

La résultante ( $\sum \vec{F}_{ext}$ ) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par  $S_1$  et  $S_2$ ) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en  $S_1$  à une vitesse  $\vec{V}_1$  et sort par  $S_2$  à une vitesse  $\vec{V}_2$ .

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = q_m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)} \quad (2.27)$$

#### Exemple :

Considérons un obstacle symétrique par rapport à l'axe  $\vec{Z}$ . Le jet d'un écoulement (figure 2.6) de débit massique  $q_m$ , de vitesse  $\vec{V}_1$  et de direction parallèle à l'axe  $\vec{Z}$ , percute l'obstacle qui le dévie d'un angle  $\beta$ . Le fluide quitte l'obstacle à une vitesse  $\vec{V}_2$  de direction faisant un angle  $\beta$  par rapport à l'axe  $\vec{Z}$ .

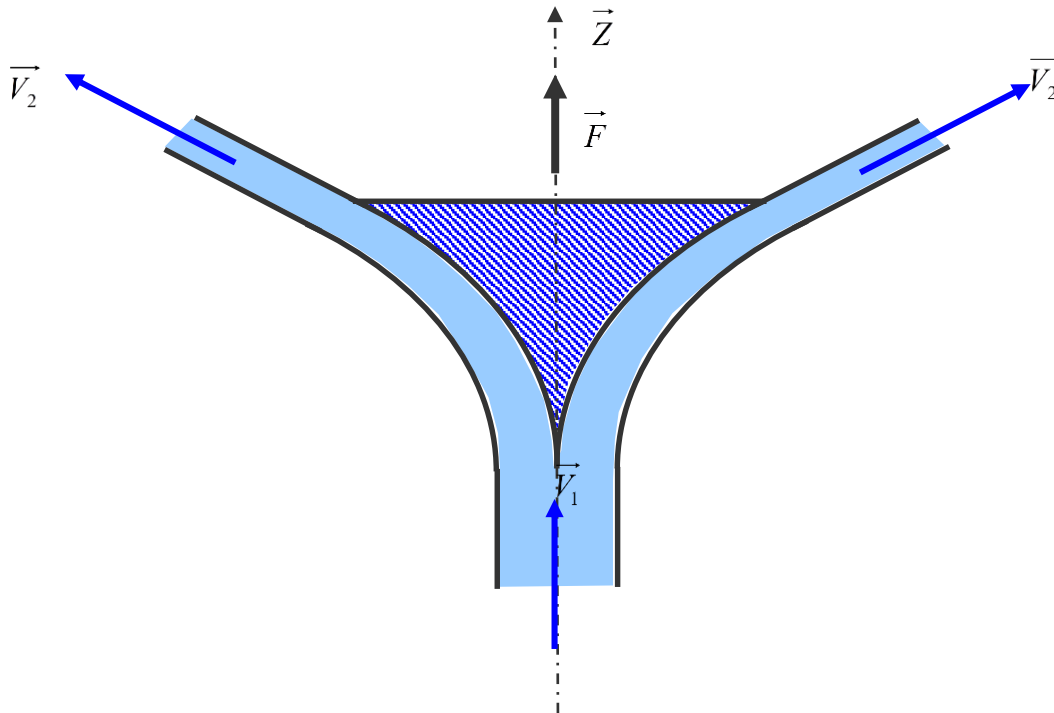


FIG. 2.6 – Le jet d'un écoulement

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est :  $q_m \cdot V_1$  porté par l'axe  $\vec{Z}$ .

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :  $q_m \cdot V_2 \cdot \cos \beta$  porté par l'axe  $\vec{Z}$

La force opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$R = q_m \cdot V_2 \cdot \cos \beta - q_m \cdot V_1 \quad (2.28)$$

La force F exercée sur l'obstacle en direction de  $\vec{Z}$  est égale et opposée à celle-ci :

$$F = q_m \cdot (V_1 - V_2 \cdot \cos \beta) \quad (2.29)$$

## 2.4 Exercices complémentaires :

### Exercice 1 :

Un pétrolier possède une capacité de transport de 340000 tonnes de pétrole brut. Quel volume de pétrole peut donc contenir ce bateau ?

Données :  $d_{\text{pétrole}}=0,87$

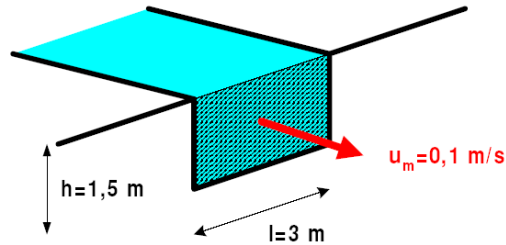
### Exercice 2 :

Un plongeur remplit sa bouteille d'un volume de 10 L avec de l'air comprimé à  $1,5 \cdot 10^6$  Pascal (c'est à dire 15 bar). La température ambiante est de 20 °C. Quelle masse d'air a-t-il introduit dans la bouteille ?

Données : Masse molaire de l'air  $M_{\text{air}}=29$  g/mol

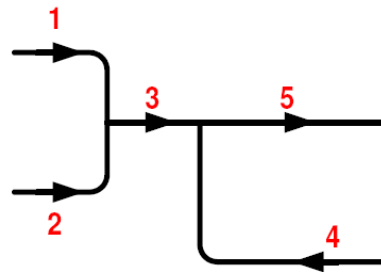
### Exercice 3 :

Un petit cours d'eau dans sa partie canalisée possède une largeur de 3 m et une profondeur de 1,5 m. On mesure sa vitesse moyenne d'écoulement  $u_m=0,1$  m/s. Donnez le débit volumique de ce cours d'eau exprimé en  $m^3/h$ .



**Exercice 4 :**

On rencontre le réseau de conduites d'huile suivant au sein d'une usine.



On désire connaître le débit massique, le débit volumique ainsi que la vitesse moyenne du fluide en chaque point du réseau (les diamètres  $D$  de la conduite aux différents points sont donnés).

Données :	$d_{\text{huile}}=0,91$	$D_1=40\text{mm}$
	$Q_{m1}=1\text{Kg/s}$	$D_2=32\text{mm}$
	$Q_{v2}=7,2\text{m}^3/\text{h}$	$D_3=50\text{mm}$
	$Q_{m5}=15\text{tonne/h}$	$D_4=25\text{mm}$
		$D_5=50\text{mm}$

**Exercice 5 :**

Une lance à incendie a un débit de  $30$   $m^3/h$  avec une conduite 18-65 (18 représente en mm le diamètre de l'extrémité conique, c'est-à-dire le diamètre de sortie de la lance et 65 représente en mm, le diamètre du tuyau avant le rétrécissement). Calculez la vitesse de l'eau en sortie et en entrée de la lance.

## Chapitre 3

### Les fluides en équilibre Statique des fluides

#### 3.1 Qu'est-ce que la pression ?

##### 3.1.1 Pression et Force :

Les particules qui forment un fluide ne sont pas immobiles les unes par rapport aux autres. Elles sont agitées de façon désordonnée ce qui provoque de nombreux chocs entre elles et avec les parois. Par ces chocs, le fluide applique une force sur les parois. Ces forces sont appelées *forces de pression*.

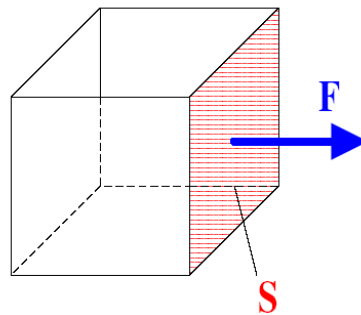


FIG. 3.1 – Force de pression appliquée sur une paroi

Considérons la figure 3.1 représentant une enceinte contenant un fluide. Ce fluide exerce donc des forces sur chacune des parois. Ces forces sont dirigées vers l'extérieur de l'enceinte et sont perpendiculaires aux parois. Si on considère la face hachurée de surface  $S$ , le fluide lui applique une force  $F$ . On peut ainsi définir la pression  $P$  du fluide comme le rapport de cette force  $F$  et de la surface  $S$  :

$$P = \frac{F}{S} \quad (3.1)$$

Réciproquement, si on connaît la pression du fluide, on peut calculer la force qu'il exerce sur une paroi de la manière suivante :

$$F = P.S \quad (3.2)$$

La pression représente donc la force qui s'exerce sur chaque unité de surface.

##### 3.1.2 Pression et Énergie :

On a vu au paragraphe précédent que la pression était l'expression d'une force exercée par le fluide. Si le fluide est capable d'exercer une force, c'est qu'il possède une certaine *énergie*. Si on appelle  $E_{pr}$  l'énergie d'un volume  $V$  de fluide dont la pression est  $P$ , on a alors la relation suivante :

$$E_{pr} = P.V \quad (3.3)$$

La pression  $P$  représente donc aussi la quantité d'énergie contenue dans chaque unité de volume de fluide. On dit que c'est une *énergie volumique*. On a bien pris soin de préciser l'indice  $pr$  pour l'énergie pour signifier qu'il s'agit ici d'une énergie de pression. On rencontrera par la suite d'autres types d'énergies, comme par exemple l'énergie cinétique que le fluide acquiert lorsque sa vitesse augmente.

### 3.1.3 Unités de pression :

Nous venons de voir qu'il était possible de voir la pression comme une force par unité de surface, et à la fois comme une énergie par unité de volume. On pourra ainsi exprimer son unité de deux manières différentes qui sont toutefois équivalentes.

Dans le système international, l'unité pour la force est le Newton, noté N, et l'unité de la surface le mètre carré ( $m^2$ ). Par conséquent l'unité dans le système international pour la pression sera le  $N/m^2$ . L'unité internationale d'énergie est le Joules, noté J, et celle pour le volume le mètre cube ( $m^3$ ). On pourra donc aussi utiliser le  $J/m^3$  comme unité internationale de pression. En fait, le  $N/m^2$  et le  $J/m^3$  sont une seule et même unité, et sont par conséquent équivalentes. Une unité a donc été inventée pour la pression : C'est le Pascal, noté Pa. On a par conséquent l'équivalence suivante :

$$1Pa = 1N/m^2 = 1J/m^3 \quad (3.4)$$

Il existe de nombreuses autres unités de pression couramment employées dans l'industrie. Le tableau 3.1 en dresse une liste non-exhaustive.

TAB. 3.1 – Unités de pression usuelles

Unité	Correspondance avec le Pa
bar	1 b = $10^5$ Pa
Atmosphère (atm)	1 atm = 101325 Pa
Millimètre de mercure (mmHg) ou torr	1 mmHg = 133,32 Pa
Centimètre de colonne d'eau (cmCE)	1 cmCE = 98,06 Pa
Psi (Livres par pouce au carré)	1 Psi = 6894,7 Pa

### 3.1.4 Notions de pressions absolue et relative :

Nous vivons dans un monde qui est baigné au sein d'un fluide : *l'air*. On désigne par *pression atmosphérique* la valeur de la pression de l'air ambiant. On note la pression atmosphérique  $P_{am}$ . Cette valeur (que l'on mesure à l'aide d'un baromètre) fluctue en fonction des conditions météorologiques et de la zone géographique. Toutefois, la valeur de la pression atmosphérique oscille autour d'une valeur moyenne qu'on appelle pression atmosphérique normale qui vaut 101325 Pa.

Lorsque la pression d'un fluide est *supérieure à la pression atmosphérique* on dit que ce fluide est *sous pression*. Lorsque la pression du fluide est *inférieure* à la pression atmosphérique, on dit que le fluide est *sous vide*. Une pression nulle ( $P=0$  Pa) correspond à un vide parfait qui correspond en fait à une absence totale de particules (atomes ou molécules).

Comme nous le verrons plus loin, on fait souvent apparaître dans les calculs la différence entre la pression  $P$  du fluide et la pression atmosphérique  $P_{atm}$ . On définit ainsi une grandeur qu'on appelle *pression relative*, que l'on note  $P'$ , par :

$$P' = P - P_{atm} \quad (3.5)$$

Pour bien différencier  $P$  et  $P'$ , on appellera  $P$  la pression absolue.  $P$  et  $P'$  sont toutes deux des pressions et ont par conséquent la même unité. On trouve parfois la mention *abs* ou *a* à côté de l'unité de pression pour signaler qu'il s'agit d'une pression absolue.

### 3.2 Comment évolue la pression au sein d'un fluide au repos ?

#### 3.2.1 Quelques observations expérimentales :

##### 3.2.1.1 Expérience du crève-tonneau de PASCAL :

Blaise PASCAL (1623-1662) afin de mettre en évidence la manière dont évolue la pression au sein d'un fluide, imagina l'expérience dite du « Crève-tonneau ». Comme on peut le voir sur la figure 3.2, PASCAL fit fixer un tube étroit sur le couvercle d'un tonneau. Ce tube communiquait avec l'intérieur du tonneau et le tout était étanche.

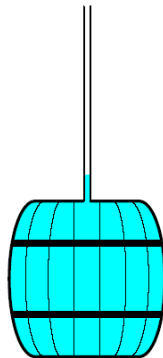


FIG. 3.2 – Expérience du « Crève-tonneau » de PASCAL

Une fois le tonneau plein, on continuait de remplir le fin tube qui le surplombait. Lorsque le liquide arriva à un certain niveau dans le tube le tonneau se mit à fuir abondamment.

Cette expérience est surprenante car il suffit de quelques dizaines de grammes d'eau pour que le tonneau se mette à fuir. Il faut tout d'abord se demander pourquoi le tonneau fuit. La fuite provient des forces de pression qu'exerce le fluide sur les planches. Lorsque ces forces deviennent trop importantes les planches s'écartent et laissent passer le liquide. Ceci signifie que la pression dans le tonneau augmente lorsque que l'on remplit le tube supérieur. Par

conséquent, plus la hauteur d'eau au-dessus du fond du tonneau est importante, plus la pression dans le fond du tonneau est importante.

### 3.2.1.2 Variation sur l'expérience de TORRICELLI :

L'expérience de TORRICELLI (1608-1647) consiste en fait à étudier l'influence qu'à la hauteur d'un orifice dans un réservoir sur la vitesse de vidange. Dans notre cas (voir figure 3.3), on considère trois réservoirs identiques, dans lesquels la hauteur d'eau est la même. On perce un orifice de même diamètre dans chacun des réservoirs, mais à des hauteurs différentes. On constate que plus la hauteur de liquide au-dessus de l'orifice est grande, plus le jet de liquide va loin. Par conséquent, plus la hauteur de liquide au-dessus de l'orifice est grande, plus l'énergie, donc la pression, est importante. Ceci rejoint les constatations de l'expérience du « crève tonneau ».

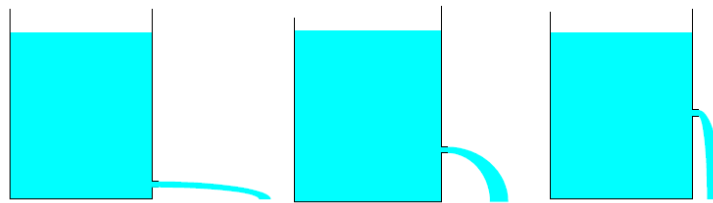


FIG. 3.3 – Vidange d'un réservoir à travers un orifice de hauteur variable

## 3.2.2 L'équation de l'hydrostatique :

### 3.2.2.1 Formulations mathématiques :

Nous avons vu que la pression variait avec la hauteur dans le liquide. Un point du fluide sera donc représenté par son *altitude* notée  $z$ . L'altitude est la coordonnée du point sur un axe vertical et dirigé vers le haut. On fixera de manière arbitraire l'altitude 0 (l'origine) sur cet axe. On veillera tout de même à choisir une origine pratique comme par exemple le fond d'un réservoir, le centre d'une pompe, . . .

Pour exprimer à l'aide d'une relation mathématique l'évolution de la pression au sein d'un fluide au repos, il convient de respecter scrupuleusement les hypothèses suivantes :

- Le fluide doit être au *repos*. Un fluide en mouvement obéit à d'autres lois que nous verrons au chapitre 4 ;
- Le fluide doit être homogène. On ne peut écrire de relation qu'au sein d'un seul et même liquide.

Si maintenant, on considère au sein de ce fluide homogène (voir figure 3.4) et au repos, deux points distincts 1 et 2, d'altitudes respectives  $z_1$  et  $z_2$ , alors on peut écrire la relation suivante entre les pressions  $P_1$  et  $P_2$  :

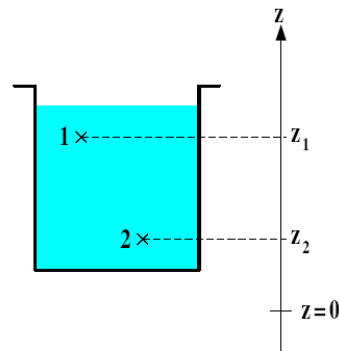


FIG. 3.4 – Points au sein d'un fluide homogène et au repos

$$P_1 + \rho_{\text{fluide}} \cdot g \cdot Z_1 = P_2 + \rho_{\text{fluide}} \cdot g \cdot Z_2 \quad (3.6)$$

Où  $g$  est l'accélération de la pesanteur qui vaut  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

La relation 2.6 est appelée *équation de l'hydrostatique*. On peut aussi l'écrire de la façon suivante :

$$P_2 = P_1 + \rho_{\text{fluide}} \cdot g \cdot (Z_1 - Z_2) \quad (3.7)$$

Cette formulation permet de mieux comprendre le phénomène puisqu'en fait la pression au point 2 est égale à la pression au point 1 plus le poids de la colonne de fluide se trouvant entre les points 1 et 2.

**Exemple 1 :** La pression de l'eau dans l'océan à 10 m de profondeur est de 2 bar. On souhaite connaître la pression qui règne à 100 m de profondeur. La densité de l'eau de mer est de 1,02.

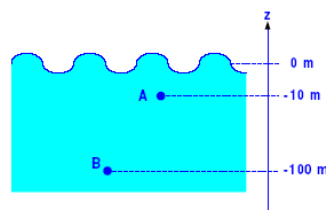


FIG. 3.5 – La pression de l'eau

On choisit l'origine des altitudes à la surface de l'océan. Le point A correspondant à une profondeur de 10 m aura donc une altitude négative  $z_A = -10 \text{ m}$ . De même,  $z_B = -100 \text{ m}$ . On aura de plus :

$$\rho_{\text{mer}} = d_{\text{mer}} \cdot \rho_{\text{eau}} = 1,02 \cdot 1000 = 1020 \text{ kg/m}^3$$

$$P_A = 2 \text{ bar} = 200000 \text{ Pa}$$

On peut raisonnablement considérer l'océan comme un fluide homogène et au repos (on supposera qu'il n'existe pas de courants marins). Par conséquent, on peut appliquer l'équation de l'hydrostatique :

$$P_A + \rho_{\text{mer}} \cdot g \cdot z_A = P_B + \rho_{\text{mer}} \cdot g \cdot z_B$$

D'où :

$$P_B = P_A + \rho_{mer} \cdot g \cdot (z_A - z_B) = 200000 + 1020 \cdot 9,81 \cdot (-10 - (-100))$$

$$P_B = 1100558 \text{ Pa} = 11 \text{ bar}$$

La pression de l'océan à 100 m de profondeur est donc de 11 bar.

### 3.2.2.2 Approximation dans le cas des gaz :

Nous avons vu au chapitre 1 que les masses volumiques des gaz étaient très faibles en comparaison de celles des liquides. Par conséquent, dans un gaz, la pression variera très peu avec l'altitude. *On pourra donc considérer en génie des procédés que dans un gaz la pression est partout la même.*

**Exemple 2 :** Au sol la pression atmosphérique est de 101325 Pa. On considère que l'atmosphère a une masse volumique constante égale à 1,2 kg/m<sup>3</sup>. On souhaite connaître la pression à 1 km d'altitude.

Appelons *A* le point au sol et *B* le point à 1 km d'altitude. On choisit logiquement l'origine des altitudes au niveau du sol. On aura donc :

$$P_A = 101325 \text{ Pa}$$

$$z_A = 0 \text{ m}$$

$$z_B = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

En appliquant la loi de l'hydrostatique, on aura :

$$P_B = P_A + \rho_{mer} \cdot g \cdot (z_A - z_B) = 101325 + 1,2 \cdot 9,81 \cdot (0 - 1000) = 89553 \text{ Pa}$$

La diminution de pression à une altitude de 1 km est donc relativement faible. Or en génie des procédés, les installations ne dépassent jamais quelques dizaines de mètres de hauteur. La variation de pression due à l'altitude dans les gaz sera donc négligeable.

### 3.2.2.3 Interface entre deux fluides :

Il est très courant de rencontrer deux fluides en contact comme un gaz au-dessus d'un liquide (de l'air au-dessus de l'eau par exemple) ou un liquide léger surnageant sur un liquide plus lourd avec lequel il n'est pas miscible (du pétrole sur de l'eau de mer ou de l'eau sur du mercure par exemple). Cette surface de contact est, pour un liquide au repos, plane et horizontale. On l'appelle aussi *interface*.

On aura alors la propriété suivante : *la pression est identique de part et d'autre de l'interface.*

En effet, lorsque l'on traverse l'interface, on n'observe pas de discontinuité brutale de la pression.

Ainsi, par exemple, la pression d'un liquide à sa surface ouverte à l'atmosphère est la pression atmosphérique.

**Exemple 3 :**

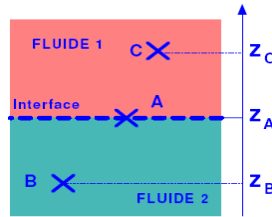


FIG. 3.6 – l’interface entre le fluide 1 et le fluide 2.

Si on considère la figure suivante, on peut voir l’interface entre le fluide 1 et le fluide 2. Le point A est situé à l’interface des deux fluides. Par conséquent, le point A appartient à la fois au fluide 1 et au fluide 2. La pression  $P_A$  est donc la même que l’on considère que le point A fasse partie du fluide 1 ou du fluide 2. On peut ainsi appliquer l’équation de l’hydrostatique au sein du fluide 1 entre les points A et B, et aussi sur le fluide 2 entre les points A et C :

$$P_A = P_B + \rho_1 \cdot g \cdot (z_B - z_A)$$

$$P_A = P_C + \rho_2 \cdot g \cdot (z_C - z_A)$$

Par conséquent, on aura la relation suivante entre  $P_B$  et  $P_C$  :

$$P_B = P_C + \rho_2 \cdot g \cdot (z_C - z_A) - \rho_1 \cdot g \cdot (z_B - z_A)$$

On notera enfin la remarque suivante qui est très importante : *on ne peut pas écrire directement l’équation de l’hydrostatique entre les points B et C car ils appartiennent à des fluides différents. On n’est donc pas en présence d’un fluide homogène.*

Il ne faut surtout jamais écrire la chose suivante

~~$$P_B + \rho_1 \cdot g \cdot z_B = P_C + \rho_2 \cdot g \cdot z_C$$~~

**3.2.3 Applications pratiques de la loi de l’hydrostatique :**

Nous allons voir maintenant à travers divers exemples quelques applications pratiques de l’équation de l’hydrostatique.

On appelle *tube manométrique* un tube de faible diamètre rempli d’un liquide et raccordé à une conduite ou un réservoir. Il est possible de relier la hauteur du liquide dans le tube à la pression régnant dans la conduite ou le réservoir. Ces tubes servent donc à mesurer des pressions (un manomètre est un appareil servant à mesurer des pressions).

**Exemple 4 :**

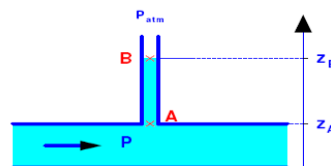


FIG. 3.7 – La pression  $P$

On fixe une tube de faible diamètre ouvert à l'atmosphère sur une conduite dans laquelle circule un liquide de masse volumique  $\rho$ . Le liquide se stabilise au niveau du point B dans le tube. On souhaite connaître la pression  $P$  du fluide circulant dans la conduite.

Le point A est à la limite entre la conduite et le tube, on a donc :

$$P_A = P$$

De plus le point B est à l'interface entre l'atmosphère et le liquide, donc :

$$P_B = P_{atm}$$

Le liquide se trouvant dans le tube est homogène et au repos (contrairement au liquide s'écoulant dans la conduite). Par conséquent, on peut écrire :

$$P_A + \rho \cdot g \cdot z_A = P_B + \rho \cdot g \cdot z_B$$

D'où :

$$P = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot (z_B - z_A)$$

Plus la pression  $P$  est forte dans la conduite, plus la dénivellation ( $z_B - z_A$ ) est grande, c'est à dire plus le liquide monte haut dans le tube. L'inconvénient majeur de ce genre de système de mesure est qu'il nécessite souvent des tubes très hauts (il faut un tube de 10 m de haut pour mesurer une pression de 2 bar avec de l'eau !!!). De plus, pour connaître exactement  $P_A$ , il faut aussi connaître la pression atmosphérique (elle se mesure avec un manomètre spécial appelé baromètre).

