الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ministère de l'Enseignement Supérieur**
**et de la Recherche Scientfiique**

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي- سكيكدة

**Ecole Normale Supérieure d'eneignement technologique, Skikda**

Département de Mathématiques — قسم الرياضيات


## مُذكّرَة تخَرج لنيَل شهَادة أُستَاذ التَّعلِيم المتوسط

# تقريب معكوس مصفوفة شاذة أو رتبة قريبة من الصفر


من إعداد الطلبة :

- بن عالية عبد الرؤوف
- هناء ساحلي
- دايرة أسماء

تحت إشراف الأستاذ :

- مزياني محمد سيف الدين


نوقشت من طرف لجنة المناقشة :

- بن تيامة وئام ................. أستاذة بالمدرسة العليا للأستاذة ................ رئيسة.
- خشمان حسام الدين ................. أستاذ بالمدرسة العليا للأستاذة ................ مناقشا.
- فنيزري فاطمة الزهراء ................. أستاذة بالمدرسة العليا للأستاذة ................ مناقشة.


السنة الجامعية : 2025/2024

دفعة جوان 2025

شهادة تعليم أستاذ متوسط رياضيات: تقريب معكوس مصفوفة شاذة أو رتبة قريبة من الصفر.

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي سكيكدة
ENSET-Skikda
قسم الرياضيات والإعلام الآلي

مصداقا لقوله تعالى:

**"لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ"**

(سورة إبراهيم، الآية 07)

بحمد الله وفضله، وبسداد منه وتوفيقه، وضعنا بين أيديكم هذا العمل العلمي، راجين أن يكون إضافة في سجل المعرفة، وأن يُكتب له القبول والنفع.

نتوجه بداية بخالص الشكر والعرفان لأستاذنا المشرف **مزياني محمد سيف الدين**، الذي كان خير سندٍ وموجه لنا خلال فترة إعداد هاته المذكرة، فله منا أسمى عبارات الامتنان والتقدير على دعمه.

كما نتوجه بجزيل الشكر إلى أعضاء لجنة المناقشة:

- الأستاذة **بن تيمامة وئام** (رئيسة اللجنة).
- الأستاذ **خشمان حسام الدين** (مناقش).
- الأستاذة **فنيزري فاطمة الزهراء** (مناقشة).

على الوقت الذي بذلوه لقراءة هذا العمل و على تفضلهم بقبول مناقشته وتقديم ملاحظاتهم البنّاءة التي نعتز بها كثيراً.

ولا يفوتنا أن نتقدم بالشكر لطاقم المدرسة العليا للأساتذة سكيكدة، وعلى رأسهم مدير المدرسة ورئيس قسم الرياضيات الأستاذ **فراق عزوز**، لكل ما قدموه من دعم طيلة سنوات تكويننا.

ختامًا، نعبر عن عظيم امتناننا لكل من وضع بصمة في هذا العمل سواء من قريب أو بعيد، داعين الله أن يوفق الجميع لما فيه الخير والصلاح.

# ❖ الإهداء

الحمد لله الذي هيأ البدء و يسر الطريق، ما كنت لأفعل هذا لولا فضله.
إلى عائلتي التي كان لحضورها أثر، و لصبرها دور، و لثقتها وقع لا يقاس.
إلى من أدرك جيدا أن فرحتهم بهذا العمل ستفوق فرحتي به.
أهدي هذه الصفحات لا كتعبير عن اكتمال بل كخطوة ضمن طريق طويل، فالغاية لم تكن يوما لحظة بل سعيا لما هو أبعد.

- بن عالية عبد الرؤوف

# ❖ الإهداء

أهدي ثمرة هذا الجهد المتواضع إلى عائلتي: أمي الغالية الحنون وأبي الداعم لي و السند طيلة مسيرتي الدراسية، إلى إخوتي: أسماء، خولة، حنان، أحمد.

إلى كل من ساندني وآمن بقدراتي.

أهدي إليكم هذه الصفحات لا كتعبير عن اكتمال بل كخطوة ضمن طريق طويل، فالغاية لم تكن يوما لحظة بل سعيا لما هو أبعد.

- هناء ساحلي

# ❖ الإهداء

الحمد لله وكفى والصلاة على الحبيب المصطفى وأهله
ومن وفى أما بعد :

إلى من كان دعاؤها زادا لي في كل خطوة، إلى من
أعطت بلا حدود وسهرت بلا كلل لتكون فرحتي
اليوم هي فرحتها إليك أمي الحبيبة.

إلى سندي الأول وأول من آمن بي ودعمني ومن
حمل عني أعباء الأيام إلى أبي الغالي.

إلى من كان لي أخا وأبا وصديقا من كان يقف
خلفي بألف خطوة دعم إليك أخي ما كان ليتم
تخرجي إلا بدعمك ومساندتك.

إلى رفيقة دربي، ملجأي، ملاذي وقوتي في الضعف
إلى أختي حفظها الله.

إلى أحسن من عرفني بهم القدر، إلى من تحلو
بالإخاء وتميزوا بالوفاء : هناء، هند، إيناس، يسرى
شروق، هديل.

إلى كل من كان عونا وسندا لي في هذا الطريق
ممتنة لكم جميعا.

- دايرة أسماء

# ملخص

تتمحور دراستنا في هاته المذكرة حول جمل المعادلات الخطية الشاذة التي تصنف لعدة أنواع، ما دفعنا لاتباع أساليب مختلفة لمعالجتها كطريقة المربعات الدنيا، SVD وطرق التنظيم (TSVD، تيخونوف و Landweber)

كما قادتنا هاته الدراسة إلى نظرية إيكارت يونغ ميرسكي التي تسمح بتقريب مصفوفة شاذة بمصفوفة ذات رتبة أقل منها، و اهتمت أيضا بشروط وجود الحل للأنظمة الشاذة التي تضمنتها نظرية روتشي كابيلي و شرط بيكارد.

**الكلمات المفتاحية** : مصفوفة شاذة، المعكوس، المحدد، رتبة مصفوفة، الجمل ذات حساسية، العدد الشرطي.

# المحتويات

# مقدمة

في قلب البنية الجبرية للرياضيات، تبدو القسمة على الصفر كحد فاصل بين الممكن والممنوع، إنها ليست مجرد عملية غير معرفة بل تمثل حالة خاصة تكشف حدود النظام العددي الذي نشتغل ضمنه، وتسمى في فروع الرياضيات بالشذوذ الحسابي، إذ أنه من المتداول والمعروف أن القسمة على الصفر عملية غير معرفة، لكن المشكل المطروح والمثير للجدل: هل مثل هذا الشذوذ الحسابي مرتبط بغياب الناتج أم بانعدام التفرد؟
بغرض الإجابة عن المشكل المطروح نأخذ حساب العدد المشتق كمثال:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-h}{h}$$

فلو إفترضنا أن:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} = \infty$$

فإن هذا سيجعل كل الأعداد المشتقة مالانهاية ربما يمكننا هنا التبرير أن: التغاير في بسط العبارة التي نحسب بها العدد المشتق تؤول أيضا إلى الصفر، لكن هذا التفسير سيقودنا إلى: $\frac{0}{0}$ والذي هو أيضا عملية غير معرفة إلا أنها في الحقيقة تدرس وتحلل بدقة، ما يشير إلى أن المشكلة ليست في التقسيم على الصفر بحد ذاته بل من كون أن هذه العملية قد تفضي إلى أكثر من جواب، وبالتالي نستنتج أن عدم قابلية القسمة على الصفر تفسر بعدم الوحدانية وليس بعدم الوجود، ويمكننا أن نوثق هذه الإجابة بتسليط الضوء على بعض الأنظمة الخطية، لنأخذ كمثال النظام الآتي ونحاول إيجاد الحل:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

من المعروف أنه إذا كان $det(A) = 0$ فالجملة $Ax = b$ غير قابلة للحل وبالتالي النظام السابق لا يملك حلا من كون أن:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

لكن عند التمعن في: $x_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ نجد أنها تمثل حلولا للنظام، والأكثر من ذلك يمكننا أن نجد مالانهاية من الحلول تكتب من الشكل:

$$x = \begin{pmatrix} t+1 \\ -2t+1 \end{pmatrix}$$

وهذا ما يؤكد لنا النتيجة السابقة المتحصل عليها والتي تعتبر حقيقة مثيرة للإهتمام وخارجة عن المألوف المعتاد دراسته، حيث كانت هذه الأخيرة حافزا كافيا لنا لإختيار هذا الموضوع لندرسه في مذكرة تخرجنا المعنونة بـ"تقريب معكوس مصفوفة شاذة أو رتبة قريبة من الصفر" وهذا من أجل محاولة فهمه وشرح ما تيسر لنا منه حتى نستفيد ونفيد كل قارئ مهتم بمثل هذا الموضوع، ونتاج ذلك كان عبارة عن مذكرة مشكلة من ثلاث فصول كالتالي:

الفصل الأول:

الذي كان بعنوان: "مبادئ ومفاهيم أولية" والذي قمنا فيه بالتذكير بالأدوات الرياضياتية اللازمة لبناء الفصول اللاحقة والتي لابد للمطلع على عملنا أن يكون على دراية بها وتمثلت في: تعاريف عامة حول المصفوفات، القيم والأشعة الذاتية، معكوس مصفوفة، رتبة مصفوفة، مع التذكير بمفهوم النظيم والجداء السلمي.

الفصل الثاني:

والمعنون بـ : "جمل المعادلات الخطية" والذي تناولنا فيه أنواع الأنظمة الخطية: المحددة، ناقصة التحديد ومفرطة التحديد مع تسليط الضوء على "نظرية روتشيه كابيلي" التي لعبت دورا هاما في بنائنا لأساسيات هذا الفصل إلى جانب رتبة المصفوفة (كاملة وناقصة) واللذان ساهما بدورهما في إنتقالنا للفصل الثالث.

الفصل الثالث:

المعنون بـ : "جمل المعادلات الشاذة وشبه شاذة" والذي فصلنا فيه بداية من: طريقة المربعات الدنيا مرورا إلى التفكيك لقيم منفردة ومعكوس موربنروز ثم المعادلات الخطية ذات الحساسية التي لايمكن الحديث عنها دون التطرق للعدد الشرطي، كما ركزنا أيضا في هذا الفصل على شرط بيكارد وبعض طرق التنظيم كطريقة Tikhonov , TSVD وطريقة Landweber.

# مبادىء و مفاهيم أساسية

"في الرياضيات لا نفهم الأشياء بل نعتاد عليها..." **جون فون نيومان.**

نفتتح دراستنا بتذكير حول أهم التعاريف و المفاهيم الأساسية التي سنستعملها في الفصول اللاحقة، للمزيد من التفاصيل و للتعمق أكثر يُرجى الإطلاع على المراجع المرفقة في آخر المذكرة.

## 1 تعريف المصفوفات

**تعريف 1.1** [1] ليكن $\mathbb{K}$ حقلا و $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ نسمي مصفوفة ذات $n$ سطرا و $m$ عمودا كل تطبيق منطلقه: $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ ويأخذ قيمه في الحقل $\mathbb{K}$:

$$A : \overline{1:n} \times \overline{1:m} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$i,j \longrightarrow A(i,j) = a_{ij}$$

نرمز لمجموعة المصفوفات ذات الـ $n$ سطرا و الـ $m$ عمودا بالرمز: $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ و نمثل المصفوفة على النحو التالي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

حيث $a_{ij}$ هو عنصر من المصفوفة $A$ الواقع في السطر $i$ والعمود $j$.

