الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا للأساتذة التعليم التكنولوجي - سكيكدة
Ecole Normale Supérieure d'enseignement technologique, Skikda

قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم المتوسط

عنوان المذكرة

سلاسل فوريه وبعض تطبيقاتها

من إعداد الطالبة:

- سليماني نورهان

تحت إشراف الأستاذ :

- معيزي محمد

نوقشت من طرف لجنة المناقشة:

- دردار نجم الدين...... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة........... رئيسا.
- معيزي محمد.......... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة.......... مشرفا.
- بن تمامة وئام.......... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة......... مناقشا.
- مرابط فريدة .... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة.......... مناقشا.

السنة الجامعية: 2025/2024

دفعة جوان 2025

❖ شكــر وعرفـــان

بسم الله الرحمن الرحيم

أوّل من يُشكر و يُحمد، هو العلي القهار، الذي أغرقنا بنعمه التي لا تعد ولا تحصى، و أغدق علينا برزقه الذي لا يفنى، وأنار دروبنا، فله جزيل الحمد و الثّناء العظيم، هو الذي أنعم علينا إذ أرسل فينا عبده

"محمد بن عبد الله "

عليه أزكى الصلوات و أطهر التّسليم، أرسله بقرآنه المبين، فعلَّمنا ما لم نعلم، و حثنا على طلب العلم أينما وجد .

لله الحمد كله و الشكر كله فهو الأولى بالشكر في كل الأوقات و الظروف إذ وفقني وألهمني الصبر على المشاق التي واجهتني لإنجاز هذا العمل المتواضع.

و الشُّكر موصول لكل معلم أفادني بعلمه من أولى المراحل الدراسية حتى هذه اللحظة، كما أرفع كلمة الشُّكر إلى الأستاذ المشرف "معيزي محمد" الذي ساعدني على إنجاز بحثي هذا.

كما أتقدم بالشكر إلى أعضاء لجنة المناقشة لقبولهم الإشراف على مناقشة مذكرتي و على النصائح التي ستقدم لي .

كما أشكر كل من مدَّ لي يد العون من قريب أو من بعيد .

و في الأخير لا يسعني إلا أن أدعو الله عزّ و جلّ أن يرزقني السّداد و الرّشاد.

❖ إهـــداء

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله أولاً وآخرًا، ظاهرًا وباطنًا، الذي وفّقني وأعانني على إتمام هذه المذكرة، وله الشكر على ما أنعم، والحمد على ما ألهم.

وأزكى الصلاة وأتمّ التسليم على سيدنا محمد، خير خلق الله، ومعلّم البشرية، صلى الله عليه وسلم تسليمًا كثيرًا.

إلى أمي الحبيبة إلى من كانت لي وطنًا، حضنًا، دعاءً، وأمانًا... إلى تلك المرأة التي لا تُشبهها امرأة، التي كانت لي في كل ضعف قوّة، وفي كل يأس أمل، وفي كل خوف سكينة. يا من سهرتِ وقلقتِ من أجلي، وتحملتِ فوق طاقتك لترى ابتسامتي. كل كلمات الدنيا لا توفيك حقك، فأنتِ روحي، وسبب ما أنا عليه اليوم.

وإلى أبي الغالي سائق سيارة الأجرة، فارس الطرقات الصعبة، من يعمل بصمت، ويتحدى مشقة النهار والليل، ليضمن لي طريقًا أسلكه في العلم والكرامة. يا أبي، لولاك لما كنت هنا أكتب، فلولا تعبك وعرقك وتضحيتك لما وقفت هذه الوقفة اليوم. فكل حرف في هذه المذكرة، وكل نجاح أناله، هو وسام على صدرك.

إلى والديَّ معًا أنتم السبب بعد الله في كل ما وصلت إليه، وأنتم فخري الأبدي. وإلى عائلتي الحبيبة وإلى صديقاتي الوفيات: أصالة ، صبيحة، أسماء، صفاء، سيرين اللواتي كنّ رفيقاتي في مشواري الجامعي، سندًا لي وقت الشدّة، وضوءًا وقت العتمة. وإلى صديقتي في الغرفة آية التي تقاسمت معي كل تفاصيل الحياة اليومية برقيّ وأخوّة. وإلى صديقتي منذ الصغر لينا و آسيا لكما منّي كل الحب، كما كنتما دائمًا جزءًا من ذكرياتي الجميلة. وإلى من فارق الحياة وهو يحمل في قلبه الخير لنا، أسأل الله أن يجعل له في هذا العمل نورًا وأجرًا دائمًا. إلى كل من وقف في طريقي بصدقٍ ومحبة... أهدي هذا العمل المتواضع، عربون وفاء، واعترافًا بفضل لا يُنسى.

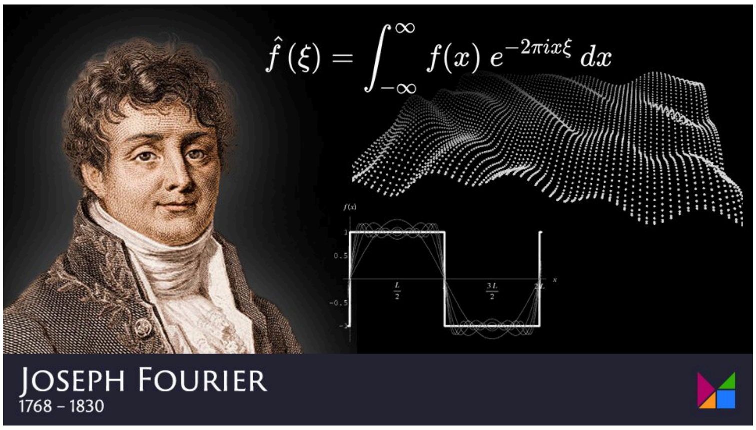
نورهان سليماني

الفَهرَس

الفصل 3
بعض تطبيقات سلاسل فوريه **36**

مقـــدمّة

تعد سلاسل فورييه من أهم الأدوات التحليلية في مجال الرياضيات التطبيقية والفيزياء والهندسة، إذ تمثل وسيلة فعالة في تحويل الدوال الدورية إلى مجموع من التوافقات الجيبية وجيبية التمام$(sine/cosine)$.
ظهر هذا المفهوم في بداية القرن التاسع عشر على يد عالم الرياضيات الفرنسي جون بابتيست جوزيف فورييه $Jean-Baptiste-Joseph-Fourier$ عندما كان يدرس انتقال الحرارة في عام 1807 حيث كان يبحث عن طريقة لحل معادلة الحرارة الجزئية ذات المتغيرين (المكان والزمان).
واجهت فكرة فورييه مقاومة كبيرة من علماء الرياضيات البارزين آنذاك مثل أويلر ولاغرونج وغيرهم لأنهم استغربوا فكرة تمثيل أي دالة (بشروط محددة) كمجموع من دوال مثلثية؛ لكن مع مرور الزمن تطورت النظرية وأضيفت عليها تحسينات عديدة لتشمل شروطًا كشروط ديريكليه الأمر الذي جعل منها أداةً جوهريّة في حلّ المعادلات التّفاضلية الجزئية وتحليل الإشارات والدراسة المعمقة للظواهر الموجية والإهتزازية، فضلا عن تطبيقاتها المتنوعة في مجالت أخرى. قسّمت مذكّرتي هذه إلى ثلاثة فصول، حيث تطرّقت في:



شكل 1: Jean-Baptiste-Joseph-Fourier

الفصل الأوّل: إلى إعطاء بعض التّعاريف الخاصة بالإستمرار والإشتقاق، التوابع الدّوريّة وبعض خواصها، الفضاءات $L^p(\mathbb{T})$ و جداء الإلتفاف.

الفصل الثّاني: عرّفت النّظام المثلثي وكثير الحدود المثلّثي والسّلاسل المثلّثيّة، كما درست سلاسل فورييه وتقاربها في الفضائين $L^1_{2\pi}$ و $L^2_{2\pi}$.

الفصل الثّالث: تطرّقت إلى بعض تطبيقات سلاسل فورييه في مجال الرّياضيّات وهي: متراجحة ويرتنجر، حل معادلة تفاضليّة عاديّة من الدّرجة الرّابعة، حل معادلة الحرارة.

