

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي سكيكدة
Ecole normale supérieure d'Enseignement Technologique de Skikda



Département de Mathématiques

قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ تعليم ثانوي-رياضيات-
تحت عنوان

التعديل بطريقة شبه القلب

من إعداد :

الأستاذ المشرف :
◀ مزياني محمد سيف الدين

◀ بوعفار إيمان

◀ يوسف ملاك

◀ حميدة رحمة إيناس

لجنة المناقشة

أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة ▶ رئيسا

◀ رمضان سميرة

أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة ▶ مناقشا

◀ بكاف أسماء

أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة ▶ مناقشا

◀ خشمان حسام الدين

المخلص

تحوّرت دراستنا في هذه المذكرة حول موضوع من أبرز المواضيع التي تتميز بالحدائثة و الذي حفّز العديد من الباحثين الرياضياتيين و حتى الطلبة للبحث و الخوض فيه، المعنون بـ: "التعديل بطريقة شبه القلب"، وهذا التعديل يهدف إلى إيجاد طرق مستقرة لحساب حلول تقريبية في الإشكاليات العكسية معتلة الطرح الممنذجة بمعادلات تفاضلية بمشتقات جزئية والتي لها تطبيقات في مختلف مجالات العلوم، هاته الطريقة هي الأنجع من أجل ضمان الإستقرار و التقارب. ولفهم أكثر هذه الطريقة، قننا بالتذكير ببعض المفاهيم و المبادئ الأساسية، إنطلاقاً من الفضاءات مروراً بالمؤثرات الخطية، وصولاً إلى تعريف الإشكاليات المباشرة و العكسية و بعض الأمثلة عليها. ثم تطرقنا إلى نظرة عامة عن بعض التعديلات السابقة وصولاً إلى لب موضوعنا.

©بوعفار ايمان، يوسفى ملاك، حميدة رحمة إيناس.
شهادة تعليم أستاذ ثانوي رياضيات: التعديل بطريقة شبه القلب

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي سكيكدة
ENSET-Skikda
قسم الرياضيات والإعلام الآلي



شكر وتقدير

مصداقا لقوله تعالى:

" لئن شكرتم لأزيدنكم "

سورة إبراهيم الآية 07.

نحمد الله عز وجل الذي وفقنا إلى اتمام هذا العمل المتواضع

بداية نتوجه بالشكر الجزيل للأستاذ المشرف "**مزياني محمد سيف الدين**" الذي كان خير موجه لاستكمال البحث وكان له دور عظيم من خلال تعليماته ونقده البناء ودعمه الأكاديمي والمعنوي فله منا جزيل الشكر والتقدير.

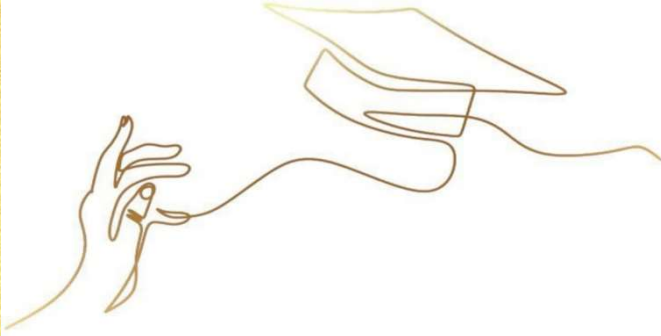
كما نتقدم بخالص الشكر والامتنان الى أعضاء لجنة المناقشة المكونة من الأستاذة "**رمضان سميرة**" رئيسا والأستاذين المناقشين "**كناف أسماء**"، "**خشمان حسام الدين**" لتفضلهم مناقشة هاته المذكرة.

نوجه شكرنا الى كل طاقم المدرسة العليا للأستاذة بسكيكدة وبالأخص مدير المدرسة ورئيس قسم الرياضيات الأستاذ "**فراق عزوز**" الذين ساهموا في تكويننا طيلة الخمس سنوات.

نقدم شكر خاص الى أستاذة التعليم الثانوي "**ضيف الله لويزة**" التي لم تبخل علينا بشيء وتشجيعها الدائم لنا.

كل الحب والتقدير والعرفان لكل من علما حرفا طيلة مسيرتنا الدراسية شكرا جزيلاً لكم.

كما نتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير عرفانا لكل من ساهموا من قريب أو بعيد في إثراء هذا العمل ولو بكلمات التشجيع.



الإهداء

عظم المراد فهان الطريق فجاءت لذة الوصول..... لتمحي مشقة السنين.
الحمد لله الذي هياً البدء ويسر الطريق وطيب المنتهى. ما كنت لأفعل هذا لولا فضل الله
وكرمه، فالحمد لله شكرا وامتنانا.
بكل حب أهدي تخرجي وثمره جهدي
الى من أحمل اسمه بكل افتخار الى جداري المتين من علمني أن أرتقي سلم الحياة بحكمة وصبر
"أبي" (حفظه الله).
الى من أخص الله الجنة تحت قدميها الى نبراس أيامي ووهج حياتي الى الداعمة الأولى لي التي
ظلت دعواتها تضم اسمي دائما غاليتي "أمي" (أطال الله في عمرها).
الى جسر المحبة والعطاء مصدر قوتي وسنداي في الحياة أختاي "شيماء وأسماء" (جعلني
واياكن من الباريات).
الى رفيقة الروح وصديقة الأيام بحلوها ومرها "هاجر" (دمت لي شيئا جميلا لا ينتهي).
الى كل الذين أمدونا بالحب..... واستوطنوا القلب.
"هديل، ملاك، مايسة، بلقيس، ريان، اميرة، ايناس، خولة، رميساء"

بومغار ايمان



الإهداء

عظم المراد فهان الطريق...

فجاءت لذة الوصول... لتمحي مشقة الطريق...

الحمد لله الذي ما تيقنت به خيرا وأملا إلا أغرقني سرورا.

إلى من جعل الله الجنة تحت أقدامها، وسهلت لي الشدائد بدعائها، إلى الإنسانية

العظيمة التي لطالما تمننت أن تقر عينها لرؤيتي في يوم كهذا "أمي الغالية".

إلى مصدر قوتي وملاذي بعد الله، إلى من علمني أن الدنيا صراع وسلاحها العلم

والمعرفة، طاب بك العمر يا سيد الرجال وطبت لي عمرا يا أبي الغالي.

إلى من شد الله بهم عضدي فكاننا خير معين أختاي "مروى وإسراء".

إلى جدي وجدتي الغاليان أطال الله عمرهما.

إلى صديقتي قلبي "سندس، أميرة".

إلى من كنت معهما يدا بيد لتقديم الأفضل "إيمان، رحمة إيناس".

إلى كل هؤلاء أهدي ثمرة تعبي وفرحتي هذه.

يوسف ي ملك

الإهداء



فَمَا خُتِمَ جَهْدٌ وَلَا تَمَّ سَعْيٌ إِلَّا بِفَضْلِ اللَّهِ.

الْحَمْدُ لِلَّهِ حَبًّا وَشُكْرًا وَامْتِنَانًا عَلَى الْبَدءِ وَالْخِتَامِ.

قال الله تعالى: " وَقَضَىٰ رَبُّكَ أَلَّا تَعْبُدُوا إِلَّا إِيَّاهُ وَبِالْوَالِدَيْنِ إِحْسَانًا".

إلى حبيبتي وإن طال الزمان، رفيقتي في الحزن والضحكات وان نسي الجميع ملامحي كانت تناجي الله في الصلوات، زرعت فيّ طموحا دفعني نحو الامام، إلى حب فطري مخزون بين طيات ألف وميم... **جنة قلبي أمي**.
إلى من أحمل اسمه بكل فخر واعتزاز، إلى ذلك الذي أطلب منه نجمتين فيعود حاملا السماء، معطفي أمانى بعد ليالي العمر الباردة... **أبي الغالي**.

قال الله تعالى: " قَالَ سَتَشُدُّ عَضُدَكَ بِأَخِيكَ وَنَجْعَلُ لَكُمَا سُلْطَانًا ".

إلى الذي أكتسبُ من اسمه نصيب، ملازم طفولتي، سكين الروح... **أخي أنيس**.
إلى شقيقة الروح أسندك برمش العين ان استطعت، أمني ومأمني... **أختي سندس**.
إلى روحا صغيرة أهدتني طوقا من الفرح بعطفها، إلى الأقرب للقلب والعقل... **صغيري رسيم**.
فاللهم إنى استودعك إياهم فأدمهم، ولا تحرمني منهم، واحفظهم وارزقهم الابتسامة الدائمة التي لا تغيب.
وإن الروحُ إذ التقت بمن يُشَبِّهها تَرَمَّتْ، تعافت، واكتملت إلى **سندي سليم**.
إلى من جاورت جمال روحها، أصابتني عدوتها، بحنية قلبها... **منال**.
إلى أنيسات القلب، والسلام على من جاور القلب فأحسن الجيرة... **إخلاص وملاك**.
إلى روحٍ غاليةٍ فارقتنا، ولايزال ذكرها في قلوبنا، دُمت بنعيم ربي حتى نلتقي... **زُفيدة**.
إلى الصديقات التي جمعني بهم الأقدار، وربطني بهم عطر المحبة... **أحلام، أميمة، إلهام، أنفال، شيماء، سلوى، شروق**.
إلى من كنت معهما يدا بيد لتقديم الأفضل "**ملاك، ايمان**".

حميدة رحمة إيناس



المحتويات

1	مبادئ و معارف تمهيدية	1
1	1.1 الفضاءات النظيمية	1
2	2.1 الفضاءات الهيلبرتية	2
5	3.1 المؤثرات الخطية	5
10	4.1 المعكوس المعمم لـ Moore Penrose	10
17	5.1 التفكيك إلى قيم منفردة	17
18	6.1 الحساب الكسري	18
22	2 الإشكاليات المعتلة والعكسية	22
22	1.2 الإشكاليات المطروحة جيداً بمفهوم هدامارد	22
23	2.2 الإشكالية المعتلة	23
25	3.2 الإشكاليات المباشرة والعكسية	25
30	4.2 تعديل الإشكاليات الخطية المعتلة	30
38	5.2 معامل التعديل	38
45	6.2 تحليل تقارب طرق التعديل ودوال المصفاة	45
49	3 طريقة التعديل بشبه القلب	49
51	1.3 طريقة شبه القلب نظرة تجريدية	51
53	2.3 آلية تطبيق طريقة شبه القلب	53
54	3.3 وصف IHCP ثنائي البعد	54
56	4.3 طريقة شبه القلب وتقدير الخطأ	56
62	5.3 مبدأ التباين وتقدير الخطأ اللاحق	62

مقدمة

الأهداف والمحفزات

عند معالجة الإشكاليات المنمذجة للواقع والتعامل مع المعادلات الناتجة عنها، يظهر الطابع المعتل لهاته الإشكاليات في كثير من الحالات مما يلزمنا إلى اللجوء إلى طرق رياضية تسمى بطرق التسوية (التلطيف، التنظيم، التعديل). وهاته الطرق في مجملها تتعامل مع الإشكاليات غير المستقرة، وتسمح لنا بحساب حل تقريبي بطريقة مستقرة لهذا النوع من الإشكاليات، وبما أن أكثر النماذج المعطاة للإشكالية الواقعية تكون على شكل معادلات تفاضلية بمشتقات جزئية.

طور الباحثون في الرياضيات بعض طرق التعديل الخاصة لهذا النوع من الإشكاليات، وأنجع طريقتين من بين هذه الطرق هما: طريقة شبه القلب وطريقة شبه الحافة. تعتمد الطريقة الأولى على ذبذبة المؤثر بمعامل تعديل ما، مما يجعل المعكوس المعمم في المعادلة محدود، كما يضمن التقارب في الحالة التي يؤول فيها المعامل إلى الصفر، بينما طريقة شبه الحافة تعتمد على ذبذبة الشروط الحدية لتصبح شروط غير موضعية وطرات الكثير من التطورات على الطريقتين، وأنتجت الكثير من النسخ من أجل تحسين الحساب المستقر للحلول.

في مذكرتنا هذه اهتمنا بطريقة شبه القلب المقترحة من قبل العالمين الفرنسيين: **Lions & Lattes** سنة **1967م**، والتي عدل فيها المؤثر \mathcal{T} في المعادلة بالقيم النهائية التالية:

$$u'(t) + \mathcal{T}u(t) = 0, \quad 0 < t < T, u(T) = g.$$

على الشكل:

$$\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T} - \alpha \mathcal{T}^2.$$

ليتم بعدها طرح تعديل من قبل **H.Gajewski & K.Zaccharias** سنة **1972م** حيث وضع:

$$\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}(I + \alpha \mathcal{T})^{-1}.$$

واستمرت التعديلات وتطوير الطريقة ونذكر منها:

• I.V. Mlenikova (1975):

$$\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T} - \alpha \mathcal{T} \mathcal{T}^*.$$

• A.V.Glushak (2001):

$$\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T} + (-1)^{m+1} \alpha \mathcal{T}^m, m \geq 2.$$

• Y.Huang & Q.Zheng (2004):

$$\mathcal{T}_\alpha = (\mathcal{T} - \alpha \mathcal{T}^P), P > 1.$$

• N.Boussetila & F.Rebbani (2006):

$$\mathcal{T}_\alpha = \frac{1}{Pt} \ln(\alpha + e^{-Pt\mathcal{T}}), P \geq 1.$$

كل هذا الخبر الذي أسيل من قبل الباحثين في ميدان الإشكاليات العكسية والمعتلة لم يكن هباءاً، لأن الواقع الصناعي تبني هاته الطرق بقوة، كل هذا كان حافزاً لنا لمحاولة دراسة هذا الموضوع، وانجاز مذكرة تتمحور حوله من أجل تقديم ولو جزء بسيط يمكن القارئ لهاته المذكرة من فهم أساسيات التعديل بشبه القلب.

محتوى المذكرة:

تتكون مذكرتنا هاته من ثلاث فصول والمعطاة بالشكل التالي:

الفصل الأول: والمعنون بـ: "مبادئ ومعارف تمهيدية"

وفي هذا الفصل حاولنا تذكير القارئ بالمفاهيم التمهيدية والتعاريف الرياضية التي تمكنه من فهم وبناء الفصول القادمة، ألا وهي: الفضاءات النظيمية، الفضاءات الهلبرتية والمؤثرات الخطية بالإضافة إلى مفهوم المعكوس المعمم مع ذكر بعض خواص أطيف المؤثرات المتراسة، وكذلك التفكيك إلى القيم المنفردة والحساب الكسري.

الفصل الثاني: والمعنون بـ: "الإشكاليات معتلة الطرح والعكسية"

والذي تطرقنا فيه إلى الإشكاليات المطروحة جيداً بمفهوم **Hadamard**، الإشكاليات المعتلة مع إعطاء أمثلة عنها ثم تطرقنا إلى مفهوم الإشكاليات المباشرة والعكسية، بالإضافة إلى نظرية بيكاردي التي تضمن وجود الحل ووحدانيته للإشكاليات المعتلة، ثم قمنا بتقديم مفهوم تعديل الإشكاليات المعتلة مع شرح مفهوم طرق التعديل ومؤثر التعديل.

الفصل الثالث: والمعنون بـ: "التعديل بشبه القلب"

قمنا في هذا الفصل بشرح الجانب النظري لطريقة شبه القلب، مع إعطاء مثال تطبيقي لهذه الطريقة حيث كان المثال حول إشكالية إنتشار الحرارة من نمذجة بمعادلة تفاضلية بمشتقة كسرية.

مبادئ و معارف تمهيدية

في هذا الفصل تطرقنا الى أهم التعاريف، المبرهنات و المفاهيم الأولية التي تخص موضوع البحث لتسهيل الفهم على قارئ هاته المذكرة. ولتوضيح ذلك استعنا بالمراجع [8]، [10]، [11]، [15]، [18]، [24]، [25]، [31]. يمكنكم الاطلاع عليها.

1.1 الفضاءات النظيمية

تعريف 1.1.1 (النظيم)

ليكن X فضاء شعاعي مزود بالحقل \mathbb{K} ، نسمي النظيم كل تطبيق $N : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ يحقق الخواص التالية:

$$\forall x \in X; \quad N(x) = 0 \iff x = 0 \quad (1)$$

$$\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}; \quad N(\lambda x) = |\lambda|N(x) \quad (2)$$

$$\forall x, y \in X; \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad (3)$$

من أجل كل $x \in X$ العدد الحقيقي الموجب $N(x)$ يسمى نظيم x ورمز له بالرمز $\|x\|_X$ -الثنائية $(X, \|\cdot\|)$ تسمى فضاء شعاعي نظيمي .

مثال 1.1.1

1

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \rightarrow |x|.$$

تعرف نظيم على \mathbb{R} أي $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ فضاء نظيمي .

2 في الفضاء الشعاعي \mathbb{R}^n نعرف النظم التالية:

• النظم الاقليدي :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

• النظم الجمعي :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

حيث $x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, N}$

• هذه النظم هي حالات خاصة من $\|\cdot\|_p$

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

3 \hookrightarrow النظم الأعظمي :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max |x_1|, \dots, |x_n|.$$

ملاحظة 1.1.1 \hookrightarrow يوضح المثال السابق أنه يمكن تزويد أي فضاء شعاعي بأكثر من نظم.

\hookrightarrow تكافؤ النظم:

ليكن \mathcal{X} فضاء شعاعي مرفق بالنظمتين N_1 و N_2 نقول أنهما نظمتين متكافئتين إذا و فقط إذا وجد $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ مع $\alpha \leq \beta$ ويحقق:

$$\forall x \in \mathcal{X} : \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

فضاء بناخ:

تعريف 2.1.1 ليكن \mathcal{X} فضاء شعاعي مزود بالحقول \mathbb{K} ، نقول عن \mathcal{X} أنه فضاء بناخ إذا و فقط إذا كان فضاء نظمي تام ¹.

2.1 الفضاءات الهيلبرتية

تعريف 1.2.1 (الجداء السلبي)

ليكن \mathcal{X} فضاء شعاعي المزود بالحقول \mathbb{K} ، نعرف الجداء السلبي على \mathcal{X} بأنه التطبيق :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle.$$

و الذي يحقق الخواص التالية:

¹ أي كل متتالية كوشية منه متقاربة فيه

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$ و $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ لدينا

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in \mathcal{X}; \langle x, x \rangle \geq 0 \quad (1)$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad (2)$$

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad (3)$$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad (4)$$

تعريف 2.2.1 (الفضاء شبه هيلبرتي)

إذا كان \mathcal{X} فضاء شعاعي مزود بالجداء السلمي، نقول أنه فضاء شبه هيلبرتي، و نرمز له بالثنائية $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

تعريف 3.2.1 (فضاء هيلبرت)

فضاء هيلبرت هو كل فضاء شبه هيلبرتي تام، يرمز له عادة بالرمز \mathcal{H} .

نظرية 1.2.1 ليكن \mathcal{X} فضاء شبه هيلبرتي حيث $\|\cdot\| : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$

نضع $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \forall x \in \mathcal{X}$ هو تنظيم يحقق الخواص التالية:

مراجعة كوشي شوارتز:


$$\forall x, y \in \mathcal{H}; \quad |\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{H}}} \times \sqrt{\langle y, y \rangle_{\mathcal{H}}} = \|x\| \times \|y\|.$$


صيغة ذات الحدين:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y).$$

متطابقة متوازي الأضلاع: لدينا $\forall x, y \in \mathcal{H}$ فإن:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

تسمح هذه المتطابقة بتمييز الفضاءات شبه هيلبرتي عن الفضاءات التنظيمية. 

نتيجة 1.2.1 

كل فضاء تنظيمي يحقق تنظيمه متطابقة متوازي الأضلاع هو فضاء شبه هيلبرتي.

تعريف 4.2.1 (التعامد)

• نقول عن x و y من الفضاء الشبه هيلبرتي \mathcal{H} مع $x \neq 0$ و $y \neq 0$ أنهما متعامدان اذا تحقق:
 $\langle x, y \rangle = 0$ ونكتب $x \perp y$.

• لتكن المجموعتين الغير خاليتين A و B من \mathcal{H} نقول أنهما متعامدتان إذا تحقق:

$$\forall x \in A, \forall y \in B \implies x \perp y.$$

ونكتب $A \perp B$.

نرمز لمجموعة العناصر العمودية على المجموعة A ب A^\perp .

نظرية 2.2.1 (الإسقاط على محدد مغلق)

لتكن A مجموعة محدبة² مغلقة جزئية (غير خالية) من \mathcal{H} ، من أجل كل $x \in \mathcal{H}$ يوجد $y \in A$ وحيد يحقق:

$$\inf_{a \in A} \|x - a\| = \|x - y\|.$$

أي $\exists! y \in A$ يحقق المسافة بين x و y أصغرية، هذه النقطة تسمى مسقط x على A .

نتيجة 2.2.1

• ليكن $x \in \mathcal{H}$ ، $y \in \mathcal{F}$ حيث:

$$\|x - y\| = \inf_{z \in \mathcal{F}} \|x - z\|.$$

• و منه $x - y$ عمودية في \mathcal{F} (بمعنى عمودية على جميع الأشعة $z \in \mathcal{F}$).

• من جهة أخرى إذا كان $y \in \mathcal{F}$ و $x - y \perp \mathcal{F}$ فإن

$$\|x - y\| = \inf_{z \in \mathcal{F}} \|x - z\|.$$

بمعنى y هو مسقط x في \mathcal{F} .

تعريف 5.2.1 (و ترميز) في الحالة السابقة، نرمز لـ y بـ $P_{\mathcal{F}}(x)$ و نقول عن y أنه المسقط العمودي لـ x على \mathcal{F} .

نتيجة 3.2.1

الإسقاط العمودي $P_{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ هو تطبيق خطي، حيث $\|P_{\mathcal{F}}(x)\| \leq \|x\|$ بالإضافة إلى ذلك $P_{\mathcal{F}} \circ P_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}}$.

² نقول عن S أنها محدبة إذا كانت: $\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0, 1]; \lambda x + (1 - \lambda)y \in S$

3.1 المؤثرات الخطية

الآن سوف نقوم باعطاء تعريف المؤثر، المؤثر الخطي والمؤثر المحدود وكذلك معكوس مؤثر بالإضافة إلى بعض الخواص والنظريات.

تعريف 1.3.1 (المؤثر)

نسمي مؤثر كل تطبيق ينطلق من فضاء مزود بطبولوجيا نحو فضاء مزود بطبولوجيا.³

نرمز لمجموعة تعريف المؤثر \mathcal{T} بالرمز $\mathcal{D}(\mathcal{T})$.

