



Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Ecole normale supérieure d'Enseignement technologique
- Azzaba - Skikda



Département des Mathématiques

*Mémoire de fin d'étude En vue de l'obtention du diplôme:
Professeur D'Enseignement Moyen*

Réalisé par:

Hamdaoui Fatma & Nasri Haoraa Elbatoul

Thème:

Etude Des Équations Intégrales Faiblement Singulière

Devant le Jury composé de:

Gouasmia Okba	Président	Enset - Skikda
Kaidouchi Wahida	Encadreur	Enset - Skikda
Meziani M Seif Eddine	Examineur	Enset - Skikda
Gouasmia Mouhamed	Examineur	Enset - Skikda

Année Universitaire : 2024/2025



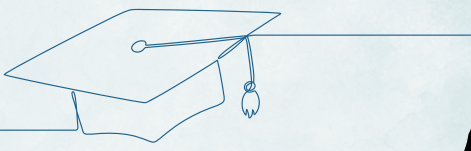
❖ Remerciements

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

J'adresse mes remerciements les plus respectueux à Madame Kaidouchi Wahida, mon encadrante, pour son accompagnement et ses conseils précieux. Mes sincères remerciements vont également à Monsieur Azouz Ferrag, chef du département de mathématiques, pour son soutien.

Je remercie aussi les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer ce travail.

Enfin, toute ma reconnaissance à ma famille pour son appui constant



Dédicace

{بِرَفْعِ اللَّهِ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ}

À celui dont je porte le nom avec fierté, à celui que Dieu a couronné de prestance et de sagesse, à celui qui a ôté les épines de mon chemin pour y semer la sérénité...À mon père.

À celle qui m'a appris les valeurs bien avant que je ne les comprenne, à ce pont qui me mène vers le paradis, à cette main invisible qui a écarté les obstacles de mon chemin, à celle dont les prières portent mon nom jour et nuit... À ma mère.

À ceux que Dieu m'a offert comme une grâce par leur présence, à la source de ma force, mes chères sœurs : Lina, Khouloud et Loudjain . Entre vos rires et votre soutien à mes côtés, la vie est plus légère, et le chemin plus doux.

Et à notre petite fleur: Liliane ...ta présence innocente colore mes journées et sème la joie dans chaque détail.Il me suffit de te voir pour que mon âme sourie.

À ma tante, aucune parole de remerciement n'est à la hauteur, et toute reconnaissance s'efface devant ton dévouement. Toi qui as semé dans mon âme les graines de la patience et de l'espoir.

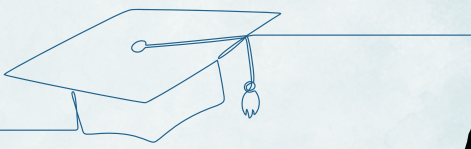
À ma grand-mère, partie mais jamais oubliée, à qui mes prières restent fidèles et dont le souvenir m'habite encore.Que Dieu t'accorde Sa miséricorde à la hauteur de mon amour pour toi, et fasse du Paradis ta demeure éternelle.

À ma compagne dans la rédaction de ce mémoire de fin d'études, partenaire des veillées et des accomplissements : Haoraa Elbatoul, Ces pages portent beaucoup de ton esprit. Je ne t'oublierai jamais, et tu resteras dans mon cœur tant que je vivrai.

Voici que je tourne une page de fatigue, et j'inscris dans mon histoire une fierté inoubliable. Je ne me demande plus à quoi ressemble l'arrivée, car je l'ai vue dans mes yeux. Les nuages de la fatigue se sont dissipés,et l'horizon a souri après l'obscurité de l'attente. Voici les pas qui ont parfois trébuché, trouvant enfin leur place au sommet de l'accomplissement.

{وَأَضْرُ دَعْوَاهُمْ أَنْ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ}

HAMDAOUI FATMA



Dédicace

﴿ قُلِ اعْمَلُوا فَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

À ceux dont les prières ont été le secret de ma réussite, et dont la satisfaction est la porte de mon espoir, à ceux qui ont semé dans mon cœur les graines de la force, et les ont arrosées d'amour et de patience : à ma mère tendre et à mon père formidable. Aucun mot ne saurait vous rendre justice ; vous êtes la lumière qui ne s'éteint jamais.

À mes frères et sœurs, lumière de mon cœur dans les ténèbres de la fatigue : Ritadje , Lamine, Jouayria, Maria, Youssef.

À "Lalla", qui fut pour moi une seconde mère, tu es l'étreinte quand le monde devient étroit, et la voix fidèle qui ne trahit jamais.

À mes sœurs et amies pures de cœur : Rayan, Riham, et Kawthar, qui m'a soutenue dans mes études, elle m'a épaulée quand j'étais épuisée, et a cru en moi quand je doutais.

Mes chères amies, qui ont laissé dans mon cœur un souvenir impérissable : Nadjoua ,Kenza, Aya et Aya. Vous avez donné un sens à l'amitié, et fait des souvenirs une source de vie.

À ma colocataire, avec qui j'ai partagé les détails de la vie, dans ses joies comme dans ses peines Baraa

Et à ma partenaire de mémoire, compagne de veillées et d'accomplissements : Hasna , ces pages portent une grande part de ton âme. Je ne t'oublierai jamais, et tu resteras dans mon cœur pour toujours.

À vous tous... Ce travail ne porte pas seulement mon nom, mais aussi celui de chaque main qui m'a tendu la sienne, de chaque cœur qui m'a aimés sincèrement , et de chaque personne qui a cru en moi.

Et enfin... Louange à Dieu, en premier et en dernier, de façon apparente et cachée. Louange à Lui pour ce que nous avons accompli, et pour ce que nous vivons et vivrons encore. C'est par Lui que les pas s'affermissent, et par Lui que l'espoir se réalise.

{ وَأَخِرُّ دَعْوَاهُمْ أَنْ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ }

NASRI HAORAA ELBATOUL

المخلص

تتناول هذه المذكرة دراسة المعادلات التكاملية غير الخطية من نوع فولتيرا ذات النواة الضعيفة، والتي تُعد من المعادلات المعقدة نظراً لاحتوائها على المجهول داخل إشارة التكامل. وتكتسب هذه المعادلات أهمية كبيرة نظراً لدورها في نمذجة ظواهر متنوعة في مجالات الفيزياء والرياضيات التطبيقية.

يسعى هذا العمل إلى بناء طريقة عددية جديدة لحل هذا النوع من المعادلات، انطلاقاً من إعادة صياغة مناسبة لها تتيح استخدام أساليب تحليلية دقيقة، مع ضمان وجود الحل ووحدانيته. وقد تم دراسة الطريقة المقترحة من الناحية النظرية، كما تم التحقق من فعاليتها من خلال أمثلة تطبيقية تُبرز مزاياها.

ولتدعيم الجانب النظري، تم تطبيق الطريقة المقترحة على مجموعة من الأمثلة التوضيحية، باستخدام تقنية التكامل المنتج و نستروم، مما سمح بإبراز فعالية هذه الطريقة وقابليتها للتطبيق في حالات مختلفة.

الكلمات المفتاحية: معادلة تكاملية، معادلة تفاضلية تكاملية، معادلة فولتيرا، نواة ضعيفة، تكامل منتج، وجود الحل، وحدانية الحل، النقطة الثابتة.

Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude des équations intégrales non linéaires de Volterra à noyau faible, qui sont considérées comme des équations complexes en raison de la présence de la fonction inconnue sous le signe intégral. Ces équations jouent un rôle important dans la modélisation de divers phénomènes en physique et en mathématiques appliquées.

L'objectif de ce travail est de développer une nouvelle méthode numérique pour résoudre ce type d'équations, à partir d'une reformulation adaptée permettant l'utilisation de méthodes analytiques rigoureuses, tout en assurant l'existence et l'unicité de la solution. La méthode proposée a été étudiée rigoureusement sur le plan théorique et son efficacité a été confirmée par des exemples numériques illustrant ses avantages.

Afin de renforcer l'aspect théorique, la méthode a été appliquée à plusieurs exemples illustratifs, en utilisant la technique de l'intégration par produit et la méthode de Nyström, ce qui a permis de démontrer la pertinence et la robustesse de cette approche dans différentes situations.

Mots-clés : Équation intégrale, Équation integro-différentielle, Équation de Volterra, Noyau faible, Intégration par produit, Existence de la solution, Unicité de la solution, Point fixe.

Abstract

This thesis focuses on the study of nonlinear Volterra integral equations with weak kernels, which are considered complex equations due to the presence of the unknown function inside the integral sign. These equations play an important role in modeling various phenomena in physics and applied mathematics.

The aim of this work is to develop a new numerical method for solving this type of equation, based on an appropriate reformulation that allows the use of rigorous analytical techniques, while ensuring the existence and uniqueness of the solution. The proposed method has been rigorously studied from a theoretical standpoint, and its effectiveness has been validated by numerical examples demonstrating its advantages.

To support the theoretical aspect, the method was applied to several illustrative examples using the product integration technique and Nyström's method, which demonstrated the relevance and robustness of this approach in different cases.

Keywords : Integral equation, Integro-differential equation, Volterra equation, Weak Kernel, Product integration, Existence of solution, Uniqueness of solution, Fixed point.

Table des matières

Introduction	
1 Définitions et Rappels	12
1.1 Notions de base	13
1.2 Les équations intégrales :	16
1.2.1 Définition des équations intégrales :	16
1.2.2 Classification des équation intégrales	17
1.3 Intégration Numérique	25
1.3.1 Intégration par produit	25
1.3.2 l'interpolation polynômiale par morceaux	26
1.3.3 Méthode de Newton-Côtes	28
1.3.4 Lemmes de majoration	29
1.3.5 Méthode de Nyström	30
2 Équation de Volterra de second espèce non linéaire	32
2.1 Étude analytique	33
2.2 Équation de Volterra intégro-différentielle non linéaire	39
2.2.1 Étude analytique	39
3 Équation de Volterra Intégrale Faiblement Singulière non Linéaire	45
3.1 Étude analytique	46
3.2 Étude numérique	50
4 Équation intégro-différentielle Non linéaire à noyau faiblement singulière de Volterra	55
4.1 Étude analytique	59
4.2 Étude numérique	64
4.2.1 La méthode NPP	65
Conclusion	75
Bibliographie	76

Introduction

Les équations intégrales non linéaires de Volterra à noyau faiblement singulier constituent un sujet d'un grand intérêt en mathématiques appliquées. Ces équations se distinguent par leur complexité particulière, qui découle de la nature faiblement singulière du noyau et de l'interaction non linéaire de l'inconnue à l'intérieur du signe d'intégration. Cela rend leur étude, tant analytique que numérique, un véritable défi mathématique nécessitant le développement d'outils et de méthodes spécifiques.

Il est également bien établi que ce type d'équations joue un rôle crucial dans de nombreux domaines de la modélisation mathématique. Parmi les cas importants qui n'ont pas été suffisamment explorés figure celui où la dérivée de l'inconnue apparaît de manière non linéaire sous le signe intégral. Ce cas a été étudié, sur le plan analytique que numérique, par GUBBAI et collaborateurs en 2014 (H. Guebbai, M. Z. Aissaoui, I. Debbar, B. Khalla, "Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation", mais uniquement pour le cas d'un noyau régulier. Dans ce travail, nous proposons une étude analytique permettant, en nous appuyant sur des techniques similaires à celles utilisées dans les études antérieures, d'établir des hypothèses théoriques garantissant l'existence et l'unicité de la solution pour le même type d'équation lorsque le noyau est faiblement singulier.

Afin de cerner avec précision les similitudes et les différences entre les méthodes analytiques adoptées dans ce travail et celles développées précédemment, et pour identifier les difficultés à surmonter dans l'étude de la nouvelle équation, nous présentons en détail, dans le deuxième chapitre, l'étude analytique d'une équation de Volterra de deuxième espèce, ainsi que celle des équations intégro-différentielles non linéaires à noyau régulier.

Les troisième et quatrième chapitres sont consacrés aux équations intégrales et intégro-différentielles de Volterra à noyau non linéaire comportant une partie faiblement singulière.

Ce type d'équations nécessite une approche analytique et numérique différente de celle adoptée dans le deuxième chapitre. L'étude numérique révèle une difficulté supplémentaire due au caractère singulier du noyau, rendant inapplicables les méthodes traditionnelles d'intégration numérique.

Sur le plan numérique, ces équations posent des difficultés particulières en raison de la nature du noyau, car les méthodes classiques ne parviennent pas à garantir la stabilité et la convergence souhaitées. À enfin, nous proposons dans ce mémoire une méthode numérique fondée sur le principe du "produit intégral" , adaptée et modifiée pour s'ajuster aux propriétés des noyaux faiblement singuliers. Cette méthode a été développée et analysée rigoureusement en ce qui concerne les conditions de convergence et de stabilité.

Le mémoire est structuré en plusieurs chapitres. Nous y présentons d'abord les outils mathématiques nécessaires à la compréhension de la nature des noyaux et des espaces fonctionnels utilisés. Ensuite, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions des équations intégrales et intégral-différentielles. Enfin, un chapitre est dédié au développement et à l'analyse de la méthode numérique NPP, avec une étude approfondie des erreurs et des conditions de convergence.