**Exemple 5 :** Entre deux points d'un procédé, un même fluide peut voir sa pression varier pour diverses raisons (frottements, présence d'une pompe ou d'une vanne, . . .). On cherche donc couramment à mesurer des différences de pression entre deux points d'un circuit.

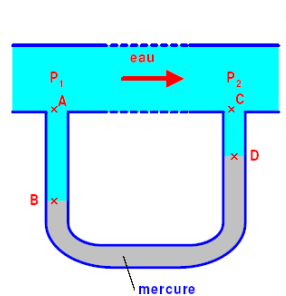


FIG. 3.8 – Différences de pression entre deux points d'un circuit

Un moyen simple est d'utiliser un *tube en U*. Dans cet exemple le tube est raccordé en deux points de la conduite, et est rempli de mercure, qui est un fluide plus dense et qui ne se mélange pas à l'eau. On cherche à déterminer la différence  $P_1 - P_2$ . On pourra tout d'abord écrire :

$$P_1 - P_2 = P_A - P_C$$

Puis on appliquera l'équation de l'hydrostatique sur les différentes parties du tube en U : sur l'eau entre A et B, sur le mercure (noté par son symbole chimique Hg) entre B et D et sur l'eau entre D et C. On aura les relations suivantes :

$$P_A = P_B + \rho_{eau} \cdot g \cdot (z_B - z_A)$$

$$P_B = P_D + \rho_{Hg} \cdot g \cdot (z_D - z_B)$$

$$P_D = P_C + \rho_{eau} \cdot g \cdot (z_C - z_D)$$

En regroupant ces trois relations on obtient :

$$P_A = P_C + \rho_{eau} \cdot g \cdot (z_B - z_A) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot (z_D - z_B) + \rho_{eau} \cdot g \cdot (z_C - z_D)$$

Or  $z_A = z_C$ , donc :

$$P_1 - P_2 = P_A - P_C = (\rho_{Hg} - \rho_{eau}) \cdot g \cdot (z_D - z_B)$$

Ce type de système est appelé manomètre différentiel puisqu'il permet de mesurer une différence de pression. Enfin, on notera qu'on ne peut écrire directement l'équation de l'hydrostatique entre A et C, puisque dans la conduite le fluide n'est pas au repos et que dans le manomètre il n'est pas homogène (on a une alternance de plusieurs fluides).

### 3.2.4 Manomètre type bourdon :

Pour des applications où les variations de pression sont brusques et élevées. Le Bourdon est simplement un tube métallique évidé dont une extrémité est fermée et l'autre est reliée au fluide sous pression. Sous l'effet de la pression, le tube tend à se redresser provoquant le mouvement d'une aiguille sur un cadran gradué. Les unités que l'on retrouve sur un cadran de Bourdon peuvent être très variées et il importe de bien vérifier si les pressions mesurées sont absolues, relatives et en quelles unités elles se trouvent.



FIG. 3.9 – Manomètre type bourdon

### 3.3 Forces hydrostatiques sur les parois :

Cette force est définie comme étant la force de pression exercée par un fluide au repos sur une surface de contact, cette force est toujours normale à la surface. Le calcul des forces

hydrostatiques sur une surface quelconque plongée dans l'eau, consiste à déterminer l'intensité de la force et son point d'application. On traitera dans ce qui suit le cas des surfaces planes ensuite les surfaces courbées.

a. **Surfaces planes :**

Soit une plaque de forme quelconque immergée et inclinée d'un angle  $\alpha$ .

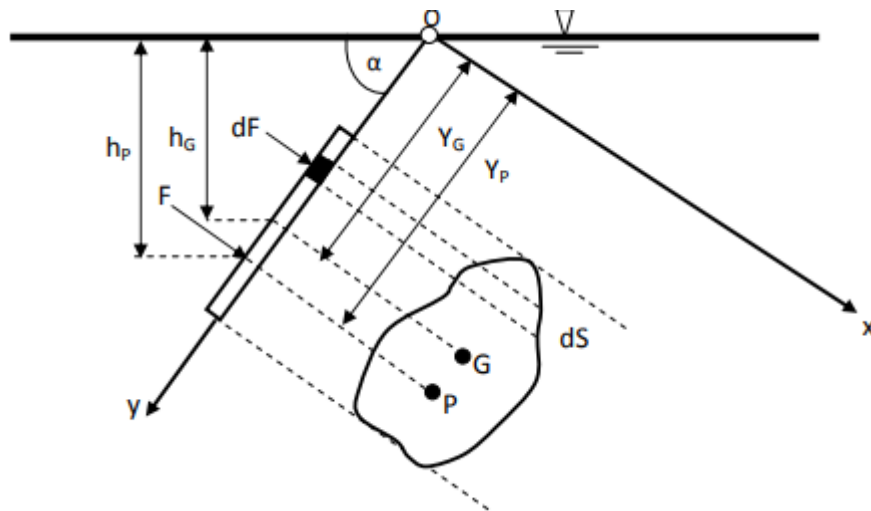


FIG. 3.10 – Force exercée par un fluide au repos sur une paroi solide fixe

Soit un élément de surface de la plaque «  $dS$  », la pression qui s'exerce sur cet élément est :

$$P = \rho g h \quad (3.8)$$

La force de poussée exercée sur l'élément sera :

$$df = PdS = \rho g h dS \quad (3.9)$$

Donc la force de poussée totale sur la plaque sera :

$$F = \int dF = \int \rho g h dS \quad (3.10)$$

Or,  $h = y \sin \alpha$  d'où :

$$F = \rho g \sin \alpha \int y dS \quad (3.11)$$

Le terme  $\int y dS$  représente le moment statique de la surface par rapport à l'axe  $Ox$  :

$$\int y dS = y_G S \quad (3.12)$$

Avec  $y_G$  ordonnée du centre de gravité

L'expression de  $F$  devient :

$$F = \rho g \sin \alpha y_G S \quad (3.13)$$

et comme :

$$h_G = y_G \sin \alpha \quad (3.14)$$

Donc l'expression finale de  $F$  devient :

$$F = \rho g h_G S \quad (3.15)$$

$h_G$  est la profondeur du centre de gravité de la surface  $S$  est l'aire de la surface Le point d'application de la force résultante  $F$  est appelé : le centre de poussée. La position de ce point est définie par la position du barycentre des surfaces élémentaires ( $ds$ ) pondérées par la pression sur chaque surface, ce qui revient à calculer le moment équivalent des forces de pression, c'est-à-dire :

$$y_P F = \int y dF = \rho g \sin \alpha \int y^2 dS \quad (3.16)$$

D'où :

$$y_P = \frac{\rho g \sin \alpha \int y^2 dS}{\rho g \sin \alpha y_G S} = \frac{\int y^2}{y_G S} \quad (3.17)$$

Le terme

$$I_x = \int y^2 dS \quad (3.18)$$

Représente le moment d'inertie de la surface A par rapport à l'axe  $Ox$ . Le théorème de Huygens nous permet d'écrire que :

$$I_x = I_{xG} + y_G^2 S \quad (3.19)$$

Où :  $I_{xG}$  représente le moment d'inertie de la surface A par rapport à l'axe qui passe par le centre de gravité.

Dans ce cas, la formule de  $y_P$  devient :

$$y_P = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S} \quad (3.20)$$

Cette formule montre que le point d'application de la résultante F se trouve toujours plus bas que le centre de gravité d'une distance égale à :

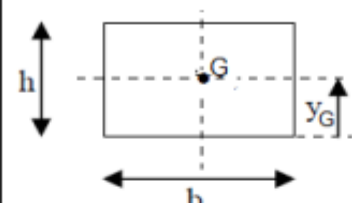
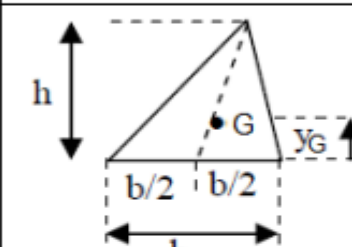
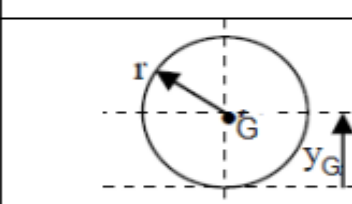
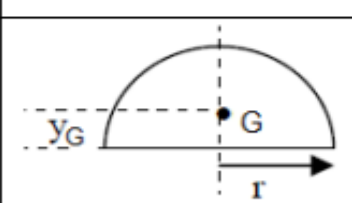
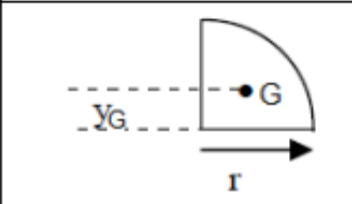
$$\frac{I_{xG}}{y_G S}$$

La profondeur du centre de poussée par rapport à la surface libre est donnée par :

$$h_P = y_P \sin \alpha$$

Le tableau 3.1 suivant fournit le centre de gravité, la surface et l'inertie pour quelques formes de surface plane.

TAB. 3.1 – Le centre de gravité, la surface et l’inertie pour quelques formes de surface plane.

Type de surface	Forme géométrique	Centre de gravité	surface	Moment d'inertie $I_{xG}$
Rectangle		$\frac{h}{2}$	$bh$	$\frac{bh^3}{12}$
Triangle		$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$
Cercle		$r$	$\pi r^2$	$\frac{\pi r^4}{4}$
Demi cercle		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$	$\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)r^4$
Quart de cercle		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$	$\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4$

### 3.4 Comportement des flotteurs-Poussée d’Archimède :

#### 3.4.1 Poussée d’Archimède :

Analysons ce qui se passe du point de vue de l’équilibre mécanique sur un flotteur, c’est à dire réfléchissons aux forces auxquelles il est soumis.

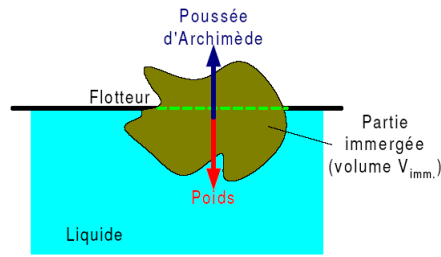


FIG. 3.11 – Équilibre mécanique d'un flotteur

Tout d'abord le flotteur est soumis à son propre poids, dirigé vers le bas et d'intensité  $m \cdot g$ , où  $m$  est la masse du flotteur et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Mais le poids n'est pas la seule force, sinon le flotteur coulerait. Il est donc soumis à une force dirigée en sens inverse du poids (donc vers le haut) et égale en intensité pour assurer l'équilibre des forces. Cette force est appelée *Poussée d'Archimède*. Le principe d'Archimède permet de relier l'intensité de cette poussée au volume de flotteur immergé et à la masse volumique du liquide. L'énoncé traditionnel du principe d'Archimède est le suivant : *Tout corps plongé dans un liquide subit une poussée verticale dirigée vers le haut dont l'intensité est égale au poids de liquide déplacé*. Il est toutefois possible d'en donner une présentation plus simple. Ainsi, si l'on appelle  $V_{imm.}$  le volume de la partie du flotteur qui est immergée dans le liquide, alors l'intensité  $A$  de la poussée d'Archimède s'exprimera de la façon suivante :

$$A = \rho_{liquide} \cdot g \cdot V_{imm.} \quad (3.21)$$

Pour que le flotteur soit en équilibre, c'est à dire pour qu'il flotte, il faut que la poussée d'Archimède soit égale en intensité au poids du flotteur. Or le poids du flotteur vaut  $m_{flotteur} \cdot g$ . On aura donc :

$$m_{flotteur} \cdot g = \rho_{liquide} \cdot g \cdot V_{imm.} \quad (3.22)$$

En remplaçant  $m_{flotteur}$  par  $\rho_{flotteur} \cdot V_{flotteur}$ , on obtient :

$$\rho_{flotteur} \cdot g \cdot V_{flotteur} = \rho_{liquide} \cdot g \cdot V_{imm.} \quad (3.23)$$

Le volume immergé  $V_{imm.}$  est toujours plus petit que le volume total du flotteur  $V_{flotteur}$ . Par conséquent, pour que la précédente relation soit satisfaite et que le flotteur flotte, il faut que la masse volumique du flotteur soit plus faible que celle du liquide.

$$\rho_{flotteur} < \rho_{liquide} \quad (3.24)$$

On pourra encore écrire cette condition avec les densités :

$$d_{flotteur} < d_{liquide} \quad (3.25)$$

La glace, dont la densité est d'environ 0,9 flottera donc sur l'eau (densité de 1). Les icebergs en sont un exemple. Par contre, le granit de densité 1,6 environ, coulera dans l'eau. Le granit flottera toutefois sur le mercure (densité de 13,6).

### 3.4.2 Un cas particulier de flottaison : les liquides non-miscibles :

Certains liquides sont dits *immiscibles*. Ceci signifie que même en les agitant fortement, ils ne se mélangent pas et après un certain temps, on obtient deux phases liquides qui se superposent.

C'est le liquide qui a la densité la plus faible qu'on retrouvera toujours au-dessus. On dit que c'est le liquide le plus *léger*. En fait, le liquide le plus léger « flotte » sur le liquide le plus lourd. Ainsi, par exemple, le pétrole de densité 0,87 flotte sur l'eau de mer de densité 1,02. C'est la raison pour laquelle lors de marées noires, le pétrole déversé surnage à la surface de l'eau sous forme de nappes (ce qui permet d'ailleurs de le récupérer).

### 3.4.3 Exemple d'application pratique des flotteurs :

Nous avons vu que la valeur du volume immergé du flotteur dépendait de la masse volumique du liquide. Il est par conséquent possible de mesurer des masses volumiques de liquide en mesurant ce volume immergé. C'est le principe du *pèse-acide* (utilisé pour mesurer la densité du liquide de batterie automobile par exemple) ou du *pèse-alcool* (utilisé pour mesurer la densité d'une solution aqueuse d'alcool éthylique comme un spiritueux par exemple).

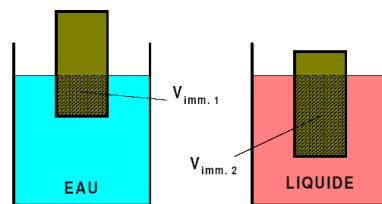


FIG. 3.12 – Mesure de la masse volumique d'un liquide à l'aide d'un flotteur

On constate que le flotteur de volume  $V_f$  et de masse volumique  $\rho_f$  s'enfonce dans l'eau d'un volume  $V_{imm.1}$  alors qu'il s'enfonce d'un volume  $V_{imm.2}$  dans un liquide dont on désire mesurer la masse volumique  $\rho_{liq}$ .

Dans chacun des cas on peut écrire la condition d'équilibre du flotteur à l'aide de l'équation 3.22. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\rho_{eau} \cdot g \cdot V_{imm1} &= \rho_f \cdot g \cdot V_f \\ \rho_{liq} \cdot g \cdot V_{imm2} &= \rho_f \cdot g \cdot V_f\end{aligned}$$

On a donc :

$$\rho_{eau} \cdot g \cdot V_{imm1} = \rho_{liq} \cdot g \cdot V_{imm2}$$

D'où :

$$\rho_{liq} = \frac{\rho_{eau} \cdot V_{imm1}}{V_{imm2}}$$

$$(3.26)$$

La masse volumique de l'eau étant connue, il suffit alors de mesurer les deux volumes immergés pour connaître la masse volumique du liquide.

### 3.5 Exercices complémentaires :

#### Exercice 1 :

Suite au naufrage d'un pétrolier, on envoie un sous-marin pour inspecter l'épave et repérer d'éventuelles fuites. L'épave repose par 3000 m de fond.

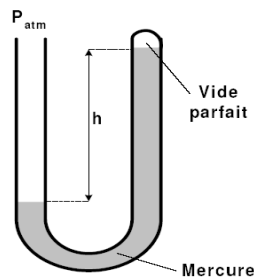
1. Calculez la pression de l'eau à cette profondeur.
2. Les hublots circulaires du sous-marin ont un diamètre de 20 cm. Quelle force de pression exerce l'eau sur le hublot ?
3. Si un objet devait appliquer par son poids une telle force, quelle serait sa masse ?

Données :  $P_{atm}=1 \text{ bar}$  ;  $d_{mer}=1,025$

#### Exercice 2 :

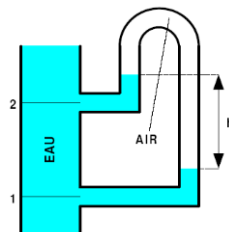
Afin de mesurer la pression atmosphérique, on utilise un baromètre à mercure. Celui-ci est constitué d'un tube en U partiellement rempli de mercure. Une des branches du U est ouverte à l'atmosphère.

L'autre est fermée, et au-dessus du mercure on a réalisé un vide parfait.



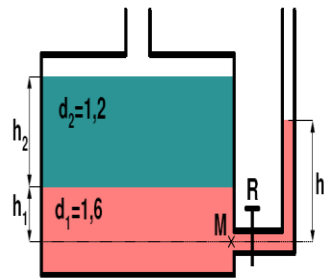
On observe une différence de hauteur  $h=747 \text{ mm}$  entre les deux branches du baromètre. Calculez la pression atmosphérique ?

#### Exercice 3 :



Sur une conduite verticale transportant de l'eau, on fixe deux prises de pression reliées à un tube en U renversé. Le haut du tube contient de l'air. On observe une dénivellation  $h=20 \text{ cm}$  entre les deux branches. Calculez la différence de pression entre les sections 1 et 2 de la conduite. On notera que le point 2 est situé 1 m au-dessus du point 1.

**Exercice 4 :**



Soit un récipient contenant un mélange de liquides immiscibles constitué d'un solvant chloré de densité  $d_1 = 1,6$  et d'une solution d'acide chlorhydrique de densité  $d_2 = 1,2$ . Le récipient communique au point M avec un tube indicateur de niveau par l'intermédiaire d'un robinet. Lors d'un premier remplissage du récipient, le robinet était fermé et le tube vide. Au bout d'un certain temps, le mélange a décanté : le solvant chloré se trouve dans la couche inférieure d'épaisseur  $h_1=35$  cm (comptée à partir de M). La solution chlorhydrique se trouve dans la couche supérieure s'épaisseur  $h_2=95$  cm.

On ouvre le robinet R. Du solvant chloré monte dans le tube indicateur de niveau et se stabilise. Sa hauteur dans le tube (comptée à partir de M) est  $h_0$ .

Calculer  $h_0$  en fonction de  $h_1$  et  $h_2$ . Que peut-on conclure ?

## Chapitre 4

### Cinématique, forces et contraintes

#### 4.1 Approches lagrangienne et eulérienne :

Cette section a pour objectif d'établir le lien entre les descriptions lagrangienne et eulérienne. Comme l'illustrent les figures 4.1 et 4.2, on parle de description lagrangienne lorsque l'on suit la trajectoire d'une parcelle de fluide bien identifiée au cours du temps (Cf. le pêcheur qui suit une feuille du regard) et l'on parle de description eulérienne lorsque l'on s'intéresse à ce qui se passe dans un volume géométrique bien défini de l'espace (Cf. le pêcheur qui voit un tourbillon arriver dans une zone à proximité d'un rocher puis en repartir).

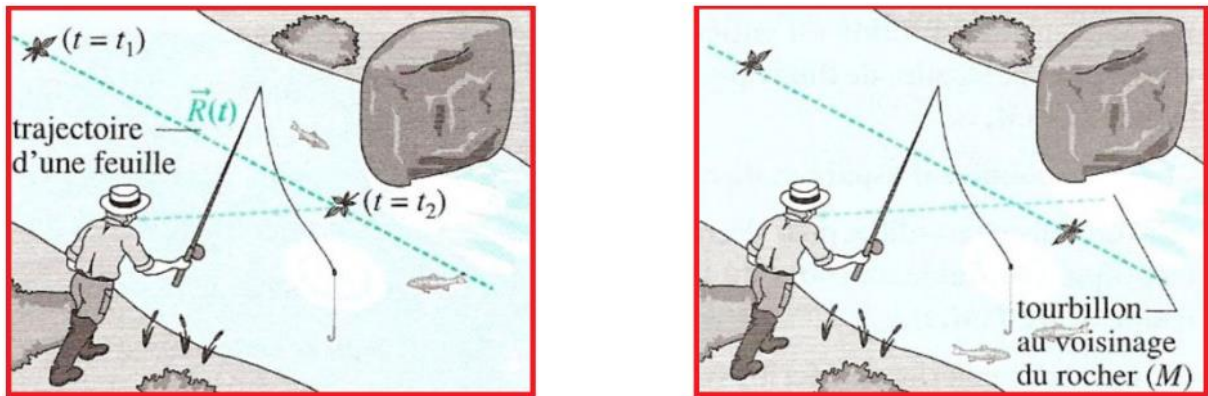


FIG. 4.1 – Approches lagrangienne (gauche) et eulérienne (droite).

#### 4.2 Dérivées partielle, totale et particulaire :

Pour établir un lien entre ces deux descriptions, nous allons considérer un écoulement où la vitesse du fluide à la position  $\mathbf{x}$  et à l'instant  $t$  est notée  $\vec{v}(\mathbf{x}, t)$ . Nous allons ensuite considérer un point  $M$  de l'espace qui suit une trajectoire  $\mathbf{x}_M(t)$ . Ce point peut être fixe (à une distance connue du rocher) ou bien être la position d'une parcelle de fluide bien particulière ou bien encore être décidée arbitrairement par l'observateur (son regard peut décrire un cercle à la surface d'un fleuve s'écoulant paisiblement). On se place tout d'abord dans ce cas général et l'on cherche à calculer l'évolution temporelle d'une grandeur  $f$  sur un petit volume autour du point  $M$  (par exemple la concentration en colorant ou la vitesse ou encore la masse volumique). Cette vitesse de variation est appelée dérivée totale de  $f$  et est notée  $df/dt$ .

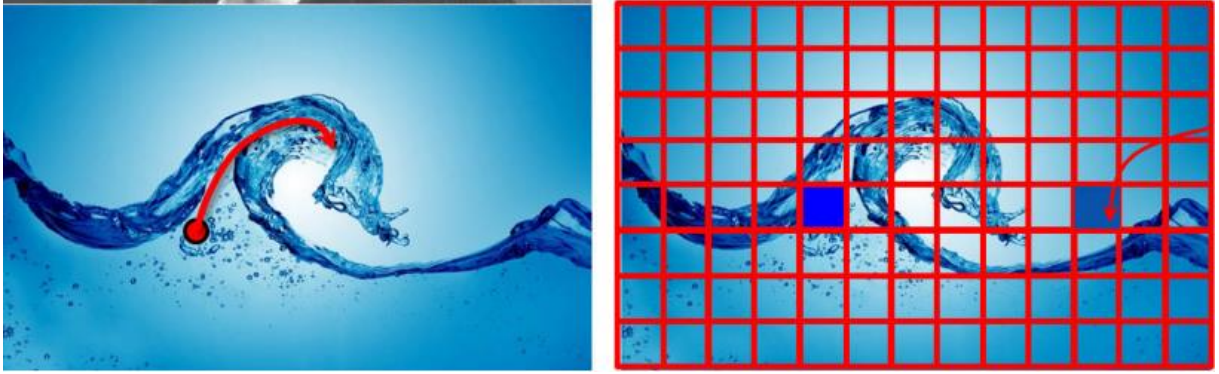


FIG. 4.2 – Approches lagrangienne (gauche) et eulérienne (droite).

Si l'on note  $\overline{u_x}$  la vitesse de déplacement du point de mire  $M$ , ce dernier passe de la position  $x$  à l'instant  $t$  à la position  $x + u_x \cdot dt$  à l'instant  $t + dt$ . Par conséquent, la vitesse de variation est :

$$\frac{df}{dt} = \frac{f(x+u_x \cdot dt, t) - f(x, t)}{dt} \quad (4.1)$$

Pour  $dt$  suffisamment petit, cette vitesse est égale :

$$\frac{df}{dt} = \frac{f(x+u_x \cdot dt, t+dt) - f(x, t+dt)}{dt} + \frac{f(x, t+dt) - f(x, t)}{dt} \quad (4.2)$$

Le deuxième terme du membre de droite est égal à la dérivée partielle  $\partial f / \partial t$ . Concernant le premier, on peut écrire le développement limité :

$$f(x + u_x \cdot dt, t + dt) = f(x, t + dt) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u_x \cdot dt \quad (4.3)$$

En généralisant à trois dimensions, cela permet d'écrire :  $M$  quelconque

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\overline{u} \cdot \nabla) f \quad (4.5)$$

Le dernier membre de cette expression est  $\overline{u} \cdot \nabla f$  qui traduit l'application de l'opérateur  $\overline{u} \cdot \nabla$  (produit scalaire entre  $\overline{u}$  et l'opérateur  $\nabla$ ) à la grandeur  $f$ . L'utilisation de parenthèses permet d'éviter la confusion avec la grandeur  $\overline{u} \cdot \nabla f$  qui peut être interprétée à tort comme le produit entre le vecteur  $\overline{u}$  et la grandeur  $\nabla f$ . En effet, cette expression n'a pas de sens mathématique (sauf si  $f$  est scalaire). La forme développée de cet opérateur, dit opérateur d'advection est :

$$\overline{u} \cdot \nabla = u_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.6)$$

Cette définition est valable quel que soit l'ordre tensoriel de  $f$  (scalaire, vecteur, tenseur d'ordre 2, ...). L'opérateur  $(\overline{u} \cdot \nabla)$  s'applique sur chacun des termes du tenseur  $f$  (par exemple  $\rho$ ,  $v_x$  ou bien  $\sigma_{yz}$ ).