نسمي كل مصفوفة من: $\mathcal{M}_{1\times m}(\mathbb{K})$ سطرا و كل مصفوفة من: $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ عمودا و يطلق على كل منهما مصطلح شعاع.

بعد المصفوفة $A$ هو: $n \times m$

لتكن المصفوفات: $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ حيث:

$$A = (a_{ij})_{i=\overline{1:n},\ j=\overline{1:m}} \text{ ، } B = (b_{ij})_{i=\overline{1:n},\ j=\overline{1:m}} \text{ ، } C = (c_{ij})_{i=\overline{1:n},\ j=\overline{1:m}}$$

لدينا:

$$\begin{cases} A = B & \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad i \in \{1,\dots,n\},\ j \in \{1,\dots,m\} \\ C = A + B & \Longleftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i \in \{1,\dots,n\},\ j \in \{1,\dots,m\} \\ C = A - B & \Longleftrightarrow c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad i \in \{1,\dots,n\},\ j \in \{1,\dots,m\} \\ C = \alpha \times A & \Longleftrightarrow c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \quad i \in \{1,\dots,n\},\ j \in \{1,\dots,m\},\ \alpha \in \mathbb{K} \end{cases}$$

## 2 أنواع المصفوفات

### المصفوفة المربعة:

**تعريف 1.2** نقول عن المصفوفة:

$$A = (a_{ij})_{i=\overline{1:n},\ j=\overline{1:m}}$$

أنها مصفوفة مربعة إذا كان: عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة أي: $n = m$

و نرمز لعائلة المصفوفات المربعة بالرمز: $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

### خواص

1 محدد المصفوفة: يمكن أن نعرف محدد المصفوفة المربعة $A$ كالآتي:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

حيث: $A_{ij}$ هي المصفوفة الناتجة عن $A$ بعد حذف السطر $i$ و العمود $j$ منها.

نسمي كل مصفوفة محددها معدوم بالمصفوفة الشاذة.

**ملاحظة 1.2** لتكن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{K})$:

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

2 أثر المصفوفة: لتكن المصفوفة المربعة $A$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

نسمي العناصر: $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ بالقطر الرئيسي للمصفوفة $A$.

نسمي مجموع عناصر القطر الرئيسي بأثر المصفوفة $A$ و نرمز له بـ : $Tr(A)$ و نكتب:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

**ملاحظة 2.2**

✔ لتكن: $\alpha \in \mathbb{K}$ و $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} &1) \quad Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A) \\ &2) \quad Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B) \end{aligned}$$

**<u>المصفوفة المثلثية العلوية:</u>** هي كل مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})_{i=\overline{1:n}}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تحقق:

$$i > j \implies a_{ij} = 0$$

أي أن: جميع عناصرها التي تحت القطر الرئيسي معدومة:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**<u>المصفوفة المثلثية السفلية:</u>** هي كل مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})_{i=\overline{1:n}}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ تحقق:

$$i < j \implies a_{ij} = 0$$

أي أن: جميع عناصرها التي فوق القطر الرئيسي معدومة:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **المصفوفة القطرية:** هي كل مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})_{i=\overline{1:n}}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ جميع معاملاتها معدومة باستثناء عناصر القطر الرئيسي ليست كلها معدومة:

$$i \neq j \implies a_{ij} = 0$$

أي أن:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **المصفوفة الواحدية:** كل مصفوفة: $I_n = (a_{ij})_{i=\overline{1:n}}$ من $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ معرفة بالصيغة: $a_{ij} = \delta_{ij}$ تسمى بالمصفوفة الواحدية في $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ حيث: $\delta_{ij}$ هو رمز كرونيكر

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

**ملاحظة 3.2**

- ✔ إذا كانت: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مصفوفة قطرية أو مثلثية (علوية أو سفلية) فإن محددها هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي أي:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- ✔ محدد المصفوفة الواحدية يساوي:

$$\det(I_n) = 1$$

### معكوس المصفوفة:

**تعريف 2.2** تكون المصفوفة $A$ المربعة قابلة للعكس (منتظمة أو نقول غير شاذة) إذا وجدت مصفوفة $B$ مربعة بنفس أبعاد $A$ و تحقق: $AB = BA = I_n$ ، في هاته الحالة المصفوفة $B$ تكون وحيدة و تسمى معكوس المصفوفة $A$ و نرمز لها بـ : $A^{-1}$.

يكون: $A^{-1}$ موجوداً إذا وفقط إذا كان: $\det(A) \neq 0$ بمعنى: المصفوفة $A$ تكون غير شاذة.

إذا كانت المصفوفة $A$ شاذة: $\det(A) = 0$ فمعكوسها الإعتيادي غير موجود، في الفصول القادمة سنتطرق إلى مفهوم المعكوس المعمم أو شبه المعكوس.

**ملاحظة 4.2**

- في حالة وجود $A^{-1}$ فإن: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

### المصفوفة المستطيلة:

**تعريف 3.2** نقول عن المصفوفة: $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ أنها مصفوفة مستطيلة ذات البعد: $n \times m$ إذا كان عدد الأسطر فيها يختلف عن عدد الأعمدة أي: $n \neq m$

**ملاحظة 5.2**

- ليس للمصفوفة المستطيلة محدد، بالتالي معكوسها الإعتيادي غير موجود إلا أنها تمتلك شبه معكوس.
- كل العمليات على المصفوفات التي سنذكرها تخص جميع أنواع المصفوفات بما في ذلك المربعة منها (المصفوفة المربعة حالة خاصة من المصفوفة المستطيلة).

## 3 العمليات على المصفوفات

### ضرب مصفوفة في شعاع:

لتكن المصفوفة: $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ والشعاع: $v \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ بشكل عام يمكن القول أن ضرب مصفوفة بشعاع له طريقتان:

الطريقة الأولى: نضرب كل سطر من المصفوفة $A$ بالشعاع $v$، ناتج ضرب السطر الأول للمصفوفة في الشعاع يعطي المركبة الأولى للشعاع الناتج، وهكذا نواصل العملية.

**مثال (1)**

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 6\\ 3 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times 2+1\times 5+6\times 0\\ 3\times 2+0\times 5+3\times 0\\ 1\times 2+1\times 5+4\times 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\6\\7\end{pmatrix}$$

الطريقة الثانية: نضرب كل عمود من المصفوفة $A$ بمركبة الشعاع $v$ المقابلة له، ناتج الضرب في هاته الحالة هو مزج خطي لأعمدة المصفوفة $A$.

**مثال (2)**

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 6\\ 3 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\6\\7\end{pmatrix}$$

**ملاحظة 1.3**

- عند ضرب مصفوفة في شعاع يجب أن يتوافق عدد أعمدة المصفوفة $A$ مع عدد أسطر الشعاع $v$.
- نسمي الفضاء المكون من جميع المزوج الخطية لأعمدة المصفوفة $A$ بفضاء الأعمدة ونرمز له بـ $Col(A)$.

**ضرب مصفوفة في مصفوفة:** توجد عدة طرق لضرب المصفوفات نذكر منها:

1 الضرب الإعتيادي: لتكن المصفوفة: $A=(a_{ij})_{i=\overline{1:n},j=\overline{1:m}}$ ذات البعد: $n\times m$ والمصفوفة: $B=(b_{jk})_{j=\overline{1:m},k=\overline{1:p}}$ ذات البعد: $m\times p$ حاصل الضرب: $A\cdot B$ هو المصفوفة $C$ ذات البعد: $n\times p$ بحيث: العنصر $c_{ij}$ الواقع في السطر $i$ و العمود $j$ يحسب باستخدام الصيغة التالية: $c_{ik}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}$

**ملاحظة 2.3**

- الشرط الأساسي لإجراء الضرب الإعتيادي هو أن يكون: عدد أعمدة المصفوفة $A$ مساوي لعدد أسطر المصفوفة $B$.

**مثال (3)**

إذا كانت: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ فإن:

$$A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{\times}5+2{\times}7 & 1{\times}6+2{\times}8 \\ 3{\times}5+4{\times}7 & 3{\times}6+4{\times}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

**ملاحظة 3.3**

- توجد أنواع أخرى لضرب مصفوفة في مصفوفة كضرب كرونيكر وضرب عنصر بعنصر والتي لم نتطرق إليها في مذكرتنا.

**منقول مصفوفة:**

منقول المصفوفة $A$ هو المصفوفة الناتجة عن جعل الأسطر أعمدة والأعمدة أسطر ونرمز له بـ $A^\intercal$ حيث:

$$A^\intercal = (a_{ji})_{j=\overline{1:m},i=\overline{1:n}}$$

**خواص**

$$\begin{cases} \det(A^\intercal) = \det(A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A \pm B)^\intercal = A^\intercal \pm B^\intercal \\ (A^\intercal)^\intercal = A \\ (kA)^\intercal = kA^\intercal \\ (AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal \end{cases}$$

- المصفوفة المتناظرة: و هي المصفوفة المربعة المساوية لمنقولها:

$$A^\intercal = A \Leftrightarrow \text{متناظرة } A$$

- المصفوفة المتعامدة: هي كل مصفوفة مربعة تحقق:

$$A^\intercal = A^{-1}$$

أي أن:

$$AA^\intercal = A^\intercal A = I$$

**ملاحظة 4.3**

- إذا كانت $A$ مصفوفة متعامدة فإن الأشعة التي تضمها هاته المصفوفة سواء كأعمدة أو كأسطر تكون متعامدة مع غيرها من الأشعة.

**رتبة مصفوفة:**

- في الجبر الخطي رتبة عائلة من الأشعة هو بعد أكبر فضاء جزئي مولد بهذه الأشعة.
- رتبة تطبيق خطي من $E$ نحو $F$ هو بعد صورة التطبيق وهو فضاء جزئي من فضاء الوصول $F$.
- رتبة مصفوفة هي رتبة التطبيق الخطي الذي تمثله ويمكن القول أنها رتبة عائلة الأشعة المكونة من أعمدة المصفوفة.

**ملاحظة 5.3**

- إذا كانت $A$ مصفوفة ذات البعد $n \times m$ فإن: $rank(A) \leq \min(m, n)$

# 4 القيم الذاتية والأشعة الذاتية

**تعريف 1.4** نفرض أن $E$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ و $\mathcal{T}$ أندومورفيزم، نقول أن كل $v \in E$ مختلف عن الصفر ويحقق: $\mathcal{T}(v) = \lambda v$ حيث $\lambda \in \mathbb{K}$ أنه شعاع ذاتي لـ $\mathcal{T}$ وتدعى $\lambda$ قيمة ذاتية لـ $\vec{v}$.

- بما أن المصفوفة المربعة هي أندومورفيزم فإن: الشعاع الذاتي $\vec{v}$ للمصفوفة $A$ أيضا يحقق: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ مع $\lambda$ قيمة ذاتية لـ $\vec{v}$.

**ملاحظة 1.4**

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_n)\vec{v} = 0$$

أي أن إيجاد الشعاع الذاتي لـ $A$ يؤول إلى حل الجملة: $(A - \lambda I_n)\vec{v} = 0$ حيث $\lambda$ قيمة ذاتية لـ $\vec{v}$.