تعريف 2.3.1 (المؤثر الخطي)

ليكن \mathcal{X} و \mathcal{Y} فضاءين شعاعيين معرفين على نفس الحقل \mathbb{K} ، نقول أن المؤثر $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ خطي إذا تحقق :

$$\forall x, y \in \mathcal{X}; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \quad \mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{T}(x) + \beta \mathcal{T}(y).$$

ترميز 1.3.1

✓ نرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من \mathcal{X} إلى \mathcal{Y} بالرمز $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

✓ في حالة $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$: اختصارا $L(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = L(\mathcal{X})$.

✓ المجموعة العادمة للمؤثر \mathcal{T} تسمى نواة المؤثر \mathcal{T} ويرمز له بالرمز $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ ، ونكتب :

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \{x \in \mathcal{D}(\mathcal{T}); \quad \mathcal{T}x = 0\}.$$

✓ نرمز لمجموعة صور المؤثر \mathcal{T} بالرمز $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ ، ونكتب :

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \{y \in \mathcal{Y}; \quad \mathcal{T}x = y\}.$$

تعريف 3.3.1 (المؤثر المستمر)

ليكن $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ و $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ ف.ش.ن، معرفين على نفس الحقل \mathbb{K} و $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ مؤثر،

نقول عن المؤثر \mathcal{T} أنه مستمر عند a من \mathcal{X} إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ حيث :

$$\|x - a\|_{\mathcal{X}} < \delta \implies \|\mathcal{T}x - \mathcal{T}a\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon.$$

نتيجة 1.3.1 ✓ كل مؤثر خطي مستمر على الأقل عند نقطة من الفضاء \mathcal{X} فهو مستمر عند كل نقطة من هذا الفضاء.

³ تطابق فضاء البدء والوصول من عدمه لا يؤثر في تعريف المؤثر

تعريف 4.3.1 (المؤثر المحدود)

ليكن X و Y فضاءين شعاعيين نظيمين و ليكن $\mathcal{T} : D(\mathcal{T}) \rightarrow Y$ مؤثر خطي حيث $D(\mathcal{T}) \subset X$ نقول عن المؤثر \mathcal{T} أنه محدود إذا وجد ثابت حقيقي موجب C يحقق :

$$\forall x \in D(\mathcal{T}) : \| \mathcal{T}x \|_Y \leq C \| x \|_X .$$

بمعنى آخر المؤثر المحدود هو الذي يحول كل مجموعة محدودة من X إلى مجموعة محدودة في Y .
ترميز 2.3.1 نرمز لمجموعة المؤثرات الخطية المحدودة بالرمز $\mathcal{L}(X, Y)$.

مثال 1.3.1

1. المؤثر المطابق $Id : X \rightarrow X$ على فضاء نظيمي X غير خال محدود و نظيمه :

$$\| Id \| = 1.$$

2. المؤثر الصفري $O : X \rightarrow Y$ على فضاء نظيمي X غير خال محدود و نظيمه :

$$\| O \| = 0.$$

نظرية 1.3.1 ليكن \mathcal{T} مؤثر خطي القضايا التالية متكافئة :

(1) \mathcal{T} مستمر.

(2) \mathcal{T} مستمر عند الصفر.

(3) $\forall x \in X, \exists C > 0 : \| \mathcal{T}x \|_Y \leq C \| x \|_X$

البرهان 1.3.1

(1) \implies (2) : الاستلزام الأول

واضح لأن الإستمرارية من أجل كل x من X تؤدي للإستمرارية من أجل $x = 0$.

(2) \implies (3) : الإستلزام الثاني

ليكن \mathcal{T} مستمر عند الصفر $\iff \| \mathcal{T}x \|_Y < \varepsilon \iff \| x \|_X < \delta$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X$:
بوضع $y = \frac{\delta}{2 \| x \|} x$ حيث $x \in X$ و $(x \neq 0)$ نجد :

$$\| y \|_X = \frac{\delta}{2}$$

ومنه :

$$\|y\|_X < \delta$$

ومن تعريف الإستمرار نجد أن :

$$\|\mathcal{T}y\|_Y < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}y\|_Y &= \left\| \mathcal{T} \frac{\delta}{2\|x\|_X} x \right\|_Y \\ &= \frac{\delta}{2\|x\|_X} \|\mathcal{T}x\|_Y < \varepsilon \end{aligned}$$

نستنتج أن :

$$\|\mathcal{T}x\|_Y < \frac{2\varepsilon}{\delta} \|x\|_X$$

و منه يوجد

$$C = \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

الإستلزام الثالث : (1) \implies (3)

نفرض أن \mathcal{T} مؤثر محدود ، من أجل كل $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y\|_Y &= \|\mathcal{T}(x - y)\|_Y \\ &\leq C \|x - y\|_X . \end{aligned}$$

\mathcal{T} ليبتشيزي إذا فهو مستمر.

تعريف 5.3.1 (معكوس مؤثر)

ليكن $\mathcal{T} \in L(X, Y)$ حيث X و Y ف.ش.ن معرفين على نفس الحقل \mathbb{K} .
نقول عن مؤثر \mathcal{T} أنه قابل للعكس، إذا وجد حل وحيد للمعادلة $y = \mathcal{T}x$ من أجل كل y من $\mathcal{R}(\mathcal{T})$.
أي:


$$\forall y \in \mathcal{R}(\mathcal{T}), \exists! x_y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}).$$

حيث:

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = 0.$$

يرمز للمؤثر العكسي لـ \mathcal{T} بالرمز \mathcal{T}^{-1} ، ونكتب:

$$\mathcal{T}^{-1}y = x_y.$$

نتيجة 2.3.1  المؤثر العكسي للمؤثر الخطي يكون خطياً أيضاً.

نظرية 2.3.1 (**Banach-steinhaus**)

ليكن \mathcal{X} و \mathcal{Y} فضاءي بناخ و $(\mathcal{T}_i)_{i \in I} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ عائلة المؤثرات الخطية المستمرة إذا كان :

$$\forall x \in \mathcal{X} : \sup_{i \in I} \|\mathcal{T}_i(x)\| < \infty.$$

فإن :

$$\sup_{i \in I} \|\mathcal{T}_i\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} < \infty.$$

من جهة أخرى يوجد ثابت C يحقق :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall i \in I : \|\mathcal{T}_i x\| \leq C \|x\|.$$

تعريف 6.3.1 (**المؤثر القرين**)

ليكن $\mathcal{T} \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ المؤثر \mathcal{T}^* المعروف من \mathcal{H}_1 نحو \mathcal{H}_2 بـ:

$$\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2 : \langle \mathcal{T}x, y \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, \mathcal{T}^*y \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

يسمى بقرين المؤثر \mathcal{T} .

نظرية 3.3.1 ليكن $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ و $\mathcal{T}_3 \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ و $\alpha \in \mathbb{K}$ لدينا :

$$(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)^* = \mathcal{T}_1^* + \mathcal{T}_2^* \quad \text{✍}$$

$$(\alpha \mathcal{T}_1)^* = \bar{\alpha} \mathcal{T}_1^*, \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{✍}$$

$$(\mathcal{T}_1^*)^* = \mathcal{T}_1 \quad \text{✍}$$

$$(\mathcal{T}_3 \circ \mathcal{T}_1)^* = \mathcal{T}_1^* \circ \mathcal{T}_3^* \quad \text{✍}$$

البرهان 2.3.1 (1) - ليكن $x \in \mathcal{H}_1$ و $y \in \mathcal{H}_2$

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)x, y \rangle &= \langle \mathcal{T}_1x, y \rangle + \langle \mathcal{T}_2x, y \rangle, \\ &= \langle x, \mathcal{T}_1^*y + \mathcal{T}_2^*y \rangle. \end{aligned}$$

ومنه من خلال التعريف :

$$(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)^*y = \mathcal{T}_1^*y + \mathcal{T}_2^*y.$$

- (2)

$$\begin{aligned}\langle \alpha \mathcal{T}_1 x, y \rangle &= \alpha \langle x, \mathcal{T}_1^* y \rangle, \\ &= \langle x, \bar{\alpha} \mathcal{T}_1^* y \rangle.\end{aligned}$$

وبالتالي :

$$(\alpha \mathcal{T}_1)^* y = \bar{\alpha} \mathcal{T}_1^* y.$$

- (3)

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{T}_1^* y, x \rangle &= \overline{\langle x, \mathcal{T}_1^* y \rangle}, \\ &= \langle y, \mathcal{T}_1 x \rangle.\end{aligned}$$

من خلال تعريف القرين ل \mathcal{T}_1^* :

$$(\mathcal{T}_1^*)^* = \mathcal{T}_1 x.$$

- (4) من أجل $v \in \mathcal{H}_3$:

$$\begin{aligned}\langle (\mathcal{T}_3 \circ \mathcal{T}_1)x, v \rangle &= \langle \mathcal{T}_1 x, \mathcal{T}_3^* v \rangle, \\ &= \langle x, (\mathcal{T}_1^* \circ \mathcal{T}_3^*)v \rangle.\end{aligned}$$

وبالتالي :

$$(\mathcal{T}_3 \circ \mathcal{T}_1)^* v = (\mathcal{T}_1^* \circ \mathcal{T}_3^*)v.$$

تعريف 7.3.1 المؤثر $\mathcal{T} \in L(\mathcal{H})$ يسمى ذاتي القرين إذا كان $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

تعريف 8.3.1 (المؤثر المفتوح)

ليكن X و \mathcal{Y} فضاءي بناخ و ليكن $\mathcal{T} : X \mapsto \mathcal{Y}$ مؤثر خطي، مستمر و غامر، إذن يوجد ثابت $r > 0$ يحقق :

$$B(0, r)_Y \subset \mathcal{T}(B(0, 1)_X).$$

إذا كانت $B(0, 1)_X$ هي كرة الوحدة المفتوحة في X و $B(0, r)_Y$ هي الكرة المفتوحة ذات المركز 0 و نصف القطر r في \mathcal{Y} فإن \mathcal{T} مؤثر مفتوح، بمعنى أن كل مؤثر يحول مجموعة مفتوحة إلى مجموعة مفتوحة يسمى بالمؤثر المفتوح.


تعريف 9.3.1 (المؤثر المغلق)

ليكن \mathcal{T} مؤثر خطي من الفضاء الهلبرتي \mathcal{H} أي $\mathcal{T} \in L(\mathcal{H})$ ، نقول عن \mathcal{T} أنه مؤثر مغلق إذا تحققت أحد الشروط التالية :

1- إذا كان بيانه $Gr_{\mathcal{T}}$ مغلق في $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

2- من أجل كل متتالية $(f_n)_{n \geq 1}$ من $\mathcal{D}(\mathcal{T})$:

$$\exists f \in \mathcal{D}(\mathcal{T}) : \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f : \{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{T} f_n = g \implies g = \mathcal{T} f \}.$$

نتيجة 3.3.1  كل مؤثر محدود فهو مؤثر مغلق.

تعريف 10.3.1 (المؤثر المتراص)

ليكن X و Y فضاءين شعاعيين نظيمين و $\mathcal{T} : X \rightarrow Y$ نقول عن \mathcal{T} أنه مؤثر متراص إذا كان مستمر ويحول كل مجموعة محدودة من X إلى مجموعة متراصة نسبياً⁴ في Y .

ترميز 3.3.1

✓ نرسم مجموعة المؤثرات المتراصة من X نحو Y بالرمز $K(X, Y)$.

✓ في حالة $X = Y$ نرسم لها اختصاراً $K(X) = K(X, X)$.

بعض خواص المؤثر المتراص:

(1) إذا كان X و Y ذو بعدين منتهيين فإن: $K(X, Y) = L(X, Y)$.

(2) ليكن $\mathcal{T} \in L(X, Y)$ و $\mathcal{T}' \in L(X, Y)$ إذا كان \mathcal{T} أو \mathcal{T}' متراص فإن $\mathcal{T}' \circ \mathcal{T}$ متراص.

4.1 المعكوس المعمم لـ Moore Penrose

تعريف 1.4.1 ليكن $\mathcal{T} : X \rightarrow Y$ مؤثر خطي محدود.

(i) $x \in X$ يسمى بحل المربعات الصغرى لـ

$$\mathcal{T}x = y. \quad (1.1)$$

إذا تحقق:

$$\| \mathcal{T}x - y \| = \inf \{ \| \mathcal{T}z - y \| \mid z \in X \}. \quad (2.1)$$

(ii) نقول عن $x \in X$ أفضل حل تقريبي لـ $\mathcal{T}x = y$ إذا كان x هو حل للمربعات الصغرى و

$$\| x \| = \inf \{ \| z \| \mid \mathcal{T}z = y \} \quad (3.1)$$

يتم تعريف أفضل حل تقريبي على أنه حل للمربعات الصغرى للنظيم الأدنى .

💡 ترتبط فكرة أفضل حل تقريبي إرتباطاً وثيقاً بمعكوس Moore penrose المعمم لـ \mathcal{T} الذي

يحول y إلى أفضل حل تقريبي لـ (1.1).

⁴ إذا كان (X, d) فضاء مترى نقول أن الجزء A متراص نسبياً إذا كانت ملاصقته متراصة في X

تعريف 2.4.1 X و \mathcal{Y} فضاءين هيلبرتيين و $\mathcal{L}(X, \mathcal{Y})$ فضاء كل المؤثرات الخطية المحدودة من X نحو \mathcal{Y} .

ليكن $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(X, \mathcal{Y})$ ، نعرف معكوس Moore penrose المعمم \mathcal{T}^\dagger لـ \mathcal{T} بأنه الإمتداد الخطي الوحيد لـ $\tilde{\mathcal{T}}^{-1}$ على $\mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ حيث:

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger) := \mathcal{R}(\mathcal{T}) \dot{+} \mathcal{R}(\mathcal{T})^\perp.$$

مع

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}^\dagger) = \mathcal{R}(\mathcal{T})^\perp,$$

وليكن

$$\tilde{\mathcal{T}} := \mathcal{T}|_{\mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp} : \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

معرف جيداً لأن

$$\mathcal{N}(\tilde{\mathcal{T}}) = \{0\} \wedge \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{T}}) = \mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

و منه $\tilde{\mathcal{T}}^{-1}$ موجود.

من أجل كل $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ نكتب

$$y = y_1 + y_2 / y_1 \in \mathcal{R}(\mathcal{T}) \wedge y_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{T})^\perp.$$

وبالتالي $\mathcal{T}^\dagger y$ تصبح $\tilde{\mathcal{T}}^{-1}y_1$.

قضية 1.4.1 لتكن P و Q الإسقاطات العمودية لـ $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ و $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{T})}$ على التوالي، ومنه $\mathcal{R}(\mathcal{T}^\dagger) = \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp$ و \mathcal{T}^\dagger يحقق معادلات Moore penrose التالية:

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T} = \mathcal{T}. \quad (4.1)$$

$$\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger = \mathcal{T}^\dagger. \quad (5.1)$$

$$\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T} = I - P. \quad (6.1)$$

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger = Q /_{\mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)}. \quad (7.1)$$

البرهان 1.4.1 من خلال تعريف \mathcal{T}^\dagger من أجل $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$:

$$\mathcal{T}^\dagger y = \tilde{\mathcal{T}}^{-1}Qy = \mathcal{T}^\dagger Qy \quad (8.1)$$

ومنه:

$$\mathcal{T}^\dagger y \in \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{T}}^{-1}) = \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp.$$

من أجل كل $x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp$:

$$\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}x = \tilde{\mathcal{T}}^{-1} \tilde{\mathcal{T}}x = x$$

وهذا يثبت أن:

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}^\dagger) = \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp.$$

إثبات (7.1):

ليكن $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ و من (8.1) نجد

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger y = \mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger Qy = \mathcal{T}\tilde{\mathcal{T}}^{-1}Qy = \tilde{\mathcal{T}}\tilde{\mathcal{T}}^{-1}Qy = Qy,$$

حيث:

$$\tilde{\mathcal{T}}^{-1}Qy \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp,$$

وبالتالي:

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger = Q_{\mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)}.$$

إثبات (6.1):

لدينا حسب تعريف \mathcal{T}^\dagger :

$$\forall x \in \mathcal{X}; \quad \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}x = \tilde{\mathcal{T}}^{-1} \mathcal{T}[Px + (I - P)x],$$

ومنه

$$\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}x = \tilde{\mathcal{T}}^{-1} \mathcal{T}Px + \tilde{\mathcal{T}}^{-1} \tilde{\mathcal{T}}(I - P)x = (I - P)x,$$

$$\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} = I - P.$$

إثبات (4.1):

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} = \mathcal{T}(I - P) = \mathcal{T} - \mathcal{T}P = \mathcal{T}.$$

إثبات (5.1): انطلاقاً من (6.1)، (7.1) و (8.1) (بديهي).

ملاحظة 1.4.1 نطلق على المؤثر الذي يحقق (4.1) و (5.1) معكوساً داخلياً و خارجياً على التوالي.

⚠️ سنرى الآن العلاقة بين حل المربعات الصغرى و معكوس Moore penrose :

نظرية 1.4.1 ليكن $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ فإن المعادلة $\mathcal{T}x = y$ تملك أفضل حل تقريبي وحيد يعطى بـ:

$$x^\dagger := \mathcal{T}^\dagger y.$$

حيث يرمز إلى مجموعة حلول المربعات الدنيا بـ $x^\dagger + \mathcal{N}(\mathcal{T})$.

البرهان 2.4.1 لتكن

$$\mathcal{S} := \{ z \in \mathcal{X} / \mathcal{T}z = Qy \}$$

حيث $Qy \in \mathcal{R}(\mathcal{T})$ ، $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger) = \mathcal{R}(\mathcal{T}) + \mathcal{R}(\mathcal{T})^\perp$ ، ومنه $\mathcal{S} \neq \emptyset$. مع إسقاط متعامد و هو أيضا متري، لدينا من أجل كل $x \in \mathcal{X}$ و $z \in \mathcal{S}$

$$\| \mathcal{T}z - y \| = \| Qy - y \| \leq \| \mathcal{T}x - y \|,$$

و بالتالي كل عناصر \mathcal{S} هي حلول مربعات الصغرى لـ (1.1).
وبالعكس، ليكن z حل المربعات الصغرى لـ (1.1) فإن:

$$\| Qy - y \| \leq \| \mathcal{T}z - y \| = \inf \{ \| u - y \| / u \in \mathcal{R}(\mathcal{T}) \} = \| Qy - y \|.$$

و بالتالي $\mathcal{T}z$ هو أقرب عنصر لـ y في $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ ، بمعنى $\mathcal{T}z = Qy$ و بالتالي أثبتنا أن

$$\mathcal{S} = \{ z \in \mathcal{X} / \mathcal{T}z = Qy \} \neq \emptyset.$$

الآن لتكن \bar{z} عنصر من النظيم الأصغري في الفضاء الخطي المغلق $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{-1}(\{Qy\})$ حيث

$$\mathcal{S} = \bar{z} + \mathcal{N}(\mathcal{T}),$$

يكفي إثبات أن

$$\bar{z} = \mathcal{T}^\dagger y. \quad (9.1)$$

كعنصر من النظيم الأصغري في $\bar{z} + \mathcal{N}(\mathcal{T})$ حيث \bar{z} عمودي على $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ أي $\bar{z} \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp$ بمعنى:

$$\bar{z} = (I - P)\bar{z} = \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}\bar{z} = \mathcal{T}^\dagger Qy = \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger y = \mathcal{T}^\dagger y.$$

بمعنى (12.1).

نظرية 2.4.1 لتكن $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ و $x \in \mathcal{X}$ هو حل المربعات الصغرى لـ (1.1) إذا و فقط إذا كانت المعادلة القياسية

$$\mathcal{T}^* \mathcal{T}x = \mathcal{T}^* y. \quad (10.1)$$

محقة.


البرهان 3.4.1

x هو حل المربعات الصغرى لـ (1.1) إذا و فقط إذا كان Tx هو عنصر مغلق في $\mathcal{R}(T)$ لـ y أي

$$Tx - y \in \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*) \text{ بمعنى}$$

$$T^*(Tx - y) = 0.$$

و هو ما يثبت التكافؤ.

يمكننا أن نستنتج من هذه النظرية أن $T^\dagger y$ حل لـ (10.1) للنظيم الأصغري بمعنى 

$$T^\dagger = (T^*T)^\dagger T^*.$$

1.4.1 طيف المؤثر

الان مفهوم طيف مؤثر محدود و هو تعميم لمفهوم القيم الذاتية للمصفوفات، حيث تعرف دراسة الأطياف و خصائصها بالنظرية الطيفية، و التي لها تطبيقات عديدة.

تعريف 3.4.1 T مؤثر خطي محدود معرف على فضاء بناخ X على الحقل \mathbb{K} ، و Id_X مؤثر مطابق على X . طيف T هو مجموعة جميع قيم $\lambda \in \mathbb{K}$ حيث $T - \lambda Id_X$ مؤثر خطي محدود لا يملك معكوس. و نرمز لها بالرمز $\sigma(T)$ حيث:

$$\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda Id_X \text{ للقلب} \}.$$

نسمي كل قيمة $\lambda \in \sigma(T)$ قيمة طيفية. نرمز لمتمة المجموعة $\sigma(T)$ بـ $\rho(T)$ و تسمى مجموعة الحالة للمؤثر T حيث:

$$\rho(T) = \{ \lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda Id_X \text{ للقلب} \}.$$

أنواع الطيف

✚ الطيف النقطي لـ T يتكون من جميع قيم $\lambda \in \sigma(T)$ حيث $T - \lambda Id_X$ ليس متباين في هذه الحالة λ تسمى قيمة ذاتية لـ T .

✚ الطيف المستمر لـ T يتكون من جميع قيم $\lambda \in \sigma(T)$ حيث $T - \lambda Id_X$ متباين و $Im(T - \lambda Id_X)$ كثيفة في X .

✚ الطيف الراسبي لـ T يتكون من جميع قيم $\lambda \in \sigma(T)$ حيث $T - \lambda Id_X$ متباين و $Im(T - \lambda Id_X)$ غير كثيفة في X .