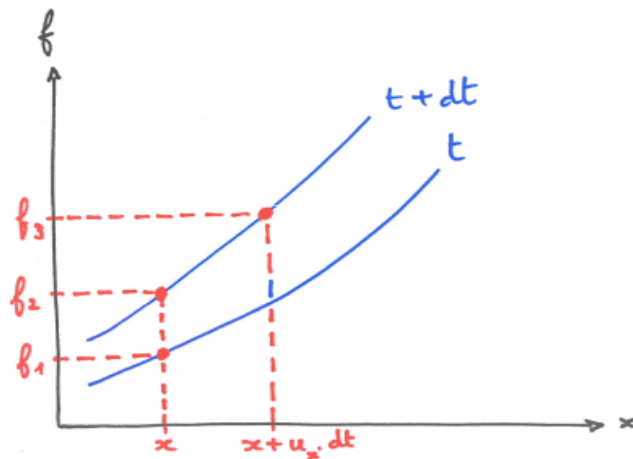


FIG. 4.3 – Représentation graphique des dérivées partielle et matérielle.

**Cas particulier n°1 :** le point de mire  $M$  est fixe ( $\vec{u} = \vec{0}$ ). On est alors dans une description eulérienne et la vitesse de variation de  $f$  est égale à la dérivée partielle, notée  $\partial f / \partial t$  :

$$M \text{ fixe} \Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.7)$$

**Cas particulier n°2 :** le point de mire est attaché à une molécule de fluide ( $\vec{u} = \vec{v}$ ). On est alors dans une description lagrangienne et la vitesse de variation de  $f$  est égale à ce qu'on appelle la dérivée matérielle ou dérivée particulière ou dérivée en suivant le mouvement, notée  $Df / Dt$ . Nous utiliserons préférentiellement l'appellation dérivée matérielle.

$$M \text{ fluide} \Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{Df}{Dt} \text{ avec } \frac{Df}{Dt} \equiv \frac{df}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla) f \quad (4.8)$$

La notation,  $D/Dt$ , indiquant une dérivée lagrangienne (parfois désigne un élément matériel ou substantiel), est utilisée dans l'éq. Précédente pour indiquer que nous suivons un élément (morceau) de fluide particulier et non pas une particule seulement. Plus généralement, nous avons :

$$\frac{D}{Dt}(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)(\dots) \quad (4.9)$$

Taux de variation Lagrangien      Variation locale ou d'Euler      Variation convective

$$\frac{D}{Dt}(\dots) = \frac{\partial}{\partial t}(\dots) + u_x \frac{\partial}{\partial x}(\dots) + u_y \frac{\partial}{\partial y}(\dots) + u_z \frac{\partial}{\partial z}(\dots) \quad (4.10)$$

Où (...) représente toute grandeur d'intérêt dans le champ d'écoulement.

### 4.3 Champ de vitesse et champ d'accélération :

Sur la base du concept du milieu continu qu'on a accordé au fluide, la description des propriétés du fluide (densité, pression, vitesse, accélération etc. ...) peuvent être des fonctions de l'espace, et peuvent par conséquent être représentées graphiquement. Une de ces grandeurs est le champ de vitesse. Il s'agit d'une fonction vectorielle de la position et du temps avec les composantes

$\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$ . Dans un système Eulérien, la formulation du vecteur de vitesse en coordonnées cartésiennes est définie comme :

$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k} \quad (4.11)$$

La dérivée totale par rapport au temps du vecteur de vitesse est le vecteur d'accélération ( $\vec{a}$ ) :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d[u(x,y,z,t)]}{dt}\vec{i} + \frac{d[v(x,y,z,t)]}{dt}\vec{j} + \frac{d[w(x,y,z,t)]}{dt}\vec{k} \quad (4.12)$$

Pour la composante de vitesse  $\mathbf{u}$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d[u(x, y, z, t)]}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)u \end{aligned} \quad (4.13)$$

De même pour les composantes  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$ , on a :

$$\frac{d[v(x,y,z,t)]}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)v \quad (4.14)$$

$$\frac{d[w(x,y,z,t)]}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)w \quad (4.15)$$

Sommons les trois termes précédents, on écrit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( u \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \quad (4.16)$$

Ou,

$$\vec{V} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \text{ et } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (4.17)$$

Il vient donc :

$$\vec{a}_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.18)$$

$$\vec{a}_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.19)$$

$$\vec{a}_w = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.20)$$

Dans l'équation ci-dessus,  $\frac{d\vec{V}}{dt}$  est appelée « accélération locale » ce terme traduit la non permanence de l'écoulement, il est nul pour un écoulement permanent. La deuxième partie,  $u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$  est appelée l'accélération convective. Ce terme traduit le non uniformité de l'écoulement.

La dérivée temporelle totale  $\frac{d\vec{V}}{dt}$  est appelée « dérivée matérielle ou particulière ». Ce concept peut être appliqué sur n'importe quelle grandeur (vecteur ou scalaire). Par exemple, on peut écrire la dérivée temporelle locale pour la pression et la température.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)p \quad (4.21)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)T \quad (4.22)$$

#### 4.4 Equations de Navier-Stokes :

Ainsi, l'équation de mouvement pour un fluide Newtonien avec une masse volumique  $\rho = Cte$  et une viscosité constante,  $\mu = Cte$  est donnée comme suit :

Mouvement suivant x,

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{du}{dt} \quad (4.23)$$

Mouvement suivant y,

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{dv}{dt} \quad (4.24)$$

Mouvement suivant z,

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{dw}{dt} \quad (4.25)$$

Réécrivant les en fonction des contraintes de cisaillement, on obtient :

Suivant x :

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left( \frac{du}{dt} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (4.26)$$

Suivant y :

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left( \frac{dv}{dt} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (4.27)$$

Suivant z :

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho \left( \frac{dw}{dt} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (4.28)$$

Ce sont des équations différentielles partielles non linéaires du 2<sup>ème</sup> ordre appelées équations de Navier-Stokes. Sous forme vectorielle, elles peuvent être réécrites sous la forme :

$$\rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.29)$$

#### 4.5 Equation d'Euler :

Quand les tensions visqueuses dans l'équation différentielle linéaire de mouvement sont négligeables ( $\tau_{ij}$ ), l'équation de mouvement de Navier-Stokes se réduit à :

$$\rho \vec{g} - \nabla p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.30)$$

La même équation de mouvement sous forme scalaire peut-être réécrite comme suit :

Mouvement suivant x,

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.31)$$

Mouvement suivant y,

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.32)$$

Mouvement suivant z,

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.33)$$

#### 4.6 Equation de Bernoulli :

Maintenant, réécrivons l'équation d'Euler sous la forme suivante,

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = \rho \vec{g} - \nabla p \quad (4.34)$$

Le terme  $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$  peut-être simplifié comme suit :

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + (\vec{\varepsilon} \times \vec{V}) \quad (4.35)$$

Par substitution de ce terme dans l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + (\vec{\varepsilon} \times \vec{V}) + \frac{\nabla p}{\rho} - \vec{g} \quad (4.36)$$

Multipliant l'équation précédente par  $d\vec{r}$

$$\left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + (\vec{\varepsilon} \times \vec{V}) + \frac{\nabla p}{\rho} - \vec{g} \right] \cdot d\vec{r} = 0 \quad (4.37)$$

Supposant que :  $(\vec{\varepsilon} \times \vec{V}) \cdot d\vec{r} = \mathbf{0}$ , qui est valide sous les hypothèses suivantes :

- Quand il n y a pas d'écoulement ( $\vec{V} = \mathbf{0}$ ), (cas de l'hydrostatique) ;
- Quand l'écoulement est irrotationnel, ( $\vec{\varepsilon} = \mathbf{0}$ );
- $d\vec{r}$  est perpendiculaire à  $(\vec{\varepsilon} \times \vec{V})$  ce qui très rare ;
- $d\vec{r}$  est parallèle à  $\vec{V}$  donc on peut aller suivant la ligne de courant.

Si l'écoulement est irrotationnel et on prend,  $\vec{g} = -g\vec{k}$ , l'équation se réduit à :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\vec{r} + d \left( \frac{1}{2} V^2 \right) + \frac{dp}{\rho} + gz = 0 \quad (4.38)$$

Intégrant l'équation le long d'une ligne de courant entre deux points (1) et (2) pour un écoulement dont les frottements sont négligeables.

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} ds + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (4.39)$$

$ds$  est la longueur de l'arc le long de la ligne de courant. Cette équation est connue sous le nom de l'équation de Bernoulli pour les fluides parfaits le long d'une ligne de courant. Si, le fluide

est incompressible ( $\rho = Cte$ ), l'écoulement est permanent,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gZ_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gZ_2$$

Autrement dit,  $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = Cte$ , le long d'une ligne de courant.

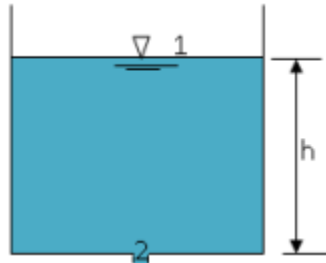


FIG. 4.4 – Théorème de Torricelli

#### 4.7 Application de l'équation de Bernoulli :

##### 4.7.1 Vidange d'un réservoir (théorème de Torricelli) :

Une des applications les plus simples du théorème de Bernoulli est celle conduisant à la vitesse de vidange d'un réservoir à surface libre par un orifice de section très petite devant celle du réservoir. Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

On a :

$$P_1 = P_2 = P_{atm}$$

$$Z_1 - Z_2 = h$$

Le réservoir étant grand, la vitesse de descente du niveau de la surface libre peut être considérée comme négligeable devant celle du fluide s'écoulant dans le jet :

$$V_1 \ll V_2$$

D'où la formule de Torricelli reliant la vitesse de sortie à la hauteur  $h$  de liquide au-dessus de l'orifice :

$$V_2 = \sqrt{2gh}$$

##### 4.7.2 Tube de Venturi :

Le tube de venturi a pour but de mesurer le débit à partir de la détermination de la différence de pression. Ce dispositif consiste à faire passer un écoulement par une contraction pour qu'il y'aura une diminution de pression.

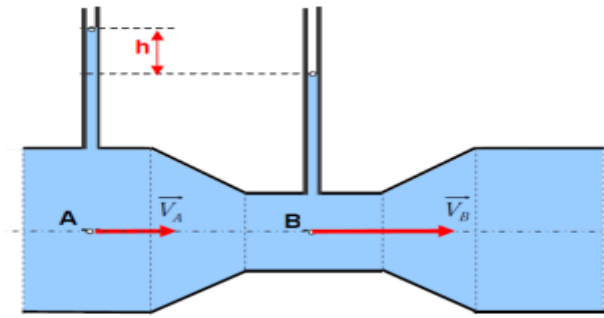


FIG. 4.5 – Le tube de venturi

L'équation de Bernoulli entre A et B est :

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B$$

On a :

$$Z_A = Z_B \text{ (même niveau)}$$

$$V_A S_A = V_B S_B \text{ (équation de continuité)}$$

L'équation hydrostatique entre A et B :

$$P_A - P_B = \rho g h$$

En combinant ces équations, on obtient une équation de la vitesse à la section d'étranglement :

$$V_B = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2}}$$

Et le débit serait :

$$Q = V_B S_B$$

Ce débit est considéré comme un débit théorique, car le fluide est supposé parfait. Le débit réel est obtenu en multipliant le débit théorique par un coefficient correcteur qui prend en considération la perte d'énergie dans le venturi, ce coefficient est appelé coefficient de débit  $C_d$ .

$$Q = C_d V_B S_B$$

#### 4.7.3 Tube de Pitot :

Un tube de Pitot, souvent simplement appelé 'Pitot' est l'appareil le plus couramment utilisé pour faire des mesures de vitesse dans divers écoulements. L'appareil est nommé en l'honneur de son inventeur, Henri de Pitot qui testa l'appareil dans la Seine pour la première fois en août 1732.

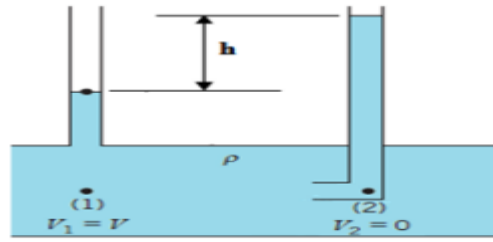


FIG. 4.6 – Un tube de Pitot

Le principe est basé sur la mesure de la pression statique et de la pression dynamique en un point d'un écoulement. L'équation de Bernoulli entre 1 et 2 s'écrit :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

On a :  $Z_1 = Z_2$  (même niveau)

$V_2 = 0$  (point 2 est un point d'arrêt c-à-d est un obstacle)

L'équation hydrostatique donne

$$P_1 - P_2 = \rho g h$$

D'où l'expression de la vitesse du fluide dans la canalisation :

$$V_1 = \sqrt{2gh}$$

## Chapitre 5

### Application du théorème de la quantité de mouvement

#### 5.1 Énergie d'un fluide :

##### 5.1.1 Qu'est-ce que l'énergie ?

Le dictionnaire donne la définition suivante de l'énergie : *ce que possède un système s'il est capable de produire du travail*. En ce qui concerne la mécanique des fluides, l'énergie que possède un fluide lui permettra d'être à l'origine de forces et de produire des actions mécaniques.

On désignera dans la suite l'énergie par la lettre  $E$ . L'unité du système international pour l'énergie est le Joules, noté J (il existe toutefois d'autres unités d'énergie comme la calorie, notée cal. On a la correspondance  $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$ ).

##### 5.1.2 Notion d'énergie volumique :

L'énergie est une grandeur que possède un système donné, c'est à dire dans le cas qui nous intéresse un volume donné de fluide. Il est plus pratique de toujours se ramener à l'énergie possédée par un volume unitaire de fluide. On définit ainsi la notion d'*énergie volumique*. L'énergie volumique sera notée  $e$ . Par conséquent, si un volume  $V$  de fluide possède une énergie  $E$ , l'énergie volumique du fluide sera :

$$e = \frac{E}{V} \quad (5.1)$$

Réciproquement, un volume  $V$  de fluide d'énergie volumique  $e$  aura l'énergie  $E$  :

$$E = e.V \quad (5.2)$$

L'unité dans le système international pour l'énergie volumique est par conséquent le  $\text{J/m}^3$ .

Nous avons toutefois vu au chapitre précédent que cette unité était équivalente au Pascal. En effet, la pression est une énergie volumique particulière.

##### 5.1.3 Les différentes formes d'énergies d'un fluide :

Nous avons déjà vu que la pression était une forme d'énergie volumique. Toutefois, le fluide peut posséder de l'énergie autre que l'énergie de pression.

###### 5.1.3.1 L'énergie de pression :

On rappellera que le fluide possède une certaine énergie de pression à cause de l'existence des mouvements désordonnés des particules qui le constitue et qui s'entrechoquent et frappent les parois de très nombreuses fois à chaque seconde.

L'énergie volumique de pression  $e_{pr}$  est la pression  $P$  elle-même. On aura donc la relation suivante pour un volume  $V$  de fluide :

$$e_{Pr} = P = \frac{E}{V} \quad (5.3)$$

**Exemple 1 :** Calculons l'énergie de pression  $E_{pr}$  d'un volume  $V=12$  L d'un fluide soumis à une pression  $P=4,3$  bar :

$$E_{pr} = 4,3 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 5160 \text{ J}$$

### 5.1.3.2 L'énergie cinétique :

Considérons les observations expérimentales suivantes :

– Un homme marche lentement et vient heurter une porte fermée. Cette dernière ne bouge pas. Toutefois, s'il court, la porte cède sous le choc. Ceci prouve qu'avec une grande vitesse son corps possède l'énergie suffisante pour briser la porte, ce qui n'est pas le cas si sa vitesse est faible. Il existe donc une forme d'énergie liée à la vitesse d'un corps. Cette énergie est appelée *énergie cinétique*. On la notera  $E_c$ . Elle augmente lorsque la vitesse augmente.

– On lance avec une vitesse donnée un gravillon sur une vitre. Celle-ci reste intacte. Si maintenant on lance avec la même vitesse une brique sur la vitre, cette dernière va se briser. On voit donc que l'énergie cinétique du projectile dépend de sa masse. Plus la masse est importante, plus l'énergie cinétique est grande.

La physique montre qu'il existe la relation suivante entre l'énergie cinétique  $E_c$  d'un corps avec sa vitesse  $u$  et sa masse  $m$  :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 \quad (5.4)$$

Il est possible de définir une *énergie cinétique volumique*, notée  $e_c$ , de la même manière que nous l'avons fait pour l'énergie de pression. Ainsi, si une masse  $m$  occupe un volume  $V$  et est animée d'une vitesse  $u$ , alors on aura :

$$e_c = \frac{E_c}{V} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2}{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{V} \cdot u^2 \quad (5.5)$$

Or, on sait que  $r = m/V$ , donc :

$$e_c = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 \quad (5.6)$$

**Exemple 2 :** Une goutte d'eau de 0,5 mL chute à une vitesse de 2 m/s. Ainsi, l'énergie cinétique volumique  $e_c$  de l'eau de la goutte sera :

$$e_c = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 2^2 = 2000 \text{ J} / \text{m}^3 = 2000 \text{ Pa}$$

Et l'énergie cinétique de la goutte sera :

$$Ec = ec \cdot V = 2000 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} = 0,001 J$$

### 5.1.3.3 l'énergie potentielle de pesanteur :

Soulevons un corps de masse  $m$  jusqu'à une altitude  $z$ . Si on lâche ce corps, il va se mettre en mouvement et chuter. Toutefois, un corps ne peut bouger que s'il possède une certaine énergie.

Par conséquent, en élevant le corps jusqu'à l'altitude  $z$  nous lui avons fourni une certaine quantité d'énergie. Cette énergie est en fait due à la force d'attraction gravitationnelle (tout simplement le poids). On appelle cette énergie : *énergie potentielle de pesanteur* (mais aussi énergie gravifique). On la notera  $E_p$  et on notera  $e_p$  sont énergie volumique associée.

Cette énergie dépendra donc de la masse  $m$  du corps, mais aussi de son altitude  $z$ . L'expression de  $E_p$  est alors :

$$E_p = m \cdot g \cdot z \quad (5.7)$$

On constate donc que plus la masse et l'altitude sont importantes, plus l'énergie potentielle de pesanteur est grande.

On pourra alors trouver l'expression de  $e_p$  l'énergie volumique de pesanteur :

$$e_p = E_p / V = \frac{m \cdot g \cdot z}{V} \quad (5.8)$$

Or, on rappelle que  $r = m/V$ , donc :

$$e_p = \rho \cdot g \cdot z \quad (5.9)$$

Il subsiste toutefois une ambiguïté dans la définition de l'énergie potentielle de pesanteur. En effet, dans l'expression de  $E_p$  intervient l'altitude  $z$ . Ainsi, deux personnes choisissant une origine différente des altitudes (c'est à dire le point d'altitude 0), calculeraient des valeurs différentes de  $E_p$  pour un corps dans la même position.

**Exemple 3 :** Deux mécaniciens des fluides, mais aussi alpinistes, se retrouvent au sommet du Mont-Blanc. Ils se demandent quelle est l'énergie potentielle de l'eau qui se trouve dans leur gourde. Ils savent que cette gourde contient 1 kg d'eau.

Le premier mécanicien des fluides décide de choisir le sommet du Mont-blanc comme origine des altitudes. Par conséquent, pour lui l'altitude de l'eau de la gourde vaut 0 m. Ainsi, l'énergie potentielle de pesanteur de l'eau vaut :

$$E_p = m \cdot g \cdot z = 1 \cdot 9,81 \cdot 0 = 0 J$$

Pour le second, l'origine se situe au niveau de la mer. Par conséquent l'altitude de la gourde est 4807 m. Ainsi l'énergie potentielle de pesanteur de l'eau de la gourde vaut :

$$E_p = m \cdot g \cdot z = 1 \cdot 9,81 \cdot 4807 = 47157 J$$

En fait, le choix de l'origine des altitudes importe peu. En effet, en mécanique des fluides, les calculs que l'on mène font toujours apparaître des différences d'énergie potentielle. Toutefois, *il faudra toujours veiller à garder, au cours des calculs la même origine des altitudes*. Si on cherche par exemple, la différence d'énergie potentielle  $E_{p1}-E_{p2}$  d'une masse  $m$  entre les altitudes  $z_1$  et  $z_2$ , on aura :

$$E_{p1} - E_{p2} = m.g.z_1 - m.g.z_2 = m.g.(z_1 - z_2) \quad (5.10)$$

On voit bien ici que dans  $E_{p1}-E_{p2}$  apparaît  $z_1-z_2$ , qui est la différence de hauteur entre deux points, et qui donc ne dépend pas du choix de l'origine des altitudes.

#### 5.1.4 L'énergie totale et l'énergie volumique totale :

Nous venons de voir qu'un fluide pouvait posséder plusieurs sortes d'énergies : de pression, cinétique et potentielle de pesanteur. On peut par conséquent définir l'*énergie totale*, notée  $E_t$ , qui sera la somme des trois énergies précédentes :

$$E_t = E_{pr} + E_C + E_p \quad (5.11)$$

On aura ainsi pour un volume  $V$  d'un fluide, de masse volumique  $\rho$ , animé d'une vitesse  $u$ , sous une pression  $P$  et situé à une altitude  $z$ , l'expression suivante pour l'énergie totale  $E_t$  :

$$E_t = P.V + \frac{1}{2}.\rho.V.u^2 + \rho.V.g.z \quad (5.12)$$

On pourra aussi définir une énergie totale volumique  $e_t$  de la façon suivante :

$$e_t = \frac{E_t}{V} = \frac{E_{pr} + E_C + E_p}{V} = e_{pr} + e_c + e_p \quad (5.13)$$

On aura alors l'expression de  $e_t$  en fonction des propriétés du fluide :

$$e_t = P + \frac{1}{2}.\rho.u^2 + \rho.g.z \quad (5.14)$$

L'énergie totale volumique s'exprime en  $J/m^3$  qui est équivalente au Pascal. Par conséquent, l'énergie totale volumique s'exprime dans la même unité qu'une pression. C'est pour cela qu'on appelle aussi l'énergie totale volumique du fluide *pression totale*, que l'on note  $P_t$ .

**Exemple 4 :** Considérons un fluide de densité 0,92 circulant dans une conduite cylindrique de diamètre  $D=32$  mm, avec un débit de 3 t/h. La conduite se trouve dans un atelier à 10 m de hauteur. L'origine des altitudes est choisie au niveau du sol. La pression *relative* dans la conduite est de 12 bar. On souhaite calculer l'énergie totale volumique  $e_t$  (ou pression totale) du fluide. La pression atmosphérique est de 100000 Pa.

Rappelons que :

$$e_t = P + \frac{1}{2}.\rho.u^2 + \rho.g.z$$

On peut définir les différents termes :

$$P = P_{atm} + P' = 100000 + 12 \cdot 10^5 = 13 \cdot 10^5 \text{ bar}$$

$$Z = 10 \text{ m}$$

$$\rho = d \cdot \rho_{eau} = 0,92 \cdot 1000 = 920 \text{ kg/m}^3$$

$$S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,012^2}{4} = 1,13 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$Q_v = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{3 \cdot 1000 / 3600}{920} = 9,06 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$u = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{9,06 \cdot 10^{-4}}{1,13 \cdot 10^{-4}} = 8,02 \text{ m/s}$$

On aura alors :

$$e_t = 13 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} \cdot 920 \cdot 8,02^2 + 920 \cdot 9,81 \cdot 10 = 1,42 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3 \text{ (Pa)}$$

### 5.1.5 Débit d'énergie :

#### 5.1.5.1 Définition et unité :

Nous avons pu définir au chapitre 1 la notion de débit. La matière traversant une section de passage donnée représente une certaine masse ce qui permet de définir le débit massique. De même, la matière possède un certain volume, ce qui permet de définir le débit volumique.