المصفوفة المميزة: تدعى المصفوفة $A-\lambda I_n$ بالمصفوفة المميزة لـ $A$ حيث $I_n$ هي مصفوفة الوحدة ويكون محددها كالآتي:

$$\det(A-\lambda I_n)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

جذور المعادلة :

$$\det(A-\lambda I_n)=(-1)^n\lambda^n+C_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+C_1\lambda+C_0=0$$

هي القيم الذاتية لـ $A$، و نسمي عندئذ مجموعة كل الجذور بطيف $A$.

كثير الحدود المميز للمصفوفة: من أجل كل مصفوفة $A$ على الحقل $\mathbb{K}$ يدعى كثير الحدود $P_n$ بكثير الحدود المميز لـ $A$ وتدعى حينئذ $\lambda$ بالقيمة الذاتية لـ $A$ إذا وفقط إذا كان:

$$det(A-\lambda I_n)=0$$

**البرهان:**

لنبرهن التكافؤ التالي:

$$\det(A-\lambda I_n)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ قيمة ذاتية لـ } A$$

الاستلزام الأول: نفرض أن $\lambda$ قيمة ذاتية لـ $A$ معناه:

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v}$$
$$A\vec{v}-\lambda\vec{v}=0$$
$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0} \qquad (\star)$$

من $\star$ نجد أن:

$\vec{v}\in ker(A-\lambda I_n)$ لكن من التعريف: $\vec{v}\neq 0$ إذن: $ker(A-\lambda I_n)\neq 0$ وعليه المصفوفة $A-\lambda I_n$ غير قابلة للعكس فينتج عن ذلك:

$$det(A-\lambda I_n)=0$$

الاستلزام الثاني: نفرض أن $det(A-\lambda I_n)=0$ معناه: $A-\lambda I_n$ غير قابلة للعكس، وبالتالي يكون: $ker(A-\lambda I_n)\neq 0$ أي يوجد $\vec{v}\neq 0$ يحقق $\vec{v}\in ker(A-\lambda I_n)$ فينتج:

$$(A-\lambda I_n)\vec{v}=\vec{0}$$

$$
\begin{aligned}
A\vec{v} - \lambda I_n \vec{v} &= 0 \\
A\vec{v} &= \lambda \vec{v}
\end{aligned}
$$

ومن تعريف الشعاع الذاتي نجد أن $\lambda$ قيمة ذاتية لـ $A$.

**مثال (1)**

لتكن $A$ مصفوفة مربعة بعدها 2 ومعرفة بالشكل:

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}
$$

☛ جد كثير الحدود المميز والقيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة $A$.

الحل:

كثير الحدود المميز:

$$
\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)(2-\lambda) - (-1)(-2) \\
&= \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2 \\
&= \lambda^2 - 5\lambda + 4
\end{aligned}
$$

إذن:

$$
P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4
$$

القيم الذاتية: $\lambda_1 = 4 \quad , \quad \lambda_2 = 1$

الأشعة الذاتية:

$$
(A - \lambda I_n)\vec{v} = 0
$$

من أجل: $\lambda_1 = 4$

$$
\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}
$$

ومنه:

$$
\vec{v_1} = \langle -1, 1 \rangle
$$

من أجل: $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\vec{v_2} = \langle 1, 2 \rangle$$

## خواص

خواص القيم الذاتية:

خاصية 1: إذا كانت $\lambda$ قيمة ذاتية غير معدومة لمصفوفة $A$ قابلة للعكس فإن $\dfrac{1}{\lambda}$ قيمة ذاتية لـ $A^{-1}$.

**البرهان:**

من تعريف القيمة الذاتية نجد $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ بما أن $A$ قابلة للعكس فإن $A^{-1}$ موجود ومنه:

$$A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}(\lambda\vec{v})$$

$$\vec{v} = \lambda(A^{-1}\vec{v})$$

بما أن: $\lambda \neq 0$ فإنه بالقسمة على $\lambda$:

$$\frac{1}{\lambda}\vec{v} = (A^{-1}\vec{v})$$

$$A^{-1}\vec{v} = \frac{1}{\lambda}\vec{v}$$

وعليه من التعريف نجد أن: $\dfrac{1}{\lambda}$ قيمة ذاتية لـ $A^{-1}$.

خاصية 2: القيم الذاتية لمصفوفة مثلثية هي قيم عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة.

**البرهان:** لتكن $A$ مصفوفة مثلثية ومنه كثير الحدود المميز لـ $A$ هو:

$$det(A - \lambda I_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda)...$$

و عليه فإن القيم الذاتية لـ $A$ هي:

$$\lambda_1 = a_{11} \quad , \quad \lambda_2 = a_{22} \quad , \quad \lambda_3 = a_{33} \ ...$$

خاصية 3: المصفوفة $A$ و $A^{\intercal}$ لهما نفس القيم الذاتية.

**البرهان:**

لدينا:

$$|A| = |A^{\intercal}| \Rightarrow |A^{\intercal} - \lambda I| = |(A^{\intercal} - \lambda I)|^{\intercal} = |A - \lambda I|$$

أي:

$$|A^{\intercal} - \lambda I| = |A - \lambda I|$$

ومنه لـ $A$ و $A^{\intercal}$ نفس كثير الحدود المميز إذا لهما نفس القيم الذاتية.

خاصية 4: إذا كانت القيمة الذاتية $\lambda$ للمصفوفة $A$ معدومة فإن: $A$ مصفوفة شاذة.

**البرهان:**

لدينا $A$ مصفوفة مربعة وعليه يمكن كتابتها بالشكل $A = PDP^{-1}$ حيث $D$ مصفوفة قطرية، إذن:

$$|A| = |PDP^{-1}| = |P||D||P^{-1}| = |P||\frac{1}{P}||D| = |D|$$

أي أن: $det(A) = det(D) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

من أجل: $j \in \overline{1:n}$ نضع $\lambda_j = 0$ فيكون: $det(A) = 0$، أي أن $A$ مصفوفة شاذة.

## خواص

خواص الأشعة الذاتية:

خاصية 1: لكل قيمة ذاتية يمكن على الأقل إيجاد شعاع ذاتي.

**البرهان:**

القيم الذاتية هي حلول المعادلة المميزة $det(A-\lambda I_n) = 0$ وعليه فإن المصفوفة $A-\lambda I_n$ مصفوفة شاذة وبالتالي يكون $rank(A - \lambda I_n) < n$ ومن نظرية الأبعاد:

$$rank(A - \lambda I_n) + Null(A - \lambda I_n) = n$$

أي أن: $Null(A) = n - rank(A)$

إذن يوجد حتما $\vec{v} \neq \vec{0}$ بحيث: $(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$

ومنه: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

خاصية 2: إذا كانت $\lambda$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ مكررة $n$ مرة وكانت $u_1, u_2, ..., u_n$ هي الأشعة الذاتية المرافقة للقيمة الذاتية $\lambda$ فإن المزج الخطي $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ يكون أيضا شعاعا ذاتيا للمصفوفة $A$ و مرافقا للقيمة الذاتية $\lambda$.

**البرهان:**

نفرض أن: $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ أشعة ذاتية مرافقة للقيمة $\lambda$ ومنه: $Au_i = \lambda u_i$

لدينا:

$$A\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\lambda u_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

إذن المزج الخطي $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ هو شعاع ذاتي للمصفوفة $A$.

خاصية 3: الأشعة الذاتية المرافقة لقيم ذاتية مختلفة هي أشعة مستقلة خطيا.

خاصية 4: إذا كانت $A$ مصفوفة قابلة للعكس و $\lambda$ قيمة ذاتية غير معدومة للمصفوفة $A$ إذن الأشعة الذاتية للمصفوفة $A^{-1}$ المرافقة للقيمة الذاتية $\frac{1}{\lambda}$ هي نفسها الأشعة الذاتية للمصفوفة $A$ والمرافقة للقيمة الذاتية $\lambda$.

كثير الحدود الأصغري:

نفرض أن $F(x)$ هي حلقة كثيرات الحدود على الحقل $\mathbb{K}$ فإذا كان $p(x)$ و $m(x)$ كثيرا حدود من $F(x)$ حيث $p(x) \neq 0$ عندئذ يوجد كثيرا حدود $q(x)$ و $r(x)$ من $F(x)$ بحيث:

$$m(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

$A$ مصفوفة مربعة و $m(x)$ كثير حدود أصغري لـ $A$ إذا وفقط إذا كان $m(x)$ هو أصغر كثير حدود يحقق: $m(A) = 0$.

**نظرية (1)**

نظرية كايلي هاملتون: لتكن $A \in M_n(\mathbb{K})$ وليكن $P_n(x)$ كثير الحدود المميز لـ $A$ عندئذ يكون $P_n(A) = 0$.

**ملاحظة 2.4** : نقول عن كثير الحدود المميز لـ $A$ أنه عادم لها.

## 5 النظيم

**تعريف 1.5.** نسمي نظيماً $N$ على $\mathbb{R}^n$ كل تطبيق $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ يحقق الشروط التالية:

1) شرط الفصل:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ N(x) = 0 \iff x = 0$$

2) شرط التجانس:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$$

3) شرط المتباينة المثلثية:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

يُسمّى $N(x)$ نظيم $x$ ويُرمز له بالرمز $\|x\|$.

### خواص

1) $\forall x \in E : N(-x) = N(x)$

2) $\forall x \in E : N(x) \geq 0$

**البرهان:**

(1

$$\forall x \in E : N(-x) = |-1| \cdot N(x) = N(x)$$

(2

$$\forall x \in E : 0 = N(x-x) \leq N(x) + N(-x) = 2N(x)$$
$$\implies N(x) \geq 0$$

**ملاحظة 1.5**

✔ يمكن تعريف عدة نظم على $\mathbb{R}^n$، إذا كان لدينا الشعاع $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^\intercal \in \mathbb{R}^n$ فإن:

$$1)\quad \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad 2)\quad \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad 3)\quad \|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

**تعريف 2.5.** من المعلوم أن $(M_n(\mathbb{K}), \|.\|)$ فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$، وبالتالي فإن $(M_n(\mathbb{K}), \|.\|)$ يدعى بالفضاء النظيمي للمصفوفات. حيث يعبر عن النظيم بالعلاقة:

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

# 6 الأنواع الأساسية لنظم المصفوفة

- نظيم الأعمدة $\|A\|_l$:

$$\|A\|_l = \max_{1\leq j\leq m} \left( \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right), \forall A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

- نظيم الأسطر $\|A\|_m$:

$$\|A\|_m = \max_{1\leq i\leq n} \left( \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right), \forall A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

- نظيم فروبينيوس $\|A\|_F$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2}, \forall A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

**مثال (1)**

من أجل المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

نحسب النظم المختلفة:

$$\begin{cases} \|A\|_l = \max\{1+3, 2+4\} = 6 \\ \|A\|_m = \max\{1+2, 3+4\} = 7 \\ \|A\|_F = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30} \approx 5.47 \end{cases}$$

### خواص

$$\begin{cases} 1) & \|\lambda x\| \leq |\lambda| \cdot \|x\| \\ 2) & \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \\ 3) & \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \\ 4) & \|I\| = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5) & \|A^k\| \leq \|A\|^k \\ 6) & \|A^{-1}\| \leq \|A\|^{-1} \\ 7) & \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \\ 8) & \|A-B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{cases}$$