2.4.1 طيف المؤثرات المتراسة

نظام ذاتي لمؤثر ذاتي القرين متراس K^*K إذا وفقط إذا كان (σ_n, v_n, u_n) نظام منفرد لمؤثر خطي متراس K

$$K^*Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \langle x, v_n \rangle v_n. \quad (11.1)$$

تصبح تكتب من هذا الشكل

$$K^*Kx = \int \lambda dE_\lambda x.$$

حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathcal{X}$ ، نعرف

$$E_\lambda x := \sum_{\substack{n=1 \\ \sigma_n^2 < \lambda}}^{\infty} \langle x, v_n \rangle v_n \quad (+P). \quad (12.1)$$

حيث P هو الإسقاط العمودي على $\mathcal{N}(K^*K)$ ويقصد به الظهور في (12.1) فقط من أجل $\lambda > 0$. لكل قيم λ ، E_λ هو الإسقاط العمودي على

$$\mathcal{X}_\lambda := \text{span}\{v_n / n \in \mathbb{N}, \sigma_n^2 < \lambda\} \quad (+\mathcal{N}(K^*K), \quad \lambda > 0).$$

من أجل $\lambda \leq 0$: $E_\lambda = 0$ و v_n مولدة لـ $\overline{\mathcal{R}(K^*K)}$ و تحقق:

$$\mathcal{X}_\lambda = \overline{\mathcal{R}(K^*K)} + \mathcal{N}(K^*K) = \mathcal{X}.$$

من أجل $\lambda > \sigma_1^2$: $E_\lambda = I$ ، ليكن $x \in \mathcal{X}$ من أجل كل $\lambda \leq \mu$ يحقق:

$$\begin{aligned} \langle E_\lambda x, x \rangle &= \sum_{\substack{n=1 \\ \sigma_n^2 < \lambda}}^{\infty} |\langle x, v_n \rangle|^2 \quad (+ \|Px\|^2), \\ &\leq \sum_{\substack{n=1 \\ \sigma_n^2 < \mu}}^{\infty} |\langle x, v_n \rangle|^2 \quad (+ \|Px\|^2) = \langle E_\mu x, x \rangle. \end{aligned}$$

و هو نوع من الرتبة ، حيث E_λ يسمى بالعائلة الطيفية.

ترميز 1.4.1 لتكن f مستمرة و $x, y \in \mathcal{X}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x := \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle v_n. \quad (13.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle x, v_n \rangle \langle y, u_n \rangle. \quad (14.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d \| E_\lambda x \|^2 := \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) | \langle x, v_n \rangle |^2. \quad (15.1)$$

من أجل $f = Id$ (13.1) تصبح:

$$\int \lambda dE_\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 \langle x, v_n \rangle v_n,$$

و من خلال (11.1)

$$\int \lambda dE_\lambda = K^* K,$$

و التي يمكن كتابتها بالشكل:

$$\int Id(\lambda) dE_\lambda = Id(K^* K),$$

Id : تطبيق مطابق.

و منه

$$f(K^* K) := \int f(\lambda) dE_\lambda := \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma_n^2) \langle \cdot, v_n \rangle v_n, \quad (16.1)$$

$$f(K^* K) K^* = K^* f(K K^*). \quad (17.1)$$

$f(K K^*)$ تعرف بشكل مشابه لـ $f(K^* K)$ مستخدمين العائلة الطيفية F_λ المعرفة بـ:

$$F_\lambda y := \sum_{\substack{n=1 \\ \sigma_n^2 < \lambda}}^{\infty} \langle y, u_n \rangle u_n \quad (+I - Q).$$

حيث $I - Q$ الإسقاط العمودي على $\mathcal{N}(K K^*) = \mathcal{R}(K K^*)^\perp$ إذا كانت $f(K^* K)$ معرفة بـ (16.1) من أجل كل $x, y \in \mathcal{X}$ فإن:

$$\langle f(K^* K)x, y \rangle = \int f(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle,$$

و

$$\| f(K^* K)x \|^2 = \int f^2(\lambda) d \| E_\lambda x \|^2. \quad (18.1)$$

تعريف 4.4.1 العائلة $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ للإسقاطات العمودية في \mathcal{X} تسمى عائلة طيفية إذا حققت الشروط التالية:

$$\bullet \text{ من أجل } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda, \mu\}}.$$

$$\bullet \forall x \in \mathcal{X}; E_{\pm\infty} x = \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} E_\lambda x \text{ بحيث } E_{+\infty} = I \text{ و } E_{-\infty} = 0$$

$$\bullet \text{ من أجل كل } x \in \mathcal{X} \quad E_{\lambda-0} x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_{\lambda-\varepsilon} x \text{ بحيث } E_{\lambda-0} = E_\lambda$$

قضية 2.4.1 ليكن $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ مؤثر خطي محدود حيث:

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}^*) = \mathcal{R}((\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{\frac{1}{2}}).$$

البرهان 4.4.1

من (18.1) و (17.1) لتكن الدالة

$$f_p(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \lambda \geq p. \\ 0, & \lambda < p. \end{cases}$$

من أجل $p > 0$ نجد:

$$\begin{aligned} \int_p^\infty \frac{1}{\lambda^2} d \| F_\lambda \mathcal{T} x \|^2 &= \| f_p(\mathcal{T} \mathcal{T}^*) \mathcal{T} x \|^2, \\ &= \langle \mathcal{T} f_p(\mathcal{T}^* \mathcal{T}) x, \mathcal{T} f_p(\mathcal{T}^* \mathcal{T}) x \rangle, \\ &= \langle f_p(\mathcal{T}^* \mathcal{T}) x, \mathcal{T}^* \mathcal{T} f_p(\mathcal{T}^* \mathcal{T}) x \rangle, \\ &= \langle (\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{\frac{1}{2}} f_p(\mathcal{T}^* \mathcal{T}) x, (\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{\frac{1}{2}} f_p(\mathcal{T}^* \mathcal{T}) x \rangle, \\ &= \| (\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{\frac{1}{2}} f_p(\mathcal{T}^* \mathcal{T}) x \|^2 = \int_p^\infty \frac{1}{\lambda} d \| E_\lambda x \|^2. \end{aligned}$$

و من التعريف نجد:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{R}(\mathcal{T}^*) &\Leftrightarrow \mathcal{T} x \in \mathcal{R}(\mathcal{T}^*) \wedge x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp, \\ &\Leftrightarrow \mathcal{T} x \in \mathcal{D}((\mathcal{T} \mathcal{T}^*)^\dagger) \wedge x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp, \\ &\Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} d \| F_\lambda \mathcal{T} x \|^2 < \infty \wedge x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp, \\ &\Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} d \| E_\lambda x \|^2 < \infty \wedge x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp, \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{D}((\mathcal{T}^* \mathcal{T} |_{\mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp})^{\frac{-1}{2}}) \wedge x \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp, \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{R}((\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

5.1 التفكيك إلى قيم منفردة

تعريف 1.5.1 القيمة المنفردة هي أداة رياضية تم تطويرها من أجل تحليل المعادلات التكاملية و مناقشة وجود حلولها.

(1) في حالة المؤثرات : نسمي قيمة منفردة للمؤثر \mathcal{T} العدد الحقيقي الموجب $\lambda = \sigma(\mathcal{T})$ قيمة ذاتية للمؤثر الهرميتي المتراض $\mathcal{T}^*\mathcal{T}$.

(2) في حالة المصفوفات : نسمي قيمة منفردة للمؤثر \mathcal{T} الجذر التربيعي للقيم الذاتية غير معدومة و موجبة ل $\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T}$ او $(\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger)$.

تعريف 2.5.1 ليكن $\mathcal{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ ، توجد متتالية $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ، و عائلتان متعامدتان $(e_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ و $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ حيث:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sigma_j = 0, \text{ متناقصة, } (\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$$

$$\forall j \in \mathbb{N} : \mathcal{T}e_j = \sigma_j f_j, \mathcal{T}^* f_j = \sigma_j e_j$$

من أجل كل $x \in \mathcal{H}$ يكون النشر:

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle f_j.$$

حيث: $x_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$

من اجل كل $x \in \mathcal{H}$ و $y \in \mathcal{H}$ لدينا:

$$\mathcal{T}x = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \langle x, e_j \rangle f_j.$$

$$\mathcal{T}^*y = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \langle y, f_j \rangle e_j.$$

المتتالية $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ هي أساس هلبرتي ل $\mathcal{N}(\mathcal{T}^\perp)$ ، و المتتالية $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ هي أساس هلبرتي ل $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{T})}$ حيث:

الأعداد σ_j تسمى القيم المنفردة ل \mathcal{T} .

الأشعة e_j و f_j تسمى الاشعة المنفردة.

6.1 الحساب الكسري

من المعلوم أنه للمساعدة في فهم الظواهر الفيزيائية يلجأ الباحثون في كثير من المسائل العلمية و الهندسية إلى تصميم نماذج رياضية وهذه النماذج غالباً ما تؤدي إلى صياغة مسائل على شكل معادلات تفاضلية ذات رتب كسرية (غير صحيحة). التي تعد أدوات أساسية في حقول علمية مختلفة كالرياضيات التطبيقية و الفيزياء، البيولوجيا، الهندسة و الميكانيكا الصلبة... الخ.

الحساب الكسري هو تعميم للحساب الكلاسيكي يهتم بمؤثرات التكامل و التفاضل برتب كسرية.

1.6.1 التكامل ذي الرتب الكسرية

التكامل ذي الرتب الكسرية لريمان ليوفيل
لتكن $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة، الدالة الأصلية للدالة f تعطى بـ:

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

نكامل مرة ثانية

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(\tau) d\tau \right) ds, \quad a \leq \tau \leq s \leq t \leq b.$$

باستخدام مبرهنة فويني⁵ نحصل على:

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

نستنتج:

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau.$$

تعريف 1.6.1 يعرف التكامل الكسري لريمان ليوفيل ذي الرتبة $(\alpha \geq 0)$ على النحو التالي:

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

$$I_a^0 f(t) = f(t). \quad (19.1)$$

ويسمى أيضاً بالتكامل الكسري الأيسر لريمان-ليوفيل، حيث أن $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ هي دالة غاما.

التكامل الكسري لريمان ليوفيل يحقق الخصائص التالية:

$$I^\alpha I^\beta f(t) = I^\beta I^\alpha f(t) \quad (1)$$

$$I^\alpha I^\beta f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t) \quad (2)$$

$$I^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\gamma+\alpha} \quad (3)$$

$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$ \blacktriangle^5

ملاحظة 1.6.1 التكامل الكسري الأيمن لريمان- ليوفيل لدالة $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ يعرف بـ:

$$I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

مثال 1.6.1 لتكن الدالة $f(t) = (t - a)^\beta$ من أجل $\beta > -1$ ، و من خلال الصيغة (1.6.1) نجد:

$$(I_a^\alpha)(t - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\beta d\tau,$$

لحساب التكامل نضع $\tau = a + (t - a)s$ فنجد:

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha)(t - a)^\beta &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} s^\beta ds; \\ &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1); \\ &= \frac{(t - a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)}; \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} (t - a)^{\beta+\alpha}. \end{aligned}$$

2.6.1 المشتق الكسري بمفهوم *Caputo*

تعريف 2.6.1 يعرف المشتق الكسري بمفهوم *Caputo* من الرتبة α كمايلي:

$$D^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{f^n(t)}{(x - t)^{\alpha+1-n}} dt, & n - 1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}. \\ \frac{d^n}{dx^n} f(x), & \alpha = n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

توطئة 1.6.1 لتكن $n - 1 < \alpha < n$ من أجل: $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ ولتكن الدالتين $f(t)$ و $g(t)$ حيث $D^\alpha f(t)$ و $D^\alpha g(t)$ موجودتان. الإشتقاق الكسري بمفهوم *Caputo* هو مؤثر خطي، بمعنى:

$$D^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + D^\alpha g(t).$$

توطئة 2.6.1 لتكن $n - 1 < \alpha < n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ و $f(t)$ حيث $D^\alpha f(t)$ موجودة، إذن الخاصية التالية لمؤثر *Caputo* محققة:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} D^\alpha f(t) &= f^n(t), \\ \lim_{\alpha \rightarrow n-1} D^\alpha f(t) &= f^{n-1}(t) - f^{n-1}(0). \end{aligned}$$

للبرهان نستخدم فقط التكامل بالتجزئة، ثم إدخال النهاية.

توطئة 3.6.1 لتكن $n-1 < \alpha < n$ من أجل $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ ، و $f(t)$ بحيث $D^\alpha f(t)$ موجودة، ومنه:

$$D^\alpha D^m f(t) = D^{\alpha+m} f(t) \neq D^m D^\alpha f(t).$$

نظرية 1.6.1 (*Riesz-Fischer*)

لتكن $\{\phi_n\}$ جملة متعامدة و متجانسة كيفية في فضاء إقليدي تام \mathbb{R} ، و لتكن $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ أعداداً بحيث تكون السلسلة:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

مقاربة، عندئذ يوجد عنصر $f \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$c_k = \langle f, \phi_k \rangle,$$

و:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \langle f, f \rangle = \|f\|^2.$$

الإشكاليات المعتلة و العكسية


1.2 الإشكاليات المطروحة جيدا بمفهوم هدامارد

عالم الرياضيات **Jacque Hadamard** وضع ثلاث شروط للإشكاليات الرياضية لكي تكون مقبولة كنموذج يمثل الظواهر الواقعية. تتمثل هذه الشروط في: وجود حل الإشكالية ووحدايته بالإضافة إلى إستقرار الإشكالية. من أجل أن نشرح هذا أكثر سنعبر عن هذه الإشكالية بمعادلة مؤثر خطي:

$$\mathcal{T} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$$


$$x \mapsto y = \mathcal{T}x.$$

حيث \mathcal{X} و \mathcal{Y} فضاءين هيلبرتيين.

الوجود: 
وجود حل لإشكالية معناه:

$$\forall y \in \mathcal{Y}; \exists x \in \mathcal{X} : \mathcal{T}x = y.$$

بمعنى آخر \mathcal{T} مؤثر غامر.


الوحدانية: 

إذا وجد x_1, x_2 من الفضاء \mathcal{X} حيث $\mathcal{T}x_1 = y$ و $\mathcal{T}x_2 = y$ فالبضرة x_1 يطابق x_2 .

بمعنى آخر:

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = 0_{\mathcal{X}}.$$

أي المؤثر \mathcal{T} متباين.

الإستقرار: 

هو الإرتباط المستمر ما بين الأسباب و النتائج، أي تغيير طفيف في السبب y يتسبب في تغيير

طفيف في النتيجة x . يفسر هذا رياضيا بكون المؤثر T مستمر ومعكوسه موجود ومستمر. اجتماع هذه الشروط الثلاثة في أي إشكالية يجعلنا نسميها مطروحة جيدا بمفهوم **Hadamard**.

2.2 الإشكالية المعتلة

تخمين **Hadamard** تناقض مع نمذجة الظواهر الفيزيائية والواقعية لأنه هنالك الكثير من النماذج التي طرحت لإشكاليات واقعية ما يخلت فيها أحد شروط الإشكالية المطروحة جيدا وتسبب هذا في التخلي عن دراستها إلى أن صارت واقعا مفروض أي لا يوجد أي نموذج مطروح جيدا يمكنه تمثيل تلك الظاهرة فتحتم على علماء الرياضيات قبول هذه النماذج والتي سنسميها معتلة بمفهوم **Hadamard** كإشكاليات منمذجة للظواهر الواقعية وأنشؤا طرق تمكنهم من دراسة هذا النوع من الإشكاليات. الإشكاليات المعتلة هي أي إشكالية يخلت فيها أحد الشروط الثلاثة بمفهوم **Hadamard** أي يكون الحل غير موجود أو غير وحيد أو الإشكالية غير مستقرة، في مذكرتنا هذه سنهتم بنوع واحد من الاعتلال ألا وهو عدم الاستقرار في حالة خاصة وهي الإشكاليات المنمذجة بمعادلات تفاضلية بمشتقات جزئية، لأننا سنقوم بدراسة تعديل أو تنظيم (إيجاد طريقة مستقرة لحساب حل تقريبي للحل) وهذا التعديل طرح سنة 1967 من قبل **Lions & Lattes** وسمي لاحقا بطريقة شبه القلب والتي تعتمد أساسا على ذبذبة المعادلة للحصول على حل بدلالة معامل ما حيث المعادلة المذبذبة مستقرة من أجل قيم هذا المعامل الموجبة بالإضافة إلى ذلك حل المعادلة المذبذبة حل الإشكالية الأصلية عندما يؤول المعامل إلى الصفر، قبل التفصيل في طريقة شبه القلب يتوجب علينا أن نعرف قارئ هذه المذكرة ما هي طرق التعديل، مؤثر التعديل، اختيار معامل التعديل ويسبق هذا شروط وجود وحدانية الحل للإشكاليات المعتلة والتي تعطى بنظرية بيكاردي بالنسبة لمعادلة مؤثر متراص. لكن قبل الدخول في هذا الشق النظري يتوجب علينا التحدث عن الإشكاليات المباشرة والعكسية لأن أكبر عائلة محتواة في عائلة الإشكاليات المطروحة جيدا هي الإشكالية المباشرة بينما الإشكالية العكسية هي أكبر عائلة من الإشكاليات المعتلة لكي لا نقع في تناقض يجب أن نشير إلى أنه توجد إشكاليات مباشرة معتلة كما توجد إشكاليات عكسية مطروحة جيدا. تنوعت مصادر دراستنا أين شملت المراجع [9]، [10]، [16]، [23] حيث يمكنكم الاطلاع عليها والاستفادة أكثر.

أمثلة عن الإشكاليات المعتلة:

في هذا القسم سوف نقدم بعض الإشكاليات الغير مطروحة جيدا، ونشير إلى أي من شروط **Hadamard** لم يتحقق:

مثال 1.2.2

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.2 \end{pmatrix}.$$

هذا المثال يوضح أن $x = 1$ و $2x = 2.2$ وهذا معناه أن الإشكالية لها حل ولكنه غير وحيد، أي أنها غير مطروحة جيدا لأن الشرط الثاني لـ **Hadamard** غير محقق.

مثال 2.2.2 (إشكالية القطع الزائد بشروط ديركلي) لتكن الإشكالية التالية:

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + \mathcal{T}u(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, \\ u(T) = \psi. \end{cases} \quad (1.2)$$

حيث φ ، ψ دالتان معطتان في \mathcal{H} و $\mathcal{T} : \mathcal{D}(\mathcal{T}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ بحيث $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ و $\mathcal{T} \geq \delta > 0$. من أجل $k \geq 0$ إذا كانت $\lambda_k = (k\pi)^2/T^2, k = 1, 2, \dots$ ليست قيم ذاتية لـ \mathcal{T} ، فإن المؤثر $(\sin(T\sqrt{\mathcal{T}}))$ متباين، وحل الإشكالية (1.2) يعطى بـ:

$$u(t) = \sin((T-t)\sqrt{\mathcal{T}})(\sin(T\sqrt{\mathcal{T}}))^{-1}\psi + \sin(t\sqrt{\mathcal{T}})(\sin(T\sqrt{\mathcal{T}}))^{-1}\varphi.$$

عكسيا إذا كان $\{\lambda_k = (k\pi)^2/T^2, k = 1, 2, \dots\} \cap \sigma_p(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ فإن حل الإشكالية (1.2) غير وحيد، أي أنها غير مطروحة جيدا حسب **Hadamard**.

مثال 3.2.2 (إشكالية الجهد)

نفرض أن هناك جسم $D \subset \mathbb{R}^3$ بكثافة $\rho(x)$ حيث $x \in \mathbb{R}^3$ هذا الجسم يولد جهدا.

$$u(x) = \int_D \frac{\rho(y)}{4\pi \|x-y\|} dy.$$

نعتبر الإشكالية التالية

إيجاد الكثافة $\rho(x)$ بالنظر الى الجهد $u(x)$ حيث $x \in B'_R = \{x, |x| \geq R\}$ بعيدا عن D . مع العلم أن الكتلّة النقطية m هي كتلة موزعة بشكل منتظم في كرة نصف قطرها R تولد نفس الجهد $u(x) = \frac{m}{|x|}$ لذا فإنه ليس من الممكن تحديد $\rho(x)$ بشكل وحيد عن طريق قياس $u(x)$ ، إذن هذه الإشكالية معتلة لأن الشرط الثاني لـ **Hadamard** غير محقق.

مثال 4.2.2 (إشكالية كوشي لمعادلة لابلاص)

لتكن الإشكالية التالية:

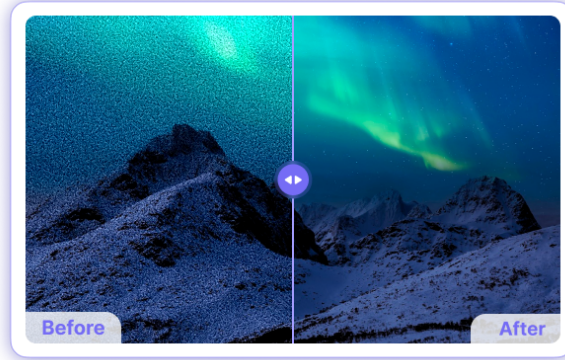
$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0; & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.2)$$

حيث $\varphi(x) = \frac{1}{n} \sin(nx), n > 0$ حل إشكالية كوشي هو الدالة

$$u(x, y) = \frac{1}{n} \sin(nx) \sinh(ny).$$

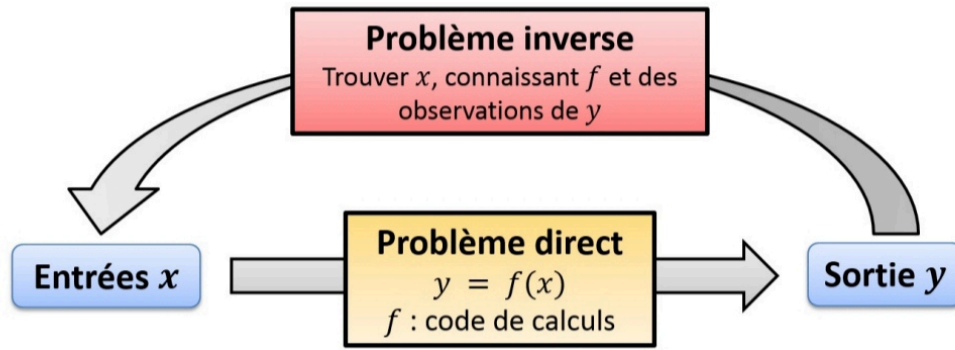
نلاحظ أن $\varphi \rightarrow 0$ لما يتؤول $n \rightarrow \infty$ إذن $u(x, y) \rightarrow \infty$ لما $n \rightarrow \infty$ من أجل كل $x > 0$. إذن حل الإشكالية لا يعتمد بشكل مستمر على المعطيات الأولية ومنه الإشكالية غير مطروحة جيدا.

3.2 الإشكاليات المباشرة والعكسية



شكل 1.2: الإشكالية المباشرة والعكسية

الإشكالية المباشرة هي كل نموذج رياضي ينطلق من الأسباب لإيجاد النتائج، أي نموذج رياضي ينطلق من النتائج بحثا عن الأسباب يسمى إشكالية عكسية.



شكل 2.2: مخطط يوضح مفهوم الإشكالية المباشرة والعكسية

مثال 1.3.2 إشكالية مباشرة في EDP

ليكن المجال $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ، نبحث عن الحل u الذي يحقق: $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty[\rightarrow u(x, t)$ بحيث

$$\begin{cases} u_t + F(t, x, \partial_{x_1}^{\alpha_1} u, \dots, \partial_{x_p}^{\alpha_p} u) = f, & x \in \Omega, \\ \{B_i\}_{i=1}^q u = g_i, & x \in \partial\Omega \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

مثال 2.3.2 إشكالية عكسية في EDP

من خلال معرفة جزئية للحل u لإشكالية في EDP (قياسات داخلية، قياسات حدودية)، أوجد:

$$\begin{aligned} f, g_1, \dots, g_q &\rightarrow \text{تحديد المصادر.} \\ u_0 &\rightarrow \text{تحديد المعطيات الأولية.} \\ F &\rightarrow \text{تحديد المعاملات.} \\ \Omega &\rightarrow \text{التحديد الهندسي.} \end{aligned} \quad (3.2)$$

💡 أي إشكالية مباشرة تولد لنا مجموعة من الإشكاليات العكسية و غالباً ما تؤدي هذه الأخيرة إلى إشكاليات رياضية لا تفي بتعريف **Hadmark** للإشكالية المطروحة جيداً أي أنها لا تحقق أحد شروطه.