Nous avons vu précédemment que les fluides possédaient aussi une certaine énergie totale (composée de différents termes). Par conséquent, lorsqu'un fluide s'écoule à travers une section de passage, à chaque instant, une certaine quantité d'énergie traverse cette section. On peut ainsi définir la notion de *débit d'énergie*, que l'on notera  $Q_E$ . Le débit d'énergie sera donc la quantité d'énergie totale traversant une section donnée pendant une unité de temps. Aussi, si la quantité d'énergie  $E_t$  passe à travers cette section pendant l'intervalle de temps  $t$ , on aura :

$$Q_E = \frac{E_t}{t} \quad (5.15)$$

L'unité dans le système international pour le débit d'énergie sera par conséquent le *joule par seconde* noté J/s. Le joule par seconde est aussi très connu sous le nom de watt, noté W. On a  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ . On notera aussi que dans la vie courante le watt est utilisé comme unité de *puissance* (ampoules, chaudières, . . .). En réalité, le *débit d'énergie est une puissance*. En utilisant, le mot débit, nous insistons sur le fait que l'on a de l'énergie qui traverse une section donnée.

#### 5.1.5.2 Relation entre débit d'énergie et débit volumique :

L'équation 3.15 est toutefois peu pratique pour calculer le débit d'énergie s'écoulant à travers une section. En effet, la quantité d'énergie  $E_t$  est difficile à déterminer. C'est pourquoi nous cherchons une relation avec d'autres grandeurs comme le débit volumique.

Le volume  $V$  passant à travers une section de passage donnée pendant un intervalle de temps  $t$  peut être déduit du débit volumique de la manière suivante :

$$V = Q_V \cdot t \quad (5.16)$$

Or, ce volume  $V$  de fluide possède une énergie totale  $E_t$  que l'on peut calculer à partir de l'énergie volumique  $e_t$  :

$$E_t = V \cdot e_t = Q_V \cdot t \cdot e_t \quad (5.17)$$

Le débit d'énergie totale  $QE$  s'exprimera alors de la manière suivante :

$$QE = \frac{Q_V \cdot t \cdot e_t}{t} = Q_V \cdot e_t \quad (5.18)$$

**Exemple 5 :** On pourra déterminer le débit d'énergie totale passant à travers la section de l'exemple 4. On avait :

$$e_t = 1,42 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$Q_V = 9,06 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

Par conséquent le débit d'énergie totale passant à travers la section sera :

$$QE = Q_V \cdot e_t = 9,06 \cdot 10^{-4} \cdot 1,42 \cdot 10^6 = 1286,5 \text{ W}$$

### 5.1.6 La charge totale :

Il est parfois pratique d'exprimer l'énergie volumique totale du fluide sous une forme un peu différente. On définit pour cela une grandeur que l'on appelle *la charge totale* du fluide. On la notera  $h_t$ . Elle s'obtient en divisant l'énergie totale volumique  $e_t$  du fluide par le produit  $\rho \cdot g$  :

$$h_t = \frac{e_t}{\rho \cdot g} \quad (5.19)$$

On pourra alors exprimer la charge totale  $h_t$  en fonction des propriétés du fluide de la manière suivante :

$$h_t = \frac{P}{\rho \cdot g} + \frac{u^2}{2 \cdot g} + z \quad (5.20)$$

La charge totale sera donc la somme de trois termes. Chacun d'eux sera représentatif d'une forme d'énergie du fluide. On appellera alors *charge de pression* le terme  $P/\rho g$ , *charge cinétique* le terme  $u^2/2g$  et charge gravitaire le terme  $z$ .

L'unité dans le système international pour la charge sera le mètre (m). Pour préciser qu'il s'agit bien d'un charge (et non simplement d'une longueur), on précise toujours qu'il s'agit de mètres de colonne liquide, abrégés mCL. Si on a affaire à de l'eau (cas fréquent) on parlera de mètres de colonne d'eau, notés mCE.

**Exemple 6 :** Calculons la charge totale  $h_t$  du fluide de l'exemple 4 :

$$ht = \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{u^2}{2 \cdot g} + z$$

$$ht = \frac{13.105}{920.9,81} + \frac{8,02^2}{2.9,81} + 10 = 157,3 \text{ mCL}$$

## 5.2 Comment évolue l'énergie totale dans un fluide qui s'écoule ?

### 5.2.1 La conservation de l'énergie - Bilan d'énergie :

L'énergie totale d'un fluide, de même que sa masse, sont des grandeurs qu'on dit *conservatives*, c'est à dire qu'elles ne peuvent ni apparaître ni disparaître de façon spontanée. Par conséquent, lorsque le régime permanent est établi, la quantité d'énergie totale contenue à l'intérieur d'une zone précise d'un procédé reste constante. Dans cette zone (voir figure 5.1) peuvent arriver et repartir différents flux de matière. Cette matière contenant de l'énergie, au sein de la zone considérée, on aura les débits d'énergie totale entrants  $Q_{Ee}$  et sortants  $Q_{Es}$ . Il est de plus possible de fournir de l'énergie au fluide de cette zone à l'aide d'appareils comme des pompes ou des compresseurs. On notera  $Q_{E \text{ fourni}}$  le débit d'énergie totale fourni au fluide par l'appareil. Inversement, Le fluide de la zone peut fournir de l'énergie à un appareil comme une turbine. On notera  $Q_{E \text{ cédé}}$  le débit d'énergie totale cédé par le fluide à l'appareil. Enfin, les frottements subis par le fluide au cours de son écoulement peuvent lui faire perdre de l'énergie (c'est ce que l'on appelle les pertes de charge. Voir chapitre 6). Cette énergie dissipée par frottement ne disparaît pas, elle est transformée en énergie thermique, c'est à dire en chaleur. On appellera  $Q_{E \text{ frott.}}$  ce débit d'énergie dissipée par frottement.

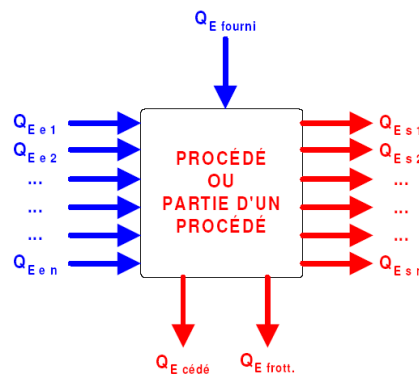


FIG. 5.1 – Bilan d'énergie sur un procédé

Pour que l'énergie totale contenue dans cette zone reste constante, il faudra donc que *la somme des débits d'énergie entrants soit égale à la somme des débits d'énergie sortants*. Le bilan d'énergie totale sur cette zone s'écrira alors :

$$Q_{E e 1} + Q_{E e 2} + \dots + Q_{E e n} + Q_{E \text{ fourni}} = Q_{E s 1} + Q_{E s 2} + \dots + Q_{E s n} + Q_{E \text{ cédé}} + Q_{E \text{ frott.}} \quad (5.21)$$

Cette relation est toutefois très générale. Dans de très nombreux problèmes, nous nous intéresserons à des systèmes avec une seule entrée et une seule sortie. Nous allons voir maintenant différents cas importants.

### 5.2.2 Cas d'un écoulement sans apport ni perte d'énergie :

Dans de nombreux cas, on rencontre des systèmes dans lesquels il n'y a ni pompes, ni compresseurs, ni turbines, et où les frottements sont peu importants et peuvent donc être négligés. C'est le cas par exemple de conduites où les vitesses de fluide sont faibles.

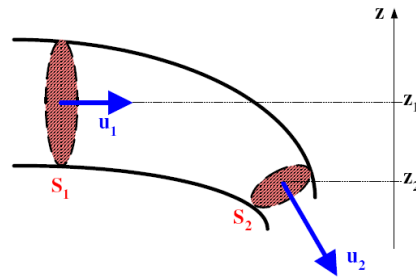


FIG. 5.2 – Bilan d'énergie entre 2 points d'une conduite

Considérons la conduite de la figure 5.2. Entre les sections 1 et 2, il n'y a ni pompe ni turbine, et on suppose que les frottements sont négligeables. Le régime permanent est supposé être établi.

Le bilan d'énergie sur le volume compris entre ces deux sections pourra alors s'écrire :

$$Q_{E1} = Q_{E2} \quad (5.22)$$

La quantité d'énergie entrante est égale à la quantité d'énergie sortante. On peut développer les expressions des débits d'énergie de la manière suivante :

$$Q_{V1} \cdot \left( P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho_1 \cdot u_1^2 + \rho_1 \cdot g \cdot z_1 \right) = Q_{V2} \cdot \left( P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho_2 \cdot u_2^2 + \rho_2 \cdot g \cdot z_2 \right) \quad (5.23)$$

Si nous avons affaire à un *fluide incompressible*, alors sa masse volumique ne varie pas entre les sections 1 et 2. Par conséquent, on a  $\rho_1 = \rho_2$ . De plus, on a la conservation du débit volumique, donc  $Q_{V1} = Q_{V2}$ . Le bilan d'énergie s'écrit alors :

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho_1 \cdot u_1^2 + \rho_1 \cdot g \cdot z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho_2 \cdot u_2^2 + \rho_2 \cdot g \cdot z_2 \quad (5.24)$$

On remarque ainsi que dans ce cas l'énergie totale volumique du fluide se conserve. On a :

$$e_{t1} = e_{t2} \quad (5.25)$$

La relation 5.24 est généralement appelée *équation de Bernoulli*. Elle ne s'applique qu'en régime permanent pour un *fluide incompressible en l'absence de pompe, de turbine et de frottements*.

Si on divise la relation 5.24 par le produit  $\rho \cdot g$ , on obtient :

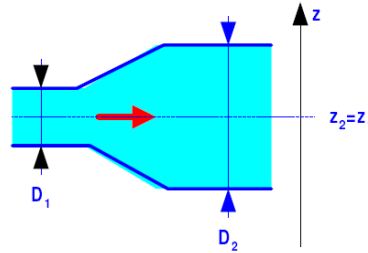
$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{u_1^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{u_2^2}{2 \cdot g} + z_2 \quad (5.26)$$

On a donc conservation de la charge totale dans ce cas :

$$h_{t1} = h_{t2} \quad (5.27)$$

Les relations 5.24 et 5.26 sont équivalentes et peuvent être utilisées indifféremment.

**Exemple 7 :** Considérons une conduite cylindrique horizontale avec un changement de section. La section d'entrée a un diamètre  $D_1=12$  mm et la section de sortie un diamètre  $D_2=32$  mm. Le débit volumique d'eau entrant  $Q_{V1}$  vaut  $1 \text{ m}^3/\text{h}$  et  $P_1=4$  bar.



On souhaite déterminer la vitesse  $u_2$  et la pression  $P_2$  de l'eau en sortie. On supposera que le régime permanent est établi et qu'il n'y a pas de frottements.

L'eau étant un fluide incompressible, on peut écrire la conservation du débit volumique entre les sections 1 et 2 :

$$Q_{V1} = Q_{V2}$$

Or  $Q_{V2} = u_2 \cdot S_2$ , on a donc :

$$u_2 = \frac{Q_{V1}}{S_2} = \frac{Q_{V1}}{\pi \cdot D_2^2 / 4} = \frac{1/3600}{\pi \cdot 0,032^2 / 4} = 0,345 \text{ m/s}$$

Pour comparaison,  $u_1 = Q_{V1}/S_1 = 2,45$  m/s. On voit ici que l'augmentation de section a entraîné une baisse de la vitesse du fluide, donc de son énergie cinétique.

On peut écrire la conservation de l'énergie totale volumique (on aurait aussi pu écrire la conservation de la charge totale  $h_t$ ) :

$$e_{t1} = e_{t2}$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho_1 \cdot u_1^2 + \rho_1 \cdot g \cdot z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho_2 \cdot u_2^2 + \rho_2 \cdot g \cdot z_2$$

Or la conduite est horizontale, donc  $z_1 = z_2$ . Par conséquent, on peut écrire :

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (u_1^2 - u_2^2) = 4 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (2,45^2 - 0,345^2) = 4,03 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 4,03 \text{ bar}$$

La pression a donc augmentée dans la section 2. L'énergie volumique de pression a donc augmenté alors l'énergie cinétique a diminué. On a une conversion d'énergie cinétique en énergie de pression, mais l'énergie totale du fluide reste constante.

### 5.2.3 Cas d'un écoulement avec apport d'énergie :

Prenons maintenant le cas où entre deux sections 1 et 2 (voir figure 5.3) se trouve une machine (une pompe par exemple) qui fournit un débit d'énergie  $Q_{E\text{ fourni}}$  au fluide. Ce débit d'énergie représente la quantité d'énergie (exprimée en joules par exemple) fournie au fluide par la machine à chaque unité de temps (à chaque seconde par exemple). Ce débit d'énergie est aussi appelée *puissance hydraulique* et est notée  $P_h$

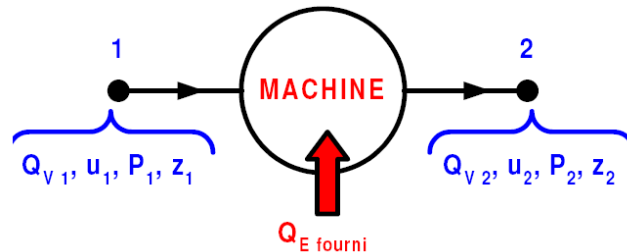


FIG. 5.3 – Bilan d'énergie avec apport d'énergie

Le système étant en régime permanent, on peut écrire le bilan d'énergie de la manière suivante:

$$Q_{E1} + Q_{E\text{ fourni}} = Q_{E2} \quad (5.28)$$

On aura par conséquent :

$$Q_{V1} \cdot e_{t1} + Q_{E\text{ fourni}} = Q_{V2} \cdot e_{t2} \quad (5.29)$$

Dans le cas des *fluides incompressibles*, on aura  $Q_{V1} = Q_{V2}$  et  $\rho_1 = \rho_2$ . Par conséquent, on pourra écrire :

$$e_{t1} + \frac{Q_{E\text{ fourni}}}{Q_V} = e_{t2} \quad (5.30)$$

Le terme  $Q_{E\text{ fourni}}/Q_V$  est particulièrement important. Il représente la quantité d'énergie fournie par la machine à chaque unité de volume de fluide (chaque  $m^3$  par exemple) passant entre les sections 1 et 2. Cette grandeur a la même unité que l'énergie volumique, c'est à dire dans le système international le  $J/m^3$ , en d'autres termes le pascal (Pa). On appellera cette grandeur *différence de pression de la machine* et on la notera  $\Delta P_{mach.}$ . On aura donc :

$$\Delta P_{mach.} = \frac{Q_{E\text{ fourni}}}{Q_V} \text{ ou } Q_{E\text{ fourni}} = \Delta P_{mach.} \cdot Q_V \quad (5.31)$$

Si on développe l'équation 3.30, on obtient alors :

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_1^2 + \Delta P_{mach.} = P_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_2^2 \quad (5.32)$$

Cette formule n'est toujours valable que pour *un fluide incompressible en régime stationnaire et en l'absence de frottement*.

Il est aussi très pratique d'exprimer le bilan d'énergie à l'aide des charges totales  $h_t$ . On rappelle que  $h_t = e_t/\rho g$ . Par conséquent, l'équation 3.30 s'écrira :

$$h_{t1} + \frac{\Delta P_{mach.}}{\rho \cdot g} = h_{t2} \quad (5.33)$$

Le terme  $\Delta P_{mach.}/\rho \cdot g$  est appelé *hauteur manométrique totale de la machine* et notée *HMT*. Son unité est celle de la charge, c'est à dire le mètre de colonne liquide (mCL). Le bilan d'énergie pourra alors s'écrire de la manière suivante :

$$h_{t1} + HMT = h_{t2} \quad (5.34)$$

On écrira très souvent cette relation lorsque nous effectuerons des bilans sur des réseaux munis d'une pompe dans lesquels circulent des liquides. L'utilisation de la hauteur manométrique totale (*HMT*) peut paraître un choix curieux pour représenter l'énergie fournie par une pompe. Nous verrons en fait que ce choix est très pratique et que les constructeurs caractérisent leur pompe par leur *HMT*.

### 5.2.4 Cas d'un écoulement avec perte d'énergie :

Dans le cas présent, c'est le fluide qui va céder de l'énergie. Soit cette énergie va être cédée à une machine (une turbine), soit cette énergie va être dissipée à cause des frottements et va être transformée en chaleur. On notera  $Q_{E\ cédé}$  le débit d'énergie cédé à la machine et  $Q_{E\ frott.}$  le débit d'énergie perdu par frottement.

#### 5.2.4.1 Cas où l'énergie est cédée à une machine :

Sur la figure 5.4, on voit un réseau avec une machine à laquelle le fluide cède de l'énergie. On supposera qu'il n'y a pas de frottements. Le bilan d'énergie en régime permanent entre les sections 1 et 2 s'écrira alors :

$$Q_{E1} = Q_{E2} + Q_{E\ cédé} \quad (5.35)$$

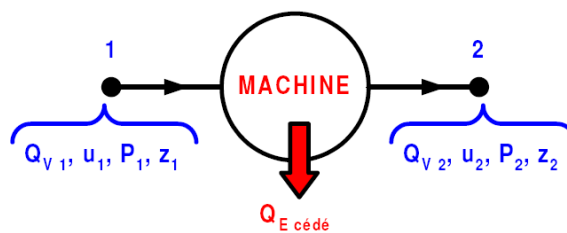


FIG. 5.4 – Bilan d'énergie avec cession d'énergie à une machine

De même que pour le cas d'une machine apportant de l'énergie au fluide, pour un liquide incompressible on pourra définir une différence de pression de la machine  $\Delta P_{mach.}$  de la manière suivante :

$$\Delta P_{mach.} = \frac{Q_{E\ cédé}}{Q_V} \quad (5.36)$$

On pourra alors réécrire le bilan d'énergie de la manière suivante :

$$E_{t1} = e_{t2} + \Delta P_{mach.} \quad (5.37)$$

Si on développe l'expression précédente, on obtient alors :

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_2^2 + \Delta P_{mach.} \quad (5.38)$$

On pourra aussi écrire le bilan en termes de charge totale. On définira alors *la charge absorbée par la machine*, que l'on notera  $H_{abs.}$ , de la manière suivante :

$$H_{abs.} = \frac{\Delta P_{mach.}}{\rho \cdot g} \quad (5.39)$$

Le bilan de charge s'écrira alors :

$$H_{t.} = h_{t2} + H_{abs.} \quad (5.40)$$

#### 5.2.4.2 Cas où l'énergie est dissipée par frottement :

Dans ce cas (voir figure 5.5), on supposera qu'il n'y a aucune machine sur le réseau, mais qu'un débit d'énergie  $Q_{E\ frott}$  est perdu par le fluide à cause des frottements.

Le bilan d'énergie en régime permanent entre les sections 1 et 2 s'écrira alors :

$$Q_{E1} = Q_{E2} + Q_{E\ frott} \quad (5.41)$$

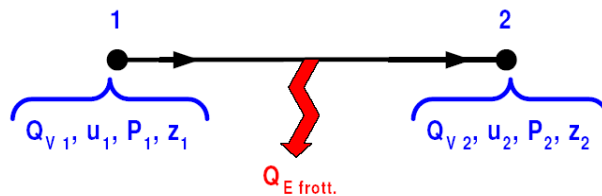


FIG. 5.5 – Bilan d'énergie avec perte d'énergie par frottement

Dans le cas des fluides incompressibles, on aura  $Q_{V1} = Q_{V2}$ . Le bilan d'énergie s'écrira alors :

$$e_{t1} = e_{t2} + \frac{Q_{E\ frott.}}{Q_V} \quad (5.42)$$

On appellera *perte de pression par frottement* le rapport  $Q_{E\ frott.}/Q_V$ . Ce terme représente en fait la quantité d'énergie totale perdue à cause des frottements par chaque unité de volume de fluide (chaque  $m^3$ ) passant entre les sections 1 et 2. On notera cette grandeur  $\Delta P_f$ . On aura alors :

$$e_{t1} = e_{t2} + \Delta P_f \quad (5.43)$$

On peut réécrire ce bilan à l'aide des charges totales :

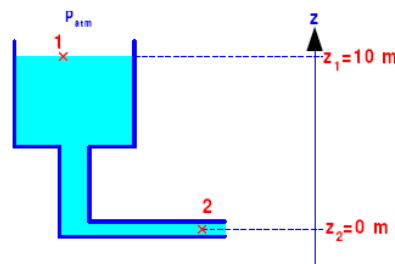
$$h_{t1} = h_{t2} + \frac{\Delta P_f}{\rho \cdot g} \quad (5.44)$$

Le terme  $\Delta P_f / \rho \cdot g$  est appelé *perte de charge du réseau* et sera noté  $J$ . Cette grandeur est très fréquemment employée pour caractériser les pertes d'énergies au sein des réseaux. La perte de charge s'exprime dans la même unité que la charge totale, c'est à dire en mètre de colonne liquide (mCL). L'écriture du bilan d'énergie totale entre les sections 1 et 2 pourra alors s'écrire:

$$h_{t1} = h_{t2} + J \quad (5.45)$$

On se souviendra que ceci n'est vrai que pour un fluide incompressible lorsque le régime permanent est établi. Bien sûr, la partie de réseau sur laquelle on applique ce bilan ne doit comporter ni pompe ni turbine. On peut comprendre l'équation 3.45 de la manière suivante : chaque  $m^3$  de fluide entrant entre les sections 1 et 2 possède la charge  $h_{t1}$ . Chaque  $m^3$  perd la charge  $J$  entre les sections 1 et 2. Il ressort de cette zone avec la charge  $h_{t2} = h_{t1} - J$ .

**Exemple 8 :** Un bac de très grandes dimensions rempli d'eau et situé en altitude, alimente un atelier 12 m en dessous du niveau du bac. Le bac est ouvert à l'atmosphère. A l'entrée de l'atelier, on relève une pression *relative* de 0,7 bar dans la conduite. Le débit est de  $6 \text{ m}^3/\text{h}$ . Le diamètre de la conduite est de 32 mm. On souhaite connaître la perte de pression par frottement, la perte de charge et le débit d'énergie perdue par frottement entre le bac et l'atelier. On supposera que le niveau du bac reste constant.



On a un fluide incompressible ; on suppose le régime permanent établi et il n'y a aucune machine sur le réseau compris entre les points 1 et 2. On peut donc écrire les bilans d'énergie ou de charge de la manière suivante :

$$e_{t1} = e_{t2} + \Delta P_f \text{ ou } \Delta P_f = e_{t1} - e_{t2}$$

$$h_{t1} = h_{t2} + J \text{ ou } J = h_{t1} - h_{t2}$$

Pour calculer  $J$  et  $\Delta P_f$ , il nous faut connaître  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $\rho$ . Le bac étant ouvert à l'atmosphère, on a  $P_1 = P_{atm}$ . On connaît la pression relative au point 2, par conséquent  $P_2 = P'_2 + P_{atm}$ . On choisit l'origine des altitudes au niveau de l'atelier. Par conséquent,  $z_2 = 0 \text{ m}$  et  $z_1 = 1 \text{ m}$ . On a supposé que le niveau du bac restait constant (à cause de sa grande taille). Par conséquent sa surface supérieure ne bouge pas. On a donc  $u_1 = 0 \text{ m/s}$ . On calcule  $u_2$  à partir du débit volumique :

$$u_2 = \frac{Q_{V2}}{S_2} = \frac{Q_{V2}}{\pi \cdot D_2^2 / 4} = \frac{6 / 3600}{\pi \cdot 0,032^2 / 4} = 2,07 \text{ m/s}$$

on aura donc :

$$\Delta P_f = P_1 - P_2 + \rho \cdot g \cdot (Z_1 - Z_2) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (u_1^2 - u_2^2) = P_{atm} - (P_2' - P_{atm}) + \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2) - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_2^2$$

$$\Delta P_f = -0,7 \cdot 10^5 + 1000 \cdot 9,81 \cdot (10 - 0) - \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (2,07^2) = 25958 Pa \quad (J/m^3)$$

$$J = \frac{P_1 - P_2}{\rho \cdot g} + z_1 - z_2 + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2 \cdot g} = \frac{P_2'}{\rho \cdot g} + z_1 - z_2 - \frac{u_2^2}{2 \cdot g}$$

$$J = \frac{0,7 \cdot 10^5}{1000 \cdot 9,81} + 10 - 0 - \frac{2,07^2}{2 \cdot 9,81} = 2,64 mCL$$

### 5.3 Fonctionnement théorique de la tuyère Convergente Divergente :

L'approche monodimensionnelle des écoulements des gaz calorifiquement parfait et non-visqueux permet de décrire les différents régimes de fonctionnement d'une tuyère supersonique. Considérons le système représenté dans la figure (5.6), constitué d'une tuyère de Laval. La tuyère est en communication avec un réservoir contenant un gaz à une pression génératrice  $P_c$  supposée fixe. Le divergent débouche dans une enceinte quasi infinie dont la pression statique  $P_a$  est variable.