Chapitre



Définitions et Rappels

1.1 Notions de base

Définition 1.1 (Fonction bornée)

Une fonction f est dite bornée si et seulement s'il existe un nombre $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in X, \quad |f(x)| \leq A$$

Application (Norme)

Une norme sur un espace E est une application $|\cdot| : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

1. $|x| \geq 0$ (positivité)
2. $|x| = 0 \iff x = 0$ (séparation)
3. $|\lambda x| = |\lambda||x|$ (homogénéité)
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

Définition 1.2 (Suite de Cauchy)

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \quad |x_m - x_n| \leq \varepsilon$$

Définition 1.3 (Application contractante)

Soit $I = [a, b]$ un domaine fermé de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que :

$$\exists k \in [0, 1], \forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Il existe alors un unique $d \in I$ tel que $f(d) = d$, et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = d$$

Définition 1.4 (Série Géométrique)

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \text{si } q \neq 1$$

La série converge si $|q| < 1$ avec : $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$

Définition 1.5 (Espace de Banach)

Un espace de Banach est un espace normé dans lequel toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 1.6 (fonction convexe)

On dit que la fonction f est convexe lorsque :

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Définition 1.7 (Espace mesurable)

Une famille \mathfrak{M} de sous-ensembles d'un ensemble X est appelée une σ -algèbre (on dit aussi une tribu) dans X si elle vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $X \in \mathfrak{M}$,
- (ii) si $A \in \mathfrak{M}$ alors $A^c := X \setminus A \in \mathfrak{M}$,
- (iii) si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ avec $A_n \in \mathfrak{M}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ alors $A \in \mathfrak{M}$

On dit alors que (X, \mathfrak{M}) est un espace mesurable, et les éléments de \mathfrak{M} sont appelés les ensembles mesurables.

Etant donné un sous-ensemble quelconque \mathcal{F} de $\mathcal{P}(X)$, il existe une plus petite σ -algèbre contenant \mathcal{F} , on la note $\sigma(\mathcal{F})$.

En effet, la famille de toutes les σ -algèbres contenant \mathcal{F} est non vide (elle contient $\mathcal{P}(X)$), et l'intersection d'une famille quelconque de σ -algèbres est encore une σ -algèbre. Si (X, T) est un espace topologique, on peut ainsi considérer la plus petite σ -algèbre, notée $\mathcal{B}(X)$, contenant tous les ensembles ouverts. On l'appelle la σ -algèbre de Borel et ses éléments sont les boréliens. En particulier, les ouverts et les fermés sont Borel mesurables.

Définition 1.8 (Application contractante)

Soient $(X; d)$ un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ une application. On dit que f est contractante s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que

$$\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

Lemme de Gronwall

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive telle qu'il existe deux constantes réelles positives A et B telles que :

$$U(t) \leq A + B \int_0^t U(s) ds, \quad \forall t.$$

Alors :

$$U(t) \leq Ae^{Bt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.1 (Règle de Leibniz)

Soit $k \in C([a, b] \times [a, b])$ et soient $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1([a, b])$ tels que

$$\partial^2 k \in C([a, b] \times \Sigma_{[a, b]})$$

On définit la fonction suivante :

$$h(x) := \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} k(x, t) dt$$

Alors $h(x)$ appartient à $C^1([a, b])$ et sa dérivée est donnée par :

$$h'(x) = k(x, \varphi_2(x))\varphi_2'(x) - k(x, \varphi_1(x))\varphi_1'(x) + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \partial_1 k(x, t) dt$$

1.2 Les équations intégrales :

1.2.1 Définition des équations intégrales :

Définition 1.9

On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégrations \int .

En général u est l'inconnue de l'équation de la forme :

$$\int_E k(x, t, u(t))dt = \lambda u(x) + f(x) \quad (1.1)$$

où $x \subseteq E$ telle que E est un espace mesuré, $f(x)$ une fonction mesurable donné sur E , λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe et k une fonction mesurable sur E^3 appelée noyau de l'équation intégral .

Remarque 1.1

On peut classifier les équation intégrales comme suite :

i. On prend

- Si $k(x, t, u(t)) = k(x, t)u(t)$, alors l'équation (1.1) devient **linéaire**.
- Si $k(x, t, u(t)) = k(x, t)F(u(t))$, alors l'équation intégrale (1.1) devient **non linéaire**, avec F c'est une fonction non-linéaire.

ii. Le type le plus général d'une équation intégrale est :

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x, t, u(t))dt. \quad (1.2)$$

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation :

1. Si $h(x) = 0$, l'équation (1.2) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_E k(x, t, u(t))dt = 0, \quad (1.3)$$

et s'appelle **équation intégrale de première espèce**.

2. Si $h(x) = c$ (où c est une constante non nulle), l'équation (1.2) s'écrit :

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x, t, u(t)) dt. \quad (1.4)$$

et s'appelle **équation intégrale de second espèce**.

3. Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (1.2) est appelée **équation intégrale de troisième espèce**.

1.2.2 Classification des équation intégrales

La théorie des équations intégrales porte sur deux types principaux, **les équations intégrales non-linéaires et les équations intégrales linéaires**.

Dans ce qui suit, on considère l'espace mesurable $E = [a(x); b(x)]$. L'équation (1.2) devient :

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{b(x)}^{a(x)} k(x, t, u(t)) dt, \quad (1.5)$$

Nous allons examiner les deux cas suivantes :

1. $a(x) = a, \quad b(x) = b$

telle que a et b sont des constantes, et l'équation (1.4) est appelée **équation de Fredholm**.

2. $a(x) = a, \quad b(x) = x,$

telle que x est une variable dans l'espace mesurable E , l'équation (1.4) est appelée **équation de Volterra**.

Équations intégrales non-linéaires :

a- Équation intégrale de Volterra :

L'équation intégrale non linéaire de Volterra **de première espèce** prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t)) dt = 0. \quad (1.6)$$

Une équation intégrale de Volterra **de second espèce** est de la forme :

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t)) dt. \quad (1.7)$$

où $c = \text{constante} \neq 0$,

et **de troisième espèce**, de la forme :

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t)) dt. \quad (1.8)$$

Remarque 1.2

1. Si $f(x) = 0$, donc l'équation est dite homogène.
2. Si $f(x) \neq 0$, donc l'équation est dite non homogène.

Exemple

On choisit comme exemple l'équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce :

$$u(x) = e^x + \frac{1}{3}x(1 - e^{3x}) + \int_0^x xu^3(t)dt$$

L'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce :

$$\int_0^x u^2(t)dt = 1.$$

b- Équation intégrale de Fredholm :

L'équation intégrale non linéaire de Fredholm **de première espèce** prendre la forme :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, u(t)) dt = 0. \quad (1.9)$$

Une équation intégrale de Fredholm **de seconde espèce** est de la forme :

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, u(t)) dt. \quad (1.10)$$

où $c = \text{constante} \neq 0$,

et **de troisième espèce**, sous la forme :

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, u(t)) dt. \quad (1.11)$$

Exemple

On peut prendre comme exemple l'équation intégrale non-linéaire de Fredholm de seconde espèce :

$$u(x) = \tan(x) - \frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{1}{1 + u(t)^2} dt,$$

qui admet comme solution la fonction $u(x) = \tan(x)$.

c- Équation intégrale d'Abel :

On appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme

$$u(x) = \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} g(u(t)) dt. \quad (1.12)$$

où $-\infty < x$, $0 < \alpha < 1$ et $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tel que $g(0) = 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Équations intégrales linéaires :

a- Equation intégrale de Volterra :

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra telle que l'un des deux bornes d'intégration est variable, une équation de la forme

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt. \quad (1.13)$$

1. On appelle **équation intégrale de Volterra de première espèce**, si $h(x) = 0$, donc l'équation (1.13) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt = 0. \quad (1.14)$$

2. On appelle **équation intégrale de Volterra de seconde espèce**, si $h(x) = c$ (constante) $\neq 0$, donc l'équation (1.13) s'écrit

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt. \quad (1.15)$$

3. Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (1.13) est appelée **équation intégrale de Volterra de troisième espèce**.

Exemple

On considère l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce :

$$u(x) = e^x \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-t)u(t)dt,$$

qui admet une solution donnée par $u(x) = xe^x$.

De même pour l'équation intégrale de Volterra de première espèce :

$$x^3 = \int_0^x (x-t)^2 u(t)dt,$$

qui admet une solution donnée par $u(x) = 3$.

Remarque 1.3

1. Si $f(x) = 0$, donc l'équation (1.13) est dite homogène.
2. Si $f(x) \neq 0$, donc l'équation (1.13) est dite non homogène.

Exemple

Equations intégrales linéaires non homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$u(x) = x^2 + \sin x + 1 + \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt \quad ; \quad 0 = x^2 + 1 + \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt$$

Equation intégrales linéaires homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$u(x) = \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt \quad ; \quad 0 = \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt$$

Remarque 1.4

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau k vérifie la condition

$$k(x, t) = 0, \quad \text{pour } x < t.$$

b- Équation intégrale de Fredholm :

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm tel que les deux bornes d'intégration sont constantes une équation, à une inconnue $u(x)$ de la forme :

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t) dt, \quad (1.16)$$

où $f(x)$, $k(x, t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe.

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

— Si $h(x) = 0$, l'équation (1.16) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt = 0. \quad (1.17)$$

et s'appelle **équation intégrale de Fredholm de première espèce**.

— Si $h(x) = c = \text{constante} \neq 0$, l'équation (1.16) s'écrit :

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t) dt. \quad (1.18)$$

et s'appelle **équation intégrale de Fredholm de second espèce**.

— Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (1.16) est appelée **équation intégrale de Fredholm de troisième espèce**.

Exemple

Les équations suivantes représentent des équations intégrales de Fredholm :

$$u(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xt} - 1)\varphi(t)dt,$$

cette équation est de seconde espèce et admet une solution $u(x) = 1$.

$$x + 1 - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - t)u(t)dt.$$

cette équation est de première espèce.

Remarque 1.5

1. Si $f(x) = 0$, l'équation (1.16) est dite homogène.
2. Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.16) est dite non homogène.

Exemple

Équations intégrales linéaires non homogènes de Fredholm de la seconde et première espèce

$$u(x) = x^2 + \sin x + 1 + \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt$$
$$0 = x^2 + 1 + \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt$$

Équations intégrales linéaires homogènes de Fredholm de la seconde et première espèce

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt$$
$$0 = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt$$

c-Équation intégrale d'Abel :

On appelle **équation intégrale linéaire d'Abel** une équation de la forme

$$\int_a^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x).$$

où α est une constante, $0 < \alpha < 1$.

d- Équations intégral-différentielles linéaires de Volterra :

L'équation intégral-différentielle linéaire de Volterra apparaît dans la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt, \quad (1.19)$$

où $u^{(n)}(x)$ indique la n -ième dérivée de $u(x)$.

Exemple

Les exemples suivants pour les équations intégral-différentielles de Volterra :

$$\begin{cases} u'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x tu(t)dt, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

et

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = 1 - x(\sin x + \cos x) - \int_0^x tu(t)dt, \\ u(0) = -1, \quad u'(x) = 1. \end{cases} \quad (1.21)$$

e- Équations intégral-différentielles linéaire de Fredholm :

L'équation intégral-différentielle linéaire de Fredholm apparaît sous la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt.$$

où $u^{(n)}(x)$ indique la n-ième dérivée de $u(x)$.

Exemple

Voici deux exemples des équations intégral-différentielles de Fredholm :

$$\begin{cases} u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xu(t)dt, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u''(x) + \varphi'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1. \end{cases}$$

Équations intégrales singulières :

Les équations intégrales de Volterra du première espèce et seconde espèce respectivement :

$$f(x) = \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} k(x, t)u(t)dt.$$

et

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} k(x, t)u(t)dt.$$

sont dites singulières si l'une des limites d'intégration $g(x)$, $h(x)$ ou les deux sont infinis. De plus, les deux équations précédentes sont dites singulières si le noyau $k(x, t)$ est non borné en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration.

$$f(x) = \lambda \int_0^x \frac{1}{(x-t)^a} u(t)dt, \quad 0 < a < 1$$

où de seconde espèce

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{(x-t)^a} u(t)dt, \quad 0 < a < 1$$

Exemple

Voici un exemple d'une équation intégrale singulière d'Abel où l'on a la valeur $a = \frac{1}{3}$:

$$u(x) = 1 + \sqrt{x} + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} u(t)dt.$$

Les types de noyaux :

La fonction $k(x, t)$ est appelée noyau de l'équation intégrale. On peut distinguer les types de noyaux suivants :

Noyau de Cauchy :

On définit un noyau de Cauchy sous la forme suivante :

$$k(x, t) = \frac{H(x, t)}{(x-t)^m}$$

où la fonction $H(x, t)$ est continue et non nulle

L'équation contenant ce noyau est :

— **Faiblement singulière** si : $m = 1$.

- **Fortement singulière** si : $m = 2$.
- **Très fortement singulière** si : $m > 2$.