1.3.2 نظرية بيكارد

نظرية 1.3.2 لتكن (σ_n, v_n, u_n) نظام منفرد للمؤثر الخطي المتراص K ، ولتكن المعادلة $Kx = y$ مع $x \in \mathcal{X}$ و $y \in \mathcal{Y}$ لدينا:

(1)

$$y \in \mathcal{D}(K^\dagger) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^2} < \infty. \quad (4.2)$$

(2)

$$y \in \mathcal{D}(K^\dagger) : \quad K^\dagger y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n. \quad (5.2)$$

البرهان 1.3.2

الاستلزام الأول

ليكن $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$ ، $Qy \in \mathcal{R}(K)$ ، الإسقاط العمودي لـ Q على $\overline{\mathcal{R}(K)}$ يكتب من الشكل:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \cdot, u_n \rangle u_n.$$

u_n مولدة لـ $\overline{\mathcal{R}(K)}$ ، $Qy \in \mathcal{R}(K)$ يوجد $x \in \mathcal{X}$ مع:

$$Kx = Qy,$$

إذن:

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, u_n \rangle u_n. \quad (6.2)$$

من جهة أخرى لنفرض أن $x \in \mathcal{N}(K)^\perp$ ، و لكون v_n مولدة لـ $\mathcal{N}(K)^\perp = \overline{\mathcal{R}(K^*)}$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle v_n.$$

ومننه

$$\begin{aligned} Kx &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle K v_n, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n. \end{aligned} \quad (7.2)$$

بالمطابقة بين (6.2) و (7.2) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ نجد:

$$\langle y, u_n \rangle = \sigma_n \langle x, v_n \rangle.$$

إذن:

$$\langle x, v_n \rangle = \frac{\langle y, u_n \rangle}{\sigma_n} \in l^2.$$

الإستزام العكسي

بافتراض أن الشرط (4.2) صحيح من خلال نظرية *Riesz-Fischer* من التحليل الداخلي:

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n \in \mathcal{X},$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} Kx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_n \rangle}{\sigma_n} K v_n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, u_n \rangle u_n &= Qy, \end{aligned}$$

$Qy \in \mathcal{R}(K)$ إذن $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$.

بالنسبة لـ 2: مولدة لـ $\mathcal{N}(K)^\perp$ ، $x \in \mathcal{N}(K)$ و لكون

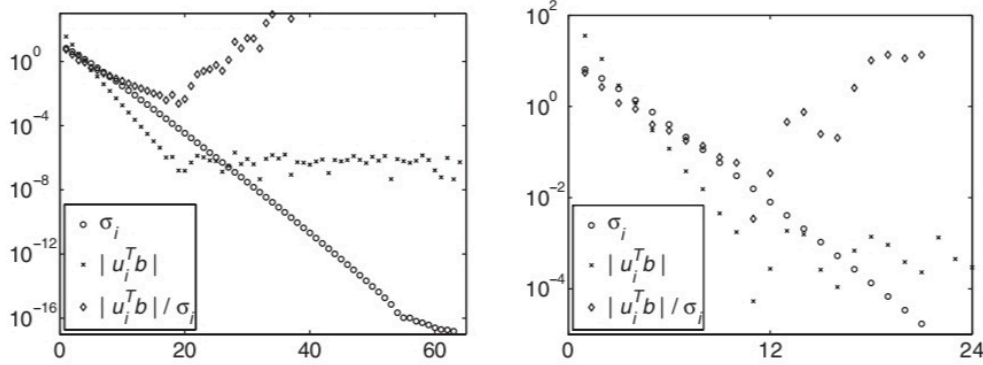
$$\{z \in \mathcal{X} / Kz = Qy\} = K^\dagger y + \mathcal{N}(K),$$

نظرا لأن x تنتمي إلى هذه المجموعة وإلى $\mathcal{N}(K)^\perp$ فإن x عنصر من النظم الأدنى في هذه المجموعة، أي:

$$x = K^\dagger Qy = K^\dagger y,$$

إذن: (5.2) محققة.

يسمى الشرط (4.2) **بشرط بيكارد** لوجود أفضل حل تقريبي، نقول أن أفضل حل تقريبي لـ $Kx = y$ موجود فقط إذا كانت المعاملات $(\langle y, u_n \rangle)$ تتناقص بسرعة كافية بالنسبة إلى القيم المنفردة σ_n .



مثال 3.3.2 نعتبر معادلة الحرارة التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y), \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0, \quad (8.2)$$

بالشروط الحدية

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (9.2)$$

و يفترض أن درجة الحرارة النهائية هي:

$$f(x) := u(x, 1), \quad x \in [0, \pi], \quad (10.2)$$

تعطى: $f(0) = f(\pi) = 0$ و نريد حساب درجة الحرارة الابتدائية:

$$v_0(x) := u(x, 0), \quad x \in [0, \pi]. \quad (11.2)$$

الدوال $\varphi_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$ تشكل نظام متعامد كلياً في $\mathcal{L}^2[0, \pi]$ حيث $v_0 \in [0, \pi]$ يمكن توسيعها إلى:

$$v_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad x \in [0, \pi],$$

مع

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} v_0(\tau) \sin(n\tau) d\tau.$$

باستعمال طريقة فصل المتغيرات لحل الإشكالية المباشرة (8.2) بالإعتماد على (9.2) و (11.2):

$$u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \varphi_n(x), \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0. \quad (12.2)$$

من خلال تعويض (12.2) في (8.2) نجد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \varphi_n''(x),$$

بحيث: $(\varphi_n'' = -n^2 \varphi_n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) \varphi_n(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n(t) \varphi_n(x). \quad (13.2)$$

من (13.2) تحل إشكالية القيمة الابتدائية:

$$a'_n(t) = -n^2 a_n(t), \quad t \geq 0.$$

$$a_n(0) = c_n,$$

إذن:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n(t) = c_n \exp(-n^2 t), \quad t \geq 0,$$

و منه $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-n^2 t) \varphi_n(x)$ ، حسب (10.2)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-n^2) \varphi_n(x), \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} v_0(\tau) \sin(n\tau) d\tau \exp(-n^2) \sin(nx), \end{aligned}$$

نضع

$$\mathcal{K}(x, \tau) := \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2) \sin(n\tau) \sin(nx),$$

إذن:

$$\int_0^{\pi} \mathcal{K}(x, \tau) v_0(\tau) d\tau = f(x). \quad (14.2)$$

و بالتالي فإن حل الإشكالية العكسية يعادل حل المعادلة التكاملية من النوع الأول، أي أنه تم إعطاء نظام منفرد لمؤثر التكامل في (14.2) بواسطة:

$$\left(e^{-n^2}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \right).$$

ومنه فإن الدوال المنفردة تامة في $\mathcal{L}^2[0, \pi]$ ، ولدينا: $\mathcal{D}(K^\dagger) = \mathcal{R}(K)$ و $\mathcal{N}(K) = \mathcal{N}(K^*) = 0$ ، إذا فقط إذا كان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2} |f_n|^2 < \infty, \quad (15.2)$$

محققة لما

$$f_n := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(\tau) \sin(n\tau) d\tau,$$


و هي معاملات فورييه¹ (الكلاسيكية لـ f) و في هذه الحالة الحل يعطى بـ:

$$v_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} f_n \sin(nx). \quad (16.2)$$

نتيجة 1.3.2 ✓ نستنتج من (15.2) و (16.2) أن هذه الإشكالية العكسية غير مطروحة جيداً، حيث أن الحل موجود فقط لما معاملات فورييه $\{f_n\}$ تتناقص بسرعة كبيرة جداً أسرع من $\{e^{-n^2}\}$. نفس ذلك بأنه يتم تضخيم خطأ صغير في معامل فورييه بواسطة المعامل $\{e^{n^2}\}$ فمثلاً يؤدي خطأ مقداره 10^{-3} في معاملات فورييه للبيانات إلى خطأ يبلغ حوالي 10^3 في قيمة درجة الحرارة الابتدائية، هذه الأخيرة تمثل العلاقة الضرورية بين **التقريب و الإستقرار**.

4.2 تعديل الإشكاليات الخطية المعتلة

تعريف 1.4.2 (التعديل)

هو طريقة مستقرة تحسب الحل التقريبي لإشكالية غير مستقرة، بعبارة أخرى تذبذب النموذج المعتل لتتحصل على نموذج مستقر حله u_α مع \hat{u} لما $u_\alpha \rightarrow \hat{u}$ و $\alpha \rightarrow 0$ هو حل النموذج المعتل، وذلك معناه الموازنة بين الاستقرار و التقريب.  سنطرح في هذا الجزء مؤثر التعديل، ونحاول شرح بعض طرق التعديل.

نظرية 1.4.2 ليكن X و Y فضاءين هيلبرتيين، و T مؤثر متراص

$$T : X \rightarrow Y.$$

و X, Y يقبلان التفكيك التالي:

$$X = N(T) \oplus (N(T))^\perp = N(T) \oplus \overline{R(T^*)}.$$

$$Y = \overline{R(T)} \oplus (R(T))^\perp = \overline{R(T)} \oplus N(T^*).$$

¹ إذا كان $f \in H$

إذن توجد أسس متعامدة ومتجانسة $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من \mathcal{X} و $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من \mathcal{Y} و متتالية $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ من الأعداد الحقيقية الموجبة $0 < \sigma_n \searrow$ بحيث :

$$\overline{\text{span}\{v_n\}} = (\mathcal{N}(\mathcal{T}))^\perp.$$

$$\overline{\text{span}\{u_n\}} = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{T})}.$$

و المؤثر \mathcal{T} يكتب على الشكل:

$$\mathcal{T}x = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n. \quad (17.2)$$

بالإضافة الى ذلك، المعادلة:

$$\mathcal{T}x = y$$

لها حل إذا وفقط إذا:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, u_n \rangle u_n.$$

مع

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle y, u_n \rangle|^2 \leq \infty.$$

في هذه الحالة تكون الحلول على الشكل :

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle y, u_n \rangle v_n.$$

من أجل كل $x_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$.

أي: \mathcal{T} يحقق شروط نظرية بيكاردي.

البرهان هو نتيجة لنظرية طيف المؤثرات ذاتية القرين المتراسة، نطبق على المؤثر $\mathcal{T}^* \mathcal{T}$ ونضع σ_n^2

و v_n متساوية القيم والوظائف الذاتية ل $\mathcal{T}^* \mathcal{T}$ ، وكذلك:

$$u_n = \frac{\mathcal{T}v_n}{\|\mathcal{T}v_n\|}.$$

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in \mathcal{X}$

$$\langle \mathcal{T}^* \mathcal{T}x, x \rangle = \langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}x \rangle \geq 0.$$

وبالتالي $\mathcal{T}^* \mathcal{T}$ معامل نصف محدد موجب، والقيم الذاتية غير سالبة. النظام $\{u_n, v_n, \sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ يدعى النظام المنفرد للمؤثر \mathcal{T} المعرف في (17.2) بتفكيك القيم المنفردة.

💡 إذا كان $\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \{0\}$ فإن $x_0 = 0$ والمعادلة (1.1) لها حل واحد على الأكثر، في حين أنه من اللازم والكافي لوجود حل ما أن تكون $y \in \mathcal{R}(\mathcal{T})$. ما نود فعله هو إنشاء المؤثر $\tilde{\mathcal{T}}$ حيث معكوسه محدود، وبهذا يسمح لنا إيجاد حل مستقر $\tilde{\mathcal{T}}z = y$ بحيث يكون المؤثر \mathcal{T} و $\tilde{\mathcal{T}}$ قريبين كفاية، وبهذا يكون الفرق $\|x - z\|$ للحلين x و z صغير. إذا ما اخترنا معامل α كقياس لاقتراب $\tilde{\mathcal{T}} := \mathcal{T}_\alpha$ ، ويجب ان نحصل على:

$$\mathcal{T}_\alpha^{-1} \mathcal{T}x \longrightarrow x.$$

لما $\alpha \rightarrow 0$ من أجل $x \in \mathcal{X}$.

💡 الإشكالية لما يكون $\dim y = \infty$ ، إذن المؤثر \mathcal{T}_α^{-1} لا يمكن ان يكون محدود بانتظام، لا بد من وجود متتالية $\{\alpha_k\}$ و $\alpha_k \rightarrow 0$ بحيث يكون $\|\mathcal{T}_{\alpha_k}^{-1}\| \rightarrow \infty$ لما $k \rightarrow \infty$ ، ايضا المؤثر $\mathcal{T}_\alpha^{-1} \mathcal{T}$ لا يمكن أن يتقارب نحو العنصر المحايد بمفهوم التنظيم (بما أنه جداء مؤثر محدود و مؤثر متراص هو مؤثر متراص)، و I ليس محدود، ومع ذلك يمكننا أن نحاول تطبيق شرط أنسب من شأنه أن يعطي استراتيجية مقبولة.

تعريف 2.4.2 (استراتيجية التعديل)
إن استراتيجية التعديل للمؤثر:

$$\mathcal{T} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}.$$

هي عائلة مؤثرات خطية محدودة:

$$R_\alpha : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}, \quad \alpha > 0 \quad (18.2)$$

بالإضافة الى:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} R_\alpha \mathcal{T}x = x, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (19.2)$$

حيث: $R_\alpha \mathcal{T}$ يتقارب نقطيا الى المؤثر المطابق. سنفترض أن y يمثل المعطيات المضبوطة و x حل المعادلة:

$$\mathcal{T}x = y.$$

(أو أحد الحلول الممكنة إذا كان $\mathcal{N}(\mathcal{T}) \neq \{0\}$) بتعبير أدق نأخذ:

$$y \in \mathcal{D}(\mathcal{T})^\dagger := \mathcal{R}(\mathcal{T}) \oplus (\mathcal{R}(\mathcal{T}))^\perp \subseteq \mathcal{Y}.$$

نسمي x^\dagger الحل بنظم أصغري للمعادلة القياسية:

$$\mathcal{T}^* \mathcal{T}x = \mathcal{T}^* y.$$

و هو ما يطلق عليه أفضل حل تقريبي.

نفرض أن y هو قياس مما يعرضه للضجيج، أي القياس الذي سنتعامل معه هو y^δ مع δ مستوى الضجيج ويحقق:

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta.$$

من الواضح أن استعمال معطيات دون ضجيج سيعطينا حلول أكثر دقة، لتبسيط الشرح سنقتي حد حتمي من الضجيج هنا.

بما أنه المعطيات y تلوثت بالضجيج α سيختار معامل التعديل من الشكل $\alpha = \alpha(\delta)$ حيث: $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ لما $\delta \rightarrow 0$.

تعريف 3.4.2 استراتيجية تعديل المؤثر:

$$\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}.$$

تكون مقبولة إذا كان من أجل كل x و y^δ مع $\| \mathcal{T}x - y^\delta \| \leq \delta$:

$$\| R_\alpha(\delta)y^\delta - x \| \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0. \quad (20.2)$$

$$\delta \rightarrow 0$$

1.4.2 طرق التعديل

من أجل تبسيط مؤثرات التعديل سنمر الى تطبيقها في طريقة من الطرق المعروفة في التعديل و ذلك من أجل الاستوفاء و التوضيح.

تعديل تيخونوف :

من أشهر طرق التعديل نجد طريقة تيخونوف وهي طريقة مباشرة (لأنها لا تعتمد على التكرارات)، حيث تمثل صعوبة هذا النوع من الطرق في تحديد واختيار معامل التعديل الذي يضمن تقارب الحل المعدل نحو الحل الدقيق.

في هذه الطريقة ننظر للمؤثر $\alpha I + \mathcal{T}^* \mathcal{T}$ كمعدل محتمل ل $\mathcal{T}^* \mathcal{T}$ ، نستبدل المعادلة $\mathcal{T}x = y$ بـ:

$$(\alpha I + \mathcal{T}^* \mathcal{T})x = \mathcal{T}^* y. \quad (21.2)$$

نجد أن

$$R_\alpha = (\alpha I + \mathcal{T}^* \mathcal{T})^{-1} \mathcal{T}^*.$$

حيث $R_\alpha : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ "عائلة تعديل تيخونوف".

تعريف 4.4.2

ليكن $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ مؤثر متراس و $\alpha > 0$ ثابت معطى. الحل المعدل لتيخونوف x_α من \mathcal{X} هو الحل الأصغري للتابع المعرف بـ:

$$J_\alpha(x) = \| \mathcal{T}x - y \|^2 + \alpha \| x \|^2 .$$

بشرط أن يكون موجودا، α هو معامل تعديل تيخونوف. تفتح هذه الصيغة التغيرية الباب أمام توسيع نطاق تعديل تيخونوف في العديد من الاتجاهات: لاستخدام فضاءات بناخ بدلا من فضاءات هيلبرت، لتوظيف الدوال المحدبة العامة كشرط تسوية، لدمج معلومات عن نوع الضجيج في تعريف مصطلح لاختلال المعطيات وأخيرا لتوسيع النطاق ليشمل الإشكاليات الغير خطية. توضح النظرية التالية العلاقة بين هذا التعريف والمؤثر \mathcal{T}_α و SVD ل \mathcal{T} .

نظرية 2.4.2 ليكن $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ مؤثر متراس مزود بنظام منفرد $\{\sigma_n, u_n, v_n\}$ يوجد حل تيخونوف المعدل وهو الحل الوحيد للمعادلة القياسية المعرف بـ:

$$x_\alpha = (\alpha I + \mathcal{T}^* \mathcal{T})^{-1} \mathcal{T}^* y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} \langle y, u_n \rangle v_n .$$

البرهان 1.4.2 المؤثر $\alpha I + \mathcal{T}^* \mathcal{T}$ يحقق :

$$\langle (\alpha I + \mathcal{T}^* \mathcal{T})x, x \rangle = \langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}x \rangle + \alpha \langle x, x \rangle \geq \alpha \| x \|^2 .$$

من نظرية *Riesz* فإن المعكوس موجود ويحقق:

$$\| (\alpha I + \mathcal{T}^* \mathcal{T})^{-1} \| \leq \frac{1}{\alpha} .$$

هذا يوضح أن معرف جيدا ووحيد، نكتب الآن المعادلة (21.2) على شكل النظام المنفرد ل \mathcal{T} نحصل على :

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha + \sigma_m^2) \langle x, v_m \rangle v_m + P_0 x = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m \langle y, u_m \rangle v_m .$$

حيث $P_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{T})$ الإسقاط العمودي على الفضاء العادم ل \mathcal{T} . إذا أخذنا الجداء السلمي لما سبق مع v_n بما أن $\langle P_0 x, v_n \rangle = \langle x, P_0 v_n \rangle$ نحصل على :

$$(\alpha + \sigma_m^2) \langle x, v_m \rangle = \sigma_m \langle y, u_m \rangle .$$

من أجل x_α من أجل كل $x \in X$ نضع $x = x_\alpha + w$ إذن :

$$\begin{aligned} J_\alpha(x_\alpha + w) &= \langle \mathcal{T}x_\alpha - y + \mathcal{T}w, \mathcal{T}x_\alpha - y + \mathcal{T}w \rangle + \alpha \langle x_\alpha + w, x_\alpha + w \rangle \\ &= J_\alpha(x_\alpha) + 2\langle w, (\alpha I + \mathcal{T}^*\mathcal{T})x_\alpha - \mathcal{T}^*y \rangle + \alpha \|w\|^2 + \|\mathcal{T}w\|^2. \\ &= J_\alpha(x_\alpha) + \alpha \|w\|^2 + \|\mathcal{T}w\|^2. \end{aligned}$$

نحصل على $J_\alpha(x_\alpha + w) \geq J_\alpha(x_\alpha)$ وهما متساويان إذا كان $w = 0$. توضيح أن x_α هو الحل الأصغري ل $J_\alpha(x_\alpha)$ وهو المطلوب.

هناك موازنة: للحفاظ على الحل المعدل x_α قريبا من x ، يجب إختيار α صغيرا. إذا نظرنا الى الحالة التي تكون فيها المصفوفة \mathcal{T} مربعة، العدد الشرطي \mathcal{T} هو نسبة القيم المنفردة من الحد الأدنى الى الأقصى ، وبالتالي سيكون العدد الشرطي ل \mathcal{T}_α هو $\sigma_\alpha = (\alpha + \sigma_1^2)/(\alpha + \sigma_n^2)$. من الواضح أن العدد الشرطي يؤول الى ∞ لما $n \rightarrow +\infty$ إذا كان $\alpha = 0$. من أجل كل n معطى ، نأخذ α صغير بما فيه الكفاية بحيث يكون $0 \leq \alpha \leq \sigma_n^2$ إذن :

$$\sigma_\alpha \geq \sigma_1^2/2\alpha.$$

هذا يوضح أن \mathcal{T}_α سيكون له عدد شرطي غير محدود عندما تكون $\alpha \rightarrow 0$ ، وبالتالي فإن الخطأ في حل المعادلة العادية سيزداد كلما زادت $\alpha \rightarrow 0$ كلما زاد مستوى الضجيج المتوقع في المعطيات. لذلك يجب علينا إيجاد قيمة معامل التعديل α ، ويجب أن نتوقع أن يعتمد ذلك بشدة على مستوى ضجيج في المعطيات.

نفترض أن المعطيات الحقيقية تقاس بدلا من ذلك على الشكل y^δ ، حيث $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ ، في حين $x^\dagger = \mathcal{T}^\dagger y$ هو أفضل حل تقريبي حقيقي ل $\mathcal{T}x = y$.