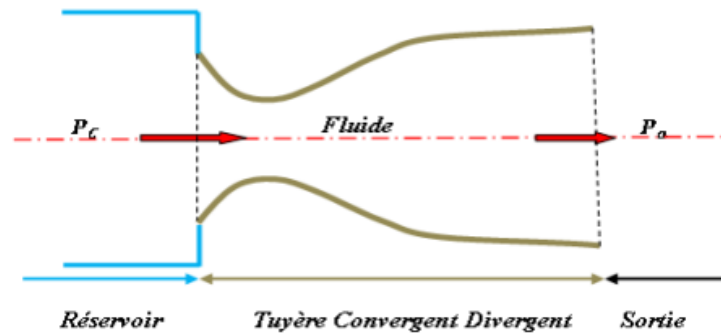


FIG. 5.6 –Schéma de la tuyère supersonique

### 5.4 Introduction théorie de la propulsion (Fonctionnement de l'hélice en espace ouvert) :

Une hélice, de rayon  $r$ , communique au fluide ambiant une certaine quantité de mouvement suivant son axe, ce qui par réaction entraîne une poussée  $T$  transmise au propulseur. Celui-ci est supposée animé d'une vitesse constante  $V_0$  sous l'action d'une hélice chassant l'air vers l'arrière avec une vitesse absolue que nous désignerons par  $\Delta v$ . Nous considérons le mouvement dans des axes liés au propulseur ce qui implique que l'écoulement est stationnaire. L'effet de l'hélice apparaît comme consistant simplement à faire passer une partie de l'air de  $V_0$  à  $V_5 = V_0 + \Delta V$ ,  $V_5$  étant la vitesse en aval.

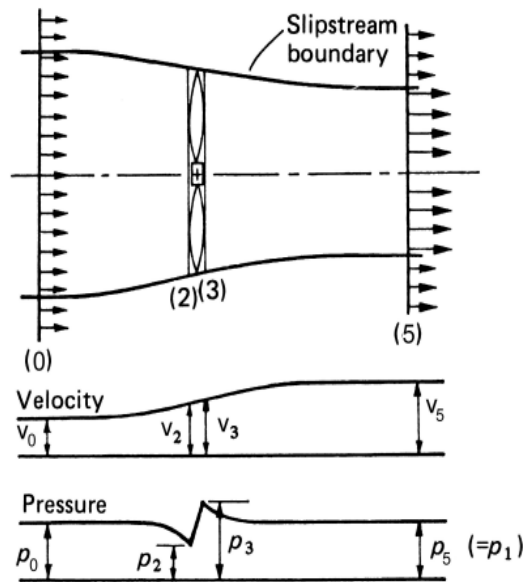


FIG. 5.7 –L'hélice en espace ouvert

On peut imaginer que le fluide s'écoule dans un tube de courant de révolution autour de l'axe de l'hélice, tube de courant qui s'appuie sur le contour de l'hélice. La section 0 à l'amont du propulseur est choisie assez éloignée de celle de l'hélice (à une distance voisine de  $6.r$  en écoulement libre) pour que l'écoulement n'y soit pas perturbé, il y règne alors la pression statique ambiante  $p_0$ . Lorsque le fluide s'approche du propulseur, il subit une accélération en raison de la dépression qui existe immédiatement en amont de l'hélice, à la section 2. Du fait de l'augmentation de vitesse et de la conservation du débit (équ. 5.46) la section du tube de courant diminue. C'est d'ailleurs à contrario la constance de section du tube de courant qui définit en amont (resp. en aval ) la section 0 (resp. 5) au-delà de laquelle la vitesse n'évolue plus. La section 5 se situe elle aussi à une distance voisine de  $6.r$ .

$$Q_m = \int_{\Sigma} \rho v_n d\sigma \int_{s_1 \text{ ou } s_2} \rho v_n d\sigma = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 \quad (5.46)$$

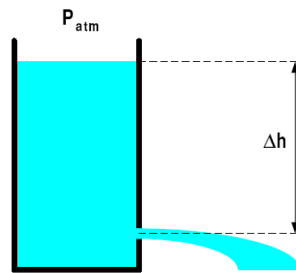
En passant à travers l'hélice, plus précisément dans la zone entre les sections 2 et 3 que l'on considèrera d'aire constante ( $S_2 = S_3 = S$ ), le fluide voit sa pression s'accroître. Alors qu'il y a une discontinuité de pression dans la section de l'hélice, on peut admettre qu'il n'y a pas de discontinuité de vitesse (les vitesses  $V_2$  et  $V_3$  sont quasiment égales).

## 5.5 Exercices complémentaires :

### Exercice 1 :

On réalise la célèbre expérience de TORRICELLI. Un réservoir de grande dimension est rempli d'un liquide de densité  $d=0,85$ . On perce un trou dans la paroi du réservoir à une hauteur  $\Delta h=1$

m sous la surface supérieure du liquide. Le réservoir est tout d'abord ouvert à l'atmosphère dans sa partie supérieure.



1. Écrivez le bilan de charge totale entre la surface du liquide et l'orifice de vidange.
2. Calculez la vitesse du liquide au niveau de cet orifice.
3. Le diamètre du trou est de 5 mm. Calculez les débits volumique et massique de la fuite.
4. On ferme maintenant le haut du réservoir. On maintient la pression de l'air au dessus du liquide à une pression de 2 bar. Recalculez la vitesse au niveau du trou.

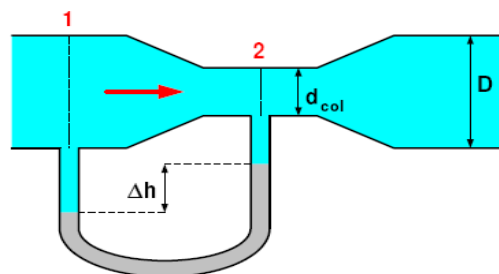
**Exercice 2 :**

Le jet d'eau situé sur le lac de Genève peut monter jusqu'à une hauteur de 140 m. A sa base le jet possède un diamètre de 110 mm. On supposera qu'il n'y a pas de frottements entre le jet d'eau et l'air.

1. Calculez la vitesse du jet d'eau à la base du jet.
2. Calculez le débit volumique du jet.

**Exercice 3 :**

Sur une conduite d'eau est monté un Venturi, c'est à dire une réduction progressive de la section suivie d'une longueur droite de faible diamètre  $d_{col}$  appelée *col du Venturi*, et enfin un élargissement progressif jusqu'au diamètre initial  $D$ .



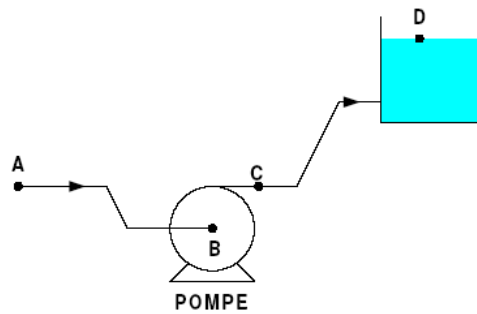
Entre l'amont et le col du Venturi (entre les sections 1 et 2), on place un tube manométrique en U rempli de mercure. On constate une différence de hauteur  $\Delta h$  entre les deux branches du tube.

1. Écrivez le bilan de matière entre les sections 1 et 2 afin de trouver une relation entre les vitesses  $u_1$  et  $u_2$ .

2. Écrivez un bilan d'énergie ou de charge entre les sections 1 et 2. En déduire une expression de  $u_1$  en fonction de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $D$  et  $d_{col}$ .
3. A l'aide de la loi de l'hydrostatique, trouvez une relation entre  $P_1 - P_2$  et  $\Delta h$
4. Donnez l'expression et calculez  $u_1$  en fonction de  $\Delta h$ ,  $D$  et  $d$
5. Calculer le débit volumique d'eau circulant dans la conduite.

Données	D=16mm
	D=10mm
	$P_{\text{mercure}}=13600\text{Kg/m}^3$
	$\Delta h=300\text{mm}$

**Exercice 4 :**



Une pompe alimente en eau un réservoir de grande dimension. La conduite en amont de la pompe a un diamètre de 10 cm et la conduite en aval un diamètre de 7 cm. La pression relative en A est 3 bar, la charge totale fournie au fluide par la pompe (HMT) est de 20 mCE. On donne:

$$z_A = 3 \text{ m}$$

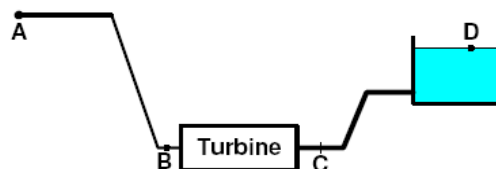
$$z_B = z_C = 0 \text{ m}$$

$$z_D = 60 \text{ m}$$

On négligera les frottements dans la conduite entre A et D.

1. Calculer la charge totale du fluide aux points D et A.
2. Calculer les pressions relatives en B et C.

**Exercice 5 :**



Une conduite de diamètre 15 cm alimente une turbine électrique selon le schéma ci-dessus.

A la sortie de la turbine, l'eau monte dans une canalisation de 30 cm de diamètre jusqu'à un lac artificiel de grande surface. La pression relative de l'eau en A est 1 bar. La charge absorbée par la turbine est 60 mCE. On donne :

$$z_A = 75 \text{ m}$$

$$z_B = z_C = 30 \text{ m}$$

$$z_D = 45 \text{ m}$$

1. Calculer la charge totale du fluide aux points A et D. En déduire la vitesse du fluide entre A et B, puis entre C et D.
2. Calculer les pressions en B et C.
3. Calculer le débit d'énergie (la puissance) produite par la turbine.

**Exercice 6 :**

Une citerne de grande dimension placée en hauteur alimente en eau une maison. Le niveau supérieur de l'eau dans la citerne se trouve 10 m au dessus de la maison. Au robinet, on mesure un débit de 10 L/min. Le diamètre de la conduite est de 14 mm.

1. Par un bilan de charge, calculer la perte de charge subie par le fluide dans la conduite.
2. Calculer le débit d'énergie perdue par frottement.
3. Quel serait le débit d'eau au robinet s'il n'y avait pas de frottements ?

## Chapitre 6

### Expérience de Reynolds

#### 6.1 Origine des frottements –Viscosité :

##### 6.1.1 Remarques générales :

Nous avons dit précédemment que le fluide perdait de l'énergie par frottement lorsqu'il s'écoule. Il faut toutefois noter que ces frottements sont de deux types. Tout d'abord, le fluide frotte sur les parois à l'intérieur desquelles il s'écoule. De plus, au sein du fluide, toutes les particules ne vont pas forcément à la même vitesse. Par conséquent, ces particules frottent donc les unes sur les autres. Il existe donc des frottements au sein même du fluide.

On peut aussi se poser la question de savoir si tous les fluides se comportent de la même façon vis à vis des frottements. Pour cela, on réalise l'expérience suivante : sur une plaque verticale, on dépose côte à côte 1 goutte d'eau et une goutte de miel liquide de même masse. On constate que la goutte d'eau descend plus vite que la goutte de miel. On peut par conséquent penser que les frottements dans l'eau sont plus faibles que dans le miel. Pour quantifier cette aptitude des fluides à frotter ou non, on a défini une grandeur appelée *viscosité*.

##### 6.1.2 Viscosité :

###### 6.1.2.1 Définition et unité :

La viscosité d'un fluide traduit la plus ou moins grande facilité avec laquelle le fluide peut s'écouler ou être pompé. Elle est en quelque sorte une mesure des frottements.

A la limite, un fluide ayant une viscosité nulle n'engendrerait pas de frottements et donc pas de perte de charge.

On représente la *viscosité* par la lettre  $\eta$  (lettre grecque éta). On l'appelle encore *viscosité dynamique* ou *viscosité absolue*.

$\eta$  : *viscosité (dynamique ou absolue)*

Dans le système international, l'unité de la viscosité est le pascal seconde, noté Pa.s. On a donné à cette unité le nom de Poiseuille, noté Pl.

$$1 \text{ Pl} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

En pratique on emploie souvent une autre unité appelée Poise et notée Po, pour mesurer les viscosités. C'est même généralement la centipoise, cPo, qui est le plus fréquemment employé.

On a les équivalences suivantes :

$$1 \text{ Po} = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 0,1 \text{ Pl}$$

$$1 \text{ cPo} = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10^{-3} \text{ Pl}$$

Selon la nature du fluide, la viscosité peut varier considérablement. Ainsi, à température ordinaire, le tableau 6.1, donne les valeurs de viscosité pour différents fluides.

TAB. 6.1 – Viscosité à température ordinaire

Produit	Viscosité (cPo)
Bitume	$10^{11}$
Polymère fondu	$10^6$
Miel liquide	$10^4$
Glycérol	$10^3$
Eau	1
Air	$10^{-2}$

**6.1.2.2 Influence de la température et de la pression :**

*La viscosité d'un liquide diminue lorsque la température augmente.*

Cet abaissement de viscosité peut être de 1 à 10 % par degré celsius (°C). D'une manière générale, plus le fluide est visqueux, plus sa viscosité varie avec la température.

Par contre, *pour les gaz la viscosité augmente avec la température.*

Pour les fluides, *l'influence de la pression est en général faible.* Ainsi, dans les calculs on pourra négliger l'influence de la pression jusqu'à 20 bar dans les gaz et jusqu'à 40 bar pour les liquides.

**6.1.2.3 Viscosité cinématique :**

Comme nous le verrons par la suite, dans de nombreuses expressions intervient le rapport  $\eta / \rho$  entre la viscosité  $\eta$  et la masse volumique  $\rho$ . Ce rapport est appelé *viscosité cinématique*  $\nu$  (lettre grecque nu) :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{6.1}$$

Dans le système international, l'unité de la viscosité cinématique est le mètre carré par seconde ( $m^2/s$ ). Une autre unité est souvent employée, c'est le stokes, noté St. C'est plus précisément son sous-multiple le centi-stokes, noté cSt, qui est utilisé. On a les équivalences suivantes :

$$1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$1 \text{ cSt} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

**6.2 Régime d'écoulement –Turbulence :**

**6.2.1 Expérience de REYNOLDS :**

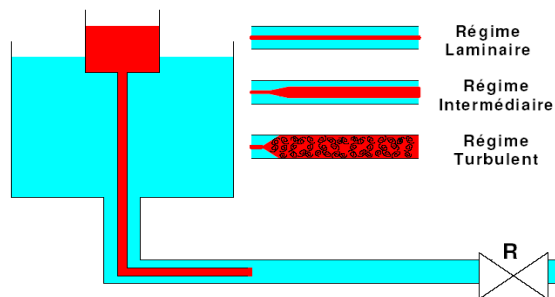


FIG. 6.1 – Expérience de REYNOLDS

C'est en 1883 que REYNOLDS réalisa l'expérience dont le dispositif est représenté sur la figure 6.1. De l'eau, contenue dans un réservoir, s'écoule dans un tube horizontal en verre. Au centre de ce tube, de l'eau mélangée à un colorant rouge arrive par l'intermédiaire d'un tube beaucoup plus fin. On peut régler le débit de l'eau à l'aide du robinet R.

Pour de faibles débits, on constate que le filet d'eau coloré reste stable au centre du tube et ne se mélange pas à l'eau environnante. L'écoulement se fait donc de façon parfaitement définie, avec des filets de fluide qui glissent les uns sur les autres sans se mélanger. On dit que *l'écoulement est laminaire*.

Lorsque le débit augmente, on constate que le filet coloré se met à osciller et s'élargit. *Le régime est dit alors intermédiaire*.

Enfin, pour des débits encore plus élevés, après une longueur assez faible, le filet coloré se transforme en tourbillons de plus en plus gros et finit par se mélanger complètement avec l'eau claire. *On dit que le régime est turbulent*. Dans ce type d'écoulement le fluide est «brassé» et les filets de fluide ne cessent de se mélanger en créant de nombreux tourbillons.

### 6.3 Contraintes des cisaillement-équations de Newtons :

➤ 2<sup>ème</sup> loi de newton :

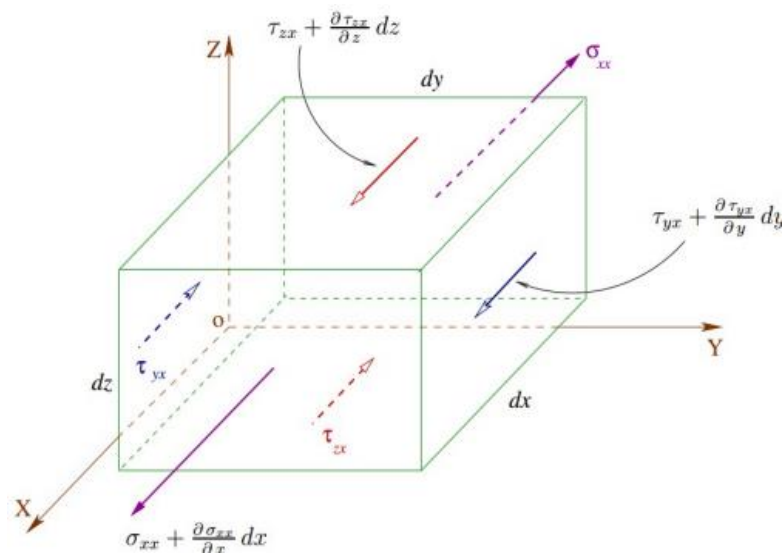


FIG. 6.2 – Contraintes des cisaillement-équations de Newtons

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{\gamma} \quad (6.2)$$

• Suivant x :

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{\gamma}_x \quad (6.3)$$

$$m\gamma_x = \rho dx dy dz \frac{Du}{Dt} \quad (6.4)$$

$$m\gamma_x = \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \rho dx dy dz f_x \quad (6.5)$$

$f_x$  force volumique /Kg

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (6.6)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon \bar{\nabla} \bar{q} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \rho f_x \quad (6.7)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \epsilon) \bar{\nabla} \bar{q} \right] + \mu \Delta u \quad (6.8)$$

Pour un fluide incompressible  $\frac{Du}{Dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (6.9)$

$$\frac{D\bar{q}}{Dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p + \nu \nabla^2 \bar{q} \quad (6.10)$$

Projection :

Suivant x,

$$\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6.11)$$

Suivant y,

$$\frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (6.12)$$

Suivant z,

$$\frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (6.13)$$

## 6.4 Exercices Complémentaire :

### Exercice 1 :

Déterminer le régime d'écoulement dans une conduite de 3 cm de diamètre pour :

- 1) De l'eau circulant à la vitesse  $v=10,5$  m/s et de viscosité cinématique  $1.10^{-6}$  m<sup>2</sup> / s
- 2) Du fuel lourd à 50 °C circulant à la même vitesse (Viscosité cinématique  $110.10^{-6}$  m<sup>2</sup> / s
- 3) Du fuel lourd à 10 °C circulant à la même vitesse (Viscosité cinématique  $290.10^{-6}$  m<sup>2</sup> / s.

### Exercice 2 :

Une huile de densité 0,850 et de viscosité dynamique 0,10104 Pa.s circule dans un tuyau de fonte lisse de longueur  $L = 3000$  m, de diamètre  $D = 30$  cm, avec un débit  $Q = 44$  l/s. Quelle est la perte de charge dans ce tuyau

### Exercice 3 :

Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement autour d'une balle de tennis allant à la vitesse  $v = 100$  km.h<sup>-1</sup> dans l'air ?

## Chapitre 7

### Écoulement Laminaire visqueux

#### 7.1 Introduction :

C'est pourquoi, du point de vue mécanique, la distinction entre un solide et un liquide est artificielle. Ce que l'on appelle communément un liquide est un fluide de petit temps de relaxation ( $\tau_{ve} = 1$  ns pour l'eau) et ce que l'on appelle un solide peut être vu comme un fluide de grand temps de relaxation ( $\tau_{ve} = 10^6$  ans pour le manteau de la croûte terrestre).  $\tau_{ve}$  dépend fortement de la température ce qui confère à certains systèmes un comportement fluide ou solide suivant la température (bitume par exemple). Un exemple de fluide viscoélastique est la pâte de silicone connue sous le nom de "silly-putty". Une boule de "silly-putty" rebondit sur le sol comme une balle élastique (aux temps courts) mais s'étale comme un fluide visqueux (aux temps longs) si on la pose sur une surface horizontale

#### 7.2 Dynamique d'un écoulement visqueux :

Lorsque le fluide est newtonien et incompressible, les équations de Newton appliquées à chaque particule de fluide prennent la forme des équations de Navier-Stokes. Bilan des forces Plaçons nous dans un référentiel galiléen et effectuons un bilan des forces sur une particule de fluide située en  $M$  à l'instant  $t$ , de masse  $dm = \rho(M,t)$ . En plus des forces de pression et des forces extérieures volumiques, il faut ajouter la résultante des forces visqueuses :

$$d\vec{F} = (\overline{f_{vext}} - \overline{\nabla p})d\tau + d\vec{F}_\eta \quad (7.1)$$

L'expression de  $d\vec{F}_\eta$  est en général assez compliquée mais elle se simplifie dans le cas des fluides newtoniens et incompressibles.

#### 7.3 Cas d'un écoulement parallèle unidimensionnel :

Calculons la résultante des forces visqueuses dans le cas particulier simple d'un écoulement suivant (ox) avec un gradient de vitesse suivant (oy) :

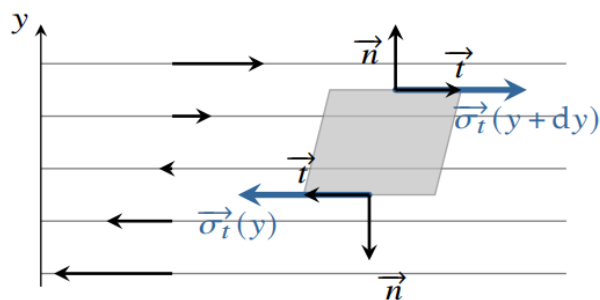


FIG. 7.1 – Bilan des forces de viscosité sur un élément de fluide

$$\vec{v} = v(y)\vec{u}_x \quad (7.2)$$

On remarque ici que  $\text{div } \vec{v} = 0$ . L'écoulement est donc bien incompressible. Dans ce cas, la résultante des forces visqueuses s'exerçant sur une particule de fluide, s'écrit :

$$d\vec{F}_\eta = \eta \left[ \frac{dv}{dy}(y + dy) - \frac{dv}{dy}(y) \right] dx dz \vec{u}_x = \eta \frac{d^2v}{dy^2} d\tau \quad (7.3)$$

On voit apparaître une force volumique qui s'exprime comme le laplacien de la vitesse. Cette formule obtenue dans un cas particulier se généralise aux écoulements incompressibles des fluides newtoniens.

On admettra que pour un fluide newtonien incompressible, la résultante des forces visqueuses s'écrit :

$$\vec{dF}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau \quad (7.4)$$

#### 7.4 Ecoulement de COUETTE :

**Expérience de Couette** – Considérons un fluide enfermé entre deux cylindres, l'un mobile, l'autre fixé via un fil de torsion. On constate que lorsque la cavité cylindrique extérieure est mise en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$ , le cylindre intérieur tourne d'un angle  $\alpha$  par rapport à sa position d'équilibre. Analysons en détail le phénomène.

1. La torsion du fil conduit à l'existence d'un couple dont les forces de pression ne peuvent pas être responsables. On est donc obligé d'admettre l'existence d'efforts tangentiels.
2. On observe que les particules de fluide adhèrent aux parois. Il existe donc un gradient de vitesse au sein de l'écoulement.
3. Pour les fluides simples, l'angle  $\alpha$  augmente proportionnellement à  $\omega$ . Les efforts tangentiels augmentent donc proportionnellement au gradient de vitesse.

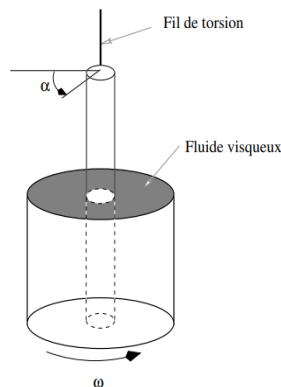


FIG. 7.2 – Expérience de Couette.