الفصل 1

مفاهيم أساسية

1.1 مقدمة

سنتطرق في هذا الفصل إلى إعطاء بعض التعاريف و المفاهيم الأساسية التي تخدم الفصل الثّاني و الثّالث.

1.2 الاستمرارية والإشتقاقية

تعريف 1.2.1 (الاستمرار عند نقطة و على مجال)

لتكن I مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، ولتكن $x_0 \in I$ و f تابع من $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

1) نقول أنّ f مستمر عند x_0 إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \begin{cases} x \in I \\ \text{و} \\ |x - x_0| < \eta \end{cases} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

2) نقول أنّ f مستمر على I إذا كان مستمراً عند كل نقطة x_0 من I. ونرمز الى مجموعة التّوابع المستمرّة على I بالرّمز$C(I, \mathbb{R})$.

تعريف 1.2.2 (الاستمرار بتقطع)

ليكن a، b عددان حقيقيان حيث $a < b$، وليكن f تابعا من $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$.

نقول إنّ f مستمر بتقطع على $[a, b]$ إذا وُجد $n \in \mathbb{N}^*$ و عناصر $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ من المجال $[a, b]$ بحيث يتحقق الشرطان:

1. $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.
2. التابع f مستمر على المجال $]a_i, a_{i+1}[$ و يقبل نهاية من اليمين عند a_i و نهاية من اليسار عند a_{i+1}، وذلك من أجل كل $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. وهذا يعني أنّ اقتصار التابع fعلى المجال $]a_i, a_{i+1}[$ يقبل تمديدًا إلى تابع مستمر على المجال $[a_i, a_{i+1}]$ من أجل كل $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

تعريف 1.2.3 (الاشتقاق عند نقطة و على مجال)

ليكن I مجالاً من $\mathbb{R}$، و x_0 نقطة من I، $(I \neq \{x_0\})$ و $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

1) نقول عن التابع f أنه قابل للاشتقاق عند x_0، إذا وجد عدد حقيقي b بحيث:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b$$

يسمى b مشتق f عند x_0 ونرمز له بـ: $f'(x_0)$.

2) نقول عن f أنّه قابل للاشتقاق على المجال I إذا كان قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة x_0 من I.

يسمى التابع $f':I\to\mathbb{R}$ بالتابع المشتق لـ f.

تعريف 1.2.4 (المشتقات المتتابعة)

ليكن $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ و $(n\in\mathbb{N})$

* نقول عن التابع f أنه من الصف C^n على المجال I اذا وفقط اذا كان f قابلًا للاشتقاق n مرّة على I، ونكتب $f\in C^n(I,\mathbb{R})$

ونقول أنّ f من الصّف C^∞ على I ونكتب $f\in C^\infty(I,\mathbb{R})$ إذا وفقط إذا كان

$$C^\infty(I,\mathbb{R})=\bigcap_{n\geq 0}C^n(I,\mathbb{R})$$

تعريف 1.2.5 (المشتقات المتتابعة بتقطّع)

ليكن a، b عددان حقيقيان حيث $a<b$ و $n\in\mathbb{N}$، وليكن f تابعا من $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$.

نقول إنّ f من الصّف C^n قطعياً إذا وفقط إذا وُجد $n\in\mathbb{N}^*$ و عناصر $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ من المجال $[a,b]$ بحيث

1. $a=a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n=b$.

2. اقتصار التابع fعلى المجال $]a_i,a_{i+1}[$ يقبل تمديدًا إلى تابع من الصّف C^n على المجال $[a_i,a_{i+1}]$ من أجل كل $i\in\{0,1,\ldots,n-1\}$.

1.3 التّوابع الزوجيّة والفرديّة

تعريف 1.3.1

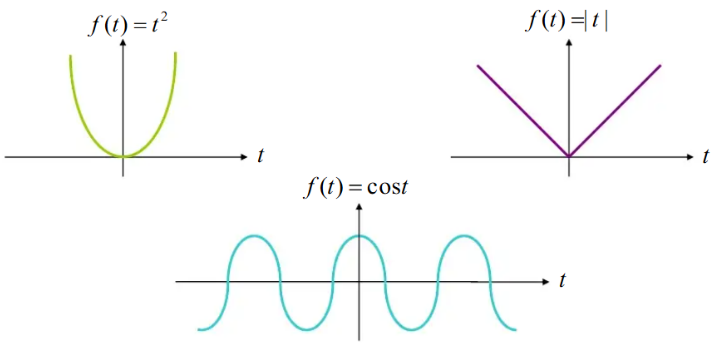
نقول عن تابع f أنّه زوجي إذا كان

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f, f(-x) = f(x) \quad .$$

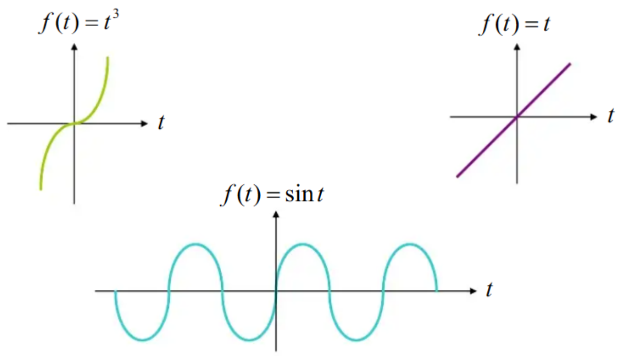
نقول عن تابع f أنّه فردي إذا كان

$$\forall x \in D_f, -x \in D_f, f(-x) = -f(x) \quad .$$

أمثله:



شكل 1.1: بعض التّوابع الزّوجيّة



شكل 1.2: بعض التّوابع الفرديّة

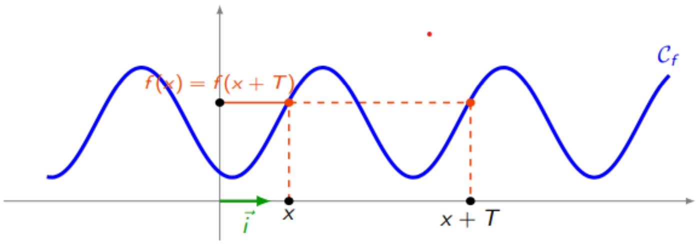
1.4 التّوابع الدّوريّة

تعريف 1.4.1

- ليكن $I \subseteq \mathbb{R}$ و $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

نقول أنّ التّابع f دوري ودورته T $(T > 0)$ إذا تحقق

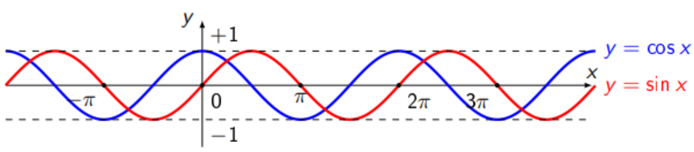
$$\forall x \in I, (x+T) \in I, f(x+T) = f(x) \quad .$$



شكل 1.3: منحنى لتابع دوري

أمثله:

- $x \mapsto cos(x)$،$x \mapsto sin(x)$،$x \mapsto e^{ix}$ هي توابع دوريّة ودورها $T = 2\pi$.
- $x \mapsto tang(x)$ هو تابع دوري ودوره $T = \pi$.



شكل 1.4: منحنى التّابعين cos و sin

خاصية 1.4.1

إذا كان T دورًا للتّابع f فإنّ كلّ عدد من الشّكل kT مع $(k \in \mathbb{Z})$ يمثّل كذلك دورًا للتّابع f .

البرهان

نسمي H_n الخاصيّة التّالية:

$$H_n = \{\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x+kT) = f(x)\}$$

. نعتمد على البرهان بالتراجع، أي نتحقق من صحّة H_0 $(k=0)$ و نبرهن أنّ $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.

- التّحقّق من صحّة H_0:

  لدينا من أجل $k=0$

$$H_0 = f(x+(0)T) = f(x+0) = f(x)$$

محقّقة

- نفرض صحّة H_k ونتحقّق من صحّة H_{k+1}.

  لدينا من أجل $k+1$

$$H_{k+1} = f(x+(k+1)T) = f((x+kT)+T)$$

وبما أن T هو دور للتّابع f، فإنّ

$$f((x+kT)+T) = f(x+kT) = f(x)$$

بما أنّ H_{k+1} صحيحة فإنّ H_k صحيحة.

ومنه kT هو دور للتّابع f.

■

توطئة 1.4.1 تكامل التّابع الدّوري

إذا كان f تابعًا دوريًّا بدورة T $(T > 0)$ وقابلاً للمكاملة على كلّ مجال محدود فإنّ

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

لكل $a \in \mathbb{R}$.

البرهان

إذا كان $a > 0$ فإنّ

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,dx &= \int_0^{a+T} f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx \\ &= \int_0^T f(x)\,dx + \left[\int_T^{a+T} f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx\right].\end{aligned}$$

الفرق داخل القوسين المربّعين يساوي الصّفر بسبب دوريّة التّابع f، وبالتّالي تحقّق العلاقة اعلاه من أجل $a > 0$.
إذا كان $a < 0$ فإنّنا نتّبع نفس الطريقة فنحصل على

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,dx &= \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^{a+T} f(x)\,dx \\ &= \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx - \int_{a+T}^T f(x)\,dx \\ &= \int_0^T f(x)\,dx + \left[\int_a^0 f(x)\,dx - \int_{a+T}^T f(x)\,dx\right].\end{aligned}$$

دوريّة التّابع f تعني أنّ الفرق داخل القوسين يساوي الصّفر، وبالتّالي

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

■

1.5 الفضاءات $L^p(\mathbb{T})$

تعريف 1.5.1

لكل عدد حقيقي p حيث $1 \leq p < \infty$ نعرّف الفضاء $L^p(\mathbb{T})$ على أنّه فضاء التوابع القابلة للقياس $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ والّتي تكون توابع 2π دوريّة، وذلك بشرط أن يكون

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt < \infty$$

يمكن التّحقق كما هو الحال مع أي تابع مستمر من أنّ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} |f(t)|^p dt = \frac{1}{2\pi}\int_{a-\pi}^{a+\pi} |f(t)|^p dt, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

علاوة على ذلك فإنّ متباينة مينكوسكي تؤكد لنا أنّ $L^p(\mathbb{T})$ مزوّد بالنّظيم

$$\|f\|_{L^p} := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

بوجه خاص:

- إذا كان $p = 1$، نحصل على الفضاء $L^1_{2\pi}$: فضاء اللّتوابع القابلة للتكامل على فترة واحدة طولها 2π.
- إذا كان $p = 2$، نحصل على الفضاء $L^2_{2\pi}$: فضاء التّوابع مربّعة التّكامل، وهو فضاء هيلبرت مزوّد بالجداء السّلمي
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$
- إذا كان $p = \infty$ نعرّف

$$L^\infty(\mathbb{T}) := \left\{ f \text{ دوري-}2\pi\text{ و قيوس } : \|f\|_{L^\infty} := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| < \infty \right\}$$

1.6 جداء الإلتفاف produit de convolution

تعريف 1.6.1

ليكن $f, g \in L^1([0, 2\pi])$ تابعين 2π-دوريين.

نسمي جداء إلتفاف التّابعين f وg على المجال $[0, 2\pi]$ التّابع $f * g$ المعرّف بـ

$$\forall t \in \mathbb{R}, (f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t - x) g(x) dx.$$

الفصل 2

سلاسل فوريه

2.1 مقدّمة

سنتعرّف في هذا الفصل على السّلاسل المثلّثيّة وتقاربها، بالإضافة إلى دراسة سلاسل فورييه للدوال الدورية وكيفية تحديد معاملات فورييه الخاصة بها. كما سنتطرق إلى أهم نظريات التقارب المرتبطة بهذه السلاسل مع إبراز الفضاءات التي تحقق فيها هذه النتائج مثل الفضاء $L^1_{2\pi}$ والفضاء $L^2_{2\pi}$.

2.2 النظام المثلثي

تعريف 2.2.1

لكل $n \in \mathbb{Z}$، نعرف العنصر e_n من $\mathcal{C}_{2\pi}$ (فضاء التّوابع المستمرّة والـ2π-دوريّة) بالعلاقة

$$e_n(x) \stackrel{\text{def.}}{=} e^{inx}.$$

تسمى العائلة $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ بالنظام المثلثي.

قضية 2.2.1

1. العائلة $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ تشكّل نظامًا متعامدًا في الفضاء $L^2_{2\pi}$،حيث

$$\langle e_n, e_m\rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad (m \neq n) \\ 2\pi & ; \quad (m = n) \end{cases}$$

2. العائلة $(1, cos(nx), sin(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$ تشكّل نظامًا متعامدًا في الفضاء $L^2_{2\pi}$.

2.3 كثير الحدود المثلثي

تعريف 2.3.1

نسمي كثير حدود مثلّثي ذو درجة اقل من او تساوي N $(N \in \mathbb{N})$ للمتغير الحقيقي x كل تابع من الشّكل

$$x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \qquad (c_n \in \mathbb{C})$$

حسب العلاقة $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ يمكن القول أيضا أن كثير الحدود المثلّثي هو تابع من الشكل

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n cos(nx) + b_n sin(nx)]$$

حيث a_n و b_n هي أعداد حقيقية .

2.4 السلاسل المثلثية

تعريف 2.4.1

نسمي سلسلة مثلّثيّة كل سلسلة توابع للمتغيّر الحقيقي x تأخذ احد الشّكلين:

- الشّكل الأسّي

$$c_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \tag{2.1}$$

و نكتب $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$

- الشّكل المثلّثي

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} [a_n cos(nx) + b_n sin(nx)] \tag{2.2}$$

ملاحظة 2.4.1

للانتقال من الشّكل الحقيقي إلى الشّكل المركّب في السّلاسل المثلّثيّة نستخدم العلاقتين التّاليتين:

$$cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad ; \quad sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

بالفعل:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}[a_n cos(nx)+b_n sin(nx)]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}[a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}]$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}[(a_n-ib_n)e^{inx}+(a_n+ibn)e^{-inx}]$$

نضع:

$c_0=\frac{a_0}{2}$ من أجل $n=0$،

$c_n=a_n-ib_n$ من أجل $n>0$،

$c_{-n}=a_n+ibn$ من أجل $n<0$،

ومنه

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}[a_n cos(nx)+b_n sin(nx)]=c_0+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}$$

نستنتج بسهولة أنّ:

$$\begin{cases} a_n=c_n+c_{-n} \\ b_n=i(c_n-c_{-n}) \end{cases};n\in\mathbb{N}^*$$

2.4.1 تقارب السلاسل المثلثية

قضية 2.4.1
اذا كانت $\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k$ و $\sum_{k\in\mathbb{N}}b_k$ سلسلتين متقاربتين مطلقًا فإنّ السّلسلة (2.2) تتقارب بانتظام ومجموعها هو تابع مستمر.

البرهان

لدينا:

$$|a_k\cos kx+b_k\sin kx|\leq|a_k\cos kx|+|b_k\sin kx|$$
$$\leq|a_k|+|b_k|$$

حسب معيار ويرستراس *Weierstrass* السلسلة (2.2) متقاربة نظيميًّا وبالتّالي بانتظام، وحسب نظريّة الاستمرار لسلاسل التّوابع المتقاربة بانتظام ينتج استمرار التّابع المجموع للسلسلة (2.2). ■

2.4.2 قضية آبال

إذا كانت $(a_n)_n$ و $(b_n)_n$ متتاليتين ذات حدود موجبة ومتناقصتين،

و $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ، $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

فإنّ السّلسلة (2.2) متقاربة، ومتقاربة بإنتظام على كل مجال من الشّكل $[\epsilon, 2\pi-\epsilon]$ حيث $(\epsilon)>0$ ومجموعها مستمر على المجال $]0,2\pi[$ وبالتّالي على $\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}$.

البرهان

نضع $\alpha_n(x)=a_n cos(nx)$ و المتتالية $(a_n)_n$ متناقصة وحدّها العام يؤول إلى الصّفر، متقاربة بإنتظام بالنّسبة لـ x، حيث $\sum_0^n cos(kx)=Re\big(\sum_0^n e^{ikx}\big)$ مع

$$\begin{aligned}
\left|\sum_0^n e^{ikx}\right| &= \left|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right| \\
&\le \frac{2}{|1-e^{ix}|} \\
&= \frac{2}{|e^{\frac{ix}{2}}|\cdot|e^{\frac{ix}{2}}-e^{\frac{-ix}{2}}|} \\
&= \frac{1}{|sin(\frac{x}{2})|} \\
&\le \frac{1}{sin(\frac{\epsilon}{2})}
\end{aligned}$$

على المجال $[\epsilon, 2\pi-\epsilon]$. يمكننا إذًا تطبيق نظريّة آبال، وبنفس الطّريقة مع $\beta_n(x)=b_n sin(nx)$. ■

2.5 سلاسل فورييه

تعريف 2.5.1

ليكن $f\in L^1_{2\pi}$ تابع دوري دوره 2π.

- نسمي سلسلة فورييه المرفقة بالتّابع f السلسلة المثلثية

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ أو $\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx))$

- نسمي معاملات فورييه للتّابع f الأعداد المركّبة المعرّفة بـ:

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \qquad (2.3)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \tag{2.4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt \tag{2.5}$$

إذا كان $f \in L^2_{2\pi}$ فإنّ

$$c_n(f) = \langle e_n, f\rangle$$

قضية 2.5.1

ليكن $f \in L^2_{2\pi}$.

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad , \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

$$c_n(f) = \tfrac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \quad , \quad c_{-n}(f) = \tfrac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f))$$

البرهان

ليكن $f \in L^2_{2\pi}$، $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(cos(-nt) + isin(-nt))dt \end{aligned}$$

بما أنّ التّابع cos زوجي والتّابع sin فردي فإنّ

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(nt)dt - \frac{1}{2\pi}i\int_0^{2\pi} f(t)sin(nt)dt \\ &= \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \end{aligned}$$

بنفس الطّريقة

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(cos(nt)+isin(nt))dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(nt)dt + \frac{1}{2\pi}i\int_0^{2\pi} f(t)sin(nt)dt \\
&= \frac{1}{2}(a_n(f)+ib_n(f))
\end{aligned}$$

نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}
c_n(f)+c_{-n}(f) &= \frac{1}{2}(a_n(f)-ib_n(f))+\frac{1}{2}(a_n(f)+ib_n(f)) \\
&= a_n(f)
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
c_n(f)-c_{-n}(f) &= \frac{1}{2}(a_n(f)-ib_n(f))-\frac{1}{2}(a_n(f)+ib_n(f)) \\
&= -ib_n(f)
\end{aligned}$$

إذن $b_n(f)=i(c_n(f)+c_{-n}(f))$.

وعلى وجه الخصوص يكون $b_0=0$ و $a_0=2c_0$. ■

ملاحظات

- بما أن التّكاملات دورية بدورة 2π فإنّه يمكن استبدال مجال التّكامل $[0,2\pi]$ بأيّ مجال آخر طوله 2π.
- إذا كان التّابع f زوجي (فردي) فإنّ المعاملات $b_n(f)$ $(a_n(f))$ على التّوالي تكون منعدمة.
- عمومًا نستعمل المعاملات $a_n(f)$ و $b_n(f)$ عندما يأخذ التّابع f قيمًا حقيقيّة.

-إذا كان f تابعًا دوريًّا بدورة T فإنّه يمكننا تعريف معاملات فورييه له كما يلي:

$$c_n(f)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt$$

$$a_n(f)=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$$

$$b_n(f)=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$$

وبأخذ $\omega=\frac{2\pi}{T}$، فإنّ سلسلة فورييه المرفقة بالتّابع f تكون من الشّكل

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n(f)\cos(\omega nx) + b_n(f)\sin(\omega nx)) \text{ أو } \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{i\omega nx}$$

2.6 سلسلة الجيب لفورييه

تعريف 2.6.1

إذا كان f تابع فردي ودوري بدورة 2π فإنّه يمكن التّعبير عنه بسلسلة فوريه بالشّكل التّالي:

$$S(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

حيث:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\, dt.$$

مثال 2.6.1

نعتبر التّابع f ال 2π-دوري المعرّف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & , \quad x \in]0, 2\pi[\\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

من الواضح أنّ التّابع f فردي، إذن

- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0.$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n =?.$

لدينا من أجل $0 < x < 2\pi$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2}\sin(nx)\, dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\sin(nx)\, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\left(\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

وبالتّالي نكتب

$$f(x) \approx \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}, \quad \text{for} \quad 0 < x < 2\pi.$$

2.7 سلسلة جيب التمام لفورييه

تعريف 2.7.1

إذا كان f تابع زوجي ودوري دوره 2π، فإنه يمكن التعبير عنه بسلسلة فورييه بالشكل التالي:

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx.$$

حيث:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt.
\end{aligned}
$$

مثال 2.7.1

نعتبر التّابع f المعرّف كما يلي

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x < \pi$$

واضح أنّ التّابع f زوجي ودوري بدورة 2π، ومنه

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0.$
- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n =?.$

لدينا:

من أجل $n = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{2}{3}\pi^2. \end{aligned}$$

من أجل $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \end{aligned}$$

باستخدام التكامل بالتجزئة نجد

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n^2}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{n^2}(-1)^n \end{aligned}$$

وبالتّالي نكتب

$$f(x) \approx \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

2.8 خواص معاملات فورييه

خواص

ليكن $f \in L^1_{2\pi}$، $a \in \mathbb{R}$ و$(k,n) \in \mathbb{Z}^2$:

1. $c_n(f_\sigma) = c_{-n}(f)$، (حيث $f_\sigma(x) = f(-x)$).
2. $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.
3. $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$، (حيث $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$) .
4. $c_n(e_k \cdot f) = c_{n-k}(f) \cdot e_n$

البرهان

1. $c_n(f_\sigma) = c_{-n}(f)$

$$\begin{aligned} c_n(f_\sigma) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\sigma(t)e^{-int}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)e^{-int}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)e^{int}\,dt \\ &= c_{-n}(f). \end{aligned}$$

2. $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.

$$\begin{aligned} c_n(\overline{f}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \overline{f(t)}e^{-int}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \overline{f(t)e^{int}}\,dt \\ &= \overline{c_{-n}(f)}. \end{aligned}$$

3. $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} \cdot c_n(f)$

$$c_n(\tau_a f) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \tau_a f(t)e^{-int}\,dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-a)e^{-int}\,dt \\
&= \frac{e^{-ina}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}\,du \\
&= e^{-ina}c_n(f).
\end{aligned}$$

.4 $c_n(e_k\cdot f) = c_{n-k}(f)\cdot e_n$

$$\begin{aligned}
c_n(e_k\cdot f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(t)f(t)e^{int}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{i(k-n)t}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i(n-k)t}\,dt \\
&= c_{n-k}(f).
\end{aligned}$$

■

مبرهنة 2.8.1

ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ تابعاً من الصّف C^1 و 2π-دوري، عندئذٍ

$$\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\quad C_n(f) = \frac{1}{in}C_n(f')$$

البرهان

يكفي إجراء مكاملة بالتجزئة لنجد:

$$\begin{aligned}
C_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt \\
&= \left[\frac{1}{2\pi}f(t)e^{-int}\right]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt \\
&= \frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi} + inC_n(f) \\
&= inC_n(f)
\end{aligned}$$

■

قضية 2.8.1

إذا كان f تابعًا من الصّف C^k و 2π-دوري فإنّ

$$C_n(f) = (\frac{1}{in})^k C_n(f^{(k)}) \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$$

البرهان

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{f(x)e^{-inx}}{-in}\right]_{\alpha}^{\alpha+2\pi} + \frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f'(x)e^{-inx}dx \end{aligned}$$

بما أنّ التّابع f دوري فإنّ

$$\left[f(x)e^{-inx}\right]_{\alpha}^{\alpha+2\pi} = f(\alpha+2\pi) - f(\alpha) = 0$$

ومنه

$$C_n(f) = \frac{1}{in}C_n(f')$$

و بتكرار العملية السابقة k مرة نحصل على

$$C_n(f) = (\frac{1}{in})^k C_n(f^{(k)}) \quad , \quad n \neq 0.$$

■

ترميز 2.8.1

من أجل كلّ $N \in \mathbb{N}$ نرمز بـ $S_N(f)$ للمجموع الجزئي من الرّتبة N المرفق بسلسلة فوريه للتّابع f و المعرّف كما يلي:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) \cdot e_n$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n(f) \cdot cos(nt) + b_n(f) \cdot sin(nt))$$

2.9 تقارب سلسلة فوريه

2.9.1 الأنوية المثلّثيّة

تعريف 2.9.1 نواة ديريكليه

من أجل $N \in \mathbb{N}$، التّابع $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ يُسمّى نواة ديريجليه من الرّتبة N، كما يمكن أن يُكتب من الشّكل

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nt) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, & t \neq 0 \\ 2N + 1, & t = 0 \end{cases}$$

قضية 2.9.1

(1) D_Nتابع زوجي، 2π-دوري ويحقّق:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\, dx = 1.$$

(2) D_N هو الامتداد بالاستمرارية إلى $\mathbb{R}$ للتّابع

$$\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2})x\right)}{\sin(x/2)}.$$

(3) لكل تابع $f \in L^1_{2\pi}$ لدينا

$$S_N(f) = f * D_N.$$

البرهان

- (1) D_N تابع زوجي لأنّ

$$(D_N)_\sigma = \sum_{n=-N}^{N} (e_n)_\sigma = \sum_{n=-N}^{N} e_{-n} = \sum_{n=-N}^{N} e_n = D_N.$$

وهو دوري بدورة 2π لأنّ

$$\begin{aligned} D_N(t+2\pi) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{in(t+2\pi)} \\ &= \sum_{n=-N}^{N} e^{int} \\ &= D_N(t). \end{aligned}$$

علاوة على ذلك

$$c_0(D_N) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt,$$

وبما أنّ $c_0(D_N) = 1$ فإنّنا نحصل على المساواة.

- (2) إذا كان $e^{it} = 1$ فإنّ $D_N(t) = 2N+1$.

إذا كان $e^{it} \neq 1$ فإنّ

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \\ &= \frac{e^{-iNx} - e^{i(N+1)x}}{1-e^{ix}} \\ &= \frac{e^{\frac{ix}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\,\frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})x} - e^{i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{-i(\frac{x}{2})} - e^{i(\frac{x}{2})}} \\ &= \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

نلاحظ أنّ العبارة الأخيرة تؤول إلى $2N+1$ عندما يؤول t إلى 0، وبالتّالي تمتد بالإستمرار عند $t=0$ لأنّ $D_N(0) = 2N+1$، إذاً فهي تمتد الى $t = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ بالدورية.

• (3) لدينا:

$$\begin{aligned} f * D_N &= \sum_{-N}^{N} (f * e_n) \\ &= \sum_{-N}^{N} c_n(f) e_n \\ &= S_N(f) \end{aligned}$$

■

تعريف 2.9.2 نواة فيجر

من أجل $N \in \mathbb{N}^*$، التّابع

$$K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$$

يُسمى نواة فيجر من الرتبة N، حيث D_j هي نواة ديريكليه ذات الدليل j.

تعريف 2.9.3

ليكن $f \in L^1_{2\pi}$، نرمز بـ $\sigma_N(f)$ إلى المجموع الجزئي لسيزارو من الرتبة N المرفق بسلسلة فوريه للتّابع f والمُعرَّف كما يلي:

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k(f),$$

مبرهنة 2.9.1

.1

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad K_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 \end{aligned}$$

.2 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad K_n(x) \geq 0$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1$

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \delta \in]0,\pi[, \forall x \in [-\pi,\pi] \setminus [-\delta,\delta], \quad K_n(x) \leq \frac{1}{n\sin^2(\frac{\delta}{2})}$

5. لكل تابع $f \in L^1_{2\pi}$ لدينا

$$\sigma_N(f) = f * K_N$$

البرهان

1. لنعرّف $\widetilde{K}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e^{ikx}$ عندئذ مهما تكن $1 \leq m$، فلدينا:

$$\begin{aligned}(m+1)\widetilde{K}_{m+1} - m\widetilde{K}_m &= \sum_{k=-m}^{m}(m+1-|k|)e^{ikx} - \sum_{k=-m}^{m}(m-|k|)e^{ikx}\\ &= \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} = D_m\end{aligned}$$

ولكن $\widetilde{K}_1 = D_0 \equiv 1$ إذن:

$$\begin{aligned}n\widetilde{K}_n &= \widetilde{K}_1 + \sum_{m=1}^{n-1}\left((m+1)\widetilde{K}_{m+1} - m\widetilde{K}_m\right)\\ &= D_0 + \sum_{m=1}^{n-1} D_m \qquad = nK_n\end{aligned}$$

وهذا يثبت المساواة الأولى. ومن جهة أخرى نعلم أنه في حالة x ينتمي إلى $\mathbb{R} \setminus 2\pi$ لدينا:

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\cos(nx) - \cos((n+1)x)}{1-\cos x}$$

فإذا استعملنا العلاقات $(n+1)K_{n+1} - nK_n = D_n$ يمكننا أن نكتب أنه مهما يكن n:

$$(n+1)K_{n+1}(x) + \frac{\cos((n+1)x)}{1-\cos(x)} = nK(nx) + \frac{\cos(nx)}{1-\cos(x)}$$

وهذا يتيح لنا أن نثبت بالتدريج أن:

$$nK_n(x) + \frac{\cos nx}{1-\cos x} = K_1(x) + \frac{\cos x}{1-\cos x} = \frac{1}{1-\cos x}$$

وذلك مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$، ومهما يكن x من $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$، ومن ثم نجد من العلاقة السابقة:

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$$

وتبقى هذه العلاقة صحيحة حين ينتمي x إلى $2\pi\mathbb{Z}$ على أن نُمدّد الطراف الأيمن بالاستمرار عند هذه النقاط.

2. إن الخاصية المذكورة واضحة اعتماداً على النتيجة السابقة.

3. إذا كان $k \neq 0$ فإن $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}dx = 0$، نستنتج من المساواة الأولى في 1. أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1$$

4. من الواضح أنّ

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta], \quad \sin^2(\frac{\delta}{2}) \leq \sin^2(\frac{x}{2})$$

وبالاستفادة من المساواة الثانية في 1. نحصل على المتراجحة المطلوبة.

5. لدينا

$$\begin{aligned}
\sigma_N(f) &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(f) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(f * D_N) \\
&= f * K_N
\end{aligned}$$

■

2.9.2 أنواع التّقاربات

التّقارب البسيط

نظرية 2.9.1 اختبار ديني — Test de Dini

ليكن $f \in L^1(\mathbb{T})$ و $t \in \mathbb{T}$. إذا كان

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(t+h)+f(t-h)-2f(t)}{h} \right| dh < +\infty,$$

فإنّ

$$S_n(f)(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

البرهان

ليكن $f \in L^1(\mathbb{T})$ و $t \in \mathbb{T}$ بحيث

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(t+h)+f(t-h)-2f(t)}{h} \right| dh < +\infty.$$

عندئذٍ

$$\begin{aligned}
S_n(f)(t)-f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(t-h)-f(t))D_n(h)\,dh \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t-h)-f(t))D_n(h)\,dh \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left(f(t-h)+f(t+h)-2f(t)\right) D_n(h)\,dh \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (f(t-h)+f(t+h)-2f(t)) \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)h\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} dh \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left(\frac{f(t-h)+f(t+h)-2f(t)}{h} \cdot \frac{h}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{h}{2}\right) \right) \sin(nh)\,dh
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(t-h)+f(t+h)-2f(t))\cos(nh)\,dh.$$

بما أن $f \in L^1(\mathbb{T})$، فإنّه حسب توطئة ريمان-لوبيغ يكون لدينا

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(t-h)+f(t+h)-2f(t))\cos(nh)\,dh \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

لدينا من جهة أخرى أنّ التّابع

$$h \longmapsto \frac{h}{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}$$

معرّف ومستمر على المجال $[0,\pi]$ فإنّه محدود، وحسب فرضية النظرية فإنّ التّابع

$$h \longmapsto \frac{f(t-h)+f(t+h)-2f(t)}{h}$$

قابل للمكاملة على نفس المجال ، ومنه التّابع

$$h \longmapsto \frac{f(t-h)+f(t+h)-2f(t)}{h}\cdot\frac{h}{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}$$

هو أيضًا قابل للمكاملة على المجال $[0,\pi]$.

وعليه باستخدام توطئة ريمان-لوبيغ مجددًا نحصل على

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(t-h)+f(t+h)-2f(t)}{h}\cdot\frac{h}{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}h\right)\right)\cdot\sin(nh)\,dh \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

ومن هذا نستنتج أنّ

$$S_n(f)(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t).$$

■

نظرية 2.9.2 ديريكليه

ليكن $f \in L^1(\mathbb{T})$ و $t \in \mathbb{T}$.

إذا كانت النهايات التالية:

$$f_-(t),\quad f_+(t),\quad f'_-(t),\quad f'_+(t),$$

موجودة، فإنّ

$$S_n(f)(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f_+(t)+f_-(t)}{2}.$$

البرهان

ليكن $f \in L^1(\mathbb{T})$ و $t \in \mathbb{T}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)+f(t-h)-(f_-(t)+f_+(t))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f_+(t)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(t-h)-f_-(t)}{h}$$

$$= f'_+(t) + f'_-(t).$$

إذن التّابع

$$h \longmapsto \frac{f(t+h)+f(t-h)-(f_+(t)+f_-(t))}{h}$$

يقبل نهاية بجوارالصّفراذن هو محدود بالقرب من الصّفر، وعليه فهو تابع قابل للمكامل على $\mathbb{T}$، وحسب اختبار ديني نستنتج أنّ $S_n(f)(t)$ يتقارب نحو $\frac{f_+(t)+f_-(t)}{2}$. ■

التّقارب بمعنى سيزارو

مبرهنة 2.9.2

إذا كان $f \in L^1_{2\pi}$ فإنّ متوسطات سيزارو لمجاميع فورييه تتقارب عند كل نقطة إلى متوسط القيم الجانبية أي

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

البرهان

ليكن $x \in \mathbb{R}$ و $\ell = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. لدينا من المبرهنة (2.9.1)

$$\sigma_n(f)(x) - \ell = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)\cdot\left(f(x+t)+f(x-t)-2\ell\right)\, dt \qquad (1)$$

ومنه

$$\sigma_n(f)(x)-\ell=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(t)\left(f(x+t)-f(x^+)+f(x-t)-f(x^-)\right)dt \qquad (2)$$

مهما يكن δ من $]0,\pi]$ فإنّ

$$|\sigma_n(f)(x)-\ell|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}K_n(t)\Delta_x(t)dt+\frac{4}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}K_n(t)\cdot\|f\|_\infty dt$$

حيث

$$\Delta_x(t)=|f(x+t)-f(x^+)|+|f(x-t)-f(x^-)|$$

وبالاستفادة من المبرهنة (2.9.1) نجد

$$\forall\delta\in]0,\pi],\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |\sigma_n(f)(x)-\ell|\leq\sup_{0<t<\delta}\Delta_x(t)+\frac{2\|f\|_\infty}{n\sin^2(\delta/2)}$$

ليكن $\varepsilon>0$. إذن استناداً إلى تعريف النهاية يوجد $\delta_\varepsilon\in]0,\pi]$ بحيث:

$$0<t<\delta_\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \Delta_x(t)\leq\varepsilon$$

ثم نأخذ $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ بحيث:

$$n\geq n_\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin^2(\delta_\varepsilon/2)}<\frac{\varepsilon}{2}$$

فعندئذ، وبالاعتماد على المعادلة (2) و على ما سبق نستنتج أنّ

$$n\geq n_\varepsilon \quad\Rightarrow\quad |\sigma_n(f)(x)-\ell|<\varepsilon$$

أي أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f)(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

■

التّقارب في المتوسّط التّربيعي

مبرهنة 2.9.3 متراجحة بارسفال

إذا كان $f \in L^2_{2\pi}$ فإنّ
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\, dt$$

البرهان

ليكن $f \in L^2_{2\pi}$ و $n \in \mathbb{N}$، نضع بالتّعريف

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \sum_{k=-n}^{n} C_k(f)\cdot e_k, \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f\rangle \cdot e_k \end{aligned}$$

ونتحقّق بسهولة أنّه

$$\forall p \in [-n,n], \langle f - S_n(f), e_p\rangle = 0.$$

ومنه نستنتج أنّ

$$\langle f - S_n(f), S_n(f)\rangle = 0.$$

ولدينا حسب فيثاغورس

$$\begin{aligned} \|S_n(f)\|_2^2 &\leq \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

لكن:

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \left\|\sum_{k=-n}^{n} C_k(f)\cdot e_k\right\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |C_k(f)|^2.$$

إذن

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

■

مبرهنة 2.9.4 مساواة بيسيل

إذا كان $f \in L^2_{2\pi}$ فإنّ
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

نتيجة

إذا كان $f \in L^2_{2\pi}$ فإنّ المجموع الجزئي $S_n(f)$ لسلسلة فوريه يتقارب إلى التابع f في المعيار التربيعي أي
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}} |f(t) - S_n(f)(t)|^2 dt = 0.$$

البرهان

لدينا من مساواة بيسيل
$$\|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^{n} |C_k(f)|^2.$$

لكن من خواص التكامل والتقارب في L^2، فإنّ الطرف الأيمن يؤول إلى 0 عندما يؤول n إلى $+\infty$، وبالتالي:
$$\|f - S_n(f)\|_2 \to 0,$$

وهذا هو المطلوب. ■

الفصل 3

بعض تطبيقات سلاسل فوريه

3.1 مقدمة

سنعرض في هذا الفصل بعض التّطبيقات لسلاسل فوريه في مجال الرّياضيات

3.2 متباينة ويرتينجر

Wirtinger de L'inégalité

مبرهنة 3.2.1

إذا كانت f دالة من الصنف C^1 على المجال $[a,b]$ حيث $a<b$، وتحقق $f(a)=f(b)=0$، فإن:

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\,dx.$$

علاوة على ذلك، الثابت $\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$ هو الأمثل.

البرهان

لنلاحظ أولًا أنّ تبديل المتغير

$$y=\frac{x-a}{2(b-a)}$$

يحول الدراسة إلى الحالة $a=0$ و $b=\frac{1}{2}$، أي أنه إذا كانت $f(x)=g(y)$ وكانت المتباينة محققة لـ g، فإنها ستكون محققة أيضًا لـ f لأن:

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx = 2(b-a)\int_0^{\frac{1}{2}} |g(y)|^2\,dy \leq \frac{2(b-a)}{4\pi^2}\int_0^{\frac{1}{2}} |g'(y)|^2\,dy$$

$$=\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\,dx.$$

لنعتبر الآن الدالة f على $[0,\frac{1}{2}]$ ونمددها إلى $[-\frac{1}{2},0]$ بحيث نحصل على دالة فردية، دورها 1 ومن الصنف C^1.

بما أن معامل فورييه $b_0(f)$ معدوم، فإن صيغة بارسيفال تعطينا:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f'(x)|^2\,dx &= \sum_{n\neq 0} |c_n(f')|^2\\
&= \sum_{n\neq 0} |2\pi in\, c_n(f)|^2\\
&\geq 4\pi^2 \sum_{n\neq 0} |c_n(f)|^2\\
&:= 4\pi^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2\,dx.
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2\,dx \le \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)|^2\,dx,$$

ومن هنا نحصل على المتباينة المطلوبة.

لإثبات أن الثابت $\frac{1}{4\pi^2}$ هو الأمثل، يكفي أن نأخذ الدالة f_0 المعرفة على $[0, \frac{1}{2}]$ بالصورة:

$$f_0(x) = 2i\sin(2\pi x).$$

هذه الدالة تحقق جميع الشروط المطلوبة، وحساب بسيط يبين أن لدينا المساواة:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f_0(x)|^2\,dx = 4\pi^2\int_0^{\frac{1}{2}} |f_0(x)|^2\,dx.$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن الثابت المذكور هو الأمثل. ■

3.2.1 قضية

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ دالة 2π-دورية من الصنف C^1 وذات متوسط منعدم، أي تحقق:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0.$$

إذن:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx \le \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx.$$

علاوةً على ذلك، تتحقق المساواة إذا وفقط إذا كان:

$$f(x) = ae^{ix} + be^{-ix}, \quad \text{حيث } a, b \in \mathbb{C}.$$

برهان

بما أن معامل فورييه $c_0(f)$ يساوي صفراً، فإن:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0.$$

من جهة أخرى، **تعطي صيغة بارسيفال (Parseval)**:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^2|c_n(f)|^2.$$

لكن لدينا أيضًا:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx.$$

وبذلك نحصل على النتيجة المطلوبة.

يوجد تساوٍ إذا وفقط إذا كانت المتباينة الوحيدة في الصيغة أعلاه مساواة، أي إذا وفقط إذا تحقق:

$$|c_n(f)|^2 = n^2|c_n(f)|^2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*,$$

مما يعادل:

$$c_n(f) = 0, \quad \forall n \text{ بحيث } |n| \geq 2.$$

بما أن f تنتمي إلى الفئة C^1، فإنها تتطابق في كل نقطة مع سلسلتها الفوريرية.

وباختصار، يتحقق التساوي إذا وفقط إذا كانت f معرفة كما يلي:

$$f(x) = ae^{ix} + be^{-ix},$$

حيث a وb ثوابت عقدية عشوائية. ■

3.3 حل معادلة تفاضلية عادية

تعتمد الطريقة العامة على البحث عن حل خاص على شكل سلسلة مثلثية، ثم استخدام هذا الحل لتحديد الحل الكامل للمعادلة التفاضلية. سنوضح هذه الخطوات على المعادلة التفاضلية التالية، حيث المتغير المجهول هو $x \mapsto y(x)$

$$y^{(4)} + 5y'' + 4 = |\sin 2x|. \tag{3.1}$$

المعادلة المتجانسة المرتبطة بها:

$$y^{(4)} + 5y^{(2)} + 4 = 0. \tag{3.2}$$

لها معادلة مميزة على الشكل $r^4+5r^2+4=0$، حيث جذورها هي $\pm i$ و $\pm 2i$. وبالتالي، فإن الحل العام الحقيقي للمعادلة (5.1) يكتب على النحو التالي:

$$y_1(x)=A\cos x+B\sin x+C\cos 2x+D\sin 2x,\qquad A,B,C,D\in\mathbb{R}.$$

نبحث الآن عن حل للمعادلة (5.1) على شكل سلسلة مثلثية يكون مجموعها من الدرجة C^4.

التابع $x\mapsto|\sin 2x|$ مستمر وقابل للاشتقاق من الدرجة الأولى C^1 بتقطع، ودوري بدورة 2π كما أنه زوجية. وبالتالي سلسلة فورييه المتعلقة به هي

$$|\sin 2x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$$

حيث:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin 2u|\cos nu\,du$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2u\cos nu+\sin 2u\cos n(\pi-u)\,du$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2u\cos nu\,du.$$

لكل $p\in\mathbb{N}$، لدينا:

$$a_{2p+1}=0.$$

و

$$a_{2p}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2(p+1)u-\sin 2(p-1)u\,du.$$

نستنتج أن $a_2=0$ وأنه لكل $p\geq 2$:

$$a_{2p}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos 2(p+1)u}{2(p+1)}+\frac{\cos 2(p-1)u}{2(p-1)}\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(2(p+1)\pi-1)}{2(p+1)}+\frac{\cos(2(p-1)\pi-1)}{2(p-1)}\right).$$

لكل عدد فردي p، لدينا $a_{2p} = 0$، وبالتالي تبقى فقط الحدود ذات المؤشرات المضاعفة لـ 4:

$$a_{4k} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}.$$

وأخيرًا، نحصل على:

$$|\sin 2x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 4nx}{4n^2-1}.$$

بما أن المعادلة (5.1) تحتوي فقط على مشتقات من رتب زوجية، نبحث عن حل خاص على الشكل:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n \cos 4nx. \tag{3.3}$$

نفترض، في البداية، أنه يمكن اشتقاق السلسلة (5.3) أربع مرات حدًا بحد، فنحصل على:

$$f^{(4)}(x) + 5f''(x) + 4 = 4\alpha_n(64n^4 - 20n^2 + 1)\cos 4nx.$$

بما أن المقدار $64n^4 - 20n^2 + 1$ لا ينعدم، نحصل بالتعريف على:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad \text{و} \quad \alpha_n = -\frac{1}{\pi(4n^2-1)(64n^4-20n^2+1)}, \quad (n \geq 1).$$

نلاحظ، بعد ذلك، أن السلسلة تتقارب بشكل طبيعي، وكذلك جميع مشتقاتها حتى الرتبة الرابعة. إذن، الحل العام للمعادلة (5.1) هو:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 4nx}{(4n^2-1)(64n^4-20n^2+1)}.$$

3.4 حل معادلة الحرارة

نستخدم سلاسل فورييه لحل معادلة تفاضلية جزئية تُعد من الأساسيات في أعمال فورييه، وهي **معادلة الحرارة** في $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{(E)}$$

حيث أن الدالة $u = u(t, x)$ تمثل درجة الحرارة عند الزمن t وعند النقطة ذات الإحداثي x من قضيب مستقيم طوله ℓ، ومعزول عند طرفيه. نهدف إلى دراسة المعادلة (E) مع شرط ابتدائي:

$$u(0, x) = f(x), \quad 0 < x < \ell, \qquad (3.4)$$

حيث أن f هو التوزيع الابتدائي لدرجة الحرارة على طول القضيب؛ ومع شرط على الحواف:

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, \ell) = 0, \quad t > 0. \qquad (3.5)$$

نبدأ بالبحث عن حلول للمعادلة (E) باستخدام طريقة **فصل المتغيرات**، والتي تقوم على البحث عن حلول من الشكل:

$$u(t, x) = \varphi(x)\, \psi(t),$$

حيث أن $\varphi(x) \neq 0$ لكل $x \in]0, \ell[$، و $\psi(t) \neq 0$ لكل $t \in]0, +\infty[$.

لكي يكون $u = \varphi\psi$ حلًا للمعادلة (E)، يجب أن يتحقق:

$$\varphi(x)\, \psi'(t) = \varphi''(x)\, \psi(t),$$

أي أن:

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda$$

حيث أن λ هو ثابت حقيقي. عند تثبيت λ، نلاحظ أن φ و ψ يجب أن يحققا:

$$\psi'(t) + \lambda\psi(t) = 0 \quad \text{و} \quad \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0.$$

المعادلة الخاصة بـ ψ تعطي (مع c ثابت):

$$\psi(t) = c\exp(-\lambda t).$$

نقوم بحل المعادلة الخاصة بـ φ تحت شرط الحدود 3.5:

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0, \quad 0 < x < \ell \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\ell) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

نُظهر أولاً أن 3.6 تمتلك حلاً غير تافه φ (أي غير مساوي للصفر على $[0,\ell]$) إذا وفقط إذا كانت λ من الشكل $(\frac{n\pi}{\ell})^2$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$. في الواقع، نلاحظ أولاً أن λ موجب تماماً، لأنه إذا لم يكن كذلك، فإن، من أجل ثوابت حقيقية A, B، نحصل على

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ax + B & \text{for } \lambda = 0 \\ A\exp(-x\sqrt{-\lambda}) + B\exp(x\sqrt{-\lambda}) & \text{for } \lambda < 0, \end{cases}$$

ولكي يكون $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$، يجب أن يكون $A = B = 0$، وهذا واضح في حالة $\lambda = 0$؛ أما بالنسبة لـ $\lambda < 0$، فإننا نرى ذلك من خلال دراسة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} 0 = \varphi(0) = A + B \\ 0 = \varphi(\ell) = A\exp(-\ell\sqrt{-\lambda}) + B\exp(\ell\sqrt{-\lambda}). \end{cases}$$

لكي يكون لهذا النظام الخطي من المعادلات في A و B حلاً غير تافه، يجب ويكفي أن يكون محدده مساوياً للصفر، وهذا يتطلب أن يكون:

$$\exp(\ell\sqrt{-\lambda}) = \exp(-\ell\sqrt{-\lambda});$$

وهو أمر غير ممكن لأن $\ell > 0$، و$\lambda < 0$، والدالة الأسية دالة متباينة (injective) في $\mathbb{R}$. إذا كانت $\lambda > 0$ وكانت φ تحقق 3.6، فإنه

$$\varphi(x) = Acos(x\sqrt{\lambda}) + Bsin(x\sqrt{\lambda})$$

حيث يتم تحديد A و B من خلال:

$$0 = \varphi(0) = A \quad \text{و} \quad 0 = \varphi(\ell) = B\sin(\ell\sqrt{\lambda}).$$

وبما أن $B \neq 0$ لكي لا تكون φ تافهة، يجب أن يكون:

$$\sin(\ell\sqrt{\lambda}) = 0,$$

مما يعطي $\ell\sqrt{\lambda} = n\pi$، أي:

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, n \in \mathbb{N}^*.$$

نحصل بالتالي على متتالية من الحلول للمعادلة (E):

$$u_n(t,x) = \exp(-\lambda_n t)\sin(\sqrt{\lambda_n}x), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

حيث $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$. وبما أن u_n تحقق المعادلتين (E) و 3.6، وهاتين المعادلتين خطيتان، فإنه يمكننا الحصول على حلول أخرى لـ (E) و 3.6 باستخدام "مبدأ التراكب" principe de superposition أي بأخذ:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp(-\lambda_n t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \tag{3.7}$$

حيث (a_n) هي متتالية من الثّوابت "العشوائيّة". في الواقع، يتم تحديد الثوابت a_n بفرض أن u المعرفة في 3.7تحقق الشرط الابتدائي 3.4:

$$u(0,x) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad 0 < x < \ell.$$

تعبر هذه المساواة عن أن a_n يجب أن تكون معاملات فورييه لدالة فردية تساوي f على $[0,\ell]$، أي:

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.8}$$

وهكذا، نرى أن u المعطاة بالمعادلتين 3.7و3.8هي مرشح محتمل لتكون حلاً للمعادلة (E) وتحقق3.4و3.5. سنقوم الآن بالتحقق من أن التعبير 3.7 هو حل كلاسيكي للمعادلة (E) على $[0,+\infty[\times[0,\ell]$ ويحقق 3.4 و3.5، أي أن:

- u من الصنف C^2 على $]0,+\infty[\times]0,\ell[$ وتحقق (E) في كل نقطة (t,x) من هذا المجال المفتوح،
- u مستمرة على $[0,+\infty[\times[0,\ell]$،
- u تحقق 3.4 و3.5.

من الواضح أنه لكي توجد مثل هذه الحلول u، فمن الضروري أن تكون f في 3.4على الأقل دالة مستمرة على $[0,\ell]$ بحيث $f(0)=f(\ell)=0$. في الواقع، سنُبيّن الآن، بشكل أدق، أنه إذا كانت $f:[0,\ell]\to\mathbb{R}$ دالة من الصنف C^1 بحيث $f(0)=f(\ell)=0$، فإن u المعرفة بواسطة 3.6و3.7 هي حل كلاسيكي للمعادلة (E) تحقق 3.4 و3.5.

في الواقع، لهذه الدالة، يعطي المبرهن 6.14:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),\quad 0\leq x\leq\ell,$$

حيث $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|<+\infty$، والمعاملات a_n معطاة بواسطة 3.7. وهذا يؤدي مباشرة إلى أن u المعطاة بواسطة 3.6 مستمرة على $[0,+\infty[\times[0,\ell]$ كسلسلة متقاربة بانتظام لدوال مستمرة. علاوة على ذلك، من أجل $t<0$ و $0<x<\ell$، لدينا بشكل صوري:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-\lambda_n)a_n\exp(-\lambda_n t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\tag{3.9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2a_n\exp(-\lambda_n t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).\tag{3.10}$$

في الواقع، يمكن اشتقاق السلسلة 3.6 حدًا بحد بقدر ما نشاء بالنسبة إلى t و x عندما $t>0$، في الواقع، إن وجود العوامل $\exp(-\lambda_n t)$ يجعل السلسلتين 3.9 و 3.10 متقاربتين بشكل منتظم من أجل $t\geq t_0>0$، و $0\leq x\leq\ell$، لكل اختيار لـ t_0، مع الأخذ في الاعتبار أن (a_n) محدودة. وهكذا نثبت أن u من الصنف C^2 على $]0,+\infty[\times]0,\ell[$ وأن التعابير الصريحة 3.9 و 3.10 تسمح بالتحقق مباشرة من أن المعادلة (E) محققة. وبالتالي فإن u المعطاة بواسطة 3.6 هي بالفعل حل كلاسيكي للمعادلة (E).

ملاحظة 3.4.1

بنفس الفرضيات على f، يمكن إثبات أن الحل u الذي حصلنا عليه أعلاه هو في الواقع الحل الوحيد للمعادلة (E) الذي يحقق 3.4 و 3.5.

خاتمة

قد مكنت هذه الدراسة من التعمق في أدوات تحليل فورييه من منظور نظري وتطبيقي، حيث لعبت سلاسل فورييه دورًا محوريًا في تمثيل الدوال الدورية وتحليل سلوكها وتقاربها في فضاءات مختلفة مثل $L^1_{2\pi}$ و $L^2_{2\pi}$، كما أظهرت التطبيقات المدروسة خصوصًا في حل المعادلات التفاضليّة القيمة العمليّة لهذه السّلاسل في النّمذجة والتّحليل الرّياضي. ورغم الجهد المبذول، فإنّني أُقِرّ بأن هذا العمل لا يخلو من النّقص أو القصور، فربما لم أوفَّق في بعض جوانب الدراسة، وأسأل الله أن يجعل فيه نفعًا. فإن وفّقت في عرض بعض الأفكار فذلك من فضل الله وتوفيقه، وإن أخطأت أو قصّرت فذلك من نفسي ومن الشيطان، والله المستعان.

قائمة المراجع

[1] ع. قوبا، منشورات جامعة دمشق، التحليل الحقيقي ، (**2004**).

[2] ع. قوبا، منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، التحليل الجزء الخامس،(**2018**).

[3] س. الأمين، م. سليمان، الدوال الخاصة، مركز العلوم والتقنية للبحوث والدراسات (**2021**).

[4] L. Debnath and D. Bhatta. *Fourier Series Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics*, Birkhäuser, (**2017**).

[5] M. El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, Ellipses Marketing, (**2008**).

[6] X. Gourdon, *Les maths en tête: analyse*, 1-456, (**2020**).

[7] C. Servien, *Analyse 4: Séries de Fourier*, (**2021**).

[8] S. Richard , *Laugesen Harmonic analyse lecture notes*, Univercité de Illinois, (**2009**).

الملخص

في هذه المذكرة تطرقت إلى دراسة سلاسل فورييه للتوابع القابلة للمكاملة بمفهوم لوبيغ وبعض تطبيقاتها من خلال تعريف دقيق لسلاسل فورييه ومعاملاتها بصيغتها الأسية والمثلثية، بالإضافة إلى التعرف على بعض نظريات التقارب لهذه السلاسل واستخدام هذه النتائج في حل معادلة الحرارة، معادلة ويرتنجر وبعض التطبيقات الأخرى.

الكلمات المفتاحية: توابع دورية، فضاء التوابع القابلة للمكاملة بمفهوم لوبيغ، سلاسل مثلثية، نواة فيجر،نواة ديريكليه، متراجحة بيسيل،مساواة بارسفال.