## 7 الجداء السلمي

**تعريف 1.7.** الجداء السلمي على $E$ هو التطبيق $f$ المعرّف بـ :

$$\begin{aligned} f : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

والذي يحقق الشروط التالية:

1) **التناظر:**

$$\forall x, y \in E^2, \quad f(x,y) = f(y,x)$$

2) **ثنائية الخطية:**

$$\begin{aligned} &\forall (x_1, x_2, y) \in E^3 : \quad f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) \\ &\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y) \end{aligned}$$

3) **معرف:**

$$\forall x \in E : \quad f(x,x) = 0 \iff x = 0$$

4) **موجب:**

$$\forall x \in E : \quad f(x,x) \geq 0$$

**ترميز:** نسمي صورة الثنائية $(x,y)$ بواسطة التطبيق $f$ بالجداء السلمي للشعاعين $x, y$ من $E$ ونكتب:

$$f(x,y) = \langle x, y \rangle = x \cdot y$$

**تعريف 2.7.** أي فضاء شعاعي ذو بعد منته نعرف عليه جداء سلمي هو فضاء إقليدي.

### الناظم في فضاء إقليدي:

ليكن $E$ فضاء إقليدي وليكن $x \in E$، إذن يمكن تعريف الناظم انطلاقا من الجداء السلمي بالعبارة:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

**ملاحظة 1.7**

✔ التمثيل المصفوفي للناظم في فضاء إقليدي يكون كالتالي:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{X^\intercal X}, \quad X \in \mathbb{K}^m$$

**خواص**

نعتبر $(x, y)$ ثنائية من $E{\times}E$، لدينا:

$$\begin{cases} 1) & \|x^2 + y^2\| = \|x^2\| + \|y^2\| + 2\langle x, y\rangle \\ 2) & \|x^2 - y^2\| = \|x^2\| + \|y^2\| - 2\langle x, y\rangle \\ 3) & \langle x + y, x - y\rangle = \|x^2\| - \|y^2\| \end{cases} \qquad \begin{cases} 4) & |\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| \\ 5) & \|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \end{cases}$$

**نظرية (1)**

الشعاع المعدوم في $E$ هو الشعاع الوحيد المتعامد مع كل عنصر $E$ أي:

$$\forall x \in E : A \perp x \iff A = \vec{0}$$

**الإثبات:** **2** $\Longrightarrow$ **1:**

$$\forall x \in E : f(A, x) = 0$$

نأخذ $x = A$:

$$f(A, A) = 0$$
$$\langle A, A\rangle = 0$$
$$\|A\|^2 = 0$$
$$\Longrightarrow A = \vec{0}$$

**2** $\Longleftarrow$ **1:** نفرض أن $A = \vec{0}$

لدينا:

$$f(x, \vec{0}) = f(x, \vec{0} + \vec{0}) = f(x, \vec{0}) + f(x, \vec{0})$$
$$\Longrightarrow f(x, \vec{0}) = 0$$
$$\forall x \in E : f(x, A) = f(x, \lambda\vec{0}) = \lambda f(x, \vec{0}) = 0$$
$$\Longrightarrow x \perp A$$

باب 2

# جمل المعادلات الخطية

[2]،[9] لتكن جملة المعادلات الخطية المكونة من $n$ من المعادلات و $m$ من المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_m$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

يعطى الشكل الصفوفي لهذه الجملة كما يلي:

$$Ax = b$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}(\mathbb{K}),\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

وهنا نميز ثلاث حالات:

(i) $n < m$: عدد المعادلات أقل من عدد المتغيرات، يدعى النظام الخطي بناقص التحديد.

(ii) $n > m$: عدد المعادلات أكبر من عدد المتغيرات، يدعى النظام الخطي بمفرط التحديد.

(iii) $n = m$: عدد المعادلات يساوي عدد المتغيرات يدعى النظام الخطي بالنظام المحدد.

سنتطرق في هذا الفصل لكل حالة على حدى سواء في حالة نظام متجانس أو غير متجانس وسندرس وجود ووحدانية الحل.

# 1 جمل المعادلات الخطية المتجانسة $(Ax = 0)$

## 1.1 جمل المعادلات الخطية المتجانسة ذات الأبعاد المربعة $n = m$

هنا نميز حالتين، هما:

1) **إذا كانت $A$ غير شاذة:**

أي: $A^{-1}$ موجود، أو بتعبير آخر: $rank(A) = m$ في هاته الحالة للمسألة حل وحيد هو الحل التافه (الحل الصفري).

2) **إذا كانت $A$ شاذة:**

أي: $A^{-1}$ غير موجود، أو بتعبير آخر: $rank(A) < m$ في هاته الحالة للمسألة عدد لا نهائي من الحلول.

☑ خوارزمية الحل: نستخدم عملية الحذف لتحويل المصفوفة $A$ إلى مصفوفة مخفضة الرتبة $R$

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

حيث:

$I$ مصفوفة الوحدة.

$F$ المصفوفة التي أعمدتها حلول خاصة للمعادلة $Ax = 0$.

بوضع: $Rx = 0$ نجد:

$$x = c \begin{pmatrix} -F \\ I \end{pmatrix}$$

وعليه تصبح الصيغة العامة للحل:

$$x = c_1 \begin{pmatrix} -q_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -q_2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots c_{m-r} \begin{pmatrix} -q_{m-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

**ملاحظة 1.1**

- نتحصل على عدد المتغيرات الحرة (عدد الأعمدة المرتبطة خطياً) بإجراء العملية: $m - r$ حيث:
  - $m$: تمثل عدد أعمدة المصفوفة.
  - $r$: تمثل رتبة المصفوفة.
  - إن عدد المتغيرات الحرة يتحكم في وجود حلول المعادلة: $Ax = 0$ من عدمها (عدد الحلول الخاصة مرتبط بعدد المتغيرات الحرة بحيث لكل متغير حر حل خاص).
  - حلول المعادلة $Ax = 0$ هي المزج الخطي لجميع الحلول الخاصة.

**تعريف 1.1.** حلول المعادلة $Ax = 0$ تشكل الفضاء الصفري للمصفوفة $A$ (نواة المصفوفة) بحيث يكون بعدها (عدد أشعة الأساس المولدة لهذا الفضاء) هو عدد الأعمدة المرتبطة خطيا (عدد المتغيرات الحرة).

**مثال (1)**

حل المعادلة: $Ax = 0$ حيث A تعطى بالشكل:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

الحل:

$rank(A) = 2$ وعليه النظام يملك مالانهاية من الحلول.
المصفوفة المخفضة الرتبة تكون من الشكل:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه الحل يكتب بالشكل:

$$x = c \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 2.1 جمل المعادلات الخطية المتجانسة ذات الأبعادالمستطيلة $n \neq m$

1) **جمل المعادلات الخطية المتجانسة ناقصة التحديد $n < m$**

نميز حالتين:

- ☜ $rank(A) = n < m$:

جميع الأسطر مستقلة خطيا أي أنه يوجد $m - n$ من المتغيرات الحرة فالنظام يملك مالانهاية من الحلول تكتب بالشكل:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -q_1 \\ -- \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -q_2 \\ -- \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{m-n} \begin{pmatrix} -q_{m-n} \\ -- \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ☜ $rank(A) < n < m$:

هناك أسطر مرتبطة خطيا أي أنه يوجد $m - r$ متغيرات حرة فالنظام يملك مالانهاية من الحلول تكتب بالشكل:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -q_1 \\ -- \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -q_2 \\ -- \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{m-r} \begin{pmatrix} -q_{m-r} \\ -- \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) **جمل المعادلات الخطية المتجانسة مفرطة التحديد $m < n$**

هنا نميز حالتين، هما:

1. ☜ $rank(A) = m < n$:

جميع الأعمدة مستقلة خطيا، وعليه لا يوجد أي متغير حر أي أن $ker(A) = 0$ و بالتالي للمعادلة $Ax = 0$ حل وحيد هو الحل التافه(حل صفري).

2. ☜ $rank(A) < m < n$:

توجد أعمدة مرتبطة خطيا وعليه توجد $m-r$ متغيرات حرة، أي بعد نواة المصفوفة هو $m-r$ فالنظام يملك مالانهاية من الحلول.

نعبر عنها بالشكل:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -q_1 \\ -- \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -q_2 \\ -- \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{m-r} \begin{pmatrix} -q_{m-r} \\ -- \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2 جمل المعادلات الخطية غير المتجانسة $(Ax = b)$

لحل هذا النوع من الأنظمة نقوم أولا بإيجاد حلول المعادلة $Ax = 0$ ثم نبحث عن حلول المعادلة $Ax = b$ وذلك بإجراء عملية الحذف ومساواة جميع المتغيرات الحرة للصفر، تعطى عبارة الحل العام بالشكل:

$$\vec{x} = \vec{x_p} + c \cdot \vec{x_s}$$

حيث:

$c$ : عبارة عن متغير.

$\vec{x_s}$ : أساس نواة المصفوفة $A$ أو بعبارة أخرى حل النظام المتجانس $Ax = 0$ .

$\vec{x_p}$ : حل خاص للمعادلة $Ax = b$ نحصل عليه عند مساواة المتغيرات الحرة للصفر.

وجب لفت الإنتباه لكون المعادلة $Ax = b$ تقبل حلا على الأقل إذا وفقط إذا كان فضاء الوصول محتوى في فضاء الأعمدة (بمعنى كل شعاع من فضاء الوصول يكتب على شكل مزج خطي لأساس فضاء الأعمدة).

**نظرية (1)**

نظرية روتشيه كابيلي: يكون لنظام المعادلات الخطية حل إذا وفقط إذا كانت مصفوفة المعاملات $A$ والمصفوفة الموسعة $(A : b)$ لهما نفس الرتبة ونقول عندئذ أن النظام متسق ونكتب:

$$rank(A) = rank(A : b) \iff \text{النظام يقبل حل}$$

سنتطرق الآن إلى حالات وجود ووحدانية الحل:

## 1.2 جمل المعادلات الخطية غير المتجانسة ذات الأبعاد المربعة (نظام محدد)

هنا نميز ثلاث حالات:

1) **الحالة 1:** $rank(A) = rank(A:b) = m$

كون المصفوفة $A$ مربعة ذات رتبة كاملة بالضرورة النظام متسق أي أن الشعاع $b$ المضاف للمصفوفة يمكن كتابته بشكل مزج خطي لأعمدة المصفوفة $A$ إذن النظام يملك حل، من جهة أخرى لاتوجد متغيرات حرة أي أن $ker(A) = 0$ إذن للنظام حل وحيد يكتب بالشكل:

$$\vec{x} = \vec{x_p}$$

طرق إيجاد الحل: يمكن إيجاد الحل باستخدام الطرق المباشرة مثل طريقة المعكوس أو طريقة الحذف أو طريقة التقسيم لمصفوفة علوية وسفلية LU حيث نحصل على حل وحيد دقيق بعد عدد معلوم ومحدود من الخطوات أو باستخدام الطرق غير مباشرة مثل جاكوبي وغوص صايدال،طريقة الاسترخاء... والتي نحصل من خلالها على حل وحيد تقريبي وهذا في حال كانت المصفوفة بأبعاد كبيرة حيث تصبح الطرق المباشرة جد معقدة لأنها تؤدي إلى زيادة الأخطاء بسبب كثرة العمليات.