**Interprétation** – L'expérience montre que, lors de l'écoulement d'un fluide, la pression ne suffit pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentiellelles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre

molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité. La contrainte (force par unité de surface)  $\vec{\sigma}$  qu'exerce une couche de fluide supérieure sur un élément de surface d'une couche de fluide inférieure, s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{1 \rightarrow 2} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \sigma_n \vec{n} + \sigma_t \vec{t} \quad \text{avec} \quad \sigma_n = -p \quad (7.5)$$

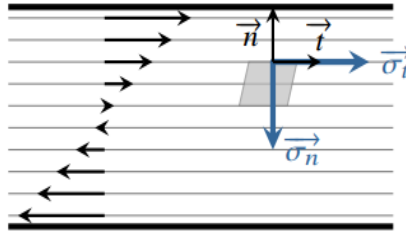


FIG. 7.3 – Contraintes internes dans le fluide

### 7.5 Loi de STOCKES :

La loi de Stokes Soit un corps solide en mouvement dans un fluide. Outre son poids et la poussée d'Archimède, le solide subit également une force de résistance  $F$ , développée par le fluide, qui s'oppose à son déplacement. Cette force dépend, d'une part, de la vitesse  $v$  et de la forme géométrique (aérodynamisme) du corps solide et, d'autre part, de la viscosité  $\eta$  et de la masse volumique  $\rho$  du fluide. Dans la suite nous nous intéresserons à un objet sphérique de rayon  $r$ . Il s'agit de trouver l'expression de la force  $F$  en termes de  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $r$  et  $v$  :

$$F = f(\rho, \eta, r, v) \quad (7.8)$$

L'analyse dimensionnelle permet de simplifier quelque peu le problème. En procédant comme dans le cas de l'écoulement de Poiseuille "écoulement visqueux", on trouve :

$$F = \frac{\eta^2}{\rho} \varphi(Re) \quad (7.9)$$

où  $Re$  est le nombre de Reynolds, défini comme :

$$Re = \frac{\rho |v| r}{\eta} \quad (7.10)$$

La forme analytique de la fonction  $\varphi$  n'est pas connue dans le cas général. Sa détermination constitue un des grands défis de la physique mathématique moderne. Nous allons donc analyser la relation (7.9) en nous limitant au cas particulier d'un mouvement très lent, caractérisé par un nombre de Reynolds relativement faible. Tout d'abord, il est clair que la force de résistance  $F$  développée par le fluide doit s'annuler à la limite  $v \rightarrow 0$ . Sur un plan intuitif on peut donc s'attendre à ce que  $F$  croisse proportionnellement à la vitesse tant que celle-ci reste relativement faible. L'expérience confirme ce résultat pour autant que le nombre de Reynolds reste inférieur à  $0,5$ . Comme  $v \sim Re$  (cfr. relation (7.10)), on a  $F \sim Re$ . Ce qui, d'après (7.9), implique  $\Phi(Re) \sim Re$ . D'où :

$$F \sim \frac{\eta^2}{\rho} Re \sim \frac{\eta^2}{\rho} \frac{\rho v r}{\eta} \sim r \eta v \quad (7.11)$$

Par ailleurs, les équations hydrodynamiques peuvent être résolues perturbativement à la limite  $Re \rightarrow 0$ . En première approximation, on trouve :

$$F = -6 \pi r \eta v \quad (7.12)$$

Cette relation est appelée formule de Stokes (ou loi de Stokes). Elle reste valable tant que  $Re < 0,5$ .

Au-delà de cette limite des tourbillons apparaissent dans le sillage de la sphère et la formule de Stokes (7.12) n'est plus applicable.

### 7.6 Mesure de viscosité :

L'analyse dimensionnelle de la relation (7.5) donne :

$$[\eta] = \frac{[F] L}{L^2 [v]} = \frac{[F]}{L^2} T \quad (7.6)$$

Ainsi, la viscosité est homogène à une pression  $\times$  temps. On l'exprime indifféremment en pascal.seconde (Pa.s) ou en poiseuille (Pℓ) en hommage à Jean-Louis Marie Poiseuille.

Le viscosimètre est l'appareil de mesure de la viscosité. Différents types de viscosimètre existent suivant le type de fluide utilisé. Pour les liquides, on utilise essentiellement le viscosimètre de Couette ou le viscosimètre à tube capillaire. Ordres de grandeur – Pour les liquides, la viscosité varie fortement avec la température (elle diminue lorsque la température augmente). Pour des liquides purs, elle suit une loi du type

$$\eta \propto e^{b/T} \quad (7.7)$$

Quant aux gaz, leur viscosité est plus difficile à mesurer car beaucoup plus faible que celle des liquides. Sa détermination peut se faire à l'aide d'une :

- mesure de vitesse (viscosimètre à bille roulante, viscosimètre à tube capillaire) ;
- mesure de fréquence de résonance d'une onde de cisaillement (viscosimètre à cristal piézo-électrique de torsion). Elle dépend peu de la pression et augmente légèrement avec la température (à peu près comme  $\sqrt{T}$ ).

TABLE 7.1 – Quelques valeurs de viscosité.

Liquide (20 °C)	Viscosité (Pa.s)
Eau	$1,0 \cdot 10^{-3}$
Huile d'olive	0,84
Glycérine pure	1,5
Mercure	$1,5 \cdot 10^{-3}$
Gaz	Viscosité (Pa.s)
Vapeur d'eau (20 °C)	$9,7 \cdot 10^{-6}$
Air sec (20 °C)	$18,2 \cdot 10^{-6}$
He (25 °C)	$19,9 \cdot 10^{-6}$
N <sub>2</sub> (25 °C)	$17,7 \cdot 10^{-6}$

### 7.7 La lubrification hydrodynamique :

Est un domaine important de la tribologie, c'est l'étude des contacts dans lesquels un film de fluide sépare les surfaces en présence. Dans le cas où le film de fluide sépare totalement les surfaces, les aspérités et les défauts de forme ont des dimensions inférieures à l'épaisseur du film. Dans tous les mécanismes étudiés, le problème peut se schématiser de la façon suivante la figure (7.4) : Un film de fluide visqueux sépare les deux surfaces du mécanisme ; il s'agit de calculer :

- la charge  $W$  que peut supporter le contact,
- la force  $F$  ou le couple de frottement  $C$ ,
- le débit  $Q$  du fluide dans le mécanisme,
- la puissance  $P$  dissipée dans le contact.

Ainsi il faut déterminer le champ de pression et le champ de vitesse dans le fluide. Par ailleurs, l'intégration des contraintes de cisaillement aux surfaces du contact donnera la force ou le couple de frottement. La pression peut être créée par une pompe extérieure au contact c'est l'hydrostatique : c'est le cas par exemple de certains paliers et des glissières de certaines machines-outils. La pression peut être créée par le déplacement relatif des surfaces, c'est l'hydrodynamique : cela concerne les butées, les paliers fluides, les garnitures mécaniques....

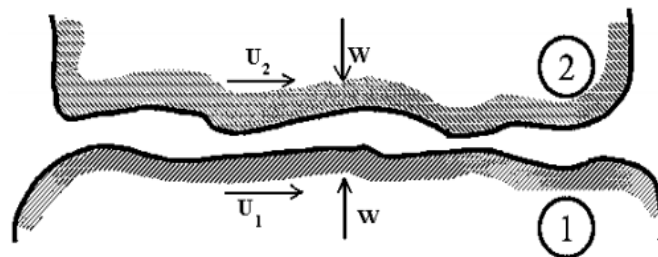


FIG. 7.4 – Schéma d'un contact lubrifié

## Chapitre 8

### Écoulement Turbulent

#### 8.1 Introduction :

La viscosité stabilise et régularise les écoulements de façon générale. Ainsi, quand le nombre de Reynolds augmente le régime laminaire devient instable voire turbulent. La transition entre le régime laminaire et turbulent se produit dans une certaine gamme de valeur du nombre de Reynolds qui dépend du problème. On peut retenir qu'en général, lorsque  $Re > 10^5$ , l'écoulement devient turbulent, c'est-à-dire que la vitesse en un point M varie dans le temps de façon erratique. Dans ce cas, le problème étant analytiquement insoluble, on utilise souvent des lois phénoménologiques associées à une analyse dimensionnelle.

#### 8.2 Calcul des pertes de charge :

On appelle perte de charge les pertes d'énergie subies par un fluide s'écoulant dans un réseau. L'énergie perdue par le fluide ne disparaît pas, elle est transformée en un autre type d'énergie: la chaleur (énergie thermique).

Pour quantifier cette perte d'énergie nous avons défini deux grandeurs équivalentes : la perte de pression par frottements  $\Delta P_f$  et la perte de charge  $J$ . Ces deux grandeurs représentent la diminution d'énergie totale volumique subie par chaque unité de volume de fluide transitant entre deux sections d'un réseau.

Considérons la partie d'un réseau ne comportant ni pompe ni turbine comprise entre la section d'entrée (notée 1) et la section de sortie (notée 2). Si le fluide est incompressible, que l'écoulement est en régime permanent, alors on pourra calculer les pertes de pression par frottement et pertes de charge de la manière suivante :

$$\Delta P_f = e_{t1} - e_{t2} = P_1 - P_2 + \rho \cdot g \cdot (Z_1 - Z_2) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (u_1^2 - u_2^2) \quad (6. 1)$$

$$J = h_{t1} - h_{t2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho \cdot g} + (Z_1 - Z_2) + \frac{(u_1^2 - u_2^2)}{2 \cdot g} \quad (6. 2)$$

Les unités de ces deux grandeurs sont le pascal, abrégé Pa, pour  $\Delta P_f$  et le mètre de colonne liquide, abrégé mCL, pour  $J$  (si on a de l'eau on parlera de mètre de colonne d'eau mCE). On a bien sûr la relation suivante entre  $\Delta P_f$  et  $J$  :

$$\Delta P_f = \rho \cdot g \cdot J \quad (6. 3)$$

On peut aussi calculer le débit d'énergie  $Q_{E\text{frott}}$  dissipée par frottement :

$$Q_{E\text{frott}} = Q_v \cdot \rho \cdot g \cdot J = Q_v \cdot \Delta P_f \quad (6. 4)$$

### 8.3 Régime d'écoulement et perte de charge :

Plus le régime est turbulent, plus le fluide va être «brassé» et le nombre des tourbillons importants.

Par conséquent, plus le régime est turbulent plus les frottements vont être conséquents et les pertes de charge importantes.

De plus, l'écoulement en régime laminaire avec ses filets fluides bien définis et l'écoulement turbulent avec ses tourbillons et son mélange intense du fluide vont donner des lois permettant de calculer les pertes de charge sensiblement différentes.

Il est par conséquent nécessaire de définir un critère qui permette de quantifier la turbulence et de prévoir le régime d'écoulement.

#### 8.3.1 Nombre de Reynolds :

Pour quantifier la turbulence, un critère a été défini, il s'agit du *Nombre de REYNOLDS*, noté *Re*. Ce nombre, tout comme la densité, est sans dimension, c'est à dire qu'il ne possède pas d'unité. On dit que c'est un *nombre adimensionnel*.

Pour un écoulement dans une conduite cylindrique, on le définit de la manière suivante :

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\eta} \quad (6. 6)$$

Dans l'équation précédente,  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $u$  sa vitesse moyenne,  $D$  le diamètre de la conduite et  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide. *il est très important d'exprimer ces différentes grandeurs dans les unités du système international*. La masse volumique sera exprimée en  $\text{kg/m}^3$ , la vitesse en  $\text{m/s}$ , le diamètre en  $\text{m}$  et la viscosité en  $\text{Pl}$  (ou  $\text{Pa.s}$ ).

Plus le nombre de REYNOLDS est élevé, plus l'écoulement est turbulent. Le tableau 8.1 donne les valeurs de *Re* auxquels s'effectue la transition entre les différents régimes d'écoulement.

TAB. 8.1 – Limites de transition entre régimes d'écoulement

Régime d'écoulement	<i>Re</i>
Laminaire	$Re < 2100$
Intermédiaire	$2100 < Re < 3000$
Turbulent	$3000 < Re$

**Exemple 1 :** De l'eau s'écoule dans une conduite cylindrique de 14 mm de diamètre avec un débit volumique de 12 L/min. On souhaite connaître le régime d'écoulement.

Il nous faut calculer le nombre de REYNOLDS de cet écoulement :

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\eta}$$

On calcule la vitesse à partir du débit volumique :

$$u = \frac{Q_v}{S} = \frac{Q_v}{\pi \cdot D^2 / 4} = \frac{12 \cdot 10^{-3} / 60}{\pi \cdot 0,014^2 / 4} = 1,3 \text{ m/s}$$

La viscosité de l'eau à température ambiante est de  $10^{-3}$  Pa.s.

On peut donc calculer  $Re$  :

$$Re = \frac{1000 \cdot 1,3 \cdot 0,014}{10^{-3}} = 18200$$

Par conséquent, dans ce cas, le régime d'écoulement est turbulent.

Il est parfois utile d'exprimer le nombre de Reynolds d'une manière un peu différente de celle de l'équation 4.6. Ainsi, on peut disposer de la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide et non de sa viscosité dynamique  $\eta$  et de sa masse volumique  $\rho$ . On peut rappeler que  $\nu = \eta / \rho$ . Par conséquent, on a l'expression suivante pour  $Re$  :

$$Re = \frac{u \cdot D}{\nu} \quad (6.7)$$

De même, on dispose plus souvent du débit volumique  $Q_v$  de fluide que de sa vitesse moyenne  $u$ . Pour une conduite cylindrique de diamètre  $D$ , on rappelle que :

$$u = \frac{Q_v}{S} = \frac{Q_v}{\pi \cdot D^2 / 4} = \frac{4 \cdot Q_v}{\pi \cdot D^2}$$

Si on remplace  $u$  par l'expression précédente dans l'équation 4.6, on obtient :

$$Re = \frac{\rho \cdot \frac{4 \cdot Q_v}{\pi \cdot D^2} \cdot D}{\eta} = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q_v \cdot D}{\eta \cdot \pi \cdot D^2} \quad (6.8)$$

Ce qui après simplification nous donne :

$$Re = \frac{4 \cdot \rho \cdot Q_v}{\eta \cdot \pi \cdot D} \quad (6.9)$$

Cette dernière relation est particulièrement intéressante car elle fait apparaître la dépendance du nombre de REYNOLDS avec le débit volumique qui est une grandeur très utilisée en pratique.

Ainsi, lorsque l'on choisit une conduite pour transporter un débit donné de fluide, plus le diamètre de cette conduite sera faible, plus le nombre de Reynolds sera grand et par conséquent plus les pertes de charge seront importantes.

### 8.3.2 Conduites non-cylindriques-Diamètre hydraulique :

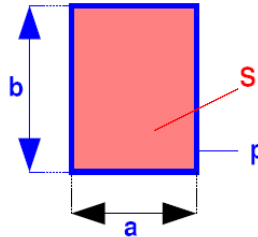
L'équation 4.6 définit le nombre de REYNOLDS pour un écoulement dans une conduite cylindrique. Il arrive souvent que les conduites ne le soient pas, et il est tout de même fondamental de pouvoir calculer  $Re$  dans ces cas-là. Pour cela, on définira pour une conduite

de forme quelconque, un «pseudo-diamètre» appelé *diamètre hydraulique* et noté  $D_h$ . On peut calculer le diamètre hydraulique à l'aide de l'expression suivante :

$$D_h = \frac{4 \cdot S}{P} \quad (6. 10)$$

Où  $S$  est la surface de la section de passage du fluide et  $p$  le périmètre de cette section qui est mouillé par le fluide (on appelle  $p$  le périmètre mouillé).

**Exemple 2 :** Considérons une conduite rectangulaire de largeur  $a=12$  mm et de hauteur  $b=20$  mm. On souhaite calculer le diamètre hydraulique  $D_h$  de cette conduite.



Le périmètre mouillé  $p$  est donc le périmètre du rectangle bleu :

$$p = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

La surface de la section de passage  $S$  est l'aire rouge du rectangle :

$$S = a \cdot b$$

Par conséquent, on aura :

$$D_h = \frac{4 \cdot a \cdot b}{2 \cdot a + 2 \cdot b} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 20}{12 + 20} = 15 \text{ mm}$$

Le diamètre hydraulique équivalent de cette conduite sera donc de 15 mm.

Le nombre de REYNOLDS pourra alors être calculé en utilisant le diamètre hydraulique comme diamètre de la conduite :

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot u \cdot D_h}{\eta} \quad (6. 11)$$


---

## 8.4 Comment calculer les pertes de charges d'un réseau ?

### 8.4.1 Pertes de charge régulières et singulières :

Au sein d'un réseau, on peut répartir les pertes de charge en deux catégories :

- Les pertes de charge dues aux longueurs droites de conduite. On les appelle *pertes de charge régulières ou linéaires*.
  - Les pertes de charge dues aux «accidents» de conduite. Ces «accidents» peuvent être des coudes, des vannes, des robinets, des rétrécissements, des élargissements, des purgeurs,...
- Ces pertes de charge sont appelées *pertes de charge singulières*. Les «accidents» de conduite sont appelées *singularités*.
-

### 8.4.2 Perte de charge totale d'un réseau :

Considérons par exemple le réseau de la figure 8.1. On compte quatre longueurs droites : les tronçons AB, CD, EF et GH, et on compte trois singularités : la vanne entre B et C, les coudes entre D et E et entre F et G.

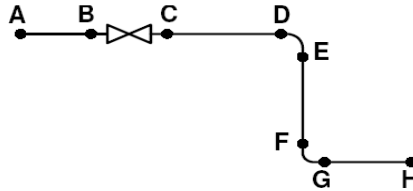


FIG. 8.1 – Exemple de perte de charge d'un réseau

La perte de charge totale du réseau, c'est à dire entre A et H, sera alors la somme des pertes de charge de chacun des sous-réseaux. On aura ainsi :

$$J_{\text{resau}} = J_{AH} + J_{AB} + J_{BC} + J_{CD} + J_{DE} + J_{EF} + J_{FG} + J_{GH} \quad (6.12)$$

Où  $J_{AB}$  est la perte de charge du tronçon compris entre A et B, etc...

Plus généralement, pour un réseau composé d'une succession de parties droites et de singularités, la perte de charge totale sera la somme des pertes de charge engendrées par chacune de ces parties droites et de chacune de ces singularités.

### 8.4.3 Calcul des pertes de charge régulières :

#### 8.4.3.1 Coefficient de perte de charge régulière :

On peut montrer que la perte de charge  $J$  d'un tronçon droit de longueur  $L$  de conduite de diamètre  $D$  dans laquelle circule un fluide animé d'une vitesse  $u$ , peut se calculer de la manière suivante :

$$J = \lambda \cdot \frac{u^2 \cdot L}{2 \cdot g \cdot D} \quad (6.13)$$

On voit dans l'équation précédente qu'intervient le coefficient de proportionnalité  $\lambda$  (lettre grecque lambda). Ce coefficient est appelé *coefficient de perte de charge*. De plus, la perte de charge est proportionnelle à la longueur de la conduite.

Par conséquent, pour calculer la perte de charge d'une conduite de longueur  $L$  et diamètre  $D$ , il convient de connaître la vitesse  $u$  du fluide (que l'on calcule généralement à partir du débit volumique) et le coefficient de perte de charge  $\lambda$ .

Pour des écoulements en conduite, le coefficient de perte de charge  $\lambda$  dépend du nombre de REYNOLDS,  $Re$ , de l'état de surface de la conduite (sa rugosité) et du régime d'écoulement.

Il existe de nombreuses formules et corrélations qui permettent de calculer  $\lambda$ . Toutefois en ce qui nous concerne, nous utiliserons plutôt un diagramme, appelé diagramme de MOODY, qui donne la valeur de  $\lambda$  en fonction de  $Re$  et de la rugosité de la conduite.

#### 8.4.3.2 Utilisation du diagramme de MOODY :

Il est tout d'abord nécessaire de donner une définition plus précise de ce qu'est la rugosité d'une surface. On appellera donc *rugosité la hauteur moyenne des aspérités à la surface de la conduite*. La rugosité sera désignée par la lettre  $k$ .

Le tableau 8.2 donne des valeurs de rugosité pour des matériaux courants :

TAB. 8.2 – Rugosité de différents matériaux usuels

Matériau	$k$ (mm)
Acier, neuf	0,05 à 0,1
Fonte, neuf	0,5 à 1
Fonte, usagé	0,9 à 1,5
Fonte, très incrusté	1,5 à 3
Cuivre ou laiton	0,001 à 0,003
Ciment, lisse	0,3 à 0,9
Ciment, brut	1 à 2

En fait, c'est le rapport de la rugosité  $k$  et du diamètre  $D$  de la conduite qui sera utilisée. Ce rapport s'appelle la *rugosité relative* :

$$\text{Rugosité relative} = \frac{k}{D} \quad (6. 14)$$

Par exemple, une conduite en ciment brut de 500 mm de diamètre avec une rugosité de 1,5 mm aura une rugosité relative de  $1,5/500=0,003$ .

La rugosité relative est une grandeur sans dimension.

Sur le diagramme de MOODY représenté sur la figure 8.2, le nombre de REYNOLDS  $Re$  se trouve en abscisse et le coefficient de perte de charge  $\lambda$  se trouve en ordonnée (on remarquera que l'échelle utilisée pour les axes est particulière, il s'agit d'une échelle logarithmique).

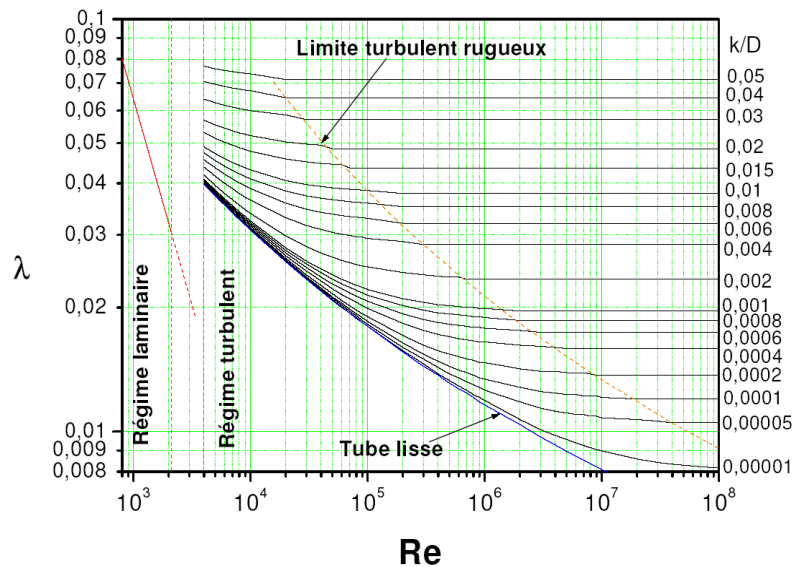


FIG. 8.2 – Diagramme de MOODY

On constate que pour le régime laminaire ( $Re < 2100$ , partie du diagramme à gauche de la verticale en pointillés violets),  $\lambda$  ne dépend pas de la rugosité relative de la conduite. Il n'y a donc qu'une seule courbe (courbe rouge, poursuivie en pointillés pour le régime intermédiaire).

Pour des valeurs plus élevées de  $Re$ , en régime turbulent, on constate qu'il y a une courbe pour chaque valeur de rugosité relative  $k/D$  (la valeur de  $k/D$  est inscrite à la droite du diagramme).

On constate aussi qu'au-delà d'une certaine valeur du nombre de REYNOLDS,  $\lambda$  n'augmente plus lorsque  $Re$  augmente. On dit que l'on est en *régime turbulent établi* (cette zone est délimitée par la courbe en pointillés orange). Pour ce régime d'écoulement,  $\lambda$  ne dépend que de  $k/D$ .

Pour trouver  $\lambda$ , on commencera par calculer  $Re$  et  $k/D$ . On placera notre valeur de  $Re$  en abscisse sur le diagramme de MOODY. On cherchera alors l'intersection de la verticale d'abscisse  $Re$  et de la courbe correspondant à notre rugosité relative  $k/D$ . La valeur recherchée de  $\lambda$  sera alors l'ordonnée du point d'intersection.

**Exemple 3 :** Un conduite de 600 mm de diamètre et de 500 m de longueur en fonte très incrustée par la rouille (rugosité  $k=2,4$  mm) est parcourue par un débit d'eau de  $20 \text{ m}^3/\text{min}$ .

On souhaite calculer la perte de charge subie par l'eau dans cette conduite.

Commençons par calculer  $Re$  :

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\eta} = \frac{\rho \cdot \frac{Q_v}{\pi \cdot D^2 / 4} \cdot D}{\eta} = \frac{1000 \cdot \frac{20/60}{\pi \cdot 0,6^2 / 4}}{10^{-3}} = 707355$$

Afin d'utiliser le diagramme de MOODY pour obtenir  $\lambda$ , il faut d'abord calculer la rugosité relative :

$$\frac{k}{D} = \frac{2,4}{600} = 0,004$$

Sur le diagramme de MOODY on cherche l'intersection de la verticale passant par  $Re=707355$  (compte tenu de la précision du diagramme on suit la verticale  $Re=7 \cdot 10^5$ ) et de la courbe correspondant à une rugosité relative  $k/D = 0,004$ . L'ordonnée de ce point d'intersection nous donne :

$$\lambda = 0,028$$

On peut alors calculer la perte de charge  $J$  :

$$J = \lambda \cdot \frac{u^2 \cdot L}{2 \cdot g \cdot D} = \lambda \cdot \frac{\left(\frac{QV}{\pi \cdot D^2 / 4}\right)^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{L}{D} = 0,028 \cdot \frac{\left(\frac{20/60}{\pi \cdot 0,6^2 / 4}\right)^2}{2 \cdot 9,81} \cdot \frac{500}{0,6} = 1,65 \text{ mCE}$$

La perte de charge subie par le fluide est de 1,65 mCE.