لدينا:

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\delta - x\| &= \|x_\alpha^\delta - x_\alpha + x_\alpha - x\|, \\ &\leq \|x_\alpha^\delta - x_\alpha\| + \|x_\alpha - x\|, \\ &\leq E_1 + E_2. \end{aligned} \quad (22.2)$$

حيث:

$$\begin{aligned} E_1 &= \|(\alpha I + \mathcal{T}^*\mathcal{T})^{-1}\mathcal{T}^*y^\delta - (\alpha I + \mathcal{T}^*\mathcal{T})^{-1}\mathcal{T}^*y\|, \\ &= \|(\alpha I + \mathcal{T}^*\mathcal{T})^{-1}\mathcal{T}^*(y^\delta - y)\|, \\ &\leq \|(\alpha I + \mathcal{T}^*\mathcal{T})^{-1}\mathcal{T}^*\| \|y^\delta - y\|. \end{aligned} \quad (23.2)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$(\sigma_n - \sqrt{\alpha})^2 = \sigma_n^2 + \alpha - 2\sigma_n\sqrt{\alpha} \geq 0,$$

ومنه:

$$\sigma_n^2 + \alpha \geq 2\sigma_n\sqrt{\alpha},$$

وهذا يكافئ:

$$\frac{1}{\sigma_n^2 + \alpha} \leq \frac{1}{2\sigma_n\sqrt{\alpha}},$$

أي:

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}},$$

إذن:

$$\| (\alpha I + \mathcal{T}^* \mathcal{T})^{-1} \mathcal{T}^* \| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

فتصبح العبارة (23.2) من الشكل:

$$E_1 \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \delta. \quad (24.2)$$

بوضع $x = \mathcal{T}^\dagger y$ نحصل على:

$$\begin{aligned} x_\alpha - x &= (\alpha I + \mathcal{T}^* \mathcal{T})^{-1} \mathcal{T}^* y - \mathcal{T}^\dagger y, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma_n}{\alpha + \sigma_n^2} - \frac{1}{\sigma_n} \right) \langle y, u_n \rangle v_n, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma_n^2 - \alpha - \sigma_n^2}{\sigma_n(\alpha + \sigma_n^2)} \right) \langle y, u_n \rangle v_n. \end{aligned}$$

بادخال النظيم و تربيع الطرفين نجد:

$$\begin{aligned} \| x_\alpha - x \|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\sigma_n(\alpha + \sigma_n^2)} \right)^2 |\langle y, u_n \rangle|^2, \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{(\alpha + \sigma_n^2)} \right)^2 \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^2}, \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{(\alpha + \sigma_n^2)} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^2}. \end{aligned}$$

حسب شرط بيكارديكون لدينا:

$$\exists E > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^2} < E.$$

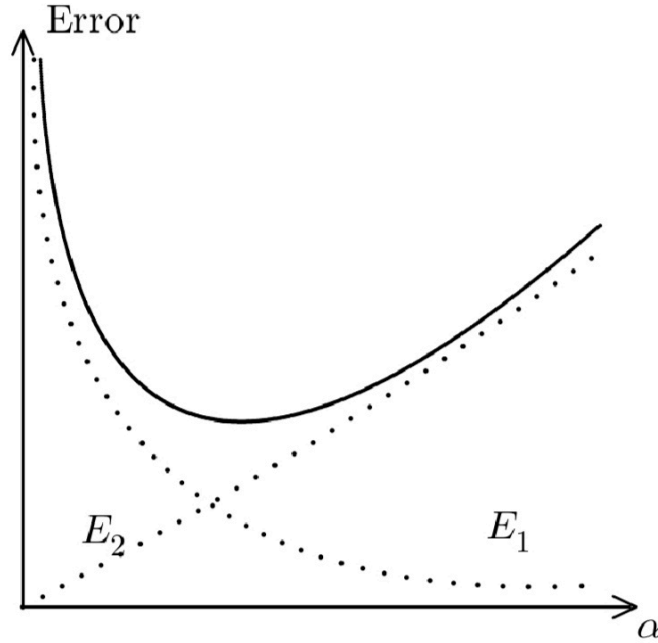
ومنه:

$$E_2 \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{2} E. \quad (25.2)$$

من (24.2) و (25.2) تصبح العبارة (22.2) من الشكل:

$$\|x_\alpha^\delta - x\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\delta + \frac{\sqrt{\alpha}}{2}E. \quad (26.2)$$

من أجل اختيار المعامل يجب علينا أن نأخذ بعين الاعتبار أن جزئي التقدير ما بين الإستقرار والتقارب المعطيين بالشكل التالي:



يتقاطعان في مكان بحيث تكون قيمة α هي التي تضمن أكبر كمية من الإستقرار مع أحسن تقريب. نقدم الآن إختيار مسبق لمعامل التعديل الذي سنشرحه لاحقاً، ليكن $\alpha(\delta) = \frac{\delta}{E} \rightarrow 0$ وبالتالي التقدير بين الحل المعدل بالضجيج والحل الدقيق يصبح:

$$\|x_\alpha^\delta - x\| \leq \delta^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}$$

تكرار Landweber :

كمثال على طريقة التعديل التكرارية ، لتكن التكرارات المعطاة بالعبارة التالية:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k - \mathcal{T}^*(\mathcal{T}\tilde{x}_k - y^\delta).$$

مع x_0 كيني من فضاء البدء.

نفترض أن المعادلة صحيحة بحيث $\|\mathcal{T}\| \leq 1$. لتقييم الخطأ الكلي نقوم بحل التكرار للخطأ:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k - x^\dagger &= (I - \mathcal{T}^*\mathcal{T})(\tilde{x}_{k-1} - x^\dagger) + \mathcal{T}^*(y^\delta - y), \\ &= (I - \mathcal{T}^*\mathcal{T})^k(x_0 - x^\dagger) + \sum_{j=0}^{k-1} (I - \mathcal{T}^*\mathcal{T})^j \mathcal{T}^*(y^\delta - y). \end{aligned}$$

الحد الأول $(I - \mathcal{T}^* \mathcal{T})^k (x_0 - x^\dagger)$ الذي يمثل خطأ التقريب يؤول إلى الصفر لما $k^2 \rightarrow \infty$ كما سنثبت أدناه. يمكن تقدير الحد الثاني الذي يتضمن الضجيج المنتشر عن طريق تفكيك القيم المنفردة.

$$\begin{aligned} \|(I - \mathcal{T}^* \mathcal{T})^j \mathcal{T}^*(y^\delta - y)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 (1 - \sigma_n^2)^{2j} \langle y^\delta - y, v_n \rangle^2, \\ &\leq \frac{1}{2^{j+1}} \|y^\delta - y\|^2. \end{aligned}$$

حيث تم استخدام العبارة:

$$\lambda(1 - \lambda)^l \leq \frac{1}{l+1}; \forall \lambda \in [0, 1], l \in \mathbb{N}.$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \|\sum_{j=0}^{k-1} (I - \mathcal{T}^* \mathcal{T})^j \mathcal{T}^*(y^\delta - y)\| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{2^{j+1}}} \|y^\delta - y\|, \\ &\leq (\sqrt{2k} + 1) \|y^\delta - y\|. \end{aligned} \quad (27.2)$$

📌 نلاحظ أن خطأ التقريب يؤول إلى الصفر في حين أنه من المحتمل أن ينفجر 🧨 الضجيج المنتشر عندما يؤول $k \rightarrow \infty$. إن مؤشر التكرار يلعب دور معامل التعديل و شرط التوقف هو المقابل لقاعدة إختيار المعامل في طرق التعديل المستمرة. في حالة المعطيات المضطربة، يتم دمج إجراء التكرار مع شرط التوقف كطريقة للتعديل و يجب على المرء إنهاء التكرار بشرط توقف مناسب يتضمن مستوى ضجيج δ . هذا يعني أن التكرار يجب إيقافه بعد k_* حيث k_* هو مؤشر التوقف.

5.2 معامل التعديل


تعريف 1.5.2 بشكل عام، التعديل هو تقريب لإشكالية معتلة من قبل عائلة من الإشكاليات المجاورة المطروحة جيداً، سنتعرف في هذا الجزء على مؤشر التعديل (معامل التعديل) وقاعدة إختيار معامل التعديل.

📌 نريد تقريب أفضل حل تقريبي $x^\dagger = \mathcal{T}^\dagger y$ لـ (1.1) بالنسبة للجانب الأيمن المحدد y في حالة ما إذا كانت المعطيات الدقيقة y ليست معرفة، و يوجد تقريب y^δ يحقق:

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta. \quad (28.2)$$

بجيث:

y^δ هي المعطيات المضطربة، δ هي مستوى الضجيج.

 k يمثل معامل التعديل

ملاحظة 1.5.2

✚ في حالة الإشكاليات غير المطروحة جيدا، لا يعد $\mathcal{T}^\dagger y^\delta$ تقريبا جيدا لـ $\mathcal{T}^\dagger y$ ، وهذا راجع لعدم محدودية \mathcal{T}^\dagger حتى لو كان موجودا (والذي لن يكون كذلك بشكل عام) .

✚ نحن نبحث عن بعض التقريبات مثل x_α^δ لـ x^\dagger الذي يعتمد بشكل مستمر على المعطيات المضطربة y^δ بحيث يمكن حسابها بطريقة مستقرة من ناحية، و تقلل مستوى الضجيج إلى الصفر من ناحية أخرى.

✚ سنرى أن قواعد إختيار معاملات التعديل يجب أن تكون مرتبطة ببعض المعلومات حول المعطيات المضطربة y^δ ، مستوى الضجيج δ أو كليهما معا .

✚ تعتمد طريقة التعديل أيضا على مفهوم الحل الذي نريد النظر فيه في حالة الحلول المتعددة لـ (1.1) ، كل ما قلناه حتى الآن و ما سنقوله يشير إلى تقريب الحد الأدنى (المربعات الصغرى) للحل $x^\dagger = \mathcal{T}^\dagger y$

كل هذه الاعتبارات تقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف 2.5.2 ليكن $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ مؤثر خطي محدود بين فضاءي هيلبرت \mathcal{X} و \mathcal{Y} ، من أجل كل:

$$\alpha_0 \in]0; +\infty],$$

و

$$\alpha \in]0; \alpha_0[,$$

ليكن

$$R_\alpha : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$$

مؤثر مستمر (ليس بالضرورة خطي) ، والعائلة ' R_α ' تسمى تعديل أو مؤثر تعديل لـ \mathcal{T}^\dagger . إذا كان من أجل كل $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ فإنه توجد قاعدة إختيار المعامل α و التي تحقق :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \{ \|R_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - \mathcal{T}^\dagger y\|, y^\delta \in \mathcal{Y}, \|y - y^\delta\| \leq \delta \} = 0. \quad (29.2)$$

$$\alpha : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Y} \rightarrow]0; \alpha_0[. \quad (30.2)$$

تحقق :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \{ \alpha(\delta, y^\delta), y^\delta \in \mathcal{Y}, \|y - y^\delta\| \leq \delta \} = 0. \quad (31.2)$$

من أجل $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$.
الثنائية (R_α, α) تسمى طريقة التعديل (مقاربة) للحل (1.1) إذا وفقط إذا كانت (29.2) و (31.2) محقتين .

تتكون طريقة التعديل من مؤثر تعديل و قاعدة إختيار المعامل التي تكون متقاربة، بمعنى أنه إذا كان معامل التعديل مختار وفق هذه القاعدة فإن الحلول المعدلة تتقارب فيها لما يؤول مستوى الضجيج إلى الصفر.

ملاحظة 2.5.2

يمكننا كذلك توسيع التعريف ليشمل كذلك إلى جانب إضطرابات الجانب الايمن، اضطرابات المؤثر (أي أخطاء النمذجة) في هذه الحالة نفرض إلى جانب \mathcal{T} هناك بعض التقريبات \mathcal{T}_η المعرفة بـ:

$$\|\mathcal{T} - \mathcal{T}_\eta\| \leq \eta,$$

تعتمد قاعدة إختيار المعامل هنا على \mathcal{T}_η ، η ، δ و y^δ في هذه الحالة يكون الشرط لطريقة التقارب التعديلي هو تحقق الشرط (30.2) لما:

$$\delta, \eta \rightarrow 0.$$

نلاحظ أنه لم نشترط على مؤثر التعديل $\{R_\alpha\}$ أن يكون عائلة المؤثرات الخطية، وإذا كان كذلك فإننا نطلق على الطريقة المقابلة بطريقة التعديل الخطي، و على العائلة $\{R_\alpha\}$ بمؤثر التعديل الخطي. ومع ذلك، من المنطقي أيضا التفكير في طرق التعديل الغير خطية لحل الإشكاليات الخطية، لكن من أجل الحفاظ على تعريف بسيط اخترنا دراسة طرق التعديل للمسائل الخطية.

تميز نوعين من قواعد إختيار المعامل:

تعريف 3.5.2 لتكن قاعدة إختيار المعامل α وفقا للتعريف (2.5.2)، إذا كانت α لا تعتمد على y^δ ، بل على مستوى الضجيج δ فقط فإننا نسمي α بقاعدة الإختيار المسبق للمعامل $\alpha = \alpha(\delta)$ ، خلاف ذلك نسمي α قاعدة إختيار اللاحق للمعامل و نكتب $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$.

و بالتالي فإن قاعدة الإختيار المسبق للمعامل تعتمد على مستوى الضجيج فقط ولا تعتمد على المعطيات المضطربة، أي أنها لا تعتمد على النتائج التي تم الحصول عليها أثناء الحساب الفعلي مثل القيمة $x_\alpha^\delta - y^\delta$ أين يكون:

$$x_\alpha^\delta = R_\alpha y^\delta.$$

هو الحل المعدل .

كما يمكننا وضع مثل هذه القاعدة قبل الحساب الفعلي ومنها أطلق عليها إسم قاعدة الإختيار المسبق للمعامل .

ملاحظة 3.5.2

يمكننا أيضا التفكير في قواعد إختيار المعامل التي تعتمد على y^δ فقط و ليس على مستوى الضجيج δ .

وضح **Bakushinskii** [2] أن هذه القواعد لا يمكن أن تكون جزءا من طريقة التعديل المتقاربة بمعنى التعريف (2.5.2) من أجل إشكالية معتلة .

نظرية 1.5.2 ليكن $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ مؤثر خطي محدود، لنفرض وجود تعديل $\{R_\alpha\}$ لـ \mathcal{T}^\dagger مع قاعدة إختيار المعامل α الذي يعتمد على y^δ فقط (ولا يعتمد على δ)، إذا كانت طريقة التعديل (R_α, α) تتقارب من أجل $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ فإن \mathcal{T}^\dagger محدود .

البرهان 1.5.2 إذا كانت α مستقلة عن δ (مستوى الضجيج) أي $\alpha(y^\delta)$ فإنه من (29.2) نجد:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \{ \|R_{\alpha(y^\delta)} y^\delta - \mathcal{T}^\dagger y\|, y^\delta \in \mathcal{Y}, \|y - y^\delta\| \leq \delta \} = 0. \quad (32.2)$$

خصوصا لما $\mathcal{T}^\dagger y = R_{\alpha(y^\delta)} y^\delta$ ، $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ ومما سبق (46.2) من أجل أي متتالية $\{y_n\}$ من $\mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ تتقارب نحو $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ نجد:

$$\mathcal{T}^\dagger y_n = R_{\alpha(y_n)} y_n \rightarrow \mathcal{T}^\dagger y.$$

إذن \mathcal{T}^\dagger مستمر في $\mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ فهو محدود.

نتيجة 1.5.2 \blacksquare إذا كان \mathcal{T}^\dagger غير محدود فإنه لا يمكن لإستراتيجية إختيار المعامل الخالية من الأخطاء أن تؤدي إلى طريقة تعديل متقاربة.

\square سنتطرق الآن إلى أهم قواعد إختيار المعامل التي تؤدي إلى طرق تعديل متقاربة، ولنقدم بعض الأسئلة:

؟ كيف يمكن إنشاء مؤثر التعديل ؟

؟ كيف يمكن بناء قواعد إختيار المعامل التي تؤدي إلى تقارب طرق التعديل ؟

؟ كيف يتم تنفيذ هذه الخطوات بطريقة 'مثالية' ؟

بالنسبة للمؤثرات الخطية \mathcal{T} ، يمكن إعطاء الإجابة الأولية التالية عن السؤال الأول :

قضية 1.5.2 ليكن من أجل كل $\alpha > 0$ و R_α مؤثر مستمر فإن العائلة $\{R_\alpha\}$ هي تعديل لـ \mathcal{T}^\dagger إذا كان:

$$R_\alpha \rightarrow \mathcal{T}^\dagger \quad (33.2)$$

نقطيا على $\mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ لما $\alpha \rightarrow 0$ ، من أجل $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ فإنه توجد قاعدة إختيار مسبق للمعامل α بحيث تكون (R_α, α) طريقة تعديل متقاربة للحل .

البرهان 2.5.2 ليكن $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ ونفرض أن :

$$\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

دالة رتيبة تحقق:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma(\epsilon) = 0.$$

إذن:

$$\forall \epsilon > 0 : \|R_{\sigma(\epsilon)}y - \mathcal{T}^\dagger y\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

حيث $R_{\sigma(\epsilon)}$ مستمر معناه:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \rho(\epsilon) : \|z - y\| \leq \rho(\epsilon) \Rightarrow \|R_{\sigma(\epsilon)}z - R_{\sigma(\epsilon)}y\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

ولتكن الدالة:

$$\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

رتيبة تماما، مستمرة و تحقق:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho(\epsilon) = 0.$$

ومنه فإن الدالة العكسية ρ^{-1} المعرفة على نفس مجال ρ رتيبة تماما، مستمرة و تحقق:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho^{-1}(\delta) = 0.$$

بتمديد ρ^{-1} على كل \mathbb{R}_+ ، ولتكن الدالة

$$\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \delta \rightarrow \sigma(\rho^{-1}(\delta))$$

رتيبة و تحقق:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0.$$

بالإضافة إلى ذلك:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta = \rho(\epsilon) : \|y^\delta - y\| \leq \delta &\Rightarrow \|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - \mathcal{T}^\dagger y\| \\ &\leq \|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - R_{\alpha(\delta)}y\| + \|R_{\alpha(\delta)}y - \mathcal{T}^\dagger y\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

حيث $\alpha(\delta) = \sigma(\epsilon)$ ، وعليه من طريقة التعديل (R_α, α) و تحقق (29.2) ، (31.2) نجد أن α تعرف قاعدة الإختيار المسبق للمعامل .

ملاحظة 4.5.2

يمكننا تعريف عمليات التعديل أيضا بأنها تقريب نقطي للمعكوس المعمم لـ \mathcal{T} .

إذا كانت $\{R_\alpha\}$ خطية و محدودة بانتظام³ وكان $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ غير مغلق فإن التقارب في (33.2) لا يمكن أن يكون في نظيم المؤثر و \mathcal{T}^\dagger يمكن أن يكون محدود. فإنه حسب نظرية **Banach-steinhaus** نجد:

$$\|R_\alpha\| \rightarrow +\infty, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (34.2)$$

وذلك إذا كان $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ غير مغلق، وحسب مبدأ المحدودية بانتظام يعني أنه يوجد y من \mathcal{Y} يحقق:

$$\|R_\alpha y\| \rightarrow +\infty, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

نعرف

$$x_\alpha = R_\alpha y. \quad (35.2)$$

الذي يتقارب نحو $\mathcal{T}^\dagger y$ على المجموعة الكثيفة $\mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$.

قضية 2.5.2 ليكن $\{R_\alpha\}$ تعديل خطي، x_α معرف بـ (35.2) ومن أجل كل y من \mathcal{Y} نجد:

$$\forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger) : \{x_\alpha\} \rightarrow \mathcal{T}^\dagger y, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad (36.2)$$

وإذا كان

$$\sup\{\|\mathcal{T}R_\alpha\|, \alpha > 0\} < \infty, \quad (37.2)$$

فإن

$$\|x_\alpha\| \rightarrow \infty, \quad \alpha \rightarrow 0, y \notin \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger).d \quad (38.2)$$

البرهان 3.5.2 لدينا حسب الملاحظة السابقة أن R_α تتقارب نقطيا نحو \mathcal{T}^\dagger على $\mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ لذلك من خلال (7.1) نجد أن $\mathcal{T}R_\alpha$ تتقارب نحو Q نقطيا على المجموعة الكثيفة $\mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$. ولدينا $\|\mathcal{T}R_\alpha\|$ محدودة بانتظام، نفرض أنه توجد متتالية $\{\alpha_n\}$ تتقارب نحو الصفر حيث تكون $\{\|x_{\alpha_n}\|\}$ محدودة وتملك متتالية جزئية $\{x_{\alpha_n}\}$ تتقارب نقطيا بضعف نحو $x \in \mathcal{T}$ حسب إستمرارية \mathcal{T} نجد:

$$\mathcal{T}x_{\alpha_n} \longrightarrow \mathcal{T}x,$$

³ لتكن المجموعة F المعرفة بـ $F = \{f_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}, \quad i \in I\}$ ، نقول أنها محدودة بانتظام إذا وجد عدد حقيقي M يحقق:

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall i \in I : |f_i(x)| \leq M.$$

من جهة أخرى:

$$\mathcal{T}x_{\alpha_n} = \mathcal{T}R_{\alpha_n}y \longrightarrow Qy,$$

إذن $\mathcal{T}x = Qy$ وبالتالي $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$.

(أما إذا كانت $y \notin \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ فإنه لا توجد متتالية محدودة $\{x_{\alpha_n}\}$ حيث α_n من الشكل (α_n, δ_n, y) وبالتالي (38.2) محققة.

في القضية (1.5.2) رأينا أنه إذا كانت (33.2) محققة فإنه توجد قاعدة الاختيار المسبق α تحقق طريقة تعديل متقاربة (R_α, α) ، أي أنه يمكننا وصف طريقة الاختيار المسبق للمعامل كما يلي:

قضية 3.5.2 ليكن $\{R_\alpha\}$ مؤثر تعديل خطي، من أجل كل y من $\mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ و $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ قاعدة الاختيار المسبق للمعامل. فإن (R_α, α) طريقة تعديل متقاربة إذا وفقط إذا كانت:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0. \quad (39.2)$$

و

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \|R_{\alpha(\delta)}\| = 0. \quad (40.2)$$

محققتين.

البرهان 4.5.2

الإستلزام الأول:

نفرض أن (39.2) و (40.2) محققتين، و من الترميز (35.2) لدينا من أجل كل $y^\delta \in \mathcal{Y}$ و (28.2) نجد:

$$\|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - \mathcal{T}^\dagger y\| \leq \|x_{\alpha(\delta)} - \mathcal{T}^\dagger y\| + \|x_{\alpha(\delta)} - R_{\alpha(\delta)}y^\delta\|,$$

$$\leq \|x_{\alpha(\delta)} - \mathcal{T}^\dagger y\| + \|R_{\alpha(\delta)}\|\delta,$$

من (36.2)، (39.2) و (40.2) نجد (45.2) محققة.
الإستلزام العكسي:

نفرض أن α قاعدة الاختيار المسبق للمعامل، إذن (39.2) محققة من التعريف. و لنفرض أن (40.2) غير محققة، إذن توجد متتالية $\delta_n \rightarrow 0$ تحقق:

$$\|\delta_n R_{\alpha(\delta_n)}\| \geq C > 0.$$

وبالتالي توجد متتالية $\{z_n\}$ في \mathcal{Y} مع $\|z_n\| = 1$ حيث:

$$\|\delta_n R_{\alpha(\delta_n)} z_n\| \geq \frac{C}{2}.$$

من أجل كل $y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ ، و بوضع $y_n := y + \delta_n z_n$ نجد:

$$R_{\alpha(\delta_n)} y_n - \mathcal{T}^\dagger y = (R_{\alpha(\delta_n)} y - \mathcal{T}^\dagger y) + \delta_n R_{\alpha(\delta_n)} z_n.$$

لا نتقارب نحو الـ 0، لأن الحد الأول يتقارب نحو الـ 0 أما الحد الثاني فلا.