**مثال (1)**

حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 14 \\ 3x + y + 2z = 13 \end{cases}$$

الحل:

تمثيل النظام بشكل مصفوفي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

لدينا: $rank(A) = rank(A:b) = 3$ إذن: $A$ قابلة للعكس.
حساب معكوس المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(comt(A))^{\intercal}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2) **الحالة 2:** $rank(A) = rank(A:b) < m$

النظام متسق فهو يملك حلا واحدا على الأقل، والمصفوفة ذات رتبة ناقصة فبالتالي $ker(A)$ يحتوي على شعاع يختلف عن $\vec{0}$، يمكن التعبير عن هاته الحالة بصيغة مختلفة حيث يمكن القول أن المعكوس $A^{-1}$ غير موجود لأنه توجد متغيرات حرة، أي أعمدة مرتبطة خطيا وعليه النظام يملك مالانهاية من الحلول تكتب بالشكل:

$$X = \begin{pmatrix} S \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -q_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -q_2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ...... + c_{m-r} \begin{pmatrix} -q_{m-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

**مثال (2)**

حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

**الحل:** لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & :1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & :1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & :2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & :0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & :1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & :1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & :1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & :-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & :1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & :1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & :0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن كل من السطر الثالث والرابع أصفار مما يعني أن هناك متغيرات حرة وهي: $x_3, x_4$

بوضع: $x_3 = 0, x_4 = 0$ نجد: $x_1 = 1, x_2 = 1$ وعليه:

$$x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حلول المعادلة $Ax = 0$:

$$x_s = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وعليه يكون الحل العام بالشكل:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) **الحالة 3:** $rank(A) \neq rank(A : b), rank(A) < m$

في هذه الحالة لا نستطيع كتابة الشعاع $b$ كمزج خطي بواسطة أساس فضاء الأعمدة (الشعاع $b$ مستقل خطيا عن أعمدة المصفوفة)، إذن المعادلة $Ax = b$ ليس لها حل دقيق (يدعى في هاته الحالة النظام بالنظام غير المتسق).

**ملاحظة 1.2** يكون النظام غير متسق إذا كانت معادلاته متناقضة بحيث لا يمكن إيجاد حل مشترك لها.

**مثال (3)**

هل لجملة المعادلات التالية حل؟

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = -2 \end{cases}$$

الحل:

تمثيل النظام بشكل مصفوفي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

حساب رتبة $A$ :

نلاحظ أن أعمدة $A$ مضاعفات لبعضها البعض (العمود الثاني والثالث يكونان مزج خطي للعمود الأول) إذن $rank(A) = 1$

حساب رتبة $(A : b)$ :

$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & : 4 \\ 2 & 4 & 6 & : 0 \\ 3 & 6 & 9 & : -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & : 4 \\ 0 & 0 & 0 & : -8 \\ 0 & 0 & 0 & : -14 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن العمود الثاني والثالث يكتبان كمزج خطي للعمود الأول بينما العمود الأول والرابع منفصلان وبالتالي $rank(A : b) = 2$

كون $rank(A) \neq rank(A : b)$ فالنظام لا يقبل حل ويمكن التأكد من ذلك حيث نجد التناقض التالي:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 0 = -8 \\ 0 = -14 \end{cases}$$

في الحقيقة هذا هو لب الموضوع فلن نكتفي بعبارة عدم وجود الحل بل سنبحث عن حل تقريبي في العناوين المقبلة.

## 2.2 جمل المعادلات الخطية غير المتجانسة ذات الأبعاد المستطيلة

2) **جمل المعادلات الخطية غير المتجانسة الناقصة التحديد $m > n$**

و نميز كذلك ثلاث حالات:

1) **الحالة 1:** إذا كانت: $rank(A) = rank(A : b) = n < m$

النظام متسق، إذن يوجد حل واحد على الأقل، وبملاحظة أن جميع الأسطر مستقلة خطيا فإنه يوجد بذلك $m - n$ متغير حر والذي يمثل بعد نواة المصفوفة، إذن للنظام مالانهاية من الحلول تكتب بالشكل:

$$X = \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -q_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -q_2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + .... + c_{m-n} \begin{pmatrix} -q_{m-n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

**مثال (4)**

حل النظام التالي

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

الحل: الشكل المصفوفي للنظام هو:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

رتبة المصفوفة $A$: نلاحظ أن العمود الثالث يكتب كمزج خطي للعمودين الأول والثاني وبالتالي: $rank(A) = 2$.

رتبة المصفوفة الموسعة:

$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : 2 \\ 0 & 1 & 1 & : 2 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن العمودين الثالث والرابع يكتبان كمزج خطي للعمودين الأول والثاني المستقلين وبالتالي:

$$rank(A : b) = 2$$

إذن فالنظام متسق من كون أن: $rank(A) = rank(A:b)$

و من جهة أخرى: $rank(A) = 2 < 3$، إذن يوجد متغير حر واحد ومنه النظام له عدد لا نهائي من الحلول تكتب بالشكل:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) **الحالة 2:** اذا كانت $rank(A) = rank(A:b)$ و $rank(A) < n < m$ النظام متسق فهو يملك حلا على الأقل والرتبة أقل من $n$ ما يدل على وجود أسطر مرتبطة خطيا أي يوجد $m - r$ متغيرات حرة والتي تمثل بعد نواة المصفوفة ومنه نستنتج أن للنظام مالانهاية من الحلول نعبر عليها بالشكل:

$$X = \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -q_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -q_1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_{m-r} \begin{pmatrix} -q_{m-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

**مثال (5)**

حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 12x_4 = 15 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 18x_4 = 24 \end{cases}$$

**الحل:** لدينا الشكل المصفوفي للنظام هو:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & 18 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$$

رتبة المصفوفة $A$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&6\\4&5&6&12\\7&8&9&18\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\4&-3&-6&-12\\7&-6&-12&-24\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\4&-3&0&0\\7&-6&0&0\end{pmatrix}$$

وبالتالي: $rank(A) = 2$

رتبة المصفوفة الموسعة:

$$(A:b) = \begin{pmatrix}1&2&3&6&:6\\4&5&6&12&:15\\7&8&9&18&:24\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&3&6&:6\\0&-3&-6&-12&:-9\\0&-6&-12&-24&:-18\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&3&6&:6\\0&-3&-6&-12&:-9\\0&0&0&0&:0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&-2&:0\\0&1&2&4&:3\\0&0&0&0&:0\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن: $rank(A:b) = rank(A) = 2$ وعليه النظام يقبل حلا واحدا على الأقل، من جهة أخرى: $rank(A) = 2 < 4$ إذن النظام يملك مالانهاية من الحلول.

تحديد الحل العام:

نلاحظ أن المتغيرين $x_3, x_4$ حرين لأن العمودين الثالث والرابع مرتبطين بالثاني

بوضع: $x_3 = 0, x_4 = 0$

نجد: $x_1 = 0, x_2 = 3$

وبالتالي الحل العام يعطى بالشكل:

$$X = \begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$$

3) **الحالة 3:** $rank(A) \neq rank(A:b), rank(A) < n$

في هذه الحالة الشعاع $b$ لا يمكن كتابته على شكل مزج خطي لأساس فضاء الأعمدة، ومنه النظام ليس له حل دقيق.

**مثال (6)**

حل النظام التالي:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

معادلات هذا النظام متناقضة فهو لايملك حل.

2) **جمل المعادلات الخطية مفرطة التحديد** $n > m$

هنا نميز 3 حالات:

1) **الحالة 1:** $rank(A) = rank(A:b), rank(A) = m$

النظام متسق إذن يوجد حل واحد على الأقل من جهة أخرى المصفوفة ذات رتبة كاملة فالحل وحيد.

**مثال (7)**

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=8 \\ -3x-2y=-7 \end{cases}$$

الحل:

$rank(A) = rank(A:b) = 2$ نظام متسق ذو رتبة كاملة فهو يملك حلا وحيدا: $x = (1,2)$

1) **الحالة 2:** $rank(A) = rank(A:b), rank(A) < m$

النظام متسق فهو يملك حلا واحدا على الأقل لكن المصفوفة $A$ ذات رتبة ناقصة وعليه النظام يملك مالانهاية من الحلول نعبر عنها بالشكل:

$$X = \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -q_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -q_1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_{m-r} \begin{pmatrix} -q_{m-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

**مثال (8)**

حل النظام التالي:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$$

الحل:

نلاحظ أن: $rank(A)=rank(A:b)=1$ و $m<n$، إذن للنظام مالانهاية من الحلول تكتب بالشكل:

$$X=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

3) **الحالة 3:** $rank(A)\neq rank(A:b), rank(A)\leq m$
كون النظام في هذه الحالة غير متسق فهو لا يملك حل دقيق.

**مثال (9)**

هل النظام التالي يملك حل؟

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=1 \\ 3x+y=3 \end{cases}$$

الحل:

نلاحظ أن: $(2,3)$ حل للمعادلتين الأولى والثانية ولا يحقق المعادلة الثالثة، و بالتالي النظام غير متسق إذن لايملك حل دقيق.

باب 3

# جمل المعادلات الشاذة و شبه الشاذة

"إلى الحد الذي ترتبط فيه قوانين الرياضيات بالواقع، فهي ليست مؤكدة، وحين تكون مؤكدة، فإنها لا ترتبط بالواقع..." — **ألبرت أينشتاين.**

## 1 طريقة المربعات الدنيا

المبدأ[3]،[6] : تساهم طريقة المربعات الدنيا في إيجاد الحل التقريبي للنظام غير المتسق مفرط التحديد وذلك بالبحث عن الشعاع $x$ الذي يجعل الخطأ بين النتائج المتوقعة والنتائج الفعلية أقل ما يمكن، وهذا ما يعرف بـ "الحل ذو أصغر راسب " الذي نعبر عنه كما يلي:

$$min_x||Ax-b||^2$$

تحليل ومناقشة مسألة المربعات الدنيا:
ليكن:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}(\mathbb{K}),\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

و نعتبر: $rank(A)=m<n$

✔ من الواضح أن النظام: $Ax=b$ ليس له حل لأنه لا يمكن كتابة $b$ على شكل مزج خطي بدلالة أعمدة المصفوفة $A$ (نظام غير متسق)، تهدف مسألة المربعات الدنيا إلى إيجاد مزج خطي من الأعمدة يكون هو الأقرب إلى $b$ من بين كل المزوج الممكنة.

**ملاحظة 1.1** لنفترض أن: $a_i^\intercal$ يمثل السطر $i$ من المصفوفة $A$ حيث: $i = 1...n$ عندئذ نكتب:

$$a_i^\intercal x = b_i$$

أي أن: كل سطر من المصفوفة $A$ يمثل معادلة خطية من النظام: $Ax = b$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^\intercal x = b_i \Leftrightarrow Ax = b$$

حسب مسألة المربعات الدنيا:

$$||Ax - b||^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i^\intercal x - b_i)^2$$

$$||Ax - b||^2 = (a_1^\intercal x - b_1)^2 + \cdots (a_n^\intercal x - b_n)^2$$

✔ نستنتج بذلك أن مسألة المربعات الدنيا تهدف لإيجاد حل تقريبي يقلل من مجموع مربعات الفروق لكل معادلة في النظام.