### 8.4.4 Pertes de charge singulières :


#### 8.4.4.1 Coefficient de perte de charge singulière :

De la même manière que pour les pertes de charge régulières, on peut montrer que la perte de charge  $J_{sing}$ , créée par une singularité du réseau peut se calculer de la manière suivante:

$$J_{sing} = \xi \cdot \frac{u^2}{2 \cdot g} \tag{6. 15}$$

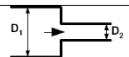

On voit dans l'équation précédente qu'intervient le coefficient de proportionnalité  $\xi$  (lettre grecque xi). Ce coefficient est appelé *coefficient de perte de charge singulière*. Ce coefficient  $\xi$  dépend du type, de la forme et des dimensions de la singularité. Il est déterminé expérimentalement et le tableau 8.3 donne les valeurs de  $\xi$  pour quelques singularités courantes.

TAB. 8.3 – Coefficients  $\xi$  de perte de charge singulière

Singularité	$\xi$
Robinet à soupape ouvert	6
Robinet à soupape d'équerre ouvert	4
Robinet à pointeau	ouvert 9 3/4 ouvert 13 1/2 ouvert 36 1/4 ouvert 112
Vanne à passage direct (à boule)	0
Coude à 90° 	$r/D = 0,5$ 2 $r/D = 1$ 0,3 $r/D = 1,5$ 0,17

Le tableau 8.4 donne les valeurs de  $\xi$  pour des rétrécissements et élargissements brusques de conduites en fonction du diamètre des deux sections.

TAB. 8.4 - Coefficient de perte de charge singulière pour des rétrécissements et élargissements brusques

Rétrécissement brusque	$D_1/D_2$	$\zeta$	Elargissement brusque	$D_2/D_1$	$\zeta$
	0,1	0,48		0,1	0,98
	0,2	0,48		0,2	0,92
	0,3	0,48		0,3	0,83
	0,4	0,48		0,4	0,71
	0,5	0,46		0,5	0,56
	0,6	0,41		0,6	0,41
	0,7	0,32		0,7	0,26
	0,8	0,19		0,8	0,13
	0,9	0,06		0,9	0,04

**Exemple 4 :** Un robinet à pointe à moitié ouvert est monté sur une conduite de 32 mm de diamètre. On souhaite connaître la perte de charge  $J$  engendrée par cette singularité pour un débit de 6 m<sup>3</sup>/h.

On calcule  $J$  par la relation suivante :

$$J \zeta \cdot \frac{u^2}{2 \cdot g}$$

On calcule d'abord  $u$  :

$$u = \frac{Q_v}{S} = \frac{QV}{\pi \cdot D^2 / 4} = \frac{6 / 3600}{\pi \cdot 0,032^2 / 4} = 2,07 \text{ m/s}$$

Le coefficient de perte de charge singulière  $\zeta$  d'un robinet à pointe à demi ouvert vaut 36.

On peut alors calculer  $J$  :

$$J = 36 \cdot \frac{2,07^2}{2 \cdot 9,81} = 0,88 \text{ mCE}$$

La perte de charge de ce robinet est donc de 0,88 mCE.

#### 8.4.4.2 Notion de longueur droite équivalente :

Il existe une manière plus commode de calculer la perte de charge entraînée par une singularité. C'est la *méthode des longueurs droite équivalentes*.

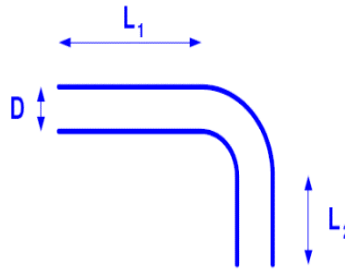
Considérons une singularité sur le réseau. Celle-ci entraîne une perte de charge  $J_{sing}$ . On appellera *longueur droite équivalente*,  $L_e$ , la longueur que devrait avoir une conduite fictive (de même diamètre  $D$  que la conduite qui porte la singularité) pour engendrer la même perte de charge  $J_{sing}$ . Les constructeurs fournissent très fréquemment la valeur de  $L_e$  des éléments de tuyauterie (vannes, coudes, . . .) qu'ils construisent. C'est pour cela que la méthode des longueurs droites équivalentes est très utilisée. On trouvera dans le tableau 8.5 les valeurs du rapport  $L_e/D$  pour quelques singularités.

Pour calculer la perte de charge du réseau il suffira alors d'ajouter les longueurs droites de conduites aux longueurs droites équivalentes des singularités.

TAB. 8.5 – Longueur droite équivalente pour quelques singularités

Singularité	$L_e/D$
Robinet à soupape normal	400
Robinet à soupape d'équerre	200
Vanne à passage direct (à boule)	9
Coude à 180° à brides	18
Coude à 90° à brides	13
Coude à 90° taraudé	40
Coude à 45° à brides	9
Coude à 45° taraudé	18

**Exemple 5 :** Considérons un réseau constitué par deux longueurs droites  $L_1 = 1$  m et  $L_2 = 0,5$  m séparées par un coude à 90° à brides. De l'eau circule à l'intérieur du réseau avec une vitesse moyenne  $u = 1,3$  m/s. Le diamètre de la conduite est de 20 mm et sa rugosité 0,002 mm. On souhaite calculer la perte de charge subie par le fluide.



Dans le tableau 4.6 on voit que pour un coude à 90° à brides, on a  $L_e/D=13$ . La perte de charge totale sera donc la perte de charge d'une conduite de longueur totale  $L_1+L_e+L_2$ .

On calcule alors  $Re$  et  $k/D$  :

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\eta} = \frac{1000 \cdot 1,3 \cdot 0,02}{0,001} = 26000$$

$$\frac{k}{D} = \frac{0,002}{20} = 0,0001$$

Sur le diagramme de MOODY on lit :

$$\lambda = 0,025$$

On calcule finalement  $J$  :

$$J = \lambda \cdot \frac{u^2}{2 \cdot g} = \frac{L_1 + L_e + L_2}{D} = 0,025 \cdot \frac{1,3^2}{2 \cdot 9,81} = \frac{1 + 13 + 0,5}{0,02} = 1,6 \text{ mCL}$$

*Il convient toutefois d'être très prudent dans l'application de cette méthode.* En effet, il faut veiller à n'ajouter que des longueurs droites de même diamètre. S'il y a des parties de diamètres différents dans le réseau. Il faut calculer la perte de charge de chaque partie, puis sommer les pertes de charges.

Les longueurs droites équivalentes des singularités peuvent aussi être déterminées à l'aide d'abaques comme celui représenté sur la figure 8.3. Pour utiliser cet abaque, on placera un premier point sur l'axe de gauche correspondant à la singularité qui nous intéresse et un deuxième point sur l'axe de droite correspondant au diamètre de la conduite qui porte la singularité. On trace la droite reliant ces deux points, et on cherche le point d'intersection de cette droite avec l'axe situé au milieu de l'abaque. On peut alors lire la longueur droite équivalente  $L_e$  en mètres.

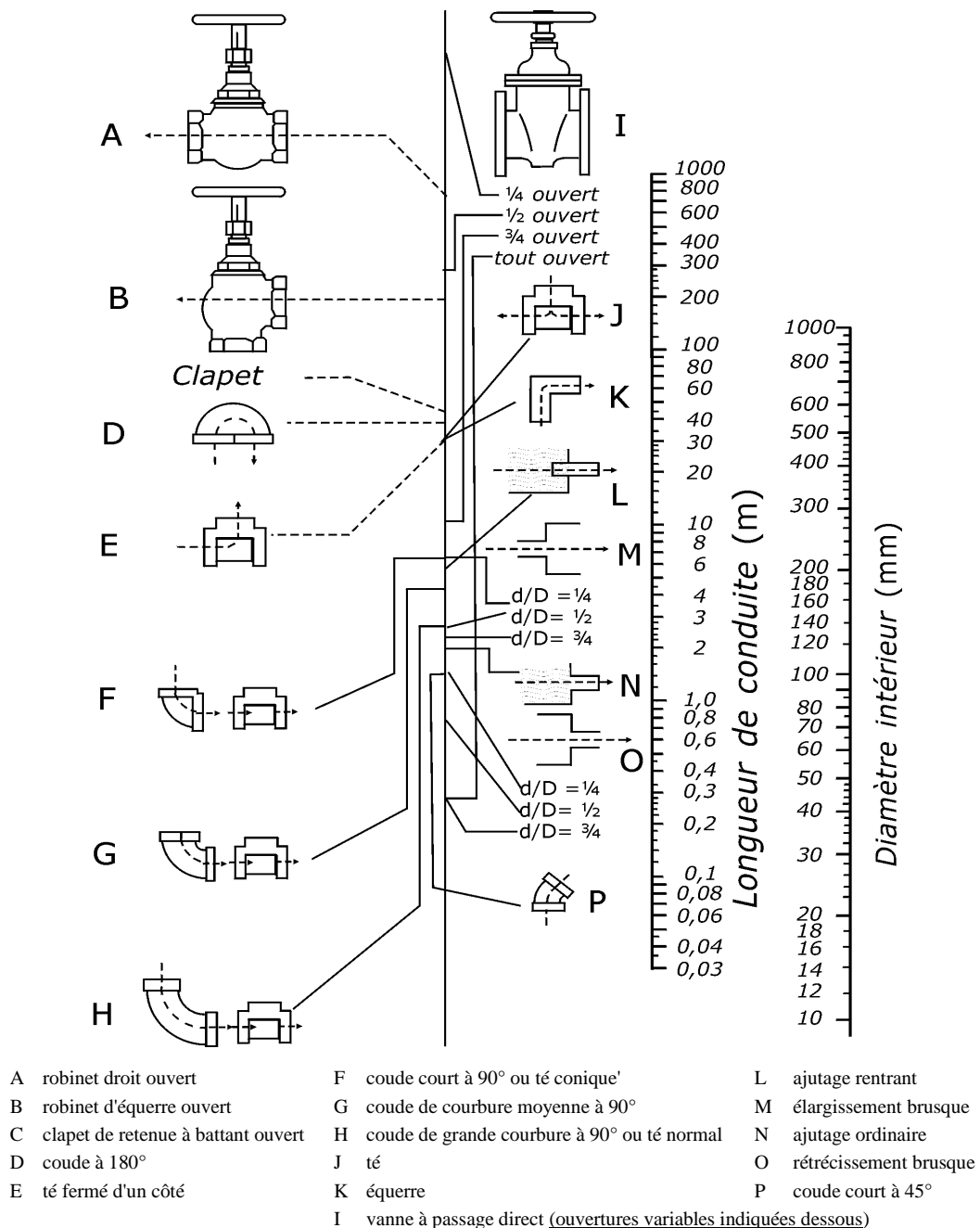


FIG. 8.3 – Abaque de longueur droites équivalentes de singularités

### 8.4.5 Circuits dérivés :

Considérons une tuyauterie se divisant en A en deux branches qui se rejoignent en B.

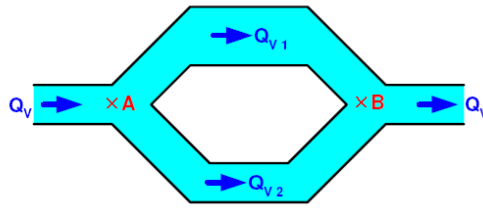


FIG. 8.4 – Circuits dérivés

Soient  $h_{tA}$  la charge totale du liquide en A et  $h_{tB}$  la charge totale du liquide en B.

La différence  $h_{tA} - h_{tB}$  représente à la fois la perte de charge  $J_1$  du liquide dans la branche 1, et la perte de charge  $J_2$  du liquide dans la branche 2.

$$h_{tA} - h_{tB} = J_1 = J_2 \quad (6.16)$$

Dans chacune des branches, on a la même perte de charge. Le liquide dont le débit est  $Q_V$  dans la tuyauterie principale se répartit dans les deux branches avec des débits respectifs  $Q_{V1}$  et  $Q_{V2}$  tels que :

- $Q_{V1}$  entraîne la perte de charge  $J_1$
- $Q_{V2}$  entraîne la perte de charge  $J_2$

De plus, on aura la relation suivante entre les débits volumiques :

$$Q_V = Q_{V1} + Q_{V2} \quad (6.17)$$

### 8.5 Exercices complémentaires :

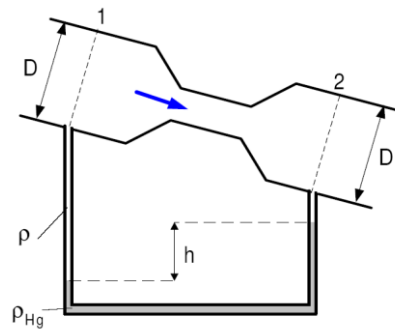
#### Exercice 1 :

Une conduite cylindrique transporte un fluide de masse volumique  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ . Un manomètre placé sur une section 1 de la conduite indique une pression  $P_1$  de 1,3 bar. Un second manomètre placé sur une section 2 indique une pression  $P_2$  de 1,2 bar. De plus, on a  $z_1 = 3 \text{ m}$  et  $z_2 = 7 \text{ m}$ .

1. Quel est le sens de l'écoulement ?
2. Quelle est la perte de charge du liquide entre les deux sections de mesure ?
3. Calculer la perte de pression par frottement (en bar).

#### Exercice 2 :

De l'eau s'écoule dans une conduite de 100 mm avec un débit de 20 L/s. On mesure la perte de charge entre les sections 1 et 2 à l'aide d'un manomètre différentiel à mercure (tube en U). La dénivellation du mercure est  $h = 10 \text{ cm}$ .



1. Quelle est la valeur de la perte de charge de l'eau ?
2. Calculer (en Watt) le débit d'énergie perdu par frottement ?
3. Calculer la quantité (en joules) d'énergie perdue par frottement en un an ?
4. Quel est le coût (économique) annuel occasionné par cette perte de charge, sachant qu'un kWh d'énergie vaut 0,1DA ?

(Note : le kWh (kilowattheure) est une unité d'énergie souvent employée pour l'énergie électrique. On a la correspondance suivante avec les joules :  $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$ )

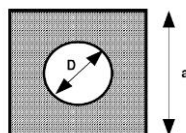
**Exercice 3 :**

Déterminer le régime d'écoulement dans une canalisation de 30 cm de diamètre :

1. pour de l'eau à 20 °C circulant à la vitesse moyenne de 10,5 m/s.
2. pour du fuel lourd à 50 °C (viscosité 110 cSt) circulant à la même vitesse.

**Exercice 4 :**

Soit un échangeur de chaleur tubulaire dont la coupe figure ci-dessous. Le fluide de refroidissement circule dans l'espace compris entre les deux tubes (grisé sur la figure).



1. Donner l'expression littérale du diamètre hydraulique et calculer celui-ci si  $a = 40 \text{ mm}$  et  $D = 30 \text{ mm}$ .
2. Le fluide de refroidissement est de l'eau de masse volumique  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  et de viscosité dynamique  $\eta = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  à 20 °C. Calculer le régime d'écoulement du fluide de refroidissement si le débit volumique est de  $3 \text{ m}^3/\text{h}$ .

**Exercice 5 :**

Quel est le nombre de REYNOLDS correspondant à un écoulement d'air à 20°C dans une tuyauterie cylindrique de 50 mm de diamètre et sous pression absolue de 900 mm de mercure?

Données : Le débit d'air est de  $1,5 \text{ m}^3/\text{h}$ , la masse volumique de l'air à 0°C et 760 mmHg vaut  $1,293 \text{ kg/m}^3$  et sa viscosité vaut 0,018 cPo.

**Exercice 6 :**

De l'huile de pétrole de masse volumique  $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$  et de viscosité  $\eta = 2 \text{ cPo}$ , s'écoule dans un tuyau rectiligne circulaire en fonte moulée de 150 mm de diamètre avec une vitesse de 0,2 m/s. Quelle est la perte de charge subie par l'huile pour chaque kilomètre de tuyau ?

**Exercice 7 :**

Un échangeur tubulaire est constitué de 2 tubes concentriques en cuivre. Le tube interne a un diamètre extérieur de 30 mm. Le tube externe a un diamètre intérieur de 50 mm. Dans l'espace annulaire (espace compris entre les 2 tubes) circule du toluène avec un débit de 1,5 kg/s. Déterminer la perte de charge du toluène pour chaque mètre de conduite

*Données :*

Masse volumique du toluène  $\rho = 860 \text{ kg/m}^3$

Viscosité du toluène  $\eta = 0,6 \text{ cPo}$

Rugosité du cuivre  $k = 0,001 \text{ mm}$

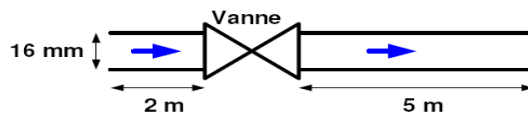
**Exercice 8 :**

Une conduite transportant de l'eau à 20 °C de diamètre initial 20 mm s'élargit brusquement vers une conduite de 40 mm. Le débit volumique est de 50 L/min.

1. Calculer la perte de charge causée par cet élargissement brusque.
2. On inverse le sens de l'écoulement. Par conséquent, on a maintenant affaire à un élargissement brusque. Calculer la perte de charge qu'entraîne cette singularité.

**Exercice 9 :**

On a le réseau horizontal suivant constitué d'une première longueur droite de conduite de 2 m, suivie par une vanne ouverte complètement et complétée par une autre longueur droite de 5 m. Les conduites ont un diamètre de 16 mm.



On mesure un débit de 10 L/min circulant à travers ce réseau. On mesure aussi à l'aide de manomètres, la pression relative à l'entrée de la première longueur droite qui vaut 2,1 bar, et la pression à la sortie de la seconde longueur droite qui vaut 1,2 bar.

1. Calculer la perte de charge subie par le fluide à travers ce réseau.
2. Sachant que les conduites utilisées sont en acier galvanisé de rugosité 0,16 mm, calculer les pertes de charges de chacune des longueurs droites. En déduire la perte de charge de la vanne.
3. Calculer la longueur droite équivalente de la vanne.
4. Calculer le coefficient de perte de charge singulière de la vanne.

## Chapitre 09

### Similitude et modèles

#### 9.1. Introduction :

Tout problème de mécanique des fluides est régi par des équations qui sont dans plusieurs cas difficiles à résoudre. Il devient donc impératif d'avoir recours à l'expérience, que ce soit par l'utilisation de modèles numériques ou des modèles physiques. Il est possible alors de faire converger les différentes approches, mais les essais sur maquettes sont plus intéressants dans un premier temps, car ils permettent de trouver des solutions, d'acquérir des données ou de vérifier des calculs. La technique des modèles réduits est basée sur les règles de similitude, donc sur l'analyse dimensionnelle. Ces règles permettent d'une part de concevoir et d'exploiter le modèle, mais aussi de transposer les résultats obtenus à la réalité.

#### 9.1.1. Définitions :

**9.1.1. a) Le prototype :** Le prototype est le modèle en grandeur réelle (Fig.9.1).

**9.1.1. b) La maquette :** La maquette est un modèle réduit (parfois plus grand) du prototype (Fig.9.1). Elle est beaucoup moins coûteuse que le prototype. Elle se prête à une étude plus facile et à des modifications moins onéreuses.

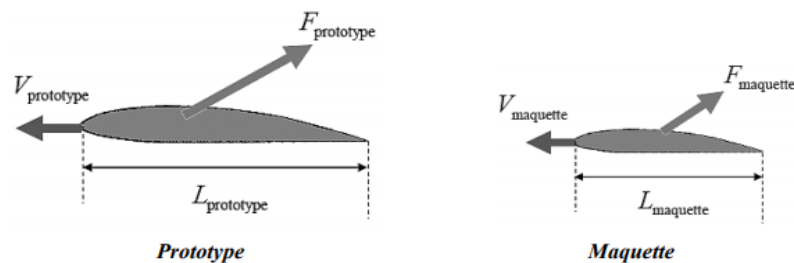


FIG. 9.1 –Prototype et maquette.

- **Les essais sur une maquette :**

Permettent :

- de vérifier les calculs.
- de trouver des solutions que les théories actuelles sont incapables de fournir.

Pour tout système, les résultats des mesures expérimentales sur le modèle ne sont transposables au prototype que si les données définissant les problèmes posés satisfont à un certain nombre de relations. Ce sont les conditions de similitude mécanique :

On distinguera les similitudes :

- géométrique
- cinématique
- dynamique

### 9.2 Similitude géométrique :

Le rapport de toutes les dimensions du prototype et de la maquette doit être constant : La maquette doit être à l'échelle exacte du prototype et les différentes dimensions doivent être reliées par le même facteur géométrique  $K_G$ .

$$K_G = \frac{D_{Prototype}}{D_{Modèle}} = \frac{L_{Prototype}}{L_{Modèle}} \quad (9.1)$$

$K_G$  : est la constante de proportionnalité géométrique.

### 9.3 Similitude cinématique :

Lorsqu'on a ainsi caractérisé les parois solides, il faut caractériser le mouvement relatif du fluide par rapport à ces parois.

- La similitude cinématique est satisfaite si une modification dans le temps des vitesses sur le prototype est accompagnée d'une modification correspondante sur la maquette.
- La similitude cinématique traduit seulement le fait que le facteur de proportionnalité géométrique (d'échelle),  $K_G$ , est égal au produit des facteurs d'échelle de temps,  $K_t$ , et de vitesse,  $K_V$ .

$$K_G = \frac{L_{Prototype}}{L_{Modèle}} = \frac{V \cdot t_{Prototype}}{V \cdot t_{Modèle}} = K_V \cdot K_t \quad (9.2)$$

Avec :

$$K_t = \frac{t_{Prototype}}{t_{Modèle}}, \text{ et } K_V = \frac{V_{Prototype}}{V_{Modèle}} \quad (9.3)$$

Pour la grandeur accélération :

$$a_M = \frac{K_G}{K_t^2} a_P \quad (9.4)$$

Les relations précédentes peuvent être réarrangées davantage :

$$\begin{aligned} \frac{V_P}{V_M} &= \frac{L_M/t_M}{L_P/t_P} = \frac{K_G}{K_t} = K_V \\ \frac{a_P}{a_M} &= \frac{L_M/t_M^2}{L_P/t_P^2} = \frac{K_G}{K_t^2} = K_a \\ \frac{Q_P}{Q_M} &= \frac{L_P^3/t_P}{L_M^3/t_M} = \frac{K_G^3}{K_t} = K_Q \end{aligned} \quad (9.5)$$

#### 9.4 Similitude dynamique (forces, inertie, pesanteur, pression, viscosité, ...) :

On parle de similitude dynamique lorsque les forces en deux points homologues du prototype et de la maquette sont dans un rapport constant :

La masse volumique :

$$\rho_M = \frac{K_M}{K_G^3} \rho_P; \quad K_M = \frac{m_M}{m_P} \quad (9.6)$$

La pression :

$$\rho_M = \frac{K_M}{K_G^3} \rho_P; \quad K_m = \frac{m_M}{m_P} \quad (9.7)$$

La loi fondamentale de la dynamique (La deuxième Loi de Newton) s'applique, lorsqu'on travaille sur le prototype ou sur la maquette :

$$F_P = m_P \cdot a_P$$

$$F_M = m_M \cdot a_M$$

$$\frac{F_M}{F_P} = \frac{m_M \cdot a_M}{m_P \cdot a_P} = \frac{\rho_M L_M^3}{\rho_P L_P^3} \times \frac{K_G}{K_t^2} \quad (9.8)$$

$$= K_\rho K_G^2 \left( \frac{K_G}{K_t} \right)^2 = K_\rho K_G^2 K_V^2$$

En remplaçant  $F_M$ ,  $m_M$  et  $a_M$ , des équations précédentes, on obtient :

$$K_F \cdot F_P = (K_M \cdot m_P) \left[ \frac{K_G}{K_t^2} \right] a_P \quad (9.9)$$

On divise ensuite par  $F_P$  le membre de gauche et par  $(m_P \cdot a_P)$  le membre de droite (on a  $F = ma$ ):

$$K_F = \frac{K_M \cdot K_G}{K_t^2} \quad (9.10)$$

Où :

$$1 = \frac{K_M \cdot K_G}{K_t^2 K_F} \quad (9.11)$$

Multiplions et divisons l'équation précédente par  $K_G^3$ , on obtient :

$$1 = \frac{K_M \cdot K_G^4}{K_t^2 K_F K_G^3}$$

$$1 = \left( \frac{K_M}{K_G^3} \right) \left( \frac{K_G}{K_t} \right)^2 \left( \frac{K_G}{K_F} \right)$$

$$1 = \frac{(\rho_M / \rho_P) \cdot (V_M^2 / V_P^2) \cdot (L_M^2 / L_P^2)}{F_M / F_P} \quad (9.12)$$

$$\frac{F_P}{\rho_P V_P^2 L_P^2} = \frac{F_M}{\rho_M V_M^2 L_M^2}$$

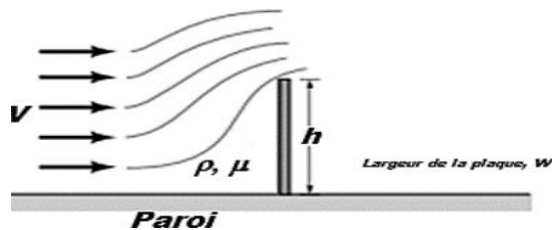
L'équation ci-dessus donne la condition pour avoir une similitude dynamique entre le modèle et la maquette. Le paramètre adimensionnel  $\frac{F_P}{\rho_P V_P^2 L_P^2}$  doit être le même à des positions sur le prototype et sur la maquette géométriquement similaires.