ملاحظة 5.5.2

إذا إستبدلنا (40.2) بـ:

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \delta \|R_{\alpha(\delta)}\| < +\infty. \quad (41.2)$$

فإن (R_{α}, α) متقاربة بضعف⁴ ، أي من أجل كل متتالية $\{\delta_k\} \rightarrow 0$ و $y_k \in \mathcal{Y}$ مع $\|y - y_k\| \leq \delta_k$ نجد أن $\{R_{\alpha(\delta_k)} y_k\}$ متقاربة بضعف نحو $\mathcal{T}^\dagger y$.
العكس: (41.2) مهمة بالنسبة للتقارب بضعف أي أنه إذا كانت هذه الأخيرة غير محققة فإنه توجد متتالية $\{\delta_k\}$ من أجل y_k حيث $\{R_{\alpha(\delta_k)} y_k\}$ تتباعد في الطوبولوجيا الضعيفة.⁵

6.2 تحليل تقارب طرق التعديل ودوال المصفاة

في هذا الجزء سنقدم طريقة أخرى مقترحة في المرجع [23] من أجل دراسة طرق التعديل والتي تعتمد على مؤثرات التلطيف ودوال المصفاة.

ليكن \mathcal{T} مؤثر خطي بين فضاءي هيلبرت \mathcal{X} و \mathcal{Y} ، من أجل التبسيط نفرض أن \mathcal{T} متراص. حيث: $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} : \mathcal{T}$ لديه أساس منفرد كامل $\{v_n, u_n, \sigma_n\}_n$ مع u_n و v_n متعامدين ومتجانسين بحيث يكون $\mathcal{T} v_n = \sigma_n u_n$ و $\mathcal{T}^* u_n = \sigma_n v_n$. المعكوس المعمم \mathcal{T}^\dagger لديه التمثيل:

$$\mathcal{T}^\dagger g = \sum_n \sigma_n^{-1} \langle g, u_n \rangle v_n. \quad (42.2)$$

القيم المنفردة σ_n للمؤثر \mathcal{T} تؤول نحو الصفر. وبالتالي \mathcal{T}^\dagger غير معرف على \mathcal{Y} كاملاً. لنقم الآن بتمديد \mathcal{T}^\dagger إلى $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{T}^\dagger)}$ المعروف على كل \mathcal{Y} . إذا كان $g \in \mathcal{N}(\mathcal{T}^\dagger)$ حيث $\mathcal{T}^\dagger g = 0$ إذن علينا النظر فقط إلى $g \in \overline{\mathcal{R}(\mathcal{T})} \setminus \mathcal{R}(\mathcal{T})$ حيث نستخدم التمثيل (42.2) هذا يعني نقوم بتمديد \mathcal{T}^\dagger من خلال تطبيق السلسلة (42.2) ليس فقط على $g \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ ولكن على كل $g \in \mathcal{Y}$ لكن بالطبع $\mathcal{T}^\dagger g$ لم يعد بالضرورة عنصراً من عناصر \mathcal{X} بعد الآن.

لإيجاد رتبة $\overline{\mathcal{T}^\dagger}$ نقدم السلم الهلبرتي للفضاءات \mathcal{X}_v ، بالطريقة التالية: من أجل $v \geq 0$ نضع:

$$\mathcal{X}_v = \{f \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp : f \in \mathcal{D}((\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{-\frac{v}{2}})\} = \mathcal{R}((\mathcal{T}^* \mathcal{T})^{\frac{v}{2}}).$$

⁴ x_n متقاربة بضعف نحو l معناه $\langle l, v \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, v \rangle$. $\forall v \in \mathcal{H}$.

⁵ هي الطوبولوجيا الأقل مفتوحة والتي تضمن إستمرارية كل التطبيقات المحتواة فيها.

من أجل $v < 0$ ليكن \mathcal{X}_v هو الفضاء الثنوي لـ \mathcal{X}_{-v} مع الإحتفاظ بالجداء السلبي لـ \mathcal{X} .
في هذا الفضاء نعرف النظيم:

$$\|f\|_v^2 = \sum_n \sigma_n^{-2v} |\langle f, v_n \rangle|^2.$$

نلاحظ أنه من أجل $v \geq 0$ لدينا $\mathcal{X}_v \subset \mathcal{X} \cap \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp$. من أجل $v = 0$ نستعمل $\|f\|$ بدلا من $\|f\|_0$ مع العلم أن التساوي ينطبق فقط على $f \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp$ بالنسبة للقيمة الكيفية $f = f_v + \tilde{f}$ مع $f_v \in \mathcal{X}_v$ و $\tilde{f} \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$ لدينا $\|f\|_v = \|f_v\|_v$ أو $\|\tilde{f}\|_v = 0$ من أجل $\tilde{f} \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$ وهو ما يعني أنه بالنسبة للفضاءات $\tilde{\mathcal{X}}_v = \mathcal{X}_v \oplus \mathcal{N}(\mathcal{T})$ الـ $\|\cdot\|_v$ هو فقط نصف تنظيم نحصل تحديدا على:

$$\|f\|_{-1} = \|\mathcal{T}f\|, \quad \forall f \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp.$$

من الواضح أنه لدينا $\mathcal{X}_{v+\mu} \subset \mathcal{X}_v$ من أجل $\mu > 0$.

بطريقة ماثلة نعرف أيضا السلم الهلبرتي للفضاءات \mathcal{Y}_v مع النظيم:

$$\|g\|_v^2 = \sum_n \sigma_n^{-2v} |\langle g, u_n \rangle|^2.$$

نحصل بعد ذلك على النتائج التالية:

نظرية 1.6.2 المؤثر $\mathcal{T} : \mathcal{X}_v \oplus \mathcal{N}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{Y}_{v+1}$ ويحقق $\|\mathcal{T}\| = 1$.

البرهان 1.6.2 باستخدام تعريف النظيم نحصل على $f \in \mathcal{X}_v \oplus \mathcal{N}(\mathcal{T})$ مع $\mathcal{T}^* u_n = \sigma_n v_n$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}f\|_{v+1}^2 &= \sum_n \sigma_n^{-2(v+1)} |\langle \mathcal{T}f, u_n \rangle|^2 \\ &= \sum_n \sigma_n^{-2(v+1)} |\langle f, \mathcal{T}^* u_n \rangle|^2 \\ &= \sum_n \sigma_n^{-2(v+1)} |\sigma_n \langle f, v_n \rangle|^2 \\ &= \sum_n \sigma_n^{-2v} |\langle f, v_n \rangle|^2 \\ &\leq \|f\|_v^2. \end{aligned}$$

من أجل $f \in \mathcal{X}_v$ تكون لدينا مساواة ثبت أن: $\|\mathcal{T}\| = 1$.

نظرية 2.6.2 $\overline{\mathcal{T}^\dagger} : \mathcal{Y}_v \oplus \mathcal{N}(\mathcal{T}^*) \rightarrow \mathcal{X}_{v-1}$ حيث $\|\overline{\mathcal{T}^\dagger}\| = 1$. من أجل $v > 0$ لدينا $\overline{\mathcal{T}^\dagger} = \mathcal{T}^\dagger$

البرهان 2.6.2 $\langle T^\dagger g, v_n \rangle = \sigma_n^{-1} \langle g, u_n \rangle$. $g \in Y_v \oplus \mathbb{N}(\mathcal{T}^*)$

$$\begin{aligned} \|\overline{\mathcal{T}^\dagger} g\|_{v-1}^2 &= \sum \sigma_n^{2(1-v)} |\langle \overline{\mathcal{T}^\dagger} g, v_n \rangle|^2, \\ &= \sum \sigma_n^{2(1-v)} |\sigma_n^{-1} \langle g, u_n \rangle|^2, \\ &= \sum \sigma_n^{-2v} |\langle g, u_n \rangle|^2, \\ &= \|P_{\overline{\mathcal{R}(\mathcal{T})}} g\|_v^2, \\ &\leq \|g\|_v^2. \end{aligned} \quad (43.2)$$

حيث $P_{\overline{\mathcal{R}(\mathcal{T})}}$ يشير الى الاسقاط على $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{T})}$. من أجل $g \perp \mathcal{N}(\mathcal{T}^*)$ نجد
 $\|\overline{\mathcal{T}^\dagger} g\|_{v-1} = \|g\|_v$.

مؤثر التعديل لـ \mathcal{T}^\dagger سنرمز له بـ \mathcal{T}_γ بدلا من R_α في كل ممايلي.

1.6.2 إنتظام المعكوس المعمم

فيما يلي ندرس طرق التعديل من خلال تطبيق النظرية (3.6.2) مع $v = 0$ و $v = 1$. نبدأ بالحالة $v = 0$ حيث المؤثر \mathcal{T}^\dagger معرف من \mathcal{Y} نحو \mathcal{X}_{-1} .

نظرية 3.6.2 نفترض أن $M_\gamma : \mathcal{X}_{-1} \rightarrow \mathcal{X}$ هي عائلة المؤثرات الخطية المستمرة حيث:

$$\|M_\gamma f\| \leq c(\gamma) \|f\|_{-1} = c(\gamma) \|\mathcal{T}f\|, \forall f \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp \quad (i)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \|M_\gamma f - f\| = 0, \forall f \in \mathcal{N}(\mathcal{T})^\perp \quad (ii)$$

$$c(\gamma)\varepsilon \rightarrow 0 : \gamma \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0 \quad (iii)$$

إذن: $\mathcal{T}_\gamma := M_\gamma \overline{\mathcal{T}^\dagger}$ تعديل خطي لـ \mathcal{T}^\dagger من أجل إعادة بناء f .

البرهان 3.6.2 نفرض أن $g \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ و $g^\varepsilon \in \mathcal{Y}$ بحيث يكون $\|g - g^\varepsilon\| \leq \varepsilon$ ، ثم نحصل على مع $\mathcal{T}^\dagger g = \overline{\mathcal{T}^\dagger} g$ لكل $g \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^\dagger)$ والنظرية (3.6.2).

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_\gamma g^\varepsilon - \mathcal{T}^\dagger g\| &\leq \|\mathcal{T}_\gamma(g^\varepsilon - g)\| + \|\mathcal{T}_\gamma g - \mathcal{T}^\dagger g\|, \\ &= \|M_\gamma \overline{\mathcal{T}^\dagger}(g^\varepsilon - g)\| + \|\mathcal{T}_\gamma g - \mathcal{T}^\dagger g\|, \\ &\leq c(\gamma) \|\overline{\mathcal{T}^\dagger}(g^\varepsilon - g)\|_{-1} + \|(M_\gamma - I)\mathcal{T}^\dagger g\|, \\ &\leq c(\gamma) \|g^\varepsilon - g\| + \|(M_\gamma - I)\mathcal{T}^\dagger g\| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (44.2)$$

حيث $\varepsilon \rightarrow 0$ و γ بالإضافة إلى ذلك $c(\gamma)\varepsilon \rightarrow 0$.

ملاحظة 1.6.2 ينص الشرط (i) على أن رتبة إنتظام مؤثر التلطيف M_γ يجب أن تكون من نفس رتبة إنتظام المؤثر \mathcal{T} .

هناك فئتان واضحتان من الأمثلة المهمة للنظرية المذكورة أعلاه. أولاً نأخذ بعين الاعتبار المؤثرات M_γ بحيث:

$$M_\gamma v_n = F_\gamma(\sigma_n) v_n \quad (45.2)$$

بالنسبة لدوال التصفية المناسبة F_γ الحالات الخاصة هي التي تحمل القيمة المنفردة المقطوعة مع $F_\gamma(\sigma) = 1$ من اجل: $\sigma \geq \gamma$ ماعدا الصفر، وتعديل تيخونوف مع الجزء المعدل $\gamma^2 \|Bf\|^2$ حيث:

$Bv_n = \beta_n v_n$ مع $\beta_n^2 \geq c\sigma_n$ وحسب [20] يكون لدينا:

$$F_\gamma(\sigma_n) = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \gamma^2 \beta_n^2}$$

أو طريقة لاندوير مع

$$F_m(\sigma) = 1 - (1 - \beta\sigma_n^2)^m$$

من اجل: $\gamma = \frac{1}{m}$ يمكننا الاقتباس من [20] الشروط التالية لدالة المصفاة F_γ .

نظرية 4.6.2 نفرض ان:

$$\sup_n |F_\gamma(\sigma_n) \sigma_n^{-1}| = c(\gamma) < \infty \quad (46.2)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} F_\gamma(\sigma_n) = 1 \quad (47.2)$$

من اجل كل نقطة من σ_n .

$$|F_\gamma(\sigma_n)| \leq c \quad (48.2)$$

بعد ذلك $\mathcal{T}_\gamma := \overline{M_\gamma \mathcal{T}^\dagger}$ مع $M_\gamma v_n = F_\gamma(\sigma_n) v_n$ هو تعديل خطي لـ \mathcal{T}^\dagger لايجاد f .

طريقة التعديل بشبه القلب

بعد طرحنا في الفصل السابق لمفهوم طرق التعديل وشرح بعض من أهم وأشهر طرق التعديل والأكثر استعمالاً (تعديل تيخونوف، لاندويبار)، سنرجع في هذا الفصل إلى السؤال الجوهرى الذى تتمحور عليه مذكرتنا ألا وهو: هل هنالك طرق تنظيم تعنى مباشرة بالمعادلات التفاضلية بمشتقات جزئية.¹ أول تعديل طرح فى هذا النسق هو طريقة شبه القلب المقترحة من قبل **Lions & Lattes** سنة 1967. سنطرح الآن معادلة انتشار (Equation D'evolution) بكتابة تجريدية:

$$u' + \mathcal{T}u = 0; t > 0, u(0) = u_0. \quad (1.3)$$

مع $\mathcal{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ مؤثر تفاضلى ذاتى القرين غير محدود. الإشكالية (1.3) هي إشكالية مباشرة ومطروحة جيداً أي لا تحتاج إلى تعديل، من السهل إثبات أن حل هاته الإشكالية يعطى بالعلاقة:

$$u(t) = e^{-t\mathcal{T}} u_0. \quad (2.3)$$

بالإضافة إلى ذلك:

$$\begin{aligned} \| u(t) \| &= \| e^{-t\mathcal{T}} u_0 \|, \\ &\leq \| e^{-t\mathcal{T}} \| \| u_0 \|, \\ &\leq \| u_0 \| . \end{aligned}$$

هذا ينتج منه الإستقرار والوحدانية.

الآن سنقوم بطرح الإشكالية العكسية. لتكن $u(T) = g$ ونريد حل الإشكالية:

$$\begin{cases} u' + \mathcal{T}u = 0 & ; t > 0, \\ u(T) = g. \end{cases} \quad (3.3)$$


¹ تعديل تيخونوف ولاندويبار بمعادلة مؤثر متراص، أي هو تعديل في الحالة العامة ويحتاج إلى تغيير المعادلات التفاضلية إلى شكل معادلات: $\mathcal{T}x = y$

بعبارة أخرى نريد إعادة إنشاء القيمة الابتدائية للمعادلة انطلاقاً من قياس للحل في الزمن T . من أجل إيجاد صيغة حل الإشكالية (3.3). ننتقل ببناء g وذلك بتعويض $t = T$ في الحل (2.3). أي: $g = u(T) = e^{-T\mathcal{T}} u_0$ وبالتالي:

$$u_0 = e^{T\mathcal{T}} g. \quad (4.3)$$

نعوض (4.3) في (2.3) من أجل إيجاد صيغة حل (3.3).

$$\begin{aligned} u(T) &= e^{-t\mathcal{T}} e^{T\mathcal{T}} g, \\ &= e^{(T-t)\mathcal{T}} g. \end{aligned} \quad (5.3)$$

من أجل كل $0 \leq t < T$ ، وبما أن المؤثر \mathcal{T} غير محدود ينتج مباشرة أن دالة المؤثر: $e^{(T-t)\mathcal{T}}$ غير محدودة. هذا يمكن تفسيره رياضياً أن الإشكالية (3.3) غير مستقرة بمعنى آخر الحل (5.3) غير قابل للحساب رقمياً، لأن تأثر السبب g بأخطاء التدوير ينتج عنه إنفجار  في الحل. من أجل التوضيح أكثر سنأخذ كتابة صريحة للمؤثر \mathcal{T} :

$$\mathcal{T} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\Delta.$$

مع $x \in \Omega = [0, a]$ في هاته الحالة $D(\mathcal{T}) = \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ مع $\mathcal{H}(\Omega) = L^2(\Omega)$ والمؤثر \mathcal{T} هو مؤثر ذاتي القرين معرف موجب. بمعنى آخر قابل للتقطير (طيفه هو طيف نقطي فقط أي يمتلك قيم ذاتية وأشعة ذاتية) أي توجد $(\lambda_n, \varphi_n(x))_{n \geq 1}$ حيث:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x).$$

مع

$$0 < \mu < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \longrightarrow +\infty$$

الصيغة الصريحة ل $(\lambda_n, \varphi_n(x))_{n \geq 1}$ تعطى بـ:

$$\left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right)_{n \geq 1}.$$

الكتابة الصريحة للمعادلة (3.3) تصبح:

$$\begin{cases} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0; & (x, t) \in \Omega \times [0, T]. \\ u(x, t) = 0; & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \\ u(x, t) = g; & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.3)$$

الحل (5.3) في الحالة الصريحة يكتب على الشكل:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n \geq 1} e^{(T-t)\lambda_n} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n, \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} e^{(T-t)(\frac{n\pi}{a})^2} \int_0^a \sin(\frac{n\pi}{a}x) g(x) dx \sin(\frac{n\pi}{a}x). \end{aligned} \quad (7.3)$$

حيث: $e^{(T-t)\lambda_n} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty$
أي اضطراب الترددات العالية والذي يفسر عدم استقرار الإشكالية العكسية للإنتشار، وهذا ما يبين حاجتنا إلى تعديل هاته الإشكالية من أجل إيجاد طريقة منتظمة تمكننا من حساب حلها تقريبا.

1.3 طريقة شبه القلب نظرة تجريدية

طريقة شبه القلب تعتمد أساسا على استبدال المؤثر الغير محدود \mathcal{T} في المعادلة (3.3) بالمؤثر المحدود \mathcal{T}_α حيث:

$$\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T} - \alpha \mathcal{T}^2,$$

$$\| \mathcal{T}_\alpha \| = \| \mathcal{T} - \alpha \mathcal{T}^2 \| \leq \sup_{n \geq 1} (\lambda_n - \alpha \lambda_n^2) \leq \frac{1}{4\alpha},$$

بالإضافة إلى ذلك:

$$\| \mathcal{T}_\alpha - \mathcal{T} \| \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

لتصبح المعادلة (3.3) بشكلها المعدل:

$$\begin{cases} u' + \mathcal{T}u - \alpha \mathcal{T}^2 u = 0; & t > 0. \\ u(T) = g. \end{cases} \quad (8.3)$$

حل هاته المعادلة يعطى بالعلاقة:

$$u(t) = e^{(T-t)\mathcal{T}_\alpha} g.$$

وبالتالي القيمة الابتدائية ستكون:

$$\begin{aligned} u(0) = u_0 &= e^{T\mathcal{T}_\alpha} g, \\ &= e^{T\mathcal{T} - \alpha T\mathcal{T}^2} g, \\ &= e^{-\alpha T\mathcal{T}^2} e^{T\mathcal{T}} g. \end{aligned} \quad (9.3)$$

(9.3) هو حل معادلة المؤثر المتراص المعدلة، بعبارة أخرى الشكل (1.1) لإعادة بناء القيمة الابتدائية قبل التعديل يعطى بالصيغة:

$$e^{-T\mathcal{T}} u_0 = g.$$

المكافئة لـ: (1.1)

$$\begin{aligned} x^\dagger &= u_0 = \mathcal{T}^\dagger y = e^{T\mathcal{T}} g. \\ x_\alpha &= u_{0,\alpha} = R_\alpha(\mathcal{T})y = e^{T\mathcal{T}_\alpha} g = F_\alpha(\mathcal{T})\mathcal{T}^\dagger y = e^{-\alpha T\mathcal{T}^2} e^{T\mathcal{T}} g. \end{aligned}$$

أي:

$$\begin{cases} R_\alpha(\mathcal{T}) = e^{T\mathcal{T}_\alpha}. \\ F_\alpha(\mathcal{T}) = e^{-\alpha T\mathcal{T}^2}. \end{cases}$$

يجب الأخذ بعين الاعتبار أن g هو قياس فيزيائي للحل في الزمن T ، وبالتالي سيكون ملوث بالضجيج، هذا ما يجعلنا نتعامل مع g^δ بدلا من g حيث: $\|g^\delta - g\| \leq \delta$ وعليه ينتج:

$$\begin{aligned} x_\alpha^\delta &= u_{0,\alpha}^\delta = R_\alpha^\delta(\mathcal{T})y^\delta \\ &= e^{T\mathcal{T}_\alpha} g^\delta. \end{aligned} \quad (10.3)$$

من أجل تبيان أن طريقة شبه القلب هي طريقة تعديل يجب أن نبين أن:

$$\|R_\alpha^\delta(\mathcal{T})y^\delta - x^\dagger\| \longrightarrow 0, \quad \delta \longrightarrow 0.$$

أي: $R_\alpha^\delta(\mathcal{T})$ مؤثر تعديل، بمعنى آخر نجد:

$$\|u_{0,\alpha}^\delta - u_0\| \longrightarrow 0, \quad \delta \longrightarrow 0.$$

أي يمكننا استعمال تحليل التقارب المطروح من قبل [louis](#) [23]. وإثبات أن: $F_\alpha(\mathcal{T}) = e^{-\alpha T\mathcal{T}^2}$ هي دالة مصفاة.

لدينا الشرط الأول من النظرية 4.6.2 محقق لأن:

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} |F_\alpha(\sigma_n)\sigma_n^{-1}| &= \sup_{n \geq 1} |e^{\mathcal{T}(\lambda_n - \alpha\lambda_n^2)}| \\ &\leq e^{\frac{1}{4\alpha}} < +\infty, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

أما بالنسبة للشرط الثاني لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_\alpha(\sigma_n) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha \mathcal{T} \lambda_n^2} \\ &= e^0 = 1, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

كذلك بالنسبة للشرط الثالث:

$$\begin{aligned} |F_\alpha(\sigma_n)| &= |e^{-\alpha \mathcal{T} \lambda_n^2}| \\ &\leq 1, \quad \forall \alpha > 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

وبالتالي F_α هي دالة مصفاة لهاته الطريقة و $\mathcal{R}_\alpha(\mathcal{T}) = F_\alpha(\mathcal{T})\mathcal{T}^\dagger$ هو مؤثر تعديل و بهذا أثبتنا أن طريقة شبه القلب هي طريقة تعديل دون اللجوء إلى تقدير الخطأ $\|u_{0,\alpha} - u_0\|$.