حل مسألة المربعات الدنيا: البحث عن:

$$min_x ||Ax - b||^2$$

نضع:

$$f(x) = ||Ax - b||^2$$

و بالتالي: الحل $x'$ لمسألة المربعات الدنيا يجب أن يحقق:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

من خلال كتابة $f(x)$ على الشكل:

$$f(x) = ||Ax - b||^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j - b_i)^2$$

نجد:

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k} = 2 \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j - b_i)(A_{ik})$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}(Ax-b)A_{ik}$$
$$= 2A^\intercal(Ax-b)$$

لدينا:

$$\nabla f(x') = 0 \Leftrightarrow 2A^\intercal Ax' - 2A^\intercal b = 0 \Leftrightarrow A^\intercal Ax' = A^\intercal b$$
$$x' = (A^\intercal A)^{-1}A^\intercal b$$

و هو الحل التقريبي الذي تقدمه مسألة المربعات الدنيا للنظام غير المتسق مع إعتبار أن مصفوفة النظام ذو رتبة كاملة وبالتالي: $A^\intercal A$ تكون قابلة للعكس، أما في حال ما إذا كانت مصفوفة النظام ذو رتبة ناقصة فإن $A^\intercal A$ غير قابلة للعكس فنلجأ إلى تحليل SVD و معكوس Moore-Penrose لحل المشكل المصادف.

**مثال (1)**

حل النظام التالي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

الحل:

**1. حساب منقول المصفوفة $A^\intercal$:**

$$A^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**2. حساب $A^\intercal A$:**

$$A^\intercal A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**3. حساب معكوس $A^\intercal A$:**

$$\det(A^\intercal A) = (2)(2) - (1)(1) = 3$$
$$(A^\intercal A)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

**4. حساب $A^\intercal b$:**

$$A^\intercal b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

**5. إيجاد الحل:**

$$x = (A^\intercal A)^{-1} A^\intercal b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

حل المربعات الدنيا هو:

$$x = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{3} \\ \\ \dfrac{7}{3} \end{pmatrix}$$

## الحل ذو النظيم الأصغر:

تهدف المربعات الدنيا في هذه الحالة إلى إختيار الحل الأمثل و الدقيق للأنظمة المتسقة ناقصة التحديد ذات رتبة كاملة و التي لها ما لا نهاية من الحلول حيث تعمل على إيجاد الحل الذي يملك أصغر نظيم إقليدي $min||x||_2^2$ من بين كل الحلول التي تحقق المعادلة: $Ax = b$.
و يعطى الحل كالآتي:

$$x' = A^\intercal (AA^\intercal)^{-1} b$$

**مثال (2)**

حل النظام التالي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

الحل:

1. **حساب منقول المصفوفة** $A^\intercal$:

$$A^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2. **حساب** $AA^\intercal$:

$$AA^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}$$

3. **حساب معكوس** $(AA^\intercal)^{-1}$:

$$\det(AA^\intercal) = 14 \times 77 - 32 \times 32 = 54$$

$$(AA^\intercal)^{-1} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 77 & -32 \\ -32 & 14 \end{pmatrix}$$

4. **حساب** $A^\intercal(AA^\intercal)^{-1}b$:

$$x = A^\intercal(AA^\intercal)^{-1}b = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 & -32 \\ -32 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

حل النظيم الأصغر هو:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

إذا كانت مصفوفة النظام المتسق ذات رتبة ناقصة سواء كان مفرط التحديد أو ناقص التحديد أو محدد فإن للنظام ما لا نهاية من الحلول، تختار المربعات الدنيا الحل ذو النظيم الأصغر.
أما في حالة الأنظمة غير المتسقة تختار الحل التقريبي بأصغر راسب وهذا بالاستعانة بتحليل SVD و معكوس Moore-Penrose

## 2 التفكيك إلى قيم منفردة (SVD)

**تعريف 1.2.** لتكن المصفوفة الحقيقية $A$ حيث: $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$
يمكن تحليل المصفوفة $A$ إلى حاصل ضرب ثلاث مصفوفات كما يلي:

$$A = U\Sigma V^{\intercal} = \sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i v_i^{\intercal} \qquad (*)$$

حيث:

1. $U$ مصفوفة متعامدة ذات البعد $m\times m$ تحتوي على الأشعة الذاتية لـ $AA^{\intercal}$.
2. $V$ مصفوفة متعامدة ذات البعد $n\times n$ تحتوي على الأشعة الذاتية لـ $A^{\intercal}A$.
3. $\Sigma$ مصفوفة قطرية ذات البعد $m\times n$، أي:

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p) \quad ; \quad p = \min(m, n)$$

بحيث:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0$$

تمثل القيم المنفردة للمصفوفة $A$
يسمى $(*)$ التفكيك إلى قيم منفردة ( Singular Value Decomposition ) ونرمز له اختصارا: (SVD).

**ملاحظات:**

1. انطلاقا من القيم المنفردة للمصفوفة $A$ يمكننا تعريف الأنظمة التالية:

$$1)\,\|A\|_l = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sigma_1$$

$$2)\,\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = (\text{trace}(A^{\intercal}A))^{\frac{1}{2}} = (\text{trace}(V\Sigma^2V^{\intercal}))^{\frac{1}{2}} = (\text{trace}(\Sigma^2))^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_F = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

## المعكوس المعمم:

يحظى المعكوس المعمم بأهمية كبيرة خاصة إذا كانت المصفوفة شاذة أو مستطيلة الشكل أما إذا كانت مربعة و غير شاذة فإنه يمكن الاستغناء عنه و الإكتفاء بالمعكوس التقليدي $A^{-1}$.

المعكوس المعمم للمصفوفة$A$ ذات الأبعاد $m \times n$ هي المصفوفة $\mathcal{X}$ ذات الأبعاد: $n \times m$ والتي تحقق: $A\mathcal{X}A = A$ .

على عكس المعكوس التقليدي فإن للمعكوس المعمم أنواع مختلفة أهمها:

- معكوس مور-بنروز [5]: و هي المصفوفة $\mathcal{X}$ التي تحقق:

$$\begin{cases} A\mathcal{X}A = A \\ \mathcal{X}A\mathcal{X} = \mathcal{X} \\ A\mathcal{X} = (A\mathcal{X})^{\intercal} \\ \mathcal{X}A = (\mathcal{X}A)^{\intercal} \end{cases}$$

و نرمز لها بـ: $A^{\dagger}$

يتميز هذا المعكوس بأنه " موجود وبشكل فريد " من أجل كل مصفوفة و هذا ما يجعله أكثر أهمية و استخداما.

### خواص

$$\begin{cases} (A^{\dagger})^{\dagger} = A \\ (A^{\dagger})^{\intercal} = (A^{\intercal})^{\dagger} \\ A^{-1} = A^{\dagger} \Leftrightarrow \text{مصفوفة مربعة وغير شاذة } A \\ (AB)^{\dagger} \neq B^{\dagger}A^{\dagger} \end{cases}$$

- **أهمية معكوس مور-بنروز:**

يساهم معكوس مور-بنروز في إيجاد حل للأنظمة المتسقة وغير المتسقة أين تظهر أهميته عندما تكون مصفوفة النظام ذات رتبة ناقصة حيث تعجز المربعات الدنيا في هذه الحالة إلى الوصول للحل دون الاستعانة به كما نستفيد أيضا من تحليل SVD للمعكوس كالآتي:

$$A^{\dagger} = V\Sigma^{\dagger}U^{\intercal}$$

إذا كانت $A$ ذات رتبة ناقصة فإن:

$$Ax = b \Rightarrow x' = A^{\dagger}b$$

$$x' = V\Sigma^{\dagger}U^{\intercal}b$$
$$x' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u_i, b\rangle}{\sigma_i} v_i$$

**مثال (1)**

حل النظام التالي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

الحل:

**1. حساب $A^{\intercal}A$:**

$$A^{\intercal}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

**2. تحليل القيمة المنفردة (SVD):**

**أ. إيجاد القيم الذاتية لـ $A^{\intercal}A$:**

$$\det(A^{\intercal}A - \lambda I) = \lambda^2 - 25\lambda = 0 \implies \lambda_1 = 25 \quad , \quad \lambda_2 = 0$$

القيم المنفردة: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5$ ، $\sigma_2 = 0$

**ب. إيجاد الأشعة الذاتية لـ $A^{\intercal}A$:**

- للقيمة $\lambda_1 = 25$:

$$\begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

- للقيمة $\lambda_2 = 0$:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

ج. حساب $U$:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

**3. حساب معكوس بنروز $A^\dagger$:**

$$\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^\intercal = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

**4. حل النظام:**

$$x = A^\dagger b = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ومنه الحل يكتب بالشكل:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

أما إذا كانت $A$ ذات رتبة كاملة فإن:

1. نظام متسق:

$$x' = A^\intercal (AA^\intercal)^{-1} b$$

حيث: $A^\dagger = A^\intercal (AA^\intercal)^{-1}$

2. نظام غير متسق:

$$x' = (A^\intercal A)^{-1} A^\intercal b$$

حيث: $A^\dagger = (A^\intercal A)^{-1} A^\intercal$

**ملاحظة:** نلاحظ أن الحل الذي تقدمه المربعات الدنيا في حال مصفوفة النظام ذات رتبة كاملة هو نفس الحل الذي توصلنا إليه بواسطة معكوس مور-بنروز ما يتيح لنا استخدامه على نطاق واسع لإيجاد حلول أي نظام.

✎ على الرغم من أن معكوس مور-بنروز ساهم من خلال SVD في إيجاد حلول لمختلف الأنظمة إلا أنه في بعض الحالات أين تكون بيانات النظام حساسة للضوضاء فإن الحل الذي نحصل عليه يكون ساذجا، ونطلق على المعادلات المشكلة لهذا النوع من الأنظمة بالمعادلات الخطية ذات الحساسية.

# 3 المعادلات الخطية ذات الحساسية

و هي كل معادلة خطية حلها يكون حساسا جدا للتغيرات سواء في عناصر المصفوفة $A$ أو في البيانات $b$، حيث كل تغير بسيط يؤدي إلى احداث فرق كبير في الحل.

**مثال (1)**

لنحل النظام التالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4.001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10.001 \end{pmatrix}$$

الحل الذي يحقق $Ax = b$ هو:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لنحدث تغييراً طفيفاً في $b$، بحيث:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4.001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10.002 \end{pmatrix}$$

الحل الذي نتحصل عليه في هذه الحالة هو:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أنه على الرغم من أن التغيير الذي أحدثناه كان طفيفا (0.001) إلا أن الحل تغير بشكل ملحوظ وهذا ما نسجله بشكل عام في كل الجمل التي تتميز بالحساسية.