**Exemple :** Rapport des pressions dynamiques :

$$\frac{\rho_M V_M^2}{\rho_P V_P^2} = Cte$$

## 9.2 Exercices Complémentaire :

**Exercice 01 :** Une plaque rectangulaire mince de hauteur  $h$  et de largeur  $w$  est placée de façon normale au courant d'un fluide en écoulement. Considérons la force de traînée,  $F_T$  que le fluide exerce sur la plaque est une fonction de  $h$ ,  $w$ , la viscosité du fluide,  $\mu$  et  $\rho$  sa masse volumique respectivement ainsi que la vitesse d'approche  $V$  du fluide, tel que :  $F_T = f(h, w, \mu, \rho, V)$ . Déterminer les grandeurs adimensionnelles appropriées ( $\pi_1, \pi_2, \dots$ ) qui permettent d'étudier ce problème expérimentalement.



### Exercice 02 :

Un navire, de taille caractérisée par une longueur  $L$ , est en mouvement à la vitesse  $V$ . L'eau dans laquelle le navire avance exerce une force de résistance (force de traînée),  $F_{\text{Trainée}}$ , au mouvement qui dépend, à part de  $L$  et  $V$ , de la masse volumique,  $\rho$ , de la viscosité dynamique  $\mu$  et de la tension superficielle  $\sigma_s$  de l'eau ainsi que de la pesanteur  $g$ , par la fonction suivante :

$$F_{\text{Trainée}} = g(L, V, \rho, \mu, \sigma_s, g)$$

Déterminer les groupes (nombres) adimensionnels qui peuvent être utilisés pour relier les grandeurs du problème par l'application de la méthode de Vachy-Buckingham.

## Chapitre 10

### Couches limites

#### 10.1 Introduction - Equations de Prandtl :

On considère un écoulement rapide autour d'un obstacle de faible courbure, en régime permanent, d'un fluide newtonien incompressible. Localement on a donc une configuration quasi plane où la paroi de l'obstacle est définie comme le plan  $y = 0$ . On considère des écoulements bidimensionnels.

$$\vec{V} = u(x, y)\vec{e}_x + v(x, y)\vec{e}_y \quad (10.1)$$

Dans le domaine  $x \in [-L/2, L/2]$ ,  $y \in \mathbf{R}^+$ , avec  $L$  une échelle longitudinale caractéristique, échelle des gradients de  $\vec{V}$  dans la direction  $x$ , voire des écarts à la planéité de la paroi. Si  $v$  est l'ordre de grandeur de  $u$  loin de la paroi, on suppose que :

$$Re_{\text{exterieur}} = \frac{VL}{\nu} \gg 1 \quad (10.2)$$

$x = -L/2$  représente la « région d'entrée » de l'écoulement,  $x = +L/2$  sa « région de sortie » ; ce ne sont en aucun cas des parois fixes où la vitesse devrait s'annuler.

En conséquence, en négligeant les effets de la turbulence, on peut utiliser le modèle du fluide parfait loin de la paroi, pour calculer l'écoulement dit « extérieur ». L'effet de la viscosité et de l'adhérence à la paroi se manifestent dans une couche limite dans laquelle l'échelle transverse, échelle des gradients de  $v$  dans la direction  $y$ ,

$$\delta \ll L \quad (10.3)$$

A partir de la condition d'incompressibilité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10.4)$$

On doit donc avoir dans la couche limite

$$v \sim \frac{\delta}{L} u \ll u \quad (10.5)$$

D'autre part on y a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (10.6)$$

La composante  $x$  de l'équation de Navier-Stokes peut donc se simplifier pour donner la première équation de Prandtl

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (10.7)$$

De même la composante  $y$  de l'équation de Navier-Stokes peut a priori se simplifier sous la forme :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (10.8)$$

Si on suppose que  $\hat{P}$  varie comme  $u$  et  $v$  rapidement dans la couche limite, i.e. sur une échelle  $\delta$ , en estimant l'ordre de grandeur de  $\hat{P}$  à partir des équations (10.7) et (10.8) en équilibrant les termes de pression avec les termes visqueux on aboutit à une contradiction. On doit donc admettre que  $\hat{P}$  ne varie pas dans la couche limite, ce qu'exprime la deuxième équation de Prandtl :

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial y} = 0 \quad (10.9)$$

Les équations de Prandtl constituent une version simplifiée des équations de Navier-Stokes, puis qu'elles sont d'ordre 2 par rapport à  $x$  mais seulement 1 par rapport à  $y$ . En conséquence il faut ajouter aux conditions d'adhérence à la paroi,

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } y = 0 \quad (10.10)$$

Des conditions de raccord avec l'écoulement extérieur portant seulement sur  $u$  et  $\hat{P}$ ,

$$\frac{u(x,y)}{u_{\text{extérieur}}(x,y)} \rightarrow 1 \text{ quand } \frac{y}{\delta} \rightarrow +\infty, \quad (10.11)$$

$$\frac{\hat{P}(x,y)}{\hat{P}_{\text{extérieur}}(x,y)} \rightarrow 1 \text{ quand } \frac{y}{\delta} \rightarrow +\infty, \quad (10.12)$$

Comme  $u$  varie sur l'échelle  $\delta$  dans la couche limite mais par contre extérieur varie sur l'échelle  $L \gg \delta$ ,  $y \gg \delta$  correspond encore à  $y$  petit pour l'écoulement extérieur. On exprime en conséquence la première condition de raccord sous la forme plus simple :

$$u(x, +\infty) = u_{\text{extérieur}}(x, 0) \quad (10.13)$$

Avec les mêmes notations simplifiées, les conditions (10.9) et (10.13) conduisent à

$$\hat{P} = \hat{P}(x) = \hat{P}_{\text{extérieur}}(x, 0) \quad (10.14)$$

## 10.2. Epaisseur de couche limite :

On distingue trois types d'épaisseur de couche limite, à savoir :

- Épaisseur conventionnelle de la couche limite,  $\delta$
- Épaisseur de déplacement de la couche limite,  $\delta^*$
- Épaisseur du moment de la couche limite,  $\theta$

### 10.2.1. Epaisseur conventionnelle de couche limite, $\delta$ :

L'épaisseur de la couche limite est définie comme la distance verticale entre la paroi solide et le point où la vitesse de l'écoulement atteint 99% ( $u=0.99 U_\infty$ ) de la vitesse de l'écoulement libre la figure (10.1).

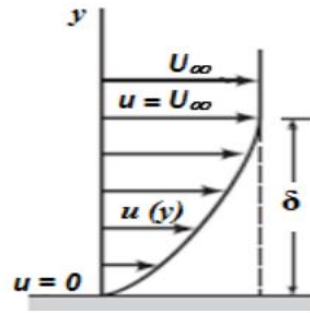


FIG. 10.1 –Epaisseur conventionnelle de la couche limite

**10.2.2. Epaisseur de déplacement de la couche limite,  $\delta^*$  :**

L'épaisseur de déplacement représente la distance verticale dans laquelle la paroi solide doit être déplacée vers le haut de sorte que le fluide réel ait le même débit massique que le fluide idéal. Considérons deux types d'écoulement de fluide sur une plaque plane horizontale fixe avec une vitesse d'écoulement  $U_\infty$ , comme illustré à la figure (10.2).

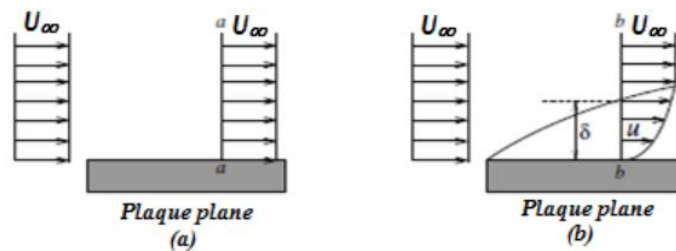


FIG. 10.2 –Ecoulement sur une plaque plane (a) pour un fluide parfait (b) pour un fluide réel. En l'absence de viscosité dans le cas d'un fluide parfait la figure (10.2 (a)), un profil de vitesse uniforme est développé au-dessus de la paroi solide. Cependant, dans le cas de fluide visqueux (fluide réel) et pas de glissement sur la paroi, un gradient de vitesse est développé dans la région de la couche limite, comme le montre la figure (10.2 (b)). Le déficit de vitesse à travers la bande d'élément de section transversale **b-b** la figure (10.2) est  $(U_\infty - u)$ . Cependant, le déficit en débit massique est obtenu comme suit :

$$(U_\infty - u)b dy \tag{10. 15}$$

Avec, **b** est la largeur de la plaque. Le déficit en masse totale due à la présence de viscosité par rapport au cas du fluide parfait.

$$\int_0^\delta \rho(U_\infty - u)b dy \tag{10. 16}$$

Cependant, si nous déplaçons la plaque d'une distance  $\delta^*$  vers le haut dans la section **a-a** (Fig. 10.17) pour donner une réduction de masse de  $\rho U_\infty b \delta^*$ , le déficit de débits dans les deux cas sera identique si,

$$\int_0^\delta \rho(U_\infty - u)b dy = \rho U b \delta^* \tag{10. 17}$$

Et,

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (10.18)$$

Avec,  $\delta^*$  est l'épaisseur de déplacement de la couche limite. L'épaisseur de déplacement représente la distance verticale dans laquelle la paroi solide doit être déplacée vers le haut de sorte que le fluide parfait ait le même débit massique que le fluide réel.

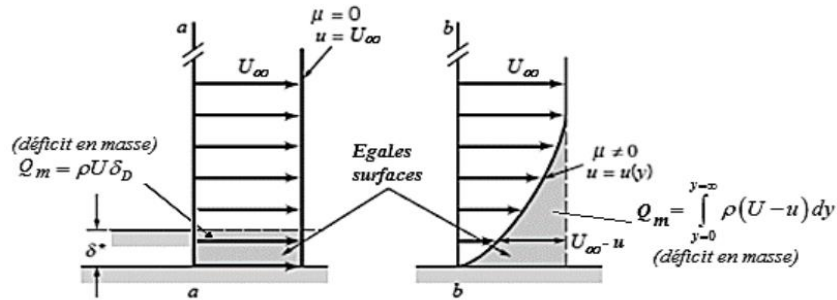


FIG. 10.3 –Epaisseur de déplacement de couche limite

### 10.2.3. Epaisseur de quantité de mouvement de la couche limite, $\theta$ :

Une autre épaisseur de la couche limite, il s'agit de l'épaisseur de quantité de mouvement, elle sert à prédire la force de traînée sur la surface de l'objet la figure (10.4).

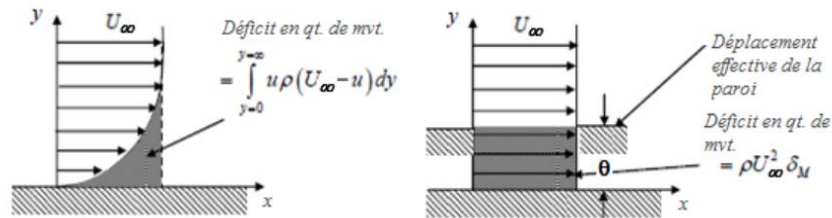


FIG. 10.4 –Epaisseur de déplacement de quantité de mouvement de couche limite

En référence à la figure (10.3), le déficit de vitesse à travers la bande d'élément de section **b-b** contribue au déficit de flux de quantité de mouvement comme suit :

$$\rho u(U_\infty - u)b dy \quad (10.19)$$

Ainsi, le déficit total de la quantité de mouvement

$$\int_0^\delta \rho u(U_\infty - u)b dy \quad (10.20)$$

Cependant, si nous déplaçons la plaque d'une distance  $\theta$  vers le haut à la section **a-a** pour donner un déficit de quantité de mouvement de  $\rho U_\infty^2 b \theta$ , le déficit de quantité de mouvement dans les deux cas sera identique si,

$$\int_0^\delta \rho (U_\infty - u)b dy = \rho U_\infty^2 b \theta \quad (10.21)$$

Et,

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (10.22)$$

Ici,  $\theta$  est l'épaisseur de déplacement de la couche limite. L'épaisseur de quantité de mouvement représente la distance verticale à laquelle la paroi solide doit être déplacée vers le haut, de sorte que le fluide parfait ait la même quantité de mouvement que le fluide réel. Les trois différentes épaisseurs de la couche limite sont représentées et comparées dans la figure (10.5) suivante.

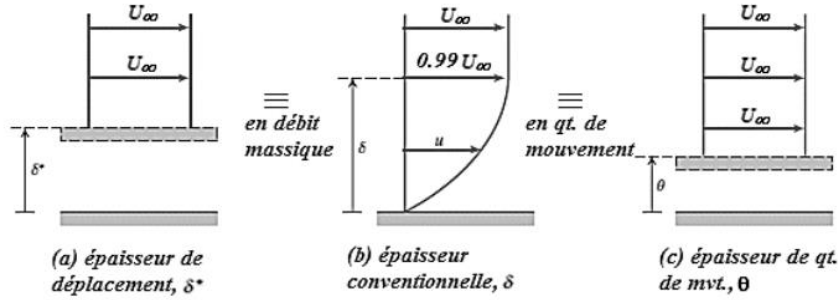


FIG. 10.5 – Epaisseurs de couche limite

### 10.3 Equations de la couche limite :

Tout d'abord, on résume les principales hypothèses que nous nous sommes déjà fixées sur l'écoulement considéré.

- écoulement laminaire, permanent, bidimensionnel dans le plan ( $Oxy$ ).
- fluide incompressible ( $\rho = Cte$ ) L'écoulement est donc décrit par les équations de Navier-Stokes ainsi que l'équation de continuité, comme suit :

Suivant x,

$$\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (10.23)$$

Suivant y,

$$\frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (10.24)$$

Suivant z,

$$\frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (10.25)$$

Sous forme vectorielle, elles peuvent être réécrites sous la forme :

$$\rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (10.26)$$

L'équation de continuité est :

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dx} (\rho u) + \frac{d\rho}{dy} (\rho v) + \frac{d\rho}{dz} (\rho w) = 0 \quad (10.27)$$

Compte tenu des hypothèses fixées ci-dessus, pour l'écoulement dans la couche limite. Par conséquent, les équations de Navier-Stokes et celle de continuité de l'écoulement du fluide sont réduites à :

$$\left[ \begin{array}{l} u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0 \end{array} \right. \quad (10.28)$$

Le système d'équations 10.28 s'appelle les équations de couche limite où (équations de Prandtl), elles sont valables seulement dans le domaine de couche limite.

#### 10.4 Couche limite de Blasius au-dessus d'une plaque plane :

On considère une plaque plane placée dans un écoulement uniforme à l'infini :

$$\vec{V}_{\text{exterieur}} = U\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \hat{P}_{\text{exterieur}} = \text{constante} \quad (10.29)$$

I.e. à gradient de pression motrice nul. Cette plaque possède un bord d'attaque situé en  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ; l'échelle longitudinale pertinente est alors la distance  $x$  au bord d'attaque. La première équation de Prandtl (10.7) s'écrit :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (10.30)$$

Pour que l'équation ne dégenère pas complètement, ce qui serait dramatique, il faut que l'échelle transverse :

$$\delta = \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (10.30)$$

En utilisant une fonction courant  $\psi$  pour tenir compte de (10.31), i.e. en écrivant :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10.31)$$

Il est naturel de rechercher une solution à variables séparées :

$$\psi = P(x)f(\varepsilon) \quad (10.32)$$

Avec :

$$\varepsilon = \frac{y}{\delta} \text{ La coordonnée transverse réduite.} \quad (10.33)$$

La condition de raccord de la vitesse conduit à :

$$P(x) = U\delta = \sqrt{\nu U x} \text{ et } f'(+\infty) = 1 \quad (10.34)$$

En conséquence :

$$u = Uf'(\varepsilon) \text{ et } v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} [\varepsilon f'(\varepsilon) - f(\varepsilon)] \quad (10.35)$$

L'équation de Prandtl (10.16) conduit après quelques calculs à l'équation de **Blasius**.

$$2f'''(\varepsilon) + f(\varepsilon)f''(\varepsilon) = 0 \quad (10.36)$$

Cette équation doit être résolue munie des conditions d'adhérence

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (10.37)$$

et de la condition de raccord avec l'écoulement extérieur (10.38)

$$f'(+\infty) = 1 \quad (10.38)$$

L'équation de **Blasius**, non linéaire, ne peut être résolue que numériquement.

### 10.5 Equation intégrale de Von-Karman :

L'un des principaux inconvénients de la solution de **Blasius** est sa limite à l'écoulement laminaire de couche limite sur une plaque plane uniquement. En réalité, la plupart des écoulements sont turbulents. Par conséquent, la demande de remplacer la solution de **Blasius** par une autre permettant de prédire l'écoulement turbulent de la couche limite a conduit à un grand travail effectué par **Von-Karman** en 1921. **Von-Karman** a formulé une équation générale à partir de la théorie de la conservation de quantité de mouvement qui permet de prédire les écoulements de la couche limite de la région laminaire jusqu'aux régions turbulentes. Son équation contribue à la prédiction de la traînée causée par des forces de cisaillement sur un corps. Pour voir l'énoncé, considérons un écoulement uniforme sur une plaque plane et le volume de contrôle fixe, comme illustré à la figure (10.6).

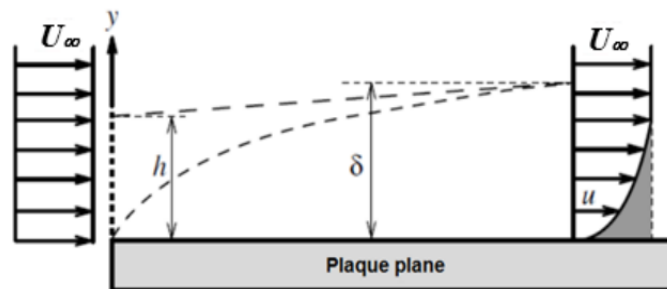


FIG. 10.6 – Volume de contrôle pour la dérivation de l'équation intégrale de **Von-Karman**  
 Nous appliquons la composante horizontale de l'équation de quantité de mouvement.

Il donne :

$$\sum F_x = \rho \int_1 uV \cdot ndA + \rho \int_2 uV \cdot ndA \quad (10.30)$$

Ou,

$$\sum F_x = \rho \int_1 U_\infty(-U_\infty) \cdot dA + \rho \int_2 u^2 dA \quad (10.40)$$

$$\sum F_x = -\rho U_\infty^2 bh + \rho b \int_0^\delta u^2 dy \quad (10.41)$$

Ensuite, nous démontrons la dérivation des équations d'épaisseur de couche limite, d'épaisseur de déplacement de couche limite, d'épaisseur d'impulsion de couche limite, de coefficient de frottement local et de coefficient de traînée en fonction de différentes distributions de vitesse en utilisant l'équation intégrale de quantité de mouvement de **Von-Karman**;

- i) Distribution linéaire de la vitesse
- ii) Distribution polynôme du second ordre de la vitesse
- iii) Distribution polynôme du troisième ordre de la vitesse
- iv) Distribution sin-cos de la vitesse

### 10.6 Exercices Complémentaire :

#### Exercice 01 :

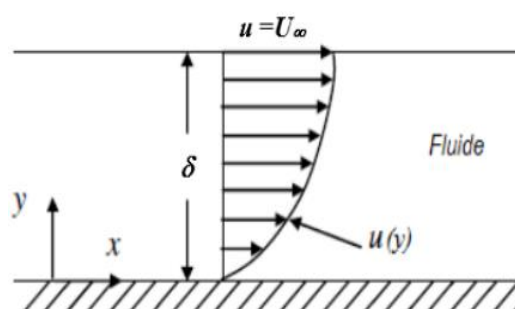
1. Si la distribution des vitesses dans la couche limite laminaire sur une plaque plate est supposée être donnée par le polynôme de premier ordre  $u = a + by$ , où  $a$  et  $b$  sont constants, déterminer

- a) Le rapport entre l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de la couche limite
- b) Le rapport entre l'épaisseur du moment et l'épaisseur de la couche limite

#### Exercice 02 :

Montrer que, si la distribution de vitesse dans la couche limite laminaire sur une plaque plane est supposée être un polynôme de second ordre ( $u=a+by+cy^2$ ), la distribution de vitesse peut être exprimée comme suit.

$$\frac{u}{U_\infty} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$



#### Exercice 03 :

En supposant que le gradient de vitesse dans la couche limite laminaire sur une plaque plate se présente sous la forme d'un polynôme de second ordre, calculez :

- a) L'épaisseur du déplacement de la couche limite
- b) l'épaisseur de la quantité de mouvement de la couche limite

**Exercice 04 :**

Considérons un écoulement sur une plaque plane horizontale (1,25m x 2,5m) avec une vitesse de 3,0 m/s. Calculer :

- a. L'épaisseur de la couche limite au bord à la limite longitudinale de la plaque,
- b. La contrainte de cisaillement au milieu de la plaque plane, c. La force de traînée résultante sur les deux faces de la plaque plane. On donne :  $\rho=850 \text{ kg/m}^3$ ,  $\gamma=10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

## Bibliographie

1. A. Ameer, "Mécanique des fluides appliquée à l'eau: principe fondamentaux et exercices corrigés", Edition castilla,2009,ISBN:978.2.7135.3026.5
2. A, Lencastre, "Hydraulique Générale", Edition Eyrolles. 1996 ISBN: 2212018940
3. BEN HAMOUDA. R, "Notions de mécanique des fluides" , Centre de Publication Universitaire, Tunisie.2008 ISBN : 978-9973-37-494-3
4. Bruce R. Munson, Donald. F. Young,Theodore H. Okiishi et Wade W. Huebsch "Fundamentals of Fluid Mechanics", sixth edition, John Wiley & Sons, Inc. 2009 ISBN 978-0470-26284-9
5. Carlier M., " Hydraulique Générale et Appliquée", Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'EdF, n°14, 1986, Edition Eyrolles.
6. Clayton T. Crowe, Donald F.Elger, Barbara C.Williams and John A.Roberson, "Engineering Fluid Mechanics" , Ninth edition, John Wiley & Sons, Inc.2009 ISBN 978-0470-25977-1
7. Comolet, R : "Mécanique expérimentale des Fluides", Tome III : Exercices et problèmes corrigés. Editions Masson.1986, ISBN :2-225-80870-8
8. Frank.M.White ,"fluid mechanics, seven edition", McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering ,2011,ISBN 978-0-07-352934-9
9. Renald V. Giles, Jack B.Evett and Cheng Liu, "Mécanique des Fluides et hydraulique", Série Schaum ,Mc Graw hill.1994 ISBN :0-07-023316-0
10. R. Ouziaux, J. Perrier : Mécanique des Fluides Appliquée, Dunod,2004, ISBN : 2100038591
11. Sakir A, Jean-Luc B,"Mécanique des fluides" Edition Dunod, 2011, ISBN : 978-2-10-056922-9
12. S. Candel," Problèmes résolus de mécaniques des fluides" "Edition Dunod, 2005, ISBN : 6184594359814
13. Robert W. Fox. Solution manual for introduction to fluid mechanics. 3th. Ed. Wiley, 1985.
14. Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen, David R. Dowling. Fluid mechanics, 5th. Ed. Elsevier Inc. 2012.
15. Bernard Massey, John Ward-Smith. Mechanics of fluids, 8th. Ed. Taylor & Francis, 2006.
16. C. Wassgren. Notes on fluid mechanics and gas dynamics, School of Mechanical Engineering, Purdue University, 2010.

17. Walter H. Graf, M.S. Altinakar. Hydrodynamique, Eyrolles, 1991.
18. A. Bettahar, Mécanique des fluides et technologie des conduites, Polycopié du module TEC 371, Centre universitaire de Chlef, 2001.