💡 استعملنا دالة المصفاة و تحليل التقارب بدلا من تقدير الخطأ لأن هذا الأخير يعتمد على مفهوم السلم الهلبرتي ومحاولة شرح هذا المفهوم يتطلب الكثير من الجهد و الكتابة و نظرا لضيق الوقت لإنجاز هاته المذكرة لجأنا إلى النظرية (4.6.2).

2.3 آية تطبيق طريقة شبه القلب

نقدم الآن طريقة شبه القلب لتنظيم أو تعديل الإشكالية (3.3)

📖 وصف الطريقة:

📌 ليكن v_α حل للإشكالية المعدلة التالية:

$$v'_\alpha(t) + \mathcal{T}_\alpha v_\alpha(t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad v_\alpha(T) = g.$$

حيث المؤثر \mathcal{T} عوض بـ \mathcal{T}_α .

📌 الآن نقوم بإحاطم الشرط الإبتدائي $v_\alpha(0) = u_{0,\alpha}$ في الإشكالية المباشرة:

$$u'_\alpha(t) + \mathcal{T}_\alpha u_\alpha(t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad u_\alpha(0) = u_{0,\alpha}.$$

📌 في الأخير نبين أن:

$$\Phi_\alpha(g) = \| u_\alpha(T) - g \| \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

لدينا:

$$u_{0,\alpha} = e^{T(\mathcal{T} - \alpha\mathcal{T}^2)} g,$$

ومنه:

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= e^{-t\mathcal{T}} u_{0,\alpha} = e^{T\mathcal{T} - T\alpha\mathcal{T}^2 - t\mathcal{T}} g, \\ &= e^{(T-t)\mathcal{T} - \alpha T\mathcal{T}^2} g. \end{aligned}$$

و

$$u_\alpha(T) = e^{-\alpha T\mathcal{T}^2} g.$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(g) &= \| u_\alpha(T) - g \|, \\ &= \| e^{-\alpha T\mathcal{T}^2} g - g \|, \\ &= \| (I - e^{-\alpha T\mathcal{T}^2}) g \|, \\ &\leq \| -\alpha T\mathcal{T}^2 g \|, \\ &\leq \alpha T \| \mathcal{T}^2 g \|, \\ &\leq \alpha TE \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\forall g \in S(\mathcal{T})^2 \Leftrightarrow \| \mathcal{T}^2 g \| < E.$$

بدلاً من تحليل طريقة شبه القلب ودراسة التطورات التي طرأت عليها سنقوم في الجزء الموالي بمحاولة شرح ودراسة طريقة شبه القلب المقترحة من قبل " Yan Wang , Zhi Qian " من أجل تعديل إشكالية عكسية كسرية بالنسبة للزمن المنشورة سنة 2023 في المقال [13] [17] [26] [32] [32].

في هذا الجزء، نتناول إشكالية إنتشار حراري عكسي ثنائي البعد بالنسبة للمكان، وهي إشكالية معتلة اقترحت طريقة شبه القلب من قبل " Yan Wang , Zhi Qian " لحل هذه الإشكالية ذات القيم الحدية المشوشة (أي بها ضجيج) اختيار المعامل الذي انتج في هاته الدراسة كان بالإختيار اللاحق و السابق، كما تم تقديم إثبات تقديرات الخطأ بين الحل الدقيق و الحل التقريبي المعدل.

3.3 وصف IHCP ثنائي البعد

لتكن إشكالية انتشار الحرارة العكسية ثنائية البعد التالية درجة الحرارة المجهولة هي حل المعادلة المسمى $u(x, y, t)$ والذي يحقق:

$$(11.3) \quad \begin{cases} {}_0D_t^\mu u(x, y, t) - u_{xx}(x, y, t) - u_{yy}(x, y, t) = 0, & 0 < x < 1, y > 0, t > 0. \\ u(1, y, t) = g(y, t), & y \geq 0, t \geq 0. \\ u(x, y, 0) = 0, & x > 0, y \geq 0. \\ u(x, 0, t) = 0, & x > 0, t \geq 0. \\ u_y(x, 0, t) = 0, & x > 0, t \geq 0. \\ u(x, y, t)|_{x \rightarrow +\infty} \text{ bounded}, & y \geq 0, t \geq 0. \end{cases}$$

حيث ${}_0D_t^\mu$ هو المشتق الكسري الزمني بصيغة **Caputo** من الرتبة $(0 < \mu \leq 1)$ المعروف بـ:

$$(12.3) \quad {}_0D_t^\mu u(x, y, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^t \frac{\partial u(x, y, s)}{\partial s} \frac{ds}{(t-s)^\mu}, & 0 < \mu < 1. \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}, & \mu = 1. \end{cases}$$

مع Γ هي الدالة غاما.

من أجل حل هذه المعادلة، الإستراتيجية المنتهجة تتمثل في تمديد جميع الدوال إلى المستوى بأكمله $-\infty < y < +\infty$ ، $-\infty < t < +\infty$ من خلال تعريف الدوال لتكون صفرية $t < 0$ أو $y < 0$ نضع:

$$(13.3) \quad \widehat{f}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, t) e^{-i(\xi y + \eta t)} dy dt.$$

هو تحويل فورييه للدالة $f(y, t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ويتم إعطاء تحويل فورييه العكسي بـ:

$$f(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi, \eta) e^{i(\xi y + \eta t)} dy dt.$$

يمكننا حل الإشكالية (11.3) بتطبيق تحويل فورييه والحصول على الإشكالية في مجال التردد:

$$\begin{cases} (i\eta)^\mu \widehat{u}(x, \xi, \eta) - \widehat{u}_{xx}(x, \xi, \eta) + \xi^2 \widehat{u}(x, \xi, \eta) = 0, & x > 0, \xi, \eta \in \mathbb{R}. \\ \widehat{u}(1, \xi, \eta) = \widehat{g}(\xi, \eta), & \xi, \eta \in \mathbb{R}. \\ \widehat{u}(x, \xi, \eta) | x \rightarrow +\infty \text{ bounded}, & \xi, \eta \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (14.3)$$

حيث:

$$(i\eta)^\mu = |\eta|^\mu \left(\cos \frac{\mu\pi}{2} + i \operatorname{sign}(\eta) \sin \frac{\mu\pi}{2} \right).$$

ويمكننا الحصول على هذه الإشكالية في المجال الترددي:

$$\widehat{u}(x, \xi, \eta) = e^{(1-x)\sqrt{(i\eta)^\mu + \xi^2}} \widehat{g}(\xi, \eta). \quad (15.3)$$

نقوم بكتابة $\sqrt{(i\eta)^\mu + \xi^2}$ على الشكل $a + ib$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{|\eta|^{2\mu} \sin^2 \frac{\mu\pi}{2} + (\xi^2 + |\eta|^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2})^2} + \xi^2 + |\eta|^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2} \right)},$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{|\eta|^{2\mu} \sin^2 \frac{\mu\pi}{2} + (\xi^2 + |\eta|^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2})^2} - \xi^2 - |\eta|^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2} \right)}.$$

ومع ذلك فيزيائيا لا يمكن قياس $g(y, t)$ بالضبط وما نعرفه فعليا هو دالة الضجيج $g^\delta(y, t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ التي تحقق:

$$\|g(\dots) - g^\delta(\dots)\| \leq \delta, \quad \delta > 0. \quad (16.3)$$

|| يشير إلى تنظيم L^2 و δ مستوى الضجيج، انطلاقا من حل الإشكالية يمكننا بسهولة إيجاد أنه بالنسبة للقيمة الثابتة $0 \leq x < 1$ ، فإن $\Re(a + ib) = a \rightarrow +\infty$ لما $|\xi|, |\eta| \rightarrow +\infty$ وبالتالي $|e^{(1-x)\sqrt{(i\eta)^\mu + \xi^2}}|$ غير محدود بالنسبة لـ ξ و η . وبالتالي أي خطأ صغير في المعطيات يتم تضخيمه، يؤدي إلى خطأ فادح في الحل.

للحصول على حل مستقر ومتقارب، نقترح طريقة شبه القلب للإشكالية (11.3) و نعطي تقدير الخطأ مع حد مسبق للحل الدقيق عند $x = 0$.

4.3 طريقة شبه القلب و تقدير الخطأ

تتطلب منا طريقة شبه القلب أن نضيف حداً ذو رتبة أعلى للإشكالية (11.3)، ونجعلها من الشكل:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0D_t^\mu u - u_{xx} - u_{yy} + \alpha(u_{xxtt} + u_{xyyy}) = 0, \quad 0 < x < 1, y > 0, t > 0. \\ u(1, y, t) = g^\delta(y, t), \quad y \geq 0, t \geq 0. \\ u(x, y, 0) = 0, \quad x > 0, y \geq 0. \\ u(x, 0, t) = 0, \quad x > 0, t \geq 0. \\ u_y(x, 0, t) = 0, \quad x > 0, t \geq 0. \\ u(x, y, t) | y \rightarrow +\infty \text{ bounded}, \quad x \geq 0, t \geq 0. \end{array} \right. \quad (17.3)$$

حيث α هو معامل التعديل الذي يجب تحديده، g^δ هي المعطيات المشوشة. نقوم أيضاً بإجراء تحويل فورييه:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\eta)^\mu \widehat{u} - \widehat{u}_{xx} + \xi^2 \widehat{u} - \alpha(\eta^2 + \xi^2) \widehat{u}_{xx} = 0, \quad x > 0, \xi, \eta \in \mathbb{R}. \\ \widehat{u}(1, \xi, \eta) = \widehat{g}^\delta(\xi, \eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}. \\ \widehat{u}(x, \xi, \eta) | x \rightarrow +\infty \text{ bounded}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (18.3)$$

ونحصل على حل الإشكالية المنتظمة:

$$\widehat{u}_\alpha^\delta(x, \xi, \eta) = e^{(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}} \widehat{g}^\delta(\xi, \eta). \quad (19.3)$$


نكتب \widehat{u}_α ليكون حل لـ (18.3) مع معطيات غير مضطربة أي استبدال g^δ بالمعطيات الدقيقة g كما هو الحال غالباً في حالة تقدير الخطأ للإشكاليات العكسية فإننا نقسم الخطأ إلى قسمين:

$$\begin{aligned} \| u_\alpha^\delta - u \| &= \| \widehat{u}_\alpha^\delta - \widehat{u} \| \\ &\leq \| \widehat{u}_\alpha^\delta - \widehat{u}_\alpha \| + \| \widehat{u}_\alpha - \widehat{u} \| \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

و تقدير كل منها على حداً.

توطئة 1.4.3 بالنسبة إلى α صغيرة بالقدر الكافي، لدينا من أجل $0 \leq x < 1$:

$$I_1 \leq e^{(1-x)\sqrt{\frac{2}{\alpha}}} \delta.$$

البرهان 1.4.3 

$$\begin{aligned} I_1 &= \| e^{(1-x)\sqrt{\frac{a+ib}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}} (\widehat{g}^\delta - \widehat{g}) \|, \\ &\leq \| \widehat{g}^\delta - \widehat{g} \| \cdot \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}} |e^{(1-x)\sqrt{\frac{a+ib}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}}|, \\ &\leq \delta \cdot \left(\sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}} e^{\Re \sqrt{\frac{a+ib}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}} \right)^{1-x}. \end{aligned} \quad (20.3)$$

حيث:

$$\begin{aligned}
(\Re(\sqrt{\frac{a+ib}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}))^2 &\leq \frac{|a+ib|}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}, \\
&= \frac{\sqrt{|(i\eta)^\mu+\xi^2|}}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2} \leq \frac{\sqrt{|\eta|^\mu+\xi^2}}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}, \\
&\leq \frac{|\eta|^{\frac{\mu}{2}}+|\xi|}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}, \\
&\leq \frac{|\eta|^{\frac{\mu}{2}}}{1+\alpha\eta^2} + \frac{|\xi|}{1+\alpha\xi^2}.
\end{aligned} \tag{21.3}$$

يمكننا بسهولة الحصول على الحد $\frac{|\eta|^{\frac{\mu}{2}}}{1+\alpha\eta^2}$ بإشتقاقه، والحد الأعلى هو $\frac{4-\mu}{4}(\frac{\mu}{4-\mu})^{\frac{\mu}{4}}\alpha^{-\frac{\mu}{4}}$ لدينا إذن:

$$\begin{aligned}
\frac{|\eta|^{\frac{\mu}{2}}}{1+\alpha\eta^2} + \frac{|\xi|}{1+\alpha\xi^2} &\leq C(\mu)\frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{4}}} + \frac{1}{2\alpha^{\frac{1}{2}}}, \\
&\leq \frac{2}{\alpha}.
\end{aligned} \tag{22.3}$$

إذا كانت α صغيرة بما فيه الكفاية، بالتعويض بذلك في (22.3)، يمكننا إنهاء البرهان.

ملاحظة 1.4.3 بالتركيز على المتراجحة (22.3)، عندما يكون α أصغر بالمقدار الكافي، $C(\mu)\frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{4}}}$ أقل بكثير عن $\frac{1}{2\alpha^{\frac{1}{2}}}$. هذا يعني أن μ لا تلعب دورا أساسيا في تقدير الحد I_1 المقدر في الفقرات التالية، ليس محدودا بـ μ وكذلك I_2 وهي تختلف تماما عن IHCP ذات البعد 1 التي ترتبط ارتباطا وثيقا بالمعامل μ تقدير على $0 < x < 1$.

نقدم حد أولي $\| \widehat{u}(0, \xi, \eta) \| \leq E$ لتقدير I_2 حيث $E > 0$ ثابت، قبل أن نجعل التقدير، نحتاج إلى توطئتين.

توطئة 2.4.3 من أجل $r, s \in \mathbb{R}$ ، $r > 0$ ، لدينا:

$$|1 - e^{-(r+si)}| \leq |r + si|. \tag{23.3}$$

البرهان 2.4.3 بتربيع الطرفين، المتراجحة تكافئ:

$$(1 - e^{-r} \cos s)^2 + (e^{-r} \sin s)^2 \leq r^2 + s^2.$$

نعرف:

$$\begin{aligned}
f(r, s) &:= (1 - e^{-r} \cos s)^2 + (e^{-r} \sin s)^2 - r^2 - s^2 \\
&= 1 + e^{-2r} - 2e^{-r} \cos s - r^2 - s^2.
\end{aligned}$$

من الضروري إثبات أن $f \leq 0$ ولأن f دالة زوجية بالنسبة إلى s ، يمكننا أن نفرض أيضا $s \geq 0$ ، مشتق f بالنسبة إلى s :

$$\frac{\partial f(r, s)}{\partial s} = 2e^{-r} \sin s - 2s \leq 0.$$

مع:

$$\begin{aligned} f(r, s) \leq f(r, 0) &= 1 + e^{-2r} - 2e^{-r} - r^2, \\ &= (1 - e^{-r})^2 - r^2, \\ &= (1 - e^{-r} - r)(1 - e^{-r} + r), \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

توطئة 3.4.3 من أجل $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ ، $p > q > 0$ ، $r > 0$ ، $s > 0$ لدينا:

$$(r^q + s^q)^p \geq (r^p + s^p)^q. \quad (24.3)$$

البرهان 3.4.3 \square بقسمة الطرفين على s^{pq} ، تصبح المتراجحة من الشكل:

$$\left(\left(\frac{r}{s}\right)^q + 1\right)^p \geq \left(\left(\frac{r}{s}\right)^p + 1\right)^q. \quad (25.3)$$

نأخذ $t = \left(\frac{r}{s}\right)^q > 0$ يكافئ:

$$(t + 1)^{\frac{p}{q}} \geq t^{\frac{p}{q}} + 1.$$

يتضح من متراجحة برنولي.

يمكننا الآن تقدير I_2 .

توطئة 4.4.3 إذا كانت القيمة الحدية الدقيقة $u(0, y, t)$ تحقق:

$$\|u(0, y, t)\| \leq E; \quad E > 0. \quad (26.3)$$

لدينا من أجل α صغير بالقدر الكافي:

$$I_2 \leq C\alpha E. \quad (27.3)$$

حيث يتم تحديد C بواسطة x و μ و مستقل عن α و E .

البرهان 4.4.3 \square من (15.3) نعلم أن $u(0, \xi, \eta) = e^{a+bi} \hat{g}(\xi, \eta)$ ومنه:

$$\begin{aligned} I_2 &= \|\hat{u}_\alpha - \hat{u}\|, \\ &= \left\| \left(e^{(1-x)\frac{a+bi}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}} - e^{(1-x)(a+bi)} \right) \hat{g} \right\|, \\ &= \left\| e^{(a+bi)} \hat{g} \cdot \left(e^{(a+bi)\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}} - 1\right)} - e^{-x(a+bi)} \right) \right\|, \\ &\leq E \cdot \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}} \left| e^{(a+bi)\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}} - 1\right)} - e^{-x(a+bi)} \right|. \end{aligned} \quad (28.3)$$

باستعمال توطئة (2.4.3) لدينا:

$$\begin{aligned}
& \left| e^{(a+bi)\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}-1\right)} - e^{-x(a+bi)} \right|, \\
& = |e^{-x(a+bi)}| \left| e^{(a+bi)\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}-(1-x)\right)} - 1 \right|, \\
& \leq e^{-xa} \left| (a+bi)(1-x) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}\right) \right|, \\
& = (1-x)e^{-xa} |a+bi| \frac{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}-1}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}, \\
& = (1-x)e^{-xa} |a+bi| \frac{1}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}} \frac{\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}+1}, \\
& \leq (1-x)e^{-xa} \sqrt{|\eta|^\mu + \xi^2} \frac{\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}, \\
& \leq \alpha(1-x)e^{-xa} \sqrt{|\eta|^\mu + \xi^2} (\eta^2 + \xi^2).
\end{aligned} \tag{29.3}$$

لأن:

$$\begin{aligned}
a^2 & = \frac{1}{2} \left(\sqrt{|\eta|^{2\mu} \sin^2 \frac{\mu\pi}{2} + (\xi^2 + |\eta|^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2})^2} + \xi^2 + |\eta|^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2} \right), \\
& \geq \frac{1}{2} \sqrt{|\eta|^{2\mu} + \xi^4 + 2\xi^2 |\eta|^\mu \cos \frac{\mu\pi}{2}}, \\
& \geq \frac{1}{2} \sqrt{|\eta|^{2\mu} + \xi^4}.
\end{aligned} \tag{30.3}$$

لدينا:

$$\left| e^{(a+bi)\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}-1\right)} - e^{-x(a+bi)} \right| \leq \alpha(1-x) e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x(|\eta|^{2\mu}+\xi^4)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{|\eta|^\mu + \xi^2} (\eta^2 + \xi^2).$$

نميز الآن ثلاثة حالات للتقدير، نضع:

$$J := e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x(|\eta|^{2\mu}+\xi^4)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{|\eta|^\mu + \xi^2} (\eta^2 + \xi^2). \tag{31.3}$$

الحالة 1. من أجل $|\eta| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
J & \leq e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x|\xi|} \sqrt{1 + \xi^2} (1 + \xi^2), \\
& = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x(1+|\xi|)} (1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}, \\
& \leq e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x(1+|\xi|)} (1 + |\xi|)^3, \\
& = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^{-3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x(1+|\xi|)} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x(1 + |\xi|)\right)^3.
\end{aligned} \tag{32.3}$$

نحصل على الحد الأعلى لما $\frac{\sqrt{2}}{2}x(1 + |\xi|) = 3$ ، و $J \leq C_1 = C_1(x)$.

الحالة 2. من أجل $|\eta| > 1$ و $|\xi| \leq 1$. باستخدام التوطئة (3.4.3) و $\mu < 1$

$$\begin{aligned}
J & \leq e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x|\eta|^{\frac{\mu}{2}}} \sqrt{|\eta|^\mu + 1} (\eta^2 + 1), \\
& \leq e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x|\eta|^{\frac{\mu}{2}}} (|\eta|^{\frac{\mu}{2}} + 1) (|\eta|^{\frac{\mu}{2}} + 1)^\mu, \\
& = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x(|\eta|^{\frac{\mu}{2}}+1)} (|\eta|^{\frac{\mu}{2}} + 1)^{\mu+1}, \\
& \leq C_2 = C_2(x, \mu).
\end{aligned} \tag{33.3}$$

الحالة 3. من أجل $|\eta| > 1$ و $|\xi| > 1$.

$$\begin{aligned} J &= e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}x(|\eta|^{2\mu} + \xi^4)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{|\eta|^\mu + \xi^2}(\eta^2 + \xi^2), \\ &\leq e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}x(|\eta|^{2\mu} + |\xi|^{2\mu})^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\eta^2 + \xi^2}(\eta^2 + \xi^2). \end{aligned} \quad (34.3)$$

باستخدام التوطئة (3.4.3) و $\mu < 1$ نجد:

$$\begin{aligned} J &\leq e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}x(|\eta|^{2\mu} + |\xi|^{2\mu})^{\frac{1}{4}}} (\eta^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}, \\ &\leq e^{\frac{-\sqrt{2}}{2}x(|\eta|^{2\mu} + |\xi|^{2\mu})^{\frac{1}{4}}} (|\eta|^{2\mu} + |\xi|^{2\mu})^{\frac{3}{2\mu}}, \\ &\leq C_3 = C_3(x, \mu). \end{aligned} \quad (35.3)$$

باختصار لدينا:

$$|e^{(a+bi)(\frac{1-x}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}-1)} - e^{-x(a+bi)}| \leq C(x, \mu)\alpha.$$

إذن (27.3) محققة.

بدمج (1.4.3) و (25.3) معا، نحصل على النظرية التالية.