معيار قياس حساسية الجمل:

- [7] يمكننا قياس مدى حساسية الجملة من خلال حساب العدد الشرطي لمصفوفة النظام الذي نرمز له: $\kappa(A)$ حيث:

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

- إذا كان: $\kappa(A) > 1$ فإن: $Ax = b$ جملة حساسة (ill-conditioned)
- إذا كان: $\kappa(A) \leq 1$ فإن: $Ax = b$ جملة غير حساسة (well-conditioned)

ملاحظة: باستخدام تحليل الـ SVD يمكننا تعريف العدد الشرطي كالآتي:

$$A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^{\intercal}$$

$$\|A\|_l = \sigma_1 \implies \|A^{-1}\|_l = \sigma_n^{-1}$$

و منه:

$$\text{cond}(A) = \|A\|_l \cdot \|A^{-1}\|_l = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

إن إيجاد الحل لمثل هذا النوع من الأنظمة الحساسة يستدعي تدخل طرق التنظيم التي تجعل من الحل أكثر استقرارا و أقل تأثرا بالضوضاء.

# 4 شرط بيكارد المجزء

هو مؤشر نظري يحلل إمكانية وجود حل مستقر للأنظمة الخطية، إذا كان محققا فإن ذلك يدل على إمكانية الحصول على حل تقريبي مستقر أما عدم تحققه في جزء معين يستدعي تدخل طرق التنظيم للتقليل من تأثير خرق هذا الشرط.

ينص هذا الشرط على:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\langle u_i, b\rangle|^2}{\sigma_i^2} < +\infty$$

بتعبير آخر يجب أن يكون تناقص معاملات فورييه $|\langle u_i, b\rangle|^2$ نحو الصفر أسرع من تناقص القيم المنفردة $\sigma_i^2$ أي:

$$|\langle u_i, b\rangle|^2 \leq \sigma_i$$

أما إذا لم يتحقق كليا فإن الحل:

$$x' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u_i, b\rangle}{\sigma_i} v_i$$

سيتباعد بسبب تضحم الضوضاء وهذا ما نسجله في بعض الأنظمة شديدة الحساسية.

# 5 طرق التنظيم

تعمل تقنيات التنظيم على حذف أو إدخال حدود إضافية إلى النموذج الرياضي، تهدف من خلالها إلى تحقيق التوازن بين تقارب الحل و استقراره وذلك بالعمل على تقليل تأثير الحدود التي تخرق شرط بيكارد.
من بين أهم هذه التقنيات "طرق التصفية الطيفية " [4] و التي سنتطرق إليها فيما يلي:

# 6 طرق التصفية الطيفية

المبدأ: الحفاظ على مكونات الحل التي تهيمن عليها المعلومات و تثبيط تلك التي بها ضجيج من خلال إضافة دالة التصفية $\phi_i$ حيث: $\phi_i \in [0,1]$ فيكون الحل المعدل عموما من الشكل:

$$x_r = \sum_{i=1}^{r} \phi_i \frac{u_i^{\intercal} b}{\sigma_i} v_i$$

سنتعرف فيما يلي على بعض طرق التصفية الطيفية:

## 1.6 طريقة TSVD:

المبدأ: تعتبر أكثر الطرق المباشرة حيث: تقطع مكونات SVD غير المرغوب فيها و التي تكون عادة موافقة للقيم المفردة القريبة من الصفر، ما يسمح بافتراض أن شرط بيكارد أصبح محقق.
دالة المصفاة: يمكن أن نستنتج أن دالة المصفاة تحقق:

$$\phi_i = \begin{cases} 1 & ; \quad if \quad i \leq k \\ 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

حيث $k$ هو معامل التنظيم و يمثل عدد القيم المفردة التي تم الحفاظ عليها أثناء التنظيم.

الحل المعدل: يعطى الحل بالشكل:

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i^{\intercal} b}{\sigma_i} v_i \quad , \quad k \leq r$$

حيث $r$ تمثل رتبة المصفوفة $A$.

**مثال (1)**

حل النظام التالي:

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$

الحل :

المصفوفة $A$ شبه منفردة(ill-conditioned)، حيث القيم المنفردة لها تقريبياً:

$$\sigma_1 \approx 2.2361, \quad \sigma_2 \approx 0.0001$$

إذا استخدمنا معكوس بنروز:

$$\frac{1}{\sigma_2} \approx 10^4 \quad \Rightarrow \text{تضخيم الضوضاء}$$

**الحل باستخدام TSVD:**

- نقطع عند $k = 1$: نحتفظ فقط بـ $\sigma_1$ ونهمل $\sigma_2$.
- نستخدم:

$$\Sigma^{+}_{\text{TSVD}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.4472 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- الحل هو:

$$x_{\text{TSVD}} = V \Sigma^{+}_{\text{TSVD}} U^T b \approx \begin{pmatrix} 0.9999 \\ 1.0001 \end{pmatrix}$$

تقارب طريقة TSVD: و يقصد به دراسة مدى دقة المصفوفة المقربة $A_k$ في تمثيل المصفوفة الأصلية $A$ حيث يتم معرفة فعالية هذا التقارب باستخدام دراسة معايير الخطأ (معيار فروبينيوس والمعيار الطيفي) بين $A$ و $A_k$.

**نظرية (1)**

نظرية إيكارت يونغ[8] : تشير هذه النظرية إلى أن أفضل تقريب للمصفوفة $A$ برتبة $k$ هو المصفوفة $A_k$ الناتجة عن TSVD و نكتب:

$$\begin{cases} min||A - A'||_F = ||A - A_k||_F \\ min||A - A'||_2 = ||A - A_k||_2 \end{cases}$$

حيث $A'$ هي مصفوفة كيفية ذات رتبة $k$.

برهان نظرية ايكارت يونغ باستخدام المعيار الطيفي:

لتكن $A$ مصفوفة ذات الأبعاد $n \times m$ و الرتبة $r$، من تحليل القيم المفردة SVD نجد:

$$A = U\Sigma V^{\intercal}$$

أي:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^{\intercal} \\ V_2^{\intercal} \\ \vdots \\ V_r^{\intercal} \end{pmatrix}$$

لتكن $A_k$ المصفوفة الناتجة من TSVD حيث: $rank(A_k) = k < r$

و منه نكتب:

$$A = \sum_{i=1}^{r} \delta_i u_i v_i^{\intercal}$$

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \delta_i u_i v_i^{\intercal}$$

مع العلم أن:

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3 \geq \cdots \delta_r \geq 0$$

لدينا:

$$A - A_k = \sum_{i=1}^{r} \delta_i u_i v_i^\intercal - \sum_{i=1}^{k} \delta_i u_i v_i^\intercal = \sum_{i=k+1}^{r} \delta_i u_i v_i$$

ومنه:

$$||A - A_k||_2 = ||U diag(0,0,0 \cdots \delta_{k+1}, \cdots \delta_r) V^\intercal||_2$$

$$||A - A_k||_2 = diag(0,0,0 \cdots \delta_{k+1}, \cdots \delta_r)$$

أي:

$$||A - A_k||_2 = \delta_{k+1}$$

لتكن المصفوفة $A'$ مصفوفة كيفية لها نفس رتبة المصفوفة $A_k$ أي: $rank(A') = k$ ولنبرهن أن:

$$\|A - A'\|_2 \geq \|A - A_k\|_2$$

نبحث عن الشعاع $w$ الذي يحقق الشروط الثلاث التالية:

$$\begin{cases} w = 1 \\ A'w = 0 \\ w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_{k+1} v_{k+1} \end{cases}$$

الشعاع الذي يحقق الشروط الثلاثة هو:

$$w = v' \frac{\alpha}{\alpha_2}$$

لدينا:

$$||A - A'||_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|(A - A')x\|_2$$

و منه حسب الشروط التي يحققها $w$ نكتب:

$$||A - A'||_2 = \max_{\|w\|_2 = 1} \|(A - A')w\|_2$$

$$||A - A'||_2 \geq \|(A - A')w\|_2$$

لكن: $A'w = 0$
إذن:

$$||A - A'|| \geq ||Aw||_2 \geq min||Aw||_2 \qquad (**)$$

لنبحث عن: $min||Aw||_2$

لدينا:

$$||Aw||_2 = \sqrt{(\alpha_1\delta_1)^2 + \cdots + (\alpha_{k+1}\delta_{k+1})^2}$$

بفرض أن:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdots \alpha_k = 0 \\ \alpha_{k+1} = 1 \end{cases}$$

نجد:

$$min||Aw||_2 = \delta_{k+1}$$

ومنه تصبح العلاقة (**) بالشكل التالي:

$$||A - A'||_2 \geq \delta_{k+1}$$

فنستنتج أن:

$$||A - A'||_2 \geq ||A - A_k||_2$$

بالتالي: $A_k$ الناتجة عن TSVD هي فعلا أحسن تقريب للمصفوفة $A$.

خلاصة: نظرية ايكارت يونغ ميرسكاي تضمن أن الحل الذي تقدمه TSVD للأنظمة شديدة الحساسية يكون متقارب إلى الحل الساذج والأكثر من ذلك أنه مستقر، وهذا عند الإختيار الأمثل لمعامل التنظيم $k$.

## 2.6 طريقة تيخونوف:

المبدأ: تقترح طريقة تيخونوف إضافة حد تنظيمي لجعل الحل أكثر استقرارا فبدلا من حل المعادلة: $Ax = b$ مباشرة نحل المعادلة التالية و التي تدعى "إشكالية تيخونوف" :

$$min_x(\|Ax - b\|^2 + \lambda\|x\|^2)$$

حيث $\lambda$ يمثل معامل التنظيم.

دالة المصفاة: عبارة دالة المصفاة لتيخونوف تعطى بالشكل:

$$\phi_i{}^\lambda = \frac{\sigma_i{}^2}{\sigma_i{}^2 + \lambda}$$

## الحل المعدل:

ليكن: $b^\delta$ هو المعطيات المشوشة بالضجيج و b المعطيات الدقيقة و $\delta > 0$ يمثل حجم الضجيج
عندئذ يكون:

$$\|b - b^\delta\| \leq \delta$$

و نرمز إلى:
$x^\dagger$: الحل الساذج.
$x_\lambda^\delta$: الحل المعدل لتيخونوف بالمعلومة $b^\delta$ .
$x_\lambda$: الحل المعدل لتيخونوف دون ضجيج.