Noyau séparable ou dégénéré :

Un noyau $k(x, t)$ est dit séparable ou dégénéré s'il peut être exprimé comme la somme d'un nombre fini de termes, dont chacun est le produit d'une fonction de x uniquement et d'une fonction de t uniquement, c'est-à-dire

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^n g_i(x)h_i(t).$$

Noyau non dégénéré : Un noyau $k(x, t)$ est dit non dégénéré s'il ne peut être séparé en fonction de x et en fonction de t . Par exemple e^{xt} , $\sqrt{x+t}$ sont les noyaux non dégénérés.

Noyau symétrique : Un noyau $k(x, t)$ est symétrique (ou complexe symétrique) si

$$k(x, t) = \overline{k(t, x)}$$

où la barre désigne le complexe conjugué. Un noyau réel $k(x, t)$ est symétrique si

$$k(x, t) = k(t, x).$$

1.3 Intégration Numérique

1.3.1 Intégration par produit

Les règles d'intégration numérique standard, telles que les méthodes du trapèze et de Simpson, sont construites en supposant que l'intégrand est au moins bornée. Lorsque ce n'est pas le cas, ces méthodes peuvent ne pas fonctionner. Même si l'intégrand est continue, une grande précision est perdue si des dérivés plus élevés n'existent pas.

Des méthodes spéciales sont nécessaires pour traiter efficacement ces cas. L'un des outils le plus efficace pour traiter les intégrands qui se comportent mal est l'intégration par produit, et pour simplifier cette idée, nous supposons que l'intégrale qu'on cherche à approximer est sous la forme :

$$I = \int_a^t p(t)\varphi(t)dt$$

où, $\varphi(t)$ est supposée être régulière (continue), ainsi, quelles que soient les singularités ou un mauvais comportement de l'intégrand, elles sont incluses dans $p(t)$. Nous approchons alors $\varphi(t)$ par une fonction $\hat{\varphi}(t)$ telle qu'on peut calculer l'intégrale

$$\hat{I} = \int_a^t p(t)\hat{\varphi}(t)dt$$

Dans notre travail, on approche $\varphi(t)$ par l'interpolation polynômiale par morceaux, puis nous devons être capables d'évaluer explicitement des intégrales de la forme :

$$I = \int_a^t tp(t)dt$$

Où l'erreur produit et leur ordre de convergence sont lié par la relation :

$$|I - \hat{I}| \leq \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t) - \hat{\varphi}(t)| \int_a^t p(s)ds$$

1.3.2 l'interpolation polynômiale par morceaux

Soit $\{t_j\}_{j=1}^n$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. Nous définissons la suite des fonctions $\{e_j\}_{j=1}^n$ par

$$e_j(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, & t \in [t_{j-1}, t_j], \\ \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j}, & t \in [t_j, t_{j+1}], \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad 2 \leq j \leq n - 1,$$
$$e_1(t) = \begin{cases} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}, & t \in [t_1, t_2], \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$
$$e_n(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}, & t \in [t_{n-1}, t_n], \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Ce qui s'appelle les fonctions chapeaux.

L'interpolation polynômiale par morceaux d'ordre 1 d'une fonction $f \in C(a, b)$ est donné par

$$\forall t \in [a, b], P_{n,1}[f](t) = \sum_{j=1}^n f(t_j) e_j(t)$$

Pour $h > 0$, la fonction suivante

$$w_0(h, f) = \max_{|s-t| \leq h} |f(s) - f(t)|$$

est appelée le module de continuité de f . Donc, si h tend vers 0 alors $w_0(h, f)$ tend vers 0, puisque f est continue.

Théorème 1.2

On appelle inégalité d'erreur d'interpolation linéaire l'expression suivante :

$$\sup_{t \in [a, b]} |f(t) - P_{n,1}[f](t)| \leq w_0(h_n, f).$$

Où,

$$h_n = \max_{1 \leq j \leq n-1} (t_{j+1} - t_j)$$

Démonstration

Nous avons, pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$P_{n,1}[f](t) = f(t_j) (1 - \alpha_j(t)) + f(t_{j+1}) \alpha_j(t),$$

où,

$$\alpha_j(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \in [0, 1]$$

Ceci montre que pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$P_{n,1}[f](t) - f(t) = (f(t_j) - f(t)) (1 - \alpha_j(t)) + (f(t_{j+1}) - f(t)) \alpha_j(t),$$

ce qui donne,

$$\sup_{t \in [a, b]} |f(t) - P_{n,1}[f](t)| \leq w_0(h_n, f)$$

1.3.3 Méthode de Newton-Côtes

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Dans cette section, nous allons rappeler les méthodes de Newton-Côtes pour l'approximation numérique de l'intégrale suivante $\int_a^b f(t)dt$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, nous définissons la subdivision suivante : $t_j = a + jh, 0 \leq j \leq N$ et $h = \frac{b-a}{N}$. Les formules d'intégrations numériques sont

$$\int_a^b f(t)dt \simeq h \sum_{j=0}^N w_j f(t_j)$$

où, les w_j sont des quantités positives appelés poids, tel $\max_{0 \leq j \leq N} |w_j| \leq W$ fixés pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.10

La méthode des trapèzes est la méthode de quadrature qui a pour poids la suite suivante :

$$\begin{cases} w_0 = w_N = \frac{1}{2} \\ w_j = 1, \quad 1 \leq j \leq N-1 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$I = \int_a^b f(t)dt \simeq T_N = \frac{h}{2}f(t_0) + h \sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) + \frac{h}{2}f(t_N)$$

Cette méthode est celle que nous allons utiliser dans nos calculs numériques, si l'intégrand est bornée. Nous l'avons choisi puisqu'elle assure la convergence du calcul sous la condition de continuité uniquement. Contrairement à d'autres méthodes, telle que Simpson, qui exige plus de régularité.

Théorème 1.3

Si $f \in C(a, b)$, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |I - T_N(f)| = 0$$

Démonstration

Un simple calcul nous montre que $\forall N \geq 1$,

$$T_N(f) = \int_a^b P_{N,1}(f)(t) dt$$

Où $P_{N,1}$ est l'interpolation par morceaux d'ordre 1 de la fonction f correspondant à la subdivision $\{t_j\}_{j=0}^N$.

Donc, en utilisant la théorème précédente nous obtenons

$$\begin{aligned} |I - T_N(f)| &= \left| \int_a^b (f(t) - P_{N,1}(f)(t)) dt \right| \\ &\leq (b - a) w_0(f, h) \end{aligned}$$

Et comme "h" tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, le résultat est démontré.

Cette méthode est la meilleur méthode d'intégration, puisqu'elle exige le moins de régularité possible pour qu'il y est convergence. Mais, nous pouvons facilement démontrer que si $f \in C^2(a, b)$, il existe $c > 0$ telle que

$$|I - T_N(f)| \leq ch^2$$

1.3.4 Lemmes de majoration

Nous allons présenter deux lemmes de Gronwall

Lemme 1

Soit $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$|\xi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + B_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

où,

$$A > 0, |B_n| \leq B$$

Alors,

$$|\xi_n| \leq (1 + A)^{n-1} (B + A |\xi_0|), \quad n \geq 1$$

Lemme 2

Supposons que

$$|\varepsilon_n| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_{nj}| |\varepsilon_j| + B, n = r, r + 1, \dots$$

où, $B > 0$, et
$$\sum_{j=0}^{r-1} |\varepsilon_j| \leq \eta$$

★ Si

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_{nj}| \leq \alpha < 1, n = r, r + 1, \dots,$$

alors,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{B + \eta}{1 - \alpha}, n = 0, 1, \dots$$

★ S'il existe des entiers $0 = J_0 < J_1 < \dots < J_m < J_{m+1}$,

avec $0 \leq r < J_1$ et $J_m \leq n < J_{m+1}$, tel que, pour $v = 0, 1, \dots, m$, et $n = r, r + 1, \dots$,

$$\sum_{j=j_v}^{\min(n, j_{v+1}-1)} |\alpha_{nj}| \leq \alpha < 1$$

alors,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{B + \eta}{(1 - \alpha)^2} \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^m$$

1.3.5 Méthode de Nyström

Soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de formule de quadrature convergente pour l'intégral $\int_G f(x) dx$ et l'approximation de l'opérateur intégral

$$Au(t) = \int_G k(t, s)u(s)ds, \quad t \in G$$

de noyau k continu, par une suite d'opérateurs linéaires discrets

$$A_n u(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j k(t, t_j) u(t_j), \quad t \in G$$

alors la solution de l'équation intégrale de deuxième espèce

$$u(t) - Au(t) = f(t) \tag{1.22}$$

est approchée par la solution de l'équation

$$u_n(t) - A_n u_n(t) = f(t) \quad (1.23)$$

Ce qui nous amène à résoudre un système linéaire dans un espace de dimension finie.

Méthode approchée

Soit u_n la solution de l'équation

$$u_n(t) - \sum_{j=1}^n \alpha_{j,n} k(t, t_{j,n}) u_n(t_j) = f(t), \quad t \in G \quad (1.24)$$

on pose $u_{i,n} = u_n(t_i)$, $i = 1 \dots n$. Si les points de quadrature $\alpha_{j,n}$ vérifient le système linéaire

$$u_{i,n} - \sum_{j=1}^n \alpha_{j,n} k(t_{i,n}, t_{j,n}) u_{j,n} = f(t_{i,n}), \quad i = 1 \dots n \quad (1.25)$$

alors u_n définie par

$$u_n(t) = f(t) + \sum_{j=1}^n \alpha_{j,n} k(t, t_{j,n}) u_{j,n}(t_j), \quad t \in G \quad (1.26)$$

résout l'équation (4.4).

Remarque 1.6

Si le noyau est symétrique i.e $k(t, s) = k(s, t)$ la matrice

$$\left(\alpha_{j,n} k(t_{i,n}, t_{j,n}) \right)_{n \geq 1}$$

est généralement non symétrique.

Théorème 1.4

Pour toute solution de l'équation intégrale de deuxième espèce d'un noyau continu et la fonction f continue, la forme de quadrature de méthode de Nyström convergente est uniformément convergente

Chapitre



*Équation de Volterra de second
espèce non linéaire*

Une équation non linéaire de Volterra de deuxième espèce s'écrit sous la forme :

$$u(t) = \int_a^t k(t, s, u(s))ds + f(t), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (2.1)$$

où u l'inconnue à déterminer dans le même espace de f supposée appartenir à $C^0(a, b)$.

La fonction k est définie par :

$$k : [a, b]^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(t, s, u) \mapsto k(t, s, u),$$

vérifiant l'hypothèse (H_1) suivante :

$$(H_1) \left\{ \begin{array}{l} f(t) \in C(a, b), \\ k \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}), \\ \forall t, s \in [a, b], \forall u, \bar{u} \in \mathbb{R}, \quad |k(t, s, u) - k(t, s, \bar{u})| \leq A|u - \bar{u}|. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

2.1 Étude analytique

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.1), nous construisons deux suites successives, $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s, u_{n-1}(s))ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ u_0(t) = f(t). \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Ainsi, nous définissons également :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \varphi_0(t) = f(t). \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Ce qui donne :

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = u_n(t). \quad (2.5)$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) &= \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \\
 &= \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^n (u_n(t) - u_{n-1}(t)) \\
 &= \varphi_0(t) + u_1(t) - u_0(t) + u_2(t) - u_1(t) + \cdots + u_n(t) \\
 &= \varphi_0(t) - u_0(t) + u_n(t)
 \end{aligned}$$

On a : $\varphi_0(t) = f(t) = u_0(t)$.

Alors : $\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = f(t) - f(t) + u_n(t)$

$$\boxed{\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = u_n(t)}$$

Existence de la solution :

Théorème 2.1

Si les fonctions f et k satisfont les conditions de l'hypothèse (H_1) , alors l'équation (2.1) admet une unique solution u .

Démonstration

Nous allons prouver que la série de terme général φ_n converge normalement. Soit $F > 0$ telle que :

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \leq F.$$

On a :

$$\begin{aligned}
 |\varphi_n(t)| &= |u_n(t) - u_{n-1}(t)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\
 &= \left| f(t) + \int_a^t k(t, s, u_{n-1}(s)) ds - f(t) - \int_a^t k(t, s, u_{n-2}(s)) ds \right| \\
 &= \left| \int_a^t k(t, s, u_{n-1}(s)) ds - \int_a^t k(t, s, u_{n-2}(s)) ds \right| \\
 &= \int_a^t \left| k(t, s, u_{n-1}(s)) - k(t, s, u_{n-2}(s)) \right| ds
 \end{aligned}$$

Puisque k est lipschitzienne :

$$|\varphi_n(t)| \leq A \int_a^t |\varphi_{n-1}(s)| ds$$

$$\begin{cases} |\varphi_1(t)| \leq A \int_a^t |\varphi_0(s)| ds \leq A \int_a^t F ds \leq AF(t-a) \\ |\varphi_2(t)| \leq A \int_a^t |\varphi_1(s)| ds \leq A \int_a^t AF(s-a) ds \leq A^2 F \frac{(t-a)^2}{2} \\ |\varphi_3(t)| \leq A \int_a^t |\varphi_2(s)| ds \leq A \int_a^t A^2 F \frac{(s-a)^2}{2} ds \leq A^3 \frac{F(t-a)^3}{3!} \\ \vdots \\ |\varphi_n(t)| \leq A^n \frac{F(t-a)^n}{n!} \end{cases}$$

Prouvons que φ_n converge normalement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\varphi_n(t)| \leq A^n \frac{F(t-a)^n}{n!}$$

pour $n = 0$:

$$|\varphi_0(t)| = |f(t)| < F;$$

Supposons que :

$$|\varphi_n(t)| \leq A^n \frac{F(t-a)^n}{n!}$$

alors :

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t)| &= |u_{n+1}(t) - u_n(t)|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &= \left| f(t) + \int_a^t k(t, s, u_n(s)) ds - f(t) - \int_a^t k(t, s, u_{n-1}(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_a^t k(t, s, u_n(s)) ds - \int_a^t k(t, s, u_{n-1}(s)) ds \right| \\ &= \int_a^t |k(t, s, u_n(s)) - k(t, s, u_{n-1}(s))| ds \end{aligned}$$

puisque k est lipschitzienne :

$$|\varphi_{n+1}(t)| \leq A \int_a^t |\varphi_n(s)| ds.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varphi_1(t)| \leq AF(t-a) \\ |\varphi_2(t)| \leq A^2 \frac{F(t-a)^2}{2} \\ |\varphi_3(t)| \leq A^3 \frac{F(t-a)^3}{3!} \\ \vdots \\ |\varphi_n(t)| \leq A^n \frac{F(t-a)^n}{n!} \\ |\varphi_{n+1}(t)| \leq A \int_a^t |\varphi_n(s)| ds \\ \leq A \int_a^t A^n \frac{F(s-a)^n}{n!} ds \\ \leq A^{n+1} \frac{F}{n!} \int_a^t (s-a)^n ds \\ \leq A^{n+1} \frac{F}{n!} \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)} \\ \leq A^{n+1} \frac{F(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{array} \right.$$

Nous avons alors :

$$\max_{a < t < b} |\varphi_n(t)| \leq A^n \frac{F(b-a)^n}{n!}$$

Mais,

$$\sum_{n \geq 0} A^n \frac{F(b-a)^n}{n!} = F \exp(A(b-a)),$$

ce qui entraîne que $\sum_{n \geq 0} \max_{a < t < b} |\varphi_n(t)|$ est convergente.

Par conséquent, $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ est normalement convergente. Donc, il existe $u \in C(a, b)$ tel que,

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$$

Pour prouver que $u(t)$ vérifie l'équation d'origine, posons,

$$u(t) = u_n(t) + \Delta_n(t),$$

donc,

$$\begin{aligned} u_n(t) &= u(t) - \Delta_n(t) \\ u(t) - \Delta_n(t) &= f(t) + \int_a^t k(t, s, u_{n-1}(s)) ds \end{aligned}$$

On a, $u_{n-1}(t) = u(t) - \Delta_{n-1}(t)$,

donc,

$$u(t) - \Delta_n(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s, u(s)) - \Delta_{n-1}(s) ds$$

on a, $u(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s, u(s)) ds$

alors,

$$\begin{aligned} u(t) - f(t) - \int_a^t k(t, s, u(s)) ds &= \Delta_n(t) + \int_a^t k(t, s, u(s)) - \Delta_{n-1}(s) ds \\ &\quad - \int_a^t k(t, s, u(s)) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u(t) - f(t) - \int_a^t k(t, s, u(s)) ds| &= |\Delta_n(t) + \int_a^t k(t, s, u(s)) - \Delta_{n-1}(s) ds \\ &\quad - \int_a^t k(t, s, u(s)) ds| \\ &\leq |\Delta_n(t)| + \int_a^t |(k(t, s, u(s)) - \Delta_{n-1}(s)) - k(t, s, u(s))| ds \end{aligned}$$

puisque k est lipschitzienne

$$\leq |\Delta_n(t)| + A \int_a^t |u(s) - \Delta_{n-1}(s) - u(s)| ds$$

$$\leq |\Delta_n| + At \|\Delta_n\|$$

$$\text{tel que } \|\Delta_{n-1}\| = \max_{a \leq s \leq t \leq b} |\Delta_{n-1}(s)|$$

Mais,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Delta_n(t)| = 0,$$

ce qui donne :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in [a, b], |u(t) - f(t) - \int_a^t k(t, s, u(s)) ds| < \varepsilon$$

Donc $f(t)$ vérifie :

$$\forall t \in [a, b], u(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s, u(s)) ds,$$

elle est donc une solution de l'équation (2.1).

Unicité de la solution :

Pour démontrer l'unicité, nous supposons qu'il existe deux solutions continues u_1 et u_2 , $\forall t \in [a, b]$:

$$\begin{cases} u_1(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s, u_1(s)) ds \\ u_2(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s, u_2(s)) ds \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} u_1(t) - u_2(t) &= f(t) + \int_0^t k(t, s, u_1(s)) ds - f(t) - \int_0^t k(t, s, u_2(s)) ds \\ &= \int_0^t (k(t, s, u_1(s)) - k(t, s, u_2(s))) ds \end{aligned}$$

$$|u_1(t) - u_2(t)| = \int_0^t |k(t, s, u_1(s)) - k(t, s, u_2(s))| ds$$

Puisque k est Lipschitzienne, on obtient :

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq L \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)| ds$$

D'autre part, $\forall t \in [a, b]$,

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq B$$

On définit :

$$f(t) = |u_1(t) - u_2(t)|$$

Alors,

$$\forall t \in [a, b], \quad |f(t)| \leq B$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \int_0^t f(s) ds \\ f(s) &\leq L \int_0^s f(s_1) ds_1 \end{aligned}$$

Par itération de l'opération n fois :

$$f(t) \leq BL^n \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} f(s_n) ds_n \dots ds_2 ds$$

On a :

$$\int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} f(s_n) ds_n \cdots ds_2 ds = \frac{t^n}{n!}$$

Alors :

$$f(t) \leq B \frac{L^n t^n}{n!}$$

Nous faisons tendre n vers l'infini, pour conclure que

$$u_1(t) = u_2(t)$$

2.2 Équation de Volterra intégrro-différentielle non linéaire

2.2.1 Étude analytique

Dans cette section, nous réalisons une étude analytique et numérique de l'équation intégrro-différentielle non linéaire de Volterra sous la forme suivante :

$$u(t) = \int_a^t k(t, s, u(s), u'(s)) ds + f(t), \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.6)$$

où $f \in C^1([a, b])$ et u est l'inconnue à déterminer dans le même espace. La fonction k doit satisfaire aux hypothèses suivantes :

$$(H2) \left\{ \begin{array}{l} k \in C([0, T]^2 \times \mathbb{R}), \\ \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall t, s \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}, \quad \max \left(|k(t, s, x, y)|, \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \right) \leq M, \\ \exists a, b, \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}, \quad \forall t, s \in [0, T], \\ |k(t, s, x, y) - k(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq a|x - \bar{x}| + b|y - \bar{y}|, \\ \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq \bar{a}|x - \bar{x}| + \bar{b}|y - \bar{y}|, \quad b < 1. \end{array} \right.$$

La dérivé de cette fonction est définis par la formule suivante :

$$u' = k(t, t, u, u') + \int_a^t \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds + f'(t) \quad (2.7)$$

Proposition 2.1

Soit $f \in C^1([a, b])$. La fonctionnelle $\phi(t) = \int_a^t k(t, s, \cdot, \cdot) ds + f(t)$ est définie sur $C^1([a, b])$.

Démonstration

Pour tout $u \in C^1([a, b])$, on définit la fonction \bar{u} comme suit :

$$\bar{u}(t) = \int_a^t k(t, s, u(s), u'(s)) ds + f(t)$$

On montre que \bar{u} est continue. En appliquant (2.1), on obtient :

$$\bar{u}'(t) = k(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^b \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds + f'(t)$$

Ce qui donne le résultat.

Existence de la solution

Nous prouvons qu'il existe une solution à l'équation, mais dans un intervalle réduit.

Théorème 2.2

Il existe r tel que l'équation (2.6), réduite à $[a, a + r]$, admet une solution $u \in C^1(a, a + r)$.

Démonstration

Nous montrons que la fonctionnelle Φ qui est définie de $C^1(a, a + r)$ dans lui-même.

Pour $\beta > 0$ et $0 < r < \frac{\beta}{M}$, on définit l'ensemble suivant :

$$F = \{u \in C^1(a, b) | u(a) = \beta, \forall t \in [a, a + r], |u(t) - f(t)| \leq \beta, |u'(t) - \Phi'(t)| \leq (H + \beta)\}$$

Pour démontrer que la fonctionnelle Φ admet une solution, on utilise le théorème

de Schauder et pour cela, il faut :

1. Montrer que F est fermé et convexe.
2. Si $u \in F$, montrer que $\Phi(u) \in F$.

On a :

$$|\Phi(u)(t) - f(t)| = \left| \int_a^t k(t, s, u(s), u'(s)) ds \right|$$

on pose :

$$|k(t, s, u(s), u'(s))| \leq M$$

on obtient :

$$\int_a^t |k(t, s, u(s), u'(s))| ds \leq \int_a^t M ds$$

Comme $t \in [a, a + r]$:

$$\int_a^t M ds = M(t - a)$$

et puisque $t - a < r$, nous obtenons :

$$M(t - a) < Mr$$

Donc : $|\Phi(u)(t) - f(t)| \leq Mr < \beta$ De la même façon :

$$\begin{aligned} |\Phi'(u)(t) - f(t)| &= \left| k(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds \right| \\ &\leq M + Mr \\ &\leq M + \beta \end{aligned}$$

Donc, $\Phi(F) \subseteq F$

3. Montrons que Φ est relativement compact,

On a :

$$\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t) = \int_a^t \Phi'(u)(s) - \Phi'(v)(s) ds.$$

$$|\Phi'(u)(t) - \Phi'(v)(t)| = \left| \int_a^t k(t, u(s), u'(s)) - k(t, v(s), v'(s)) ds \right|$$

Puisque k est lipschitzien,

$$\begin{aligned} |\Phi'(u)(t) - \Phi'(v)(t)| &\leq \int_a^t M|u(s) - v(s)| + \beta|u'(s) - v'(s)| ds \\ &\leq (M + \beta)|u - v| \end{aligned}$$

Comme :

$$\Phi(u) \in C^1(a, a+r)$$

Nous pouvons utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, Il existe $\xi \in [a, t]$:

$$\begin{aligned}\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t) &= (\Phi'(u)(\xi) - \Phi'(v)(\xi))(t - a) \\ |\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)| &\leq (M + \beta)|u - v||t - a|\end{aligned}$$

puisque Φ est lipschitzienne :

$$|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)| \leq (M + \beta + \max_{s \in [a, b]} |f'(s)|)|u - v|$$

Donc, nous obtenons que Φ admet un point fixe dans $C^2(a, b)$, ce qui signifie que l'équation admet une solution dans $C^1(a, b)$.

Prolongement de la solution

Dans cette section, nous nous intéressons à l'extension d'une solution d'une équation différentielle sur un intervalle plus large.

Théorème 2.3

Soit $u \in C[a, b]$ si l'équation admet une solution u définie sur un sous-intervalle et continue sur l'intervalle $[a, b]$

Démonstration

Supposons que \bar{u} est la solution réduite dans l'intervalle $[a, a+r]$, alors elle satisfait l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = f(t) + \int_a^{a+r} k(t, s, \bar{u}(s), \bar{u}'(s)) ds + \int_{a+r}^t k(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad \forall t \in [a+r, b]$$

Pour simplifier l'écriture, nous définissons une nouvelle fonction $g(t)$ par :

$$g(t) = f(t) + \int_a^{a+r} k(t, s, \bar{u}(s), \bar{u}'(s)) ds$$

Cette fonction vérifie toutes les informations déjà connues sur l'intervalle $[a, a+r]$.

Grâce à cette reformulation, nous pouvons exprimer $u(t)$ sur $[a+r, b]$ comme suit :

$$u(t) = g(t) + \int_{a+r}^t k(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad t \in [a+r, b]$$

En appliquant le théorème précédent, nous affirmons qu'il existe une solution $\bar{u}(t)$ de cette équation dans l'intervalle réduite $[a+r, a+2r]$.

On définit alors la solution de manière récurrente :

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), & \text{si } t \in [a, a+r] \\ \bar{\bar{u}}(t), & \text{si } t \in [a+r, a+2r] \end{cases}$$

$u(t)$ est une fonction appartenant à $C^1[a, a+2r]$ et par construction, elle constitue une solution de l'équation originale sur l'intervalle $[a, a+2r]$.

On répète cette procédure par récurrence jusqu'à obtenir une solution sur l'ensemble de l'intervalle souhaité.

Unicité de la solution :

Par le raisonnement précédent, les conditions (H3) seules ne garantissent pas l'existence d'une solution. Par conséquent, nous ajoutons les hypothèses suivantes, on montre l'unicité de la solution

$$(H3) \left\{ \begin{array}{l} \exists a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}, \quad \forall t, s \in [0, T], \\ |k(t, s, x, y) - k(t, s, x', y')| \leq a|x - x'| + b|y - y'|, \\ \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, x', y') \right| \leq a|x - x'| + b|y - y'|, \\ b < 1. \end{array} \right.$$

Théorème 2.4

L'équation (2.6) admet une unique solution.

Démonstration

Soient u et v deux solutions de l'équation appartenant à $C^1[a, b]$. Pour comparer ces solutions, on définit :

$$Z(t) = |u(t) - v(t)| + |u'(t) - v'(t)|$$

On a :

$$\begin{aligned} |u'(t) - v'(t)| &= \left| \int_a^b [f(s, u(s), u'(s)) - f(s, v(s), v'(s))] ds \right| \\ &\leq \int_a^b |f(s, u(s), u'(s)) - f(s, v(s), v'(s))| ds \end{aligned}$$

Comme f est lipschitzien :

$$|u'(t) - v'(t)| \leq \bar{c}|u(t) - v(t)| + \bar{d}|u'(t) - v'(t)|$$

Déplaçant $|u'(t) - v'(t)|$ de l'autre côté de l'équation :

$$(1 - \bar{d})|u'(t) - v'(t)| \leq \bar{c}|u(t) - v(t)|$$

Comme $\bar{d} < 1$, alors $1 - \bar{d} > 0$.

$$|u'(t) - v'(t)| \leq \left(\frac{\bar{c}}{1 - \bar{d}} \right) |v(t) - u(t)|$$

et on a :

$$|v'(t) - u'(t)| \leq \max(d, c) \int_a^t z(s) ds$$

alors,

$$Z(t) \leq \left[\frac{\bar{c}}{1 - \bar{d}} + 1 \right] \cdot \max(d, c) \int_a^t Z(s) ds$$

pour

$$p = \left[\frac{\bar{c}}{1 - \bar{d}} + 1 \right] \cdot \max(d, c),$$

avec p positive.

Donc,

$$Z(t) \leq p \int_a^t Z(s) ds.$$

Si on applique lemme de Gronwall, nous obtenons

$$v(t) = u(t)$$

ainsi l'équation (2.6) admet une unique solution.

Chapitre

3

*Équation de Volterra Intégrale
Faiblement Singulière non
Linéaire*

Dans ce chapitre, nous examinons un autre type d'équations intégrales de Volterra, dont le noyau présente une singularité faible, mais sans faire intervenir la dérivée de l'inconnu, l'équation prend la forme suivante :

$$u(t) = \int_a^t p(t-s)k(t,s,u(s)) ds + f(t), \quad t \in [a,b] \quad (3.1)$$

où u c'est l'inconnu appartient à $C(a,b)$ et k est une fonction définie par :

$$k : [a,b]^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t,s,u) \mapsto k(t,s,u),$$

satisfaisant les hypothèses suivantes :

$$(H4) \begin{cases} (1) & k \in C([a,b]^2 \times \mathbb{R}), \\ (2) & \exists A > 0, \forall t, s \in [a,b], \forall X, Y \in \mathbb{R}, \quad |k(t,s,X) - k(t,s,Y)| \leq A|X - Y|. \end{cases}$$

La partie faiblement singulière p vérifie les hypothèses suivantes :

$$(H5) \begin{cases} (1) & p \in L^1(a-b, b-a), \\ (2) & \forall t \geq 0 \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_t^{t+b} |p(t+\delta-s)| ds = 0. \end{cases}$$

3.1 Étude analytique

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.1), nous construisons deux suites de fonction $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, (méthode de Ricard) :

$$\begin{cases} u_n(t) = f(t) + \int_a^t p(t-s)k(t,s,u_{n-1}(s)) ds, \quad \forall t \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ u_0(t) = f(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \varphi_0(t) = f(t). \end{cases}$$

Nous savons que :

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = u_n(t).$$

Théorème 3.1

Sous les hypothèses (H1), (H2) et sachant qu'il existe des points $a = T_0, T_1, \dots, T_n = b$, pour $0 \leq i \leq n$, et $t \in [T_i, T_{i+1}]$, on à :

$$A \int_{T_i}^{\min(t, T_{i+1})} |p(t-s)| ds \leq \rho \tag{3.2}$$

où ρ est indépendant de t et de n , donc l'équation (3.1) admet une unique solution dans $C(a, b)$.

Démonstration

La démonstration de ce théorème se décompose de deux partie :

Partie 1 : Existence de la solution

Pour démontrer l'existence sur l'intervalle total, on procède par étapes sur chaque sous-intervalle, en commençant par l'intervalle $[T_0, T_1]$

On introduit les suites $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ définissent de la relation précédente dans $[a, T_1]$. Il est clair que les suites $\{u_i(t)\}_{i=1}^n$ et $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$ sont dans $C(a, b)$.

Nous avons, $\forall t \in [T_0, T_1]$:

$$\begin{aligned} u_n(t) &= f(t) + \int_a^t p(t-s)k(t, s, u_{n-1}(s)) ds \\ u_{n-1}(t) &= f(t) + \int_a^t p(t-s)k(t, s, u_{n-2}(s)) ds \\ |u_n(t) - u_{n-1}(t)| &= \left| \int_a^t p(t-s)k(t, s, u_{n-1}(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_a^t p(t-s)k(t, s, u_{n-2}(s)) ds \right| \end{aligned}$$

Cela implique que :

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t)| &= \left| \int_a^t p(t-s) (k(t, s, u_{n-1}(s)) - k(t, s, u_{n-2}(s))) ds \right| \\ &\leq \int_a^t |p(t-s)| |k(t, s, u_{n-1}(s)) - k(t, s, u_{n-2}(s))| ds \end{aligned}$$

puisque k Lipshtzienne, puis en appliquant le *Sup* aux deux nombre on obtient :

$$|\varphi_n(t)| \leq \int_a^t |p(t-s)| (A|u_{n-1}(s) - u_{n-2}(s)|) ds$$

$$|\varphi_n(t)| \leq \rho \|\varphi_{n-1}\|_{C(t_0, t_1)}$$

Ce qui donne

$$\|\varphi_n\|_{C(T_0, T_1)} \leq (\rho)^n \|\varphi_0\|_{C(T_0, T_1)} \implies \sum_{i=0}^{\infty} \|\varphi_i\|_{C(T_0, T_1)} \leq \|\varphi_0\|_{C(T_0, T_1)} \frac{1}{1-\rho}.$$

Étant donné que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $u \in C(T_0, T_1)$. Alors, nous pouvons écrire, $\forall t \in [T_0, T_1]$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = u(t).$$

Pour démontrer que $u(t)$ satisfait l'équation originale (3.1), nous supposons que :

$$u(t) = u_n(t) + \Delta_n(t), \quad (*)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \left| u(t) - f(t) - \int_a^t p(t-s)k(t, s, u(s)) ds \right| &= \left| \Delta_n(t) + u_n(t) - f(t) - \int_a^t p(t-s)k(t, s, u(s)) ds \right| \\ &\leq |\Delta_n(t)| + \left| \int_a^t p(t-s)k(t, s, u_{n-1}(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_a^t p(t-s)k(t, s, u(s)) ds \right| \\ &\leq |\Delta_n(t)| + \int_a^t |p(t-s)(k(t, s, u_{n-1}(s)) - k(t, s, u(s)))| ds \end{aligned}$$

comme k est liptshitzienne et D'après (*) on a :

$$\begin{aligned} &\leq |\Delta_n(t)| + \int_a^t |p(t-s)| \{A|\Delta_{n-1}(s)|\} ds, \\ &\leq |\Delta_n(t)| + \rho \|\Delta_{n-1}\|_{C(T_0, T_1)} \leq \|\Delta_n\|_{C(T_0, T_1)} + \|\Delta_{n-1}\|_{C(T_0, T_1)}. \end{aligned}$$

cependant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Delta_n\|_{C(T_0, T_1)} = 0,$$

Alors "u" est solution de (3.1).

Partie 2 : Unicité de la solution

On suppose qu'il existe deux solution u_1 et u_2 de l'équation (3.1).

Pour tout $t \in [T_0, T_1]$:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= f(t) + \int_a^t p(t-s) k(t, s, u_1(s)) ds \\ u_2(t) &= f(t) + \int_a^t p(t-s) k(t, s, u_2(s)) ds \\ u_1(t) - u_2(t) &= \int_a^t p(t-s) (k(t, s, u_1(s)) - k(t, s, u_2(s))) ds \\ |u_1(t) - u_2(t)| &\leq \int_a^t |p(t-s)| |k(t, s, u_1(s)) - k(t, s, u_2(s))| ds \\ &\leq A \int_a^t |p(t-s)| \|u_1 - u_2\| ds \end{aligned}$$

Donc

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq \rho \|u_1 - u_2\|_{C(T_0, T_1)}$$

Comme $\rho < 1$, cela ne peut être vrai que si $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in [T_0, T_1]$. Etant établie l'existence et l'unicité de la solution sur $[T_0, T_1]$, maintenant on va montrer qu'on peut la prolonger sur $[T_1, T_2]$.

Prolongement de la solution

Pour tout $t \in [T_1, T_2]$, nous écrivons l'équation comme suite :

$$u_1(t) = F(t) + \int_{T_1}^t p(t-s) k(t, s, u_1(s)) ds, \quad T_1 \leq t \leq T_2 \quad (3.3)$$

avec :

$$F(t) = f(t) + \int_a^{T_1} p(t-s) k(t, s, u_0(s)) ds,$$

$u_0(s)$ est la solution obtenue lors de la première étape. Mais l'équation (3.3) est identique à l'équation de Volterra lorsque $a \rightarrow T_1$. ce qui nous permet d'appliquer les mêmes étapes précédentes pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution u_1 dans l'intervalle $[T_1, T_2]$.

Nous définissons :

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t), & t \in [T_0, T_1], \\ u_1(t), & t \in [T_1, T_2]. \end{cases}$$

Il est évident que $u \in C(T_0, T_2)$, donc l'équation (3.1) admet une unique solution sur cette intervalle $[T_0, T_2]$.

Nous répétons cette opération et comme il existe un nombre fini de sous-intervalles sur $[a, b]$, nous construisons ainsi la solution unique en $C(a, b)$.

3.2 Étude numérique

Pour construire une méthode numérique qui donne une méthode de la solution de l'équation (3.1), nous utilisons la méthode Intégration par produit pour enlever la singularité du noyau, cette méthode consiste à approcher la partie régulière k , par les fonctions chapeaux qui apparaissent à chaque fois que s rejoint t :

$$P_{n,1}[k](t, s, u(s)) = \frac{s - t_j}{h} k(t, t_{j+1}, u(t_{j+1})) + \frac{t_{j+1} - s}{h} k(t, t_j, u(t_j)),$$

$$t_j \leq s \leq t_{j+1}.$$

Cela permet d'estimer le terme intégral de notre équation par la formule suivante :

$$\int_a^{t_n} p(t_n - s) k(t_n, s, u(s)) ds \simeq \alpha_{n,1} k(t_n, t_0, u(t_0))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j}) k(t_n, t_j, u(t_j)) + \beta_{n,n} k(t_n, t_n, u(t_n)) \quad (3.4)$$

Où, pour $0 \leq j \leq n - 1$,

$$\alpha_{n,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_n - s) (t_{j+1} - s) ds$$

$$\beta_{n,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_n - s) (s - t_j) ds$$

Une fois les termes, $\alpha_{n,j+1}, \beta_{n,j+1}$, sont calculés explicitement, la méthode numérique pour résoudre (3.1), est donnée par :

$$U_0 = f(a) \quad (3.5)$$

$$U_n = f(t_n) + \alpha_{n,1} k(t_n, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j}) k(t_n, t_j, U_j)$$

$$+ \beta_{n,n} k(t_n, t_n, U_n), \quad (3.6)$$

où $\{U_n\}_{0 \leq n \leq N}$ approche les valeurs $u(t_n)$.

Étude du système

Théorème 3.2

Pour h suffisamment petit, le système (3.5)-(3.6) admet une unique solution.

Démonstration

Pour $n \geq 1$, nous définissons

$$\begin{aligned} \Psi_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow \Psi_n(X) = S_n + \beta_{n,n}k(t_n, t_n, X) \end{aligned}$$

où,

$$S_n = f(t_n) + \alpha_{n,1}k(t_n, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j})k(t_n, t_j, U_j)$$

En supposant que U_0, U_1, \dots, U_{n-1} , sont déjà déterminés, on cherche U_n comme solution de l'équation $U_n = \Psi_n(U_n)$,

nous avons,

$$\begin{aligned} |\psi_n(X) - \psi_n(X')| &= |\beta_{n,n}k(t_n, t_n, X) - \beta_{n,n}k(t_n, t_n, X')| \\ &\leq A\beta_{n,n}|X - X'| \end{aligned}$$

Mais, $\lim_{h \rightarrow 0} \max(\beta_{n,n}) = 0$, donc, pour " h " suffisamment petit les fonctions ψ_n sont contractantes et le système (3.5)-(3.6) admet une unique solution $\{U_j\}_{0 \leq j \leq n}$.

Analyse de l'erreur

Pour u l'unique solution de (3.1) nous définissons la fonction, $\forall h > 0, 0 \leq n \leq N$:

$$\delta(h, t_n) = \int_{t_0}^{t_n} p(t_n - s)k(t_n, s, u(s)) ds - \sum_{j=0}^n \omega_{nj}k(t_n, t_j, u(t_j))$$

Où ,

$$\omega_{nj} = \begin{cases} \alpha_{n,1}, & j = 0 \\ \alpha_{n,j+1} + \beta_{nj}, & 1 \leq j \leq n-1 \\ \beta_{n,n}, & j = n \end{cases}$$

qui est appelée l'erreur de consistance locale pour (3.1).

Proposition 3.1

$$\max_{0 \leq j \leq n} |\delta(h, t_j)| \leq w_0(h, f) + \max_{a \leq t \leq b; x \in \mathbb{R}} w_0(h, k(t, \cdot, x)) \|p\|_{L^1(a,b)} + w_0(h, H)$$

où,

$$\forall h > 0, \forall \varphi \in C(a, b), w_0(h, \varphi) = \max_{|\tau - \theta| < h} |\varphi(\tau) - \varphi(\theta)|$$

$$\forall t \in [a, b], H(t) = \int_a^t p(t-s)k(t, s, u(s))ds$$

Démonstration

Nous avons, $\forall h > 0, 0 \leq n \leq N$

$$\begin{aligned} |\delta(h, t_n)| &\leq \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| |k(t_n, s, u(s)) - P_{n1}[k](t_n, s, u(s))| ds \\ &\leq \max_{|\tau - \theta| < h} (|k(t_n, \tau, u(\tau)) - k(t_n, \theta, u(\theta))|) \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds \\ &\leq \max_{|\tau - \theta| < h} (|k(t_n, \tau, u(\tau)) - k(t_n, \tau, u(\theta))| \\ &\quad + |k(t_n, \tau, u(\theta)) - k(t_n, \theta, u(\theta))|) \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds \\ &\leq \max_{|\tau - \theta| < h} |u(\theta) - u(\tau)| A \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds \\ &\quad + \max_{a \leq t \leq b; x \in \mathbb{R}} |k(t, \tau, x) - k(t, \theta, x)| \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds \\ &\leq \rho w_0(h, u) + \max_{a \leq t \leq b; x \in \mathbb{R}} |k(t, \tau, x) - k(t, \theta, x)| \int_a^{t_n} |p(t_n - s)| ds \end{aligned}$$

mais,

$$u(\theta) - u(\tau) = f(\theta) - f(\tau) + \int_a^\theta p(\theta - s)k(\theta, s, u(s))ds - \int_a^\tau p(\tau - s)k(\tau, s, u(s))ds$$

donc,

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\delta(h, t_j)| \leq w_0(h, f) + \max_{a \leq t \leq b; x \in \mathbb{R}} w_0(h, k(t, \cdot, x)) \|p\|_{L^1(a,b)} + w_0(h, H)$$

Pour $0 \leq i \leq N$, nous définissons l'erreur de discrétisation par

$$\varepsilon_i = |U_i - u(t_i)|$$

La méthode numérique (2.5) – (2, 6) est convergente si,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_i| \right) = 0.$$

Théorème 3.3

Sous les hypothèses (H1)-(H2) et en supposant que l'intervalle $[a, b]$ peut être divisé en un nombre fini de sous-intervalles $[a = z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{m-1}, z_m = b]$, tel que si j_v désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à z_v/h et $\omega_{nj} = 0$ pour $j > n$, les poids ω_{nj} , satisfont la condition suivante :

$$\sum_{j=j_v}^{j_{v+1}-1} |\omega_{nj}| \leq \rho < 1, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq v \leq m$$

Cette subdivision doit être indépendante de h , alors,

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\varepsilon_j| \leq \left(\frac{1}{1 - \rho} \right)^m \max_{1 \leq j \leq n} |\delta(h, t_j)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Exemple Numérique :

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Volterra définie comme suit :

$$u(t) = \arcsin(t) - 4/3 \sqrt[3]{t^2} + \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \sin(f(s)) ds, 0 \leq t \leq T = 1$$

$$k(t, s, u) = \sin(u), 0 \leq s \leq t \leq T = 1$$

$$f(t) = \arcsin(t) - 4/3 \sqrt[3]{t^2}$$

Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur entre la solution exacte et approchée $|U_n - u(t_n)|$, de l'équation précédente.

t	$ \varepsilon_n = \frac{ U_n - u(t_n) }{h = 0.1}$	$ \varepsilon_n = \frac{ U_n - u(t_n) }{h = 0.01}$
00	00	00
0.2	$0.1605e - 009$	$6.6732e - 016$
0.4	$0.3976e - 009$	$5.3746e - 016$
0.6	$0.6197e - 009$	$3.8321e - 016$
0.8	$0.7346e - 009$	$4.4028e - 016$
1	$0.54586e - 009$	eps

TABLE 3.1 - Équation intégrale faiblement singulière non linéaire de Volterra

Chapitre

4

*Équation intégró-différentielle
Non linéaire à noyau faiblement
singulier de Volterra*

Chapitre 4 : Équation intégral-différentielle de Volterra à noyau faiblement singulier et non linéaire

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats analytiques principaux concernant une équation intégral-différentielle de Volterra non linéaire avec noyau faiblement singulier. L'objectif est d'établir les conditions d'existence et d'unicité de la solution.

On cherche à déterminer, pour une fonction $f \in C^1(a, b)$ donnée, une fonction $u \in C^1(a, b)$ telle que :

$$\forall t \in [a, b], \quad u(t) = \int_a^t p(t-s) k(t, s, u(s), u'(s)) ds + f(t). \quad (4.1)$$

La fonction p représentant la partie singulière est supposée satisfaire les conditions suivantes :

$$(H6) \begin{cases} (1) & p \in W^{1,1}(a-b, b-a), \\ (2) & p(0) = 0, \end{cases}$$

où $W^{1,1}(a-b, b-a) = \{x \in L^1(a-b, b-a) : x' \in L^1(a-b, b-a)\}$, x' est la dérivé faible ou sens des distribution de x . $W^{1,1}(a-b, b-a)$ est un espace de Banach avec la norme suivante :

$$\begin{aligned} \|x\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} &= \|x\|_{L^1(a-b, b-a)} + \|x'\|_{L^1(a-b, b-a)} \\ &= \int_{a-b}^{b-a} |x(s)| ds + \int_{a-b}^{b-a} |x'(s)| ds. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [a, b]$ et pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\int_a^{t+\delta} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t+\delta-s) \right| ds = \int_0^\delta |p'(\tau)| d\tau,$$

ce qui implique que :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_a^{t+\delta} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t+\delta-s) \right| ds = 0.$$

Par ailleurs, pour tous $t, s \in [a, b]$:

$$\left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| = |p'(t-s)| \leq \int_{a-b}^{b-a} |p'(\tau)| d\tau < \infty.$$

Cela montre que la singularité de p provient du comportement de sa dérivée au voisinage de zéro, où en général $\lim_{s \rightarrow t} \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) = +\infty$. Toutefois, cette singularité reste contrôlée puisque :

$$\int_a^t \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| ds \leq \int_0^{t-a} |p'(\tau)| d\tau \leq \int_{a-b}^{b-a} |p'(\tau)| d\tau < \infty.$$

Chapitre 4 : Équation intégrale-différentielle de Volterra à noyau faiblement singulier et non linéaire

L'équation ci-dessus renferme également des informations sur la régularité de la solution u . En dérivant les deux membres par rapport à t , on obtient :

$$u'(t) = \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)k(t, s, u(s), u'(s)) ds + \int_a^t p(t-s) \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds + f'(t).$$

Supposons aussi que la partie régulière k défini par,

$$k : [a; b] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, s, u, v) \longmapsto k(t, s, u, v)$$

Vérifier les hypothèses suivantes :

$$(H7) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial k}{\partial t} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (2) \quad \exists M > 0 \text{ tel que } \forall t \in [a, b], \forall u, \bar{u}, v, \bar{v} \in \mathbb{R}, \\ \quad \max \left(|k(t, s, u, v)|, \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u, v) \right| \right) \leq M, \\ (3) \quad \exists A, B, \bar{A}, \bar{B} > 0 \text{ tels que } \forall t, s \in [a, b], \forall u, \bar{u}, v, \bar{v} \in \mathbb{R}, \\ \quad |k(t, s, u, v) - k(t, s, \bar{u}, \bar{v})| \leq A|u - \bar{u}| + B|v - \bar{v}|, \\ \quad \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u, v) - \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, \bar{u}, \bar{v}) \right| \leq \bar{A}|u - \bar{u}| + \bar{B}|v - \bar{v}| \end{array} \right.$$

La question centrale est la suivante :

si la solution de l'équation est supposée appartenir à l'espace C^1 , est-ce que le membre de droite de cette équation appartient également à ce même espace fonctionnel $C^1([a, b])$?

Pour cela, on introduit l'opérateur défini comme suite :

$$\forall \xi \in C^1([a, b]), \forall t \in [a, b], \quad \Phi_f(\xi)(t) = \int_a^t p(t-s)k(t, s, \xi(s), \xi'(s))ds + f(t)$$

Proposition 4.1

Pour tout $f \in C^1(a, b)$, Φ_f est continu de $C^1(a, b)$ dans lui-même

Démonstration

Soit $\xi \in C^1(a, b)$. Il est clair que $\Phi_f(\xi)$ est continu sur $[a, b]$. Pour tout $t \in [a, b]$:

Chapitre 4 : Équation intégrô-différentielle de Volterra à noyau faiblement singulier et non linéaire

$$\Phi'_f(\xi)(t) = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} [p(t-s)k(t,s,\xi(s),\xi'(s))] ds + f'(t)$$

Cette expression est bien définie et continue sur $[a, b]$, puisque les hypothèses (H7) assurent que les dérivées sont continues et bornées.

On en déduit que :

$$|\Phi'_f(\xi)(t)| \leq M \left(\int_a^t \left| \frac{\partial}{\partial t} p(t-s) \right| ds + \int_a^t |p(t-s)| ds \right) + \|f'\|_{C([a,b])}$$

En effectuant un changement de variable, on obtient :

$$|\Phi'_f(\xi)(t)| \leq M \left(\int_0^{b-a} |\dot{p}(\tau)| d\tau + \int_0^{b-a} |p(\tau)| d\tau \right) + \|f'\|_{C([a,b])}$$

Ce qui conduit à la majoration :

$$|\Phi'_f(\xi)(t)| \leq M \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} + \|f'\|_{C^1([a,b])}$$

Alors, $\Phi_f(\xi) \in C^1(a, b)$. Soit $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $C^1(a, b)$ qui converge vers $\xi \in C^1(a, b)$ nous avons

$$\Phi_f(\xi_n)(t) - \Phi_f(\xi)(t) = \int_a^t p(t-s) [k(t,s,\xi_n(s),\xi'_n(s)) - k(t,s,\xi(s),\xi'(s))] ds$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \max_{t \in [a,b]} |\Phi_f(\xi)(t) - \Phi_f(\xi_n)(t)| &\leq \max_{t \in [a,b]} |\xi(t) - \xi_n(t)| A \int_a^t |p(t-s)| ds \\ &\quad + \max_{t \in [a,b]} |\xi'(t) - \xi'_n(t)| B \int_a^t |p(t-s)| ds \\ &\leq \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} \max(A, B) \|\xi - \xi_n\|_{C^1(a,b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{t \in [a,b]} |\Phi'_f \xi(t) - \Phi'_f \xi_n(t)| &\leq \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} (\max(A, B)) \|\xi - \xi_n\|_{C^1(a,b)} \\ &\quad + \max(\bar{A}, \bar{B}) \|\xi - \xi_n\|_{C^1(a,b)} \end{aligned}$$

Donc, Φ_f est continu de $C^1(a, b)$ dans lui-même.

Dans ce qui suit, nous désignons $\|\cdot\|_{C^1(a,b)} = \|\cdot\|$

4.1 Étude analytique

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation, nous utilisons la méthode de Picard. Cette méthode est basée sur la construction de deux suites récurrentes $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u'_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$, qui sont définies comme suit :

$$\begin{cases} u_n(t) = f(t) + \int_a^t p(t-s)k(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s)) ds, & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_0(t) = f(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'_n(t) = f'(t) + \int_a^t p(t-s) \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s)) ds, & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u'_0(t) = f'(t) \end{cases}$$

on pose

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} \varphi_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t), & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \varphi_0(t) = f(t) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \varphi'_n(t) = u'_n(t) - u'_{n-1}(t), & \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \varphi'_0(t) = f'(t) \end{cases} \end{aligned}$$

Et aussi :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_i(t) = u_n(t) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi'_i(t) = u'_n(t) \end{cases}$$

Théorème 4.1

Par les deux hypothèses précédentes et étant donné qu'il existe des points $a = T_0, T_1, \dots, T_n = b$, tels que, pour $0 \leq i \leq n$ et pour $t \in [T_i, T_{i+1}]$:

$$\max\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_{T_i}^{\min(t, T_{i+1})} |\rho(t-s)| ds \leq \rho \leq \frac{1}{3}$$

$$\min\{A, B, \bar{A}, \bar{B}\} \int_{T_i}^{\min(t, T_{i+1})} |\rho(t-s)| ds \leq \rho \leq \frac{1}{3}$$

où t est indépendant de t et u , l'équation a une solution unique en $C^1(a, b)$.

Démonstration

Pour la démonstration, nous montrons l'existence et l'unicité sur l'intervalle réduit $[T_0, T_1]$, puis nous prolongeons la solutionsur tout l'intervalle $[a, b]$

Existence de la solution sur l'intervall $[T_0, T_1]$

En supposant que $t \in [T_0, T_1]$, nous définissons $u(t)$ comme précédemment.

En définissant $u_1(t), u_2(t)$ et $|\varphi_n(t)| = |u_1(t) - u_2(t)|$, nous avons $t \in [T_0, T_1]$:

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t)| &= |u_n(t) - u_{n-1}(t)| \\ &= \left| \int_a^t p(t-s)k(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s))ds - \int_a^t p(t-s)k(t, s, u_{n-2}(s), u'_{n-2}(s))ds \right| \\ &= \left| \int_a^t p(t-s) [k(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s)) - k(t, s, u_{n-2}(s), u'_{n-2}(s))] ds \right| \end{aligned}$$

puisque k est lipschitzien, devient :

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leq \int_a^t |p(t-s)| (A|u_{n-1}(s) - u_{n-2}(s)| + B|u'_{n-1}(s) - u'_{n-2}(s)|) ds \\ &\leq \int_a^t |p(t-s)| (A|\varphi_{n-1}(s)| + B|\varphi'_{n-1}(s)|) ds \\ &\leq p \| \varphi_{n-1} \|_{C^1(T_0, T_1)} + \rho \| \varphi'_{n-1} \|_{C^1(T_0, T_1)} \\ &\leq \rho \| \varphi_{n-1} \|_{C^1(T_0, T_1)} \end{aligned}$$

En plus,

$$\begin{aligned} |\varphi'_n(t)| &= |u'_{n-1}(t) - u'_{n-2}(t)| \\ &= \left| \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)k(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s))ds - \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)k(t, s, u_{n-2}(s), u'_{n-2}(s))ds \right| \\ &= \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) [k(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s)) - k(t, s, u_{n-2}(s), u'_{n-2}(s))] ds \\ &+ \int_a^t p(t-s) \left(\frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u_{n-1}(s), u'_{n-1}(s)) - \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u_{n-2}(s), u'_{n-2}(s)) \right) ds. \end{aligned}$$

Puisque k et $\frac{\partial k}{\partial t}$ sont lipschitziens, devient :

$$\begin{aligned} &\leq A \int_a^t \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| |\varphi_{n-1}(s)| ds + B \int_a^t \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| |\varphi'_{n-1}(s)| ds \\ &+ \bar{A} \int_a^t |p(t-s)| |\varphi_{n-1}(s)| ds + \bar{B} \int_a^t |p(t-s)| |\varphi'_{n-1}(s)| ds \\ &\leq (\max \{A, B\} \int_a^t \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| ds + \max \{A, \bar{A}, B, \bar{B}\} \int_a^t |p(t-s)| ds) \|\varphi_{n-1}\|_{C^1(T_0, T_1)} \\ &\leq 2\rho \|\varphi_{n-1}\|_{C^1(T_0, T_1)} \end{aligned}$$

alors :

$$\|\varphi_n\|_{C^1(T_0, T_1)} \leq 3\rho \|\varphi_{n-1}\|_{C^1(T_0, T_1)}$$

ce qui donne (utilisation de la preuve par rétractation)

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_{C^1(T_0, T_1)} &\leq 3\rho \|\varphi_{n-1}\|_{C^1(T_0, T_1)} \leq \dots \leq (3\rho)^n \|\varphi_0\|_{C^1(T_0, T_1)} \\ &\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \|\varphi_i\| \leq \|\varphi_0\| \sum_{i=0}^{\infty} (3\rho)^i \leq \frac{\|\varphi_0\|}{1-3\rho} \end{aligned}$$

Alors $\|\varphi_0\| \frac{1}{1-3\rho}$ est converge donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $u \in C^1(T_0, T_1)$.

On peut alors écrire :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$$

Pour prouver que "u" satisfait à l'équation oiginale, nous définissons :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_n(t) + \Delta_n(t) \\ \implies u'(t) &= u'_n(t) + \Delta'_n(t) \end{aligned}$$

Chapitre 4 : Équation intégrô-différentielle de Volterra à noyau faiblement singulier et non linéaire

Nous avons ;

$$\begin{aligned}
 & \left| u(t) - f(t) - \int_a^t p(t-s)k(t,s,u(s),u'(s)) ds \right| \\
 &= \left| u_n(t) + \Delta_n(t) - \int_a^t p(t-s)k(t,s,u(s),u'(s)) ds \right| \\
 &= \left| \Delta_n(t) + \int_a^t p(t-s)(k(t,s,u_n(s),u'_n(s)) - k(t,s,u(s),u'(s))) ds \right| \\
 &\leq \left| \Delta_n(t) \right| + \int_a^t p(t-s)(A|\Delta_{n-1}(s)| + B|\Delta'_{n-1}(s)|) ds \\
 &\leq \left| \Delta_n(t) \right| + \rho \|\Delta_{n-1}\|_{C^1(T_0,T_1)} \\
 &\leq \|\Delta_n(t)\|_{C^1(T_0,T_1)} + \rho \|\Delta_{n-1}\|_{C^1(T_0,T_1)}
 \end{aligned}$$

mais

$$\|\Delta_n\|_{C^1(T_0,T_1)} = 0 \quad \text{donc } u \text{ est une solution de l'équation.}$$

Unicité de la solution

Supposons qu'il existe deux solutions u_1 et u_2 à l'équation, alors pour $t \in [T_0, T_1]$:

$$\begin{aligned}
 |u_1(t) - u_2(t)| &= \left| \int_a^t p(t-s)k(t,s,u_1(s),u'_1(t))ds + f(t) - f(t) - \int_a^t p(t-s)k(t,s,u_2(s),u'_2(t))ds \right| \\
 &= \left| \int_a^t p(t-s) [k(t,s,u_1(s),u'_1(t)) - k(t,s,u_2(s),u'_2(t))] ds \right| \\
 &\leq \int_a^t |p(t-s)|(k(t,s,u_1(s),u'_1(t)) - k(t,s,u_2(s),u'_2(t))) ds \\
 &\leq \int_a^t |p(t-s)| (A|u_1(s) - u_2(s)| + B|u'_1(s) - u'_2(s)|) ds \\
 &\leq \rho \left(\max_{t \in [T_0, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| + \max_{t \in [T_0, T_1]} |u'_1(t) - u'_2(t)| \right) ds \\
 &\leq \rho \|u_1 - u_2\|_{C^1([T_0, T_1])}.
 \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}
 |u_1'(t) - u_2'(t)| &\leq \left| \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)(k(t,s,u_1(s),u_1'(s)) - k(t,s,u_2(s),u_2'(s)))ds \right| \\
 &\quad + \left| \int_a^t p(t-s)\left(\frac{\partial k}{\partial t}(t,s,u_1(s),u_1'(s)) - \frac{\partial k}{\partial t}(t,s,u_2(s),u_2'(s))\right)ds \right| \\
 &\leq \max_{t \in [T_0, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| A \int_a^t |p(t-s)| ds \\
 &\quad + \max_{t \in [T_0, T_1]} |u_1'(t) - u_2'(t)| B \int_a^t \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| ds \\
 &\quad + \max_{t \in [T_0, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| \bar{A} \int_a^t |p(t-s)| ds \\
 &\quad + \max_{t \in [T_0, T_1]} |u_1'(t) - u_2'(t)| B \int_a^t \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t-s) \right| ds \\
 &\leq 2\rho \left(\max_{t \in [T_0, T_1]} |u_1(t) - u_2(t)| + \max_{t \in [T_0, T_1]} |u_1'(t) - u_2'(t)| \right) ds
 \end{aligned}$$

$$\text{Alors, } \|u_1 - u_2\|_{C^1([T_0, T_1])} \leq 3\rho \|u_1 - u_2\|_{C^1([T_0, T_1])}.$$

Puisque $\rho < \frac{1}{3}$, cette inégalité ne peut être réalisée que si :

$$u_1(t) = u_2(t), \quad \forall t \in [T_0, T_1].$$

Prolongement de solution :

Maintenant pour $t \in [T_1, T_2]$, nous écrivons l'équation comme suit :

$$u_1(t) = F(t) + \int_{T_1}^t p(t-s)k(t,s,u(s),u'(s)) ds, \quad T_1 \leq t \leq T_2$$

avec,

$$F(t) = f(t) + \int_{T_0}^{T_1} p(t-s)k(t,s,u_0(s),u_0'(s)) ds$$

et $u_0(t)$ est la solution que nous avons obtenue précédemment. Cependant, l'équation est exactement la même équation de volterra avec l'origine décalée de $a \rightarrow T_1$. Nous pouvons alors appliquer les mêmes étapes de base.

Nous définissons :

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t), & t \in [T_0, T_1] \\ u_1(t), & t \in [T_1, T_2] \end{cases}$$

Il est clair que $u \in C^1([T_0, T_1])$ est l'unique solution de l'équation sur $[T_0, T_2]$.

Ce processus peut être répété, et comme il existe un nombre fini de sous-intervalles dans $[a, b]$, nous trouvons la solution unique sur $C^1([a, b])$.

4.2 Étude numérique

Dans cette section nous intéressons à l'approximation numérique de la solution u de l'équation intégral-différentielle faiblement singulière de Volterra définie par :

$$\forall t \in [a, b], u(t) = \int_a^t p(t-s)k(t, s, u(s), u'(s)) ds + f(t) \quad (4.2)$$

où, l'existence et l'unicité de la solution de cette équation sont assurée par les conditions des hypothèses $H(6)$ et $H(7)$ proposées dans ce chapitre.

Nous rappelons qu'une fois dériver l'équation (4.2), cette équation devient

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], u'(t) = \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)k(t, s, u(s), u'(s)) ds \\ + \int_a^t p(t-s) \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds + f'(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Afin de déterminer une solution approchée de notre équation sur l'intervalle $[a; b]$, il est nécessaire d'élaborer des approximations pour les trois intégrales mentionnées ci-dessus, intervenant dans le second membre des équations (4.2) et (4.3), on pose :

$$I_1 = \int_a^t p(t-s)k(t, s, u(s), u'(s)) ds \quad (4.4)$$

$$I_2 = \int_a^t \frac{\partial p}{\partial t}(t-s)k(t, s, u(s), u'(s)) ds \quad (4.5)$$

$$I_3 = \int_a^t p(t-s) \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds \quad (4.6)$$

Les noyaux des intégrales I_1 et I_3 étant réguliers, la majorité des méthodes d'intégration numérique peut être utilisé pour les approximer.

En revanche, l'intégrale I_2 présentant une singularité, nécessite le recours à la méthode dite du "intégration par produit"

Chapitre 4 : Équation intégrro-différentielle de Volterra à noyau faiblement singulier et non linéaire

Les diverses combinaisons des méthodes d'intégration numérique adoptées pour approximer I_1 , I_2 et I_3 donnent lieu à quatre stratégies d'approximation de la solution de notre équation, résumées dans le tableau ci-dessous :

	I_1	I_2	I_3
mehtod 1(PPP)	intégration par produit	intégration par produit	intégration par produit
mehtod 2(NPP)	Nystrôme method	intégration par produit	intégration par produit
mehtod 3(PPN)	intégration par produit	intégration par produit	Nystrôme method
mehtod 4(NPN)	Nystrôme method	intégration par produit	Nystrôme method

Table 4.1 - Méthodes d'approximations

Dans la suite, nous allons construire le système numérique issu de méthode NPP, puis étudier sa convergence. Pour montrer son efficacité des tests numériques sont effectués sur un exemple pratique.

1 Description numérique

Afin d'obtenir une approximation numérique de la fonction $u(t)$ pour $t \in [a, b]$, on procède à une discrétisation de l'intervalle $[a; b]$ en un ensemble de points $\{t_j\}_{0 \leq j \leq n}$ définis comme suit :

$$\forall N \geq 1, h = \frac{b-a}{N} \quad \text{et} \quad t_j = a + jh, 0 \leq j \leq N$$

Les équations (4.2) et (4.3) sont alors modifiées en y insérant les estimations des intégrales I_1 , I_2 et I_3 obtenues à l'aide de schémas de quadrature spécifiques à chaque méthode présentée dans le tableau. L'analyse de la convergence du système résultant permet d'évaluer le cohérence de la méthode numérique adoptée.

4.2.1 La méthode NPP

Dans cette méthode, nous approchons l'intégrale I_1 par la méthode de Nystrôme, et I_2 , I_3 par la méthode d'intégration par produit doit

$$\int_a^{t_n} p(t_n - s) k(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \simeq h \sum_{j=0}^n \omega_{n,j} p(t_n - t_j) k(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j))$$

Chapitre 4 : Équation intégrô-différentielle de Volterra à noyau faiblement singulier et non linéaire

où $\{\omega_{n,j}\}$ sont supposés vérifiés

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} \max_{0 \leq j \leq n} |\omega_{n,j}| \leq W \leq \infty, \\ \forall \varphi \in C^0(a, b), \lim_n \left| \int_a^b \varphi(t) dt - h \sum_{j=0}^n \omega_{n,j} \varphi(t_j) \right| = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

Premièrement, nous approchons les parties régulières

$$k(t, s, u(s), u'(s)), \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)),$$

sur la subdivision $\{t_j\}_{0 \leq j \leq n}$, par les fonctions chapeaux, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_{n,1}[k](t, s, u(s), u'(s)) &= \frac{s - t_j}{h} k(t, t_{j+1}, u(t_{j+1}), u'(t_{j+1})) \\ &\quad + \frac{t_{j+1} - s}{h} k(t, t_j, u(t_j), u'(t_j)), t_j \leq s \leq t_{j+1} \\ P_{n,1} \left[\frac{\partial k}{\partial t} \right](t, s, u(s), u'(s)) &= \frac{s - t_j}{h} \frac{\partial k}{\partial t}(t, t_{j+1}, u(t_{j+1}), u'(t_{j+1})) \\ &\quad + \frac{t_{j+1} - s}{h} \frac{\partial k}{\partial t}(t, t_j, u(t_j), u'(t_j)), t_j \leq s \leq t_{j+1} \end{aligned}$$

Cela conduit à la formule d'intégration suivante :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_a^{t_n} \frac{\partial p}{\partial t}(t_n - s) k(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \simeq \hat{\alpha}_{n,1} k(t_n, t_0, u(t_0), u'(t_0)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j}) k(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)) + \hat{\beta}_{n,n} k(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n)) \\ I_3 &= \int_a^{t_n} p(t_n - s) \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \simeq \alpha_{n,1} \frac{\partial}{\partial t} k(t_n, t_0, u(t_0), u'(t_0)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j}) \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \\ &\quad + \beta_{n,n} \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n)) \end{aligned}$$

où, pour $0 \leq j \leq N - 1$

$$\begin{cases} \alpha_{n,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_n - s) (t_{j+1} - s) ds \\ \beta_{n,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(t_n - s) (s - t_j) ds \\ \hat{\alpha}_{n,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial p}{\partial t}(t_n - s) (t_{j+1} - s) ds \\ \hat{\beta}_{n,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial p}{\partial t}(t_n - s) (s - t_j) ds \end{cases}$$

Deuxièmement, nous calculons, $\alpha_{n,j+1}, \beta_{n,j+1}, \hat{\alpha}_{n,j+1}, \hat{\beta}_{n,j+1}$ explicitement. Nous les remplaçons dans les équations d'origines (4.2), (4.3) ce qui donne le système (NPP) suivant :

$$U_0 = f(a) \quad (4.8)$$

$$V_0 = f'(a), \quad (4.9)$$

$$U_n = f(t_n) + \alpha_{n,1}k(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j})k(t_n, t_j, U_j, V_j) + \beta_{n,n}k(t_n, t_n, U_n, V_n), 1 \leq n \leq N \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} V_n &= f'(t_n) + \hat{\alpha}_{n,1}k(t_n, t_0, U_0, V_0) \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j})k(t_n, t_j, U_j, V_j) + \hat{\beta}_{n,n}k(t_n, t_n, U_n, V_n) \\ &+ \alpha_{n,1} \frac{\partial}{\partial t} k(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j}) \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_j, U_j, V_j) \\ &+ \beta_{n,n} \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_n, U_n, V_n), 1 \leq n \leq N \end{aligned} \quad (4.11)$$

où, U_n approche $u(t_n)$ et V_n approche $u'(t_n)$.

Étude du système (NPP)

Le système permet de déterminer explicitement U_n , contrairement à d'autres approches où cette valeur est obtenue de manière implicite.

Théorème 4.2

Pour h suffisamment petit, le système (NPP) a une solution unique.

Démonstration

Supposons que l'espace \mathbb{R}^2 est muni par la norme suivante :

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\|_1 = |X| + |Y|$$

Pour tout $n \geq 1$, nous définissons :

$$\Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S \\ \hat{S} + \hat{\beta}_{n,n} k(t_n, t_n, X, Y) + \beta_{n,n} \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) \end{pmatrix}$$

où

$$S = f(t_n) + h \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} p(t_n - t_j) k(t_n, t_j, U_j, V_j)$$

$$\begin{aligned} \hat{S} &= f'(t_n) + \hat{\alpha}_{n,1} k(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j}) k(t_n, t_j, U_j, V_j) \\ &+ \alpha_{n,1} \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_0, U_0, V_0) + \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j}) \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_j, U_j, V_j) \end{aligned}$$

Si, $U_0, U_1, \dots, U_{n-1}, V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$, sont connus, alors (4.8), (4.11) est une équation implicite pour définir U_n et V_n .

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \Psi_n \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$$

Nous avons, $\forall X, Y, X', Y' \in \mathbb{R}$,

$$\left\| \Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right\|_1,$$

$$\gamma_2 = \hat{\beta}_{n,n} (k(t_n, t_n, X, Y) - k(t_n, t_n, X', Y')) + \beta_{n,n} \left(\frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) - \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_n, X', Y') \right).$$

En appliquant (H6) et (H7), nous obtenons

$$\begin{aligned} |\gamma_2| &\leq \hat{\beta}_{n,n} (A |X - X'| + B |Y - Y'|) + \beta_{n,n} (\bar{A} |X - X'| + \bar{B} |Y - Y'|) \\ &\leq \max(\hat{\beta}_{n,n}, \beta_{n,n}) (\max(A, \bar{A}) |X - X'| + \max(B, \bar{B}) |Y - Y'|) \end{aligned}$$

alors,

$$\left\| \Psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \max(\hat{\beta}_{n,n}, \beta_{n,n}) \max(A, B, \bar{A}, \bar{B}) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \max(\hat{\beta}_{nn}, \beta_{nn}) = 0$, Ψ_n est une contraction pour h assez petit, nous appliquons le théorème de Bannach pour obtenir le résultat désiré.

Analyse de l'erreur de la méthode (NPP)

Avant passé a l'étude de l'ereur, il faut d'abord montré que cete méthode est consistante. Pour cela nous définissons l'erreur de consistance locale de l'équation (4.2), qui est l'erreur entre la valeur exacte de l'intégrale etsa quarature. L'ereur est définie par la formule :

pour $0 \leq n \leq N$

$$\Delta^{NPP}(h, t_n) = \left| \delta^{NPP}(h, t_n) \right| + \left| \hat{\delta}^{NPP}(h, t_n) \right|$$

où, pour $0 \leq n \leq N$

$$\delta^{NPP}(h, t_n) = \int_{t_0}^{t_n} p(t_n - s) k(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{nj} p(t_n - t_j) k(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j))$$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}^{NPP}(h, t_n) &= \int_{t_0}^{t_n} \frac{\partial p}{\partial t}(t_n - s) k(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - \sum_{j=0}^n \hat{\kappa}_{n,j} k(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_n} p(t_n - s) \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - \sum_{j=0}^n \kappa_{n,j} \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)), \end{aligned}$$

avec,

$$\kappa_{n,j} = \begin{cases} \alpha_{n,1}, j = 0 \\ \alpha_{n,j+1} + \beta_{n,j}, 1 \leq j \leq n-1 \\ \beta_{n,n}, j = n \end{cases}$$

et

$$\hat{k}_{n,j} = \begin{cases} \hat{\alpha}_{n,1}, j = 0 \\ \hat{\alpha}_{n,j+1} + \hat{\beta}_{n,j}, 1 \leq j \leq n-1 \\ \hat{\beta}_{n,n}, j = n \end{cases}$$

Proposition 4.2

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left| \Delta^{\text{NPP}}(h, t_j) \right| \leq 2\rho w_1(h, f) + 2 \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_1(h, k(t, \cdot, x, y)) \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)} \\ + 2\rho w_1(h, H) + (b-a) \max_{a \leq t \leq b} w_0(h, H_3(t, \cdot))$$

où,

$$w_1(h, \varphi) = \max_{|\tau-\theta| < h} |\varphi(\tau) - \varphi(\theta)| + \max_{|\tau-\theta| < h} |\varphi'(\tau) - \varphi'(\theta)|$$

$$w_0(h, \varphi) = \max_{|\tau-\theta| < h} |\varphi(\tau) - \varphi(\theta)|$$

$$H(t) = \int_a^t p(t-s)k(t, s, u(s), u'(s)) ds$$

$$H_3(t, s) = p(t-s)k(t, s, u(s), u'(s)) ds$$

Démonstration

$$\left| \delta^{\text{NPP}}(h, t_n) \right| = \left| \int_{t_0}^{t_n} p(t_n-s)k(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - \sum_{j=0}^n \omega_{nj} p(t_n-t_j)k(t_n, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \right| \\ \leq \int_{t_0}^{t_n} |p(t_n-s)K(t_n, s, u(s), u'(s)) - P_{n,1}H_3(t_n, s)| ds \\ \leq \max_{|\tau-\theta| < h} |H_3(t_n, \theta) - H_3(t_n, \tau)| \int_{t_0}^{t_n} ds \\ \leq (b-a) \max_{a \leq t \leq b} w_0(h, H_3(t, \cdot))$$

En utilisant des étapes similaires, nous obtenons

$$\left| \hat{\delta}^{\text{NPP}}(h, t_n) \right| \leq \int_a^{t_n} \left| \frac{\partial p}{\partial t}(t_n-s) \right| |k(t_n, s, u(s), u'(s)) - P_{n1}[k](t_n, s, u(s), u'(s))| ds \\ + \int_a^{t_n} \left| p(t_n-s) \right| \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) - P_{n1}[k'](t_n, s, u(s), u'(s)) \right| ds \\ \left| \hat{\delta}^{\text{NPP}}(h, t_n) \right| \leq 2\rho(w_1(h, f) + w_1(h, H)) + 2 \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} w_1(k(t, \cdot, x, y), h) \|p\|_{W^{1,1}(a-b, b-a)}$$

Chapitre 4 : Équation intégral-différentielle de Volterra à noyau faiblement singulier et non linéaire

Le résultat précédent montre que la méthode est consistante puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\max_{0 \leq j \leq N} \Delta^{\text{NPP}}(h, t_j) \right) = 0$$

Pour montrer que cette méthode est convergente nous introduisons la notion de l'erreur de discrétisation $\{E_i\}_{0 \leq i \leq N}$ définie par

$$E_i = |\varepsilon_i| + |\hat{\varepsilon}_i| \quad (4.12)$$

où,

$$\begin{cases} \varepsilon_i = U_i - u(t_i) \\ \hat{\varepsilon}_i = V_i - u'(t_i) \end{cases}$$

La méthode est dite convergente si,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq N} E_i \right) = 0$$

Théorème 4.3

Sous des hypothèses (H6) - (H7) et en supposant que l'intervalle $[a, b]$ peut être divisé en un nombre fini de sous-intervalles

$$[a = z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{m-1}, z_m = b]$$

tel que si j_v désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à z_v/h

et $\kappa_{nj} = \hat{\kappa}_{n,j} = 0$ pour $j > n$, les poids $\kappa_{n,j}, \hat{\kappa}_{n,j}$, satisfaire la condition,

$$\sum_{j=j_v}^{j_{v+1}-1} \left| \frac{[hW\|p\|_{C[a,b]} \max(A, B) + \max(A, B)\hat{\kappa}_{ij} + \max(\bar{A}, \bar{B})\kappa_{i,i}]}{1 - [\max(A, B)\hat{\kappa}_{i,i} + \max(\bar{A}, \bar{B})\kappa_{ii}]} \right| \leq 3\rho < 1, n \geq 1.$$

, $0 \leq v \leq m$

Cette subdivision doit être indépendante de h , alors,

$$\max_{1 \leq j \leq n} |E_j| \leq \left(\frac{1}{1 - 3\rho} \right)^{m+2} \max_{1 \leq j \leq n} |\Delta(h, t_j)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Démonstration

$${}^{NPP}\hat{\varepsilon}_i = h \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j p(t_i - t_j) k(t_i, t_j, U_j, V_j) - \int_{t_0}^{t_i} p(t_i - s) k(t_i, s, u(s), u'(s)) ds.$$

D'après la définition de ${}^{NPP}\delta(h, t_i)$, nous avons

$${}^{NPP}\hat{\varepsilon}_i = h \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j p(t_i - t_j) \{k(t_i, t_j, U_j, V_j) - k(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j))\} - {}^{NPP}\delta(h, t_i),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \left| {}^{NPP}\hat{\varepsilon}_i \right| &\leq hW \