نظرية 1.4.3 نفترض أن u هو الحل الدقيق للإشكالية غير المضطربة (11.3)، و u_α^δ يكون حل الإشكالية المضطربة (17.3) الذي تم الحصول عليه بطريقة شبه القلب. تحقق القيمة الحدية (16.3) و (26.3). لدينا من أجل $0 < x < 1$ نجد:

$$\|u(x, \dots) - u_\alpha^\delta(x, \dots)\| \leq e^{(1-x)\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\delta} + C\alpha E. \quad (36.3)$$

علاوة على ذلك، إذا وضعنا $\alpha = \frac{2}{(\log \frac{E}{\delta})^2}$ من أجل قيم صغيرة ل δ ، لدينا:


$$\|u(x, \dots) - u_\alpha^\delta(x, \dots)\| \leq E^{1-x}\delta^x + \tilde{C} \frac{E}{(\log \frac{E}{\delta})^2}. \quad (37.3)$$

ملاحظة 1.4.3 بالنظر إلى العبارة، (37.3) وجدنا أنه عندما $x \rightarrow 0$ ، يزداد الخطأ وإذا كان $x = 0$ ، يمكننا فقط معرفة أن الخطأ محدود ولكنه لا يتحول إلى صفر عندما $\delta \rightarrow 0$. أمر شائع في نظرية الإشكاليات غير مطروحة جيدا، إذا لم تكن لدينا شروط إضافية على للحفاظ على التقارب عند $x = 0$ نقدم افتراضا مسبقا أقوى.

$$\|u(0, y, t)\|_p \leq E, \quad p > 0. \quad (38.3)$$


حيث $\|\cdot\|_p$ يشير إلى النظم في فضاء سوبولوف $H_p(\mathbb{R})$ المعروف بـ:

$$\|u(0, y, t)\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + \xi^2 + \eta^2)^p |\hat{u}(0, \xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (39.3)$$

التقدير عند $x = 0$ 

توطئة 5.4.3 إذا كانت القيمة الحدية الدقيقة $u(0, y, t)$ تحقق المعادلة (38.3) ، يكون لدينا في حالة α صغيرة بما فيه كفاية:

$$I_2 \leq 2 \max\{\alpha^{\frac{p}{3}}, \alpha\}E. \quad (40.3)$$

البرهان 5.4.3  كما هو الحال في برهان التوطئة (20.3).

$$\begin{aligned} I_2 &= \|e^{a+bi} \hat{g} \cdot (e^{(a+bi)(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}-1)} - 1)\|, \\ &= \|\hat{u}(0, \xi, \eta) \cdot (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{p}{2}} (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{p}{2}} (e^{(a+bi)(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}-1)} - 1)\|, \\ &= E. \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}} |1 + \xi^2 + \eta^2|^{\frac{-p}{2}} |e^{-(a+bi)(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}} \frac{\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2+1}}) - 1}|. \end{aligned}$$

إذا كان $1 + \xi^2 + \eta^2 \geq \alpha^{\frac{-2}{3}}$ ، إذن:

$$I_2 \leq E. \alpha^{\frac{p}{3}} 2. \quad (41.3)$$

يمكننا أيضا أن نجعل $1 + \xi^2 + \eta^2 < \alpha^{\frac{-2}{3}}$ باستعمال التوطئة (3.4.3) يصبح لدينا:

$$\begin{aligned} J_2 &\leq E. \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}} |(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{p}{2}} (a + bi) \frac{1}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}} \frac{\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2+1}}|, \\ &\leq E. \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}} |(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{p}{2}} \sqrt{|\eta|^\mu + \xi^2} \frac{\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}{\sqrt{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}|, \\ &\leq \alpha E. \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}} |(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{p}{2}} \sqrt{|\eta|^\mu + \xi^2} (\eta^2 + \xi^2)|. \end{aligned} \quad (42.3)$$

نقسمه إلى حالتين لتقدير:

$$J_2 := (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{p}{2}} \sqrt{|\eta|^\mu + \xi^2} (\eta^2 + \xi^2).$$

الحالة 1. من أجل $|\eta| \geq 1$ 

$$\begin{aligned} J_2 &\leq (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{p}{2}} \sqrt{\eta^2 + \xi^2} (\eta^2 + \xi^2), \\ &\leq (1 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2} - \frac{p}{2}}. \end{aligned} \quad (43.3)$$

إذا كان $p \geq 3$ إذن $J_2 \leq 1$ و $J_2 \leq \alpha E$ والا بافتراض $1 + \xi^2 + \eta^2 < \alpha^{\frac{-2}{3}}$

$$J_2 \leq \alpha^{\frac{p}{3}-1}, \quad (44.3)$$

إذن:

$$J_2 \leq \alpha^{\frac{p}{3}} E.$$

الحالة 2. من أجل $|\eta| < 1$:

$$J_2 \leq (1 + \xi^2)^{\frac{-p}{2}} \sqrt{1 + \xi^2} (1 + \xi^2). \quad (45.3)$$

ويصبح الأمر نفسه مع الحالة 1 و ننتهي من هذه التوطئة.

بدج (20.3) و (5.4.3) معا نحصل على النظرية التالية:

نظرية 2.4.3 نفرض أن u هو الحل الدقيق للإشكالية غير المضطربة (11.3) ، و u_α^δ حل الإشكالية المضطربة (17.3) تم الحصول عليها بشبه القلب. القيمة الحدية تحقق (16.3) و (38.3). لدينا من أجل $0 < x < 1$:

$$\| u(0, \dots) - u_\alpha^\delta(0, \dots) \| \leq e \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \delta + 2 \max \left\{ \alpha^{\frac{p}{3}}, \alpha \right\} E. \quad (46.3)$$

إذا جعلنا $\alpha = \frac{2}{(\log(\frac{E}{\delta}) (\log \frac{E}{\delta})^{-p})^2}$ من أجل قيم صغيرة ل δ ، لدينا:

$$\| u(0, \dots) - u_\alpha^\delta(0, \dots) \| \leq \frac{E}{(\log \frac{E}{\delta})^p} + 2 \max \left\{ \alpha^{\frac{p}{3}}, \alpha \right\} E. \quad (47.3)$$

5.3 مبدأ التباين وتقدير الخطأ اللاحق

في القسم السابق، نعطي تقدير الخطأ بحد مسبق E أو $\| u(0, y, t) \|_p \leq E$ ومع ذلك، عندما يتعلق الأمر بالوضع الحقيقي، نادرا ما يكون الحد المسبق معروفا، لذا يجب علينا إيجاد طريقة لاحقة لتحديد معامل التعديل α . في هذا القسم نبحث في مبدأ تناقض موروزوف لاختيار معامل التعديل. مبدأ موروزوف للتناقض في حالتنا هو إيجاد α بحيث تنطبق المعادلة التالية:

$$\| \frac{1}{1+\alpha} e^{(1-x) \sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}} (1 - \sqrt{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2})} \hat{g}^\delta(\xi, \eta) - \hat{g}^\delta(\xi, \eta) \| = 2\delta + \tau (\log(\log(1/\delta)))^{-2}. \quad (48.3)$$

حيث $\tau > 0$ هو ثابت. وفقا للتوطئة التالية نعلم أنه يوجد حل ل (48.3). إذا كان $\| \hat{g}^\delta \| < 2\delta + \tau (\log(\log(1/\delta)))^{-2}$ ، برهان هذه التوطئة واضح.

توطئة 1.5.3 نضع:

$$\rho(\alpha) = \left\| \frac{1}{1+\alpha} e^{(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}(1-\sqrt{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2})} \hat{g}^\delta(\xi, \eta) - \hat{g}^\delta(\xi, \eta) \right\|.$$

إذا كان $\|\hat{g}^\delta\| < 2\delta + \tau(\log(\log(1/\delta)))^{-2} < 0$ يحقق الشروط التالية:

$$(1) \rho(\alpha) \text{ دالة مستمرة.}$$

$$(2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho(\alpha) = 0$$

$$(3) \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \rho(\alpha) = \|\hat{g}^\delta\|$$

توطئة 2.5.3 إذا كان α حل ل (48.3) ، و (26.3) محققة. نفرض أيضاً أن:

$$0 < 4\delta + \tau(\log(\log(1/\delta)))^{-2} < \|g\|.$$

ومنه:

$$\frac{\|g\| - 4\delta - \tau(\log(\log(1/\delta)))^{-2}}{4\delta + \tau(\log(\log(1/\delta)))^{-2}} \leq \alpha^{-1} \leq \frac{CE(\log(\log(1/\delta)))^2}{\tau}. \quad (49.3)$$

البرهان 1.5.3 من (48.3) لدينا:

$$\begin{aligned} & 2\delta + \tau(\log(\log(1/\delta)))^{-2}, \\ & = \left\| \left(\frac{1}{1+\alpha} e^{(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}(1-\sqrt{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2})} - 1 \right) \hat{g}^\delta \right\|, \\ & \leq \left\| \left(\frac{1}{1+\alpha} e^{(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}(1-\sqrt{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2})} - 1 \right) (\hat{g}^\delta - \hat{g}) \right\| \\ & + \left\| \left(\frac{1}{1+\alpha} e^{(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}(1-\sqrt{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2})} - 1 \right) \hat{g} \right\|, \\ & \leq \delta \cdot \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{1+\alpha} e^{(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}(1-\sqrt{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2})} - 1 \right| \quad (50.3) \\ & + E \cdot \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}} \left| \left(\frac{1}{1+\alpha} e^{(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}(1-\sqrt{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2})} - 1 \right) e^{-\sqrt{(i\eta)^\mu + \xi^2}} \right|, \\ & \leq 2\delta + E \frac{1}{1+\alpha} \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}} |e^{-(a+bi)}| \left| e^{(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}(1-\sqrt{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2})} - 1 - \alpha \right|, \\ & \leq 2\delta + E \cdot 1 \sup_{\xi, \eta \in \mathbb{R}} e^{-a} (\alpha + |e^{(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}(1-\sqrt{1+\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2})} - 1|). \end{aligned}$$

بالاستعانة بالتوطئة (2.4.3) نجد:
(51.3)

$$\begin{aligned}
& 2\delta + \tau(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^{-2} \\
& \leq 2\delta + E \sup_{\xi, \eta \in R} e^{-a}(\alpha + |(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}(\sqrt{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2} - 1)|), \\
& = 2\delta + E \sup_{\xi, \eta \in R} e^{-a}(\alpha + (1-x)|a + bi|\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}\frac{\alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}{1 + \sqrt{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}), \\
& \leq 2\delta + E\alpha \sup_{\xi, \eta \in R} e^{-a}(1 + (1-x)|a + bi|\frac{\eta^2 + \xi^2}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}), \\
& \leq 2\delta + E\alpha \sup_{\xi, \eta \in R} e^{-a}(1 + (1-x)\sqrt{|\eta|^\mu + \xi^2}(\eta^2 + \xi^2)).
\end{aligned}$$

وفقا للمعادلة (30.3) وتقدير (31.3) نستنتج أن:

$$2\delta + \tau(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^{-2} \leq 2\delta + \alpha CE. \quad (52.3)$$

حيث C مستقل عن α ، δ و E . بعدها يمكننا الحصول على:

$$\alpha^{-1} \leq \frac{CE(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^2}{\tau}.$$

الآن نثبت الطرف الأخر من المتباينة:

$$\begin{aligned}
& 2\delta + \tau(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^{-2} \\
& \geq \left\| \left(\frac{1}{1+\alpha} e^{(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \zeta^2}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\zeta^2}}(1 - \sqrt{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\zeta^2})} - 1 \right) \widehat{g} \right\|, \\
& - \left\| \left(\frac{1}{1+\alpha} e^{(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}(1 - \sqrt{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2})} - 1 \right) (\widehat{g}^\delta - g) \right\|, \quad (53.3) \\
& \geq \|g\| \inf_{\xi, \eta \in R} \left| \frac{1}{1+\alpha} e^{(1-x)\sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}}(1 - \sqrt{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2})} - 1 \right| - 2\delta, \\
& \geq \|g\| \left| \frac{1}{1+\alpha} - 1 \right| - 2\delta, \\
& = \frac{\alpha}{1+\alpha} \|g\| - 2\delta.
\end{aligned}$$

حيث أن:

$$\alpha^{-1} \geq \frac{\|g\| - 4\delta - \tau(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^{-2}}{4\delta + \tau(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^{-2}}. \quad (54.3)$$

يمكننا أن نتعلم من النظرية التالية أن الخطأ بين الحل الدقيق والحل المعدل، مع الاختيار اللاحق للمعامل يؤول إلى الصفر عندما يؤول مستوى الضجيج δ إلى الصفر.

نظرية 1.5.3 لنفترض أن u هو الحل الدقيق للإشكالية غير المضطربة (11.3) و u_α^δ هو الحل الدقيق للإشكالية المضطربة (17.3) التي تم الحصول عليها بطريقة شبه القلب. تحقق القيمة الحدية (16.3) و (26.3) يعرف معامل التنظيم بمبدأ التناقض، أي حل (48.3) يمكننا الحصول على خطأ لاحق من أجل $0 < x < 1$.

$$\| u(x, \dots) - u_\alpha^\delta(x, \dots) \| \leq \left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right) \right)^{(1-x)} \sqrt{\frac{2CE}{\tau}} \delta + 2^{(1-x)} E^{(1-x)} s(\delta)^x \left(1 + \frac{\|g\| + \delta}{\|g\| - s(\delta)} \right)^x.$$

حيث:

$$s(\delta) = 4\delta + \tau \left(\log\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) \right).$$

البرهان 2.5.3 لا يزال نقسم تقدير الخطأ إلى قسمين:

$$\| u_\alpha^\delta - u \| \leq \| \widehat{u}_\alpha^\delta - \widehat{u}_\alpha \| + \| \widehat{u}_\alpha + \widehat{u} \| = I_1 + I_2.$$

و حسب (20.3) وتوطئة (2.5.3) يكون:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq e^{(1-x)} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \delta, \\ &\leq e^{(1-x)} \sqrt{\frac{2CE}{\tau}} \log\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) \delta, \\ &= \log\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)^{(1-x)} \sqrt{\frac{2CE}{\tau}} \delta. \end{aligned} \quad (55.3)$$

باستعمال متراجحة Hölder نجد:

$$\begin{aligned} I_2^2 &= \left\| \left(e^{(1-x)} \sqrt{\frac{(i\eta)^\mu + \xi^2}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2}} - e^{(1-x)} \sqrt{1 + (i\eta)^\mu + \xi^2} \right) \widehat{g} \right\|^2, \\ &= \left\| e^{(1-x)(a+bi)} \left(e^{(1-x)(a+bi)} \left(\sqrt{\frac{1}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2} - 1} \right) - 1 \right) \widehat{g} \right\|^2, \\ &= \iint_{R^2} |e^{2(1-x)(a+bi)}| \left(e^{(1-x)(a+bi)} \left(\sqrt{\frac{1}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2} - 1} \right) \widehat{g} \right)^{2(1-x)}, \\ &\quad \cdot \left| \left(e^{(1-x)(a+bi)} \left(\sqrt{\frac{1}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2} - 1} \right) \widehat{g} \right)^{2x} \right| d\xi d\eta, \\ &\leq \left(\iint_{R^2} |e^{2(a+bi)}| \left(e^{(1-x)(a+bi)} \left(\sqrt{\frac{1}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2} - 1} \right) \widehat{g} \right)^2 |d\xi d\eta| \right)^{(1-x)}, \\ &\quad \cdot \left(\iint_{R^2} |e^{2(a+bi)}| \left(e^{(1-x)(a+bi)} \left(\sqrt{\frac{1}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2} - 1} \right) \widehat{g} \right)^2 |d\xi d\eta| \right)^x, \\ &\leq \left(\iint_{R^2} |e^{2(a+bi)}| (2 \cdot \widehat{g}) d\xi d\eta \right)^{1-x} \cdot \left\| \left(e^{(1-x)(a+bi)} \left(\sqrt{\frac{1}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2} - 1} \right) \widehat{g} \right) \right\|^{2x}, \\ &\leq 4^{(1-x)} E^{2(1-x)} \left\| e^{(1-x)(a+bi)} \left(\sqrt{\frac{1}{1 + \alpha\eta^2 + \alpha\xi^2} - 1} \right) \widehat{g} \right\|^{2x}. \end{aligned} \quad (56.3)$$

حيث:

$$I_2 \leq 2^{(1-x)}E^{(1-x)} \left\| \left(e^{(1-x)(a+bi)\left(\sqrt{\frac{1}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}-1\right)} - 1 \right) \widehat{g} \right\|^{2x}. \quad (57.3)$$

وحسب المتراجحة المثلثية نجد:

$$\begin{aligned} & \left\| \left(e^{(1-x)(a+bi)\left(\sqrt{\frac{1}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}-1\right)} - 1 \right) \widehat{g} \right\|, \\ & \leq \left\| \left(e^{(1-x)(a+bi)\left(\sqrt{\frac{1}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}-1\right)} - 1 \right) (\widehat{g} - \widehat{g}^\delta) \right\| \\ & + \left\| \left(\frac{1}{1+\alpha} e^{(1-x)(a+bi)\left(\sqrt{\frac{1}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}-1\right)} \right) \widehat{g}^\delta \right\| \\ & + \left\| \frac{\alpha}{1+\alpha} e^{(1-x)(a+bi)\left(\sqrt{\frac{1}{1+\alpha\eta^2+\alpha\xi^2}}-1\right)} \widehat{g}^\delta \right\|, \\ & \leq 2\delta + (2\delta + \tau(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^{-2}) + \alpha \cdot \left\| \widehat{g}^\delta \right\|, \\ & \leq 4\delta + \tau(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^{-2} + \alpha(\|g\| + \delta). \end{aligned} \quad (58.3)$$

بالتعويض بها مرة أخرى واستخدام الطرف الآخر من التوطئة (2.5.3) :

(59.3)

$$\begin{aligned} I_2 & \leq 2^{(1-x)}E^{(1-x)}(4\delta + \tau(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^{-2}) + \frac{4\delta + \tau(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^{-2}}{\|g\| - 4\delta - \tau(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^{-2}}(\|g\| + \delta)^x, \\ & = 2^{(1-x)}E^{(1-x)}(4\delta + \tau(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^{-2})^x \left(1 + \frac{\|g\| + \delta}{\|g\| - 4\delta - \tau(\log(\log(\frac{1}{\delta})))^{-2}} \right)^x. \end{aligned}$$

نتائج ختامية

في بحثنا المرجعي هذا وصلنا إلى النتائج التالية:

عند نمذجة الظواهر الواقعية لا تكون الإشكاليات المعبرة عنها دوماً مطروحة جيداً حسب مفهوم هادمارد.

الإعتلال الأكثر ظهوراً عند النمذجة هو عدم الإستقرار.

الإشكاليات العكسية غالباً يكون معتل.

طرق التعديل لا تسمح بحساب الحلول الدقيقة بل تعطي طريقة مستقرة لحساب حل تقريبي للإشكالية الغير مستقرة.

تكون طريقة التعديل متقاربة إذا كانت مرفقة بطريقة إختيار معامل لاحقة أو سابقة.

يمكن ضمان تقارب طرق التعديل بالإعتماد على مؤثرات التلطيف ودوال المصفاة.

طريقة شبه القلب من الطرق الأسهل تطبيقاً عندما يتعلق الأمر بإشكاليات معطاة على شكل معادلة تفاضلية بمشتقة جزئية، وذلك لكونها لا تحتاج إلى إعادة كتابة الإشكالية على شكل معادلة مؤثر متراص.

المصادر

- [1] Ames, K., Clark, G., Epperson, J., & Oppenheimer, S. (1998). A comparison of regularizations for an ill-posed problem. *Mathematics of computation*, 67(224), .1471-1451
- [2] Bakushinskiĭ, A. B. (1992). On a convergence problem of the iterative-regularized Gauss-Newton method. *Comput. Math. Math. Phys*, 32(9), .1359-1353
- [3] Brezis, H., & Brézis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations* (Vol. 2, No. 3, p. 5). New York: Springer.
- [4] Barenblatt, G. I., Zheltov, I. P., & Kochina, I. N. (1960). Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 24(5), .1303-1286
- [5] Chen, P. J., & Gurtin, M. E. (1968). On a theory of heat conduction involving two temperatures.
- [6] Clark, G. W., & Oppenheimer, S. F. (1994). Quasireversibility methods for non-well-posed problems. *Electronic Journal of Differential Equations*, 1994(8), 1.
- [7] Coleman, B. D., Duffin, R. J., & Mizel, V. J. (1965). Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 19, .116-100
- [8] Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. *Geophysical journal international*, 13(5), 529-539
- [9] Hansen, P. C. (2010). *Discrete inverse problems: insight and algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

- [10] Engl, H. W., Hanke, M., & Neubauer, A. (1996). Regularization of inverse problems (Vol. 375). Springer Science & Business Media.
- [11] Gohberg, I., Goldberg, S., & Kaashoek, M. (2012). Basic classes of linear operators. Birkhäuser.
- [12] Halmos, P. R. (1963). What does the spectral theorem say?. The American Mathematical Monthly, 70(3), .247-241
- [13] Hao, D. N. (1994). A mollification method for ill-posed problems. Numerische Mathematik, 68(4), .506-469
- [14] Isakov, V. (2018). Inverse problems for partial differential equations.
- [15] Kirsch, A. (2011). An introduction to the mathematical theory of inverse problems (Vol. 120). New York: Springer.
- [16] Kaltenbacher, B., & Rundell, W. (2023). Inverse problems for fractional partial differential equations (Vol. 230). American Mathematical Society.
- [17] Kirsch, A. (2005). The factorization method for a class of inverse elliptic problems. Mathematische Nachrichten, 278(3), .277-258
- [18] Li, D. (2013). Cours d'analyse fonctionnelle: avec 200 exercices corrigés. Ellipses.
- [19] Lattès, R., Lions, J. L., & Bellman, R. E. (1969). The method of quasi-reversibility: applications to partial differential equations. (No Title).
- [20] Louis, A, K. (1989) Inverse und schlecht gestellte Probleme (Stuttgart: Teubner).
- [21] Louis, A, K. (1996) Inverse Problems 12 175–90.
- [22] Louis, A, K, Maaß P and Rieder A (1994) Wavelets (Stuttgart: Teubner)
- [23] Louis, A. K. (1999). A unified approach to regularization methods for linear ill-posed problems. Inverse problems, 15(2), 489.
- [24] Nair, M. T. (2009). Linear operator equations: approximation and regularization. World Scientific.
- [25] Podlubny, I. (1998). Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. elsevier.

- [26] Qian, Z., & Fu, C. L. (2007). Regularization strategies for a two-dimensional inverse heat conduction problem. *Inverse Problems*, 23(3), 1053.
- [27] Scherzer, O., Grasmair, M., Grossauer, H., Haltmeier, M., & Lenzen, F. (2009). *Variational methods in imaging* (Vol. 167). Springer Science+Business Media LLC.
- [28] Schuster, T., Kaltenbacher, B., Hofmann, B., & Kazimierski, K. S. (2012). *Regularization methods in Banach spaces* (Vol. 10). Walter de Gruyter.
- [29] Showalter, R. E. (1974). The final value problem for evolution equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 47(3), .572-563
- [30] Showalter, R. E. (1976). Regularization and approximation of second order evolution equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 7(4), 461-.472
- [31] Tellab, B., & Haouam, K. (2018). *Résolution des équations différentielles fractionnaires* (Doctoral dissertation, Université Frères Mentouri-Constantine 1).
- [32] Wang, Z., Sunden, B., Dong, S., He, Z., Yang, W., & Wang, L. (2016, July). A numerical study of radiative heat transfer in a cylindrical furnace by using finite volume method. In *Heat Transfer Summer Conference* (Vol. 50329, p. V001T06A001). American Society of Mechanical Engineers.