حيث:

$$\begin{cases} x^\dagger = \sum_{i=1}^{r} \frac{u_i^\intercal b}{\sigma_i} v_i \\ x_\lambda = \sum_{i=1}^{r} \frac{{\sigma_i}^2}{{\sigma_i}^2+\lambda} \frac{u_i^\intercal b}{\sigma_i} v_i \\ x_\lambda^\delta = \sum_{i=1}^{r} \frac{{\sigma_i}^2}{{\sigma_i}^2+\lambda} \frac{u_i^\intercal b^\delta}{\sigma_i} v_i \end{cases}$$

و منه:

$$\|x_\lambda^\delta - x^\dagger\| \leq \|x_\lambda^\delta - x_\lambda\| + \|x_\lambda - x^\dagger\|$$

## إثبات استقرار الحل لتيخونوف:

$$\|x_\lambda^\delta - x_\lambda\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{r} \frac{{\sigma_i}^2}{{\sigma_i}^2 + \lambda} \frac{u_i^\intercal b^\delta}{\sigma_i} v_i - \sum_{i=1}^{r} \frac{{\sigma_i}^2}{{\sigma_i}^2 + \lambda} \frac{u_i^\intercal b}{\sigma_i} v_i \right\|^2$$

$$\|x_\lambda^\delta - x_\lambda\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \left( \frac{\sigma_i}{{\sigma_i}^2 + \lambda} (b^\delta - b) {u_i}^\intercal \right)^2$$

$$\|x_\lambda^\delta - x_\lambda\|^2 \leq \sup_{1 \leq i \leq r} \left( \frac{\sigma_i}{{\sigma_i}^2 + \lambda} \right)^2 \sum_{i=1}^{r} \left( (b^\delta - b) u_i^\intercal \right)^2$$

$$\|x_\lambda^\delta - x_\lambda\|^2 \leq \sup_{1 \leq i \leq r} \left( \frac{\sigma_i}{{\sigma_i}^2 + \lambda} \right)^2 \|b^\delta - b\|^2$$

لدينا:

$$(\sigma_i - \sqrt{\lambda})^2 = \sigma_i^2 + \lambda - 2\sigma_i \sqrt{\lambda} \geq 0$$

أي:

$$\frac{1}{\sigma_i^2 + \lambda} \leq \frac{1}{2\sigma_i \sqrt{\lambda}}$$

و عليه:

$$\|x_\lambda^\delta - x_\lambda\|^2 \leq \left(\frac{\sigma_i}{2\sigma_i\sqrt{\lambda}}\right)^2 \|b^\delta - b\|^2$$

$$\|x_\lambda^\delta - x_\lambda\|^2 \leq \left(\frac{\delta}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2$$

إذن:

$$\|x_\lambda^\delta - x_\lambda\| \leq \left(\frac{\delta}{2\sqrt{\lambda}}\right)$$

فنستنتج أنه: كلما كبر $\lambda$ زاد الاستقرار.

### إثبات تقارب الحل لتيخونوف:

$$\|x_\lambda - x^\dagger\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{r} \frac{{\sigma_i}^2}{{\sigma_i}^2+\lambda}\frac{u_i^\intercal b}{\sigma_i}v_i - \sum_{i=1}^{r}\frac{u_i^\intercal b}{\sigma_i}v_i\right\|^2$$

$$\|x_\lambda - x^\dagger\|^2 = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\lambda}{({\sigma_i}^2+\lambda)\sigma_i}\right)^2 (u_i^\intercal b)^2$$

$$\|x_\lambda - x^\dagger\|^2 \leq \sup_{1\leq i\leq r}\left(\frac{\lambda}{({\sigma_i}^2+\lambda)\sigma_i}\right)^2 \sum_{i=1}^{r}(u_i^\intercal b)^2$$

$$\|x_\lambda - x^\dagger\|^2 \leq \left(\frac{\lambda}{(2\sigma_i\sqrt{\lambda})\sigma_i}\right)^2 \sum_{i=1}^{r}(u_i^\intercal b)^2$$

و منه:

$$\|x_\lambda - x^\dagger\|^2 \leq \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{u_i^\intercal b}{\sigma_i^2}\right)^2$$

$$\|x_\lambda - x^\dagger\|^2 \leq \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^2 E^2$$

$$\|x_\lambda - x^\dagger\| \leq \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) E$$

فنستنج أنه: كلما كانت $\lambda$ صغيرة كلما تقارب $x_\lambda$ بانتظام نحو $x^\dagger$

نتيجة:

$$\|x_\lambda^\delta - x^\dagger\| \leq \left(\frac{\delta}{2\sqrt{\lambda}}\right) + \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) E$$

اذا كان $\lambda$ كبير جدا فإن: $\frac{\delta}{2\sqrt{\lambda}} \to 0$ و اذا كان $\lambda$ صغير جدا فإن: $\frac{\sqrt{\lambda}}{2}E \to 0$ و عليه فإن الاختيار المناسب لمعامل التنظيم $\lambda$ يجعلنا نحصل على حل متوازن بين التقارب و الاستقرار وفق طريقة تيخونوف.

### 3.6 طريقة Landweber:

المبدأ: هي خوارزمية تعتمد على انشاء متتالية تراجعية تهدف إلى التصحيح التدريجي للحل من خلال تقليل الخطأ عند كل خطوة.

خوارزمية Landweber:

ليكن $Ax = b$ نظام شاذ:

$$\begin{aligned} & Ax = b \\ \Leftrightarrow\ & A^\intercal Ax = A^\intercal b \\ \Leftrightarrow\ & A^\intercal b - A^\intercal Ax = 0 \\ \Leftrightarrow\ & A^\intercal b\omega - \omega A^\intercal Ax = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x + A^\intercal b\omega - \omega A^\intercal Ax = x \end{aligned}$$

و هي من الشكل: $x = f(x)$ إذن يمكن كتابة العلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^\ltimes \\ x_{k+1} = (I - \omega A^\intercal A)x_k + \omega A^\intercal b \end{cases}$$

نلاحظ أن:

$$x_1 = (I - \omega A^\intercal A)x_0 + \omega A^\intercal b$$
$$x_2 = (I - \omega A^\intercal A)x_1 + \omega A^\intercal b$$
$$x_2 = (I - \omega A^\intercal A)((I - \omega A^\intercal A)x_0 + \omega A^\intercal b) + \omega A^\intercal b$$
$$x_2 = (I - \omega A^\intercal A)^2 x_0 + (I - \omega A^\intercal A)\omega A^\intercal b + \omega A^\intercal b$$

$$x_3 = (I - \omega A^\intercal A)x_2 + \omega A^\intercal b$$

$$x_3 = (I - \omega A^\intercal A)^3 x_0 + (I - \omega A^\intercal A)^2 \omega A^\intercal b + (I - \omega A^\intercal A)\omega A^\intercal b + \omega A^\intercal b$$

الحل المعدل: من خلال ما سبق يمكن أن نستنتج أن الحل الذي تقدمه landweber يكتب من الشكل:

$$x_k = (I - \omega A^\intercal A)^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (I - \omega A^\intercal A)^i \omega A^\intercal b \ldots . *$$

أي:

$$x_k = (I - \omega A^\intercal A)^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (I - \omega A^\intercal A)^i \omega A^\intercal A x^\dagger$$

$$x_k = (I - \omega A^\intercal A)^k x_0 + \omega A^\intercal A \sum_{i=0}^{k-1} (I - \omega A^\intercal A)^i x^\dagger$$

للتبسيط أكثر نستعمل العلاقة: $\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (1-\alpha)^i = 1 - (1-\alpha)^k$

$$\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (1-\alpha)^i = \alpha[1 + (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \ldots\ldots + (1-\alpha)^{k-1}]$$

$$= 1 - (1-\alpha)^k$$

وعليه تصبح الصيغة النهائية للحل من الشكل:

$$x_k = (I - \omega A^\intercal A)^k x_0 + [I - (I - \omega A^\intercal A)^k] x^\dagger$$

دالة التصفية: من العلاقة $*$ بوضع $x_0 = 0$ يصبح الحل:

$$x_k = (I - (I - \omega A^\intercal A)^k) A^\dagger b$$

حيث:

$$\phi_i = I - (I - \omega A^\intercal A)^k$$

إثبات تقارب حل Landweber:

$$||x_k - x^\dagger|| = ||(I - \omega A^\intercal A)^k x_0 - (I - \omega A^\intercal A)^k x^\dagger||$$

$$||x_k - x^\dagger|| \leq ||(I - \omega A^\intercal A)^k x_0|| - ||(I - \omega A^\intercal A)^k x^\dagger||$$
$$||x_k - x^\dagger|| \leq ||(I - \omega A^\intercal A)||^k \cdot ||x_0|| - ||(I - \omega A^\intercal A)||^k \cdot ||x^\dagger||$$

لدينا:

$$0 < \omega \leq \frac{1}{||A^\intercal A||}$$

أي:

$$||I - \omega A^\intercal A|| \leq 1$$

ومنه لما $k \to \propto$ يكون:

$$||I - \omega A^\intercal A||^k \to 0$$

إذن:

$$0 \leq ||x_k - x^\dagger|| \leq 0$$

وبالتالي:

$$\lim_{k \to \propto} x_k = x^\dagger$$

نستنتج أن: $x_k$ تتقارب بانتظام نحو $x^\dagger$.

إثبات استقرار حل Landweber:

$$||x_k^\delta - x_k|| = ||\omega \sum_{i=0}^{k-1} (I - \omega A^\intercal A)^i A^\intercal (b^\delta - b)||$$

لدينا:

$$||\omega A^\intercal|| \leq 1$$

ومنه:

$$||x_k^\delta - x_k|| \leq \left\| \sum_{i=0}^{k-1} (I - \omega A^\intercal A)^i \right\| ||b^\delta - b||$$

بوضع: $M = I - \omega A^\intercal A$

نجد:

$$\left\| \sum_{i=0}^{k-1} M^i \right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} ||M||^i$$

نلاحظ أن:

$$||M^i|| \leq 1 \Rightarrow ||M||^i \leq 1$$

ومنه:

$$\sum_{i=0}^{k-1} ||M||^i \leq \sum_{i=0}^{k-1} 1 = k$$

وعليه:

$$||x_k^\delta - x_k|| \leq k\delta$$

# نتائج

هذه الدراسة المرجعية التي قمنا بها من أجل إنشاء هاته المذكرة كانت مدخل لفهم آليات حساب حلول المعادلات الخطية الشاذة. حيث أفضت هاته الدراسة للنتائج التالية:

1. ليست كل النماذج الرياضية تكون محددة او غير شاذة ولذلك يجب دائما التحقق من المعطيات بدقة قبل الحكم على وجود ووحدانية الحل.

2. تصنف جمل المعادلات الشاذة إلى ثلاث أصناف: محدد، مفرط التحديد وناقص التحديد.

3. نحكم على وجود الحل من عدمه بنظرية روتشيه كابيلي أما الوحدانية فنحكم عليها من خلال رتبة المصفوفة.

4. تلعب طرق التنظيم دورا هاما في إيجاد حلول تقريبية للمعادلات ذات الحساسية، عن طريق التقليل من تأثير البيانات التي يهمن عليها الضجيج.

# المصادر


[1] د.عمران قوبا، (2017)، الجبر2 (المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا)

[2] د.مجدي الطويل،(1999)، المصفوفات -النظرية والتطبيق، (كلية الهندسة، القاهرة)

**المراجع باللغة الأجنبية**

[3] Boyd, S., Vandenberghe, L. (2018). Introduction to applied linear algebra: vectors, matrices, and least squares. Cambridge university press.

[4] Hansen, P. C. (2010). Discrete inverse problems: insight and algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[5] Puntanen, S. (2011). Projection matrices, generalized inverse matrices, and singular value decomposition by haruo yanai, kei takeuchi, yoshio takane.

[6] Strang, G. (2000). Linear algebra and its applications.

**المواقع الإلكترونية**

[7] Cleve Moler, *What is the condition number of a matrix*? Available at: `https://blogs.mathworks.com/cleve/2017/07/17/what-is-the-condition-number-of-a-matrix/` (Accessed: 17 July 2017).

[8] Math Stack Exchange user, *Proof of Eckart–Young–Mirsky Theorem*, Available at: `https://math.stackexchange.com/questions/759032/proof-of-eckart-young-mirsky-theorem` (Accessed: 11 June 2025).

[9] YouTube, *Linear Algebra Playlist*. Available at: `https://youtube.com/playlist?list=PL221E2BBF13BECF6C&si=AVH0sM6ORILcgLH` (Accessed: 11 June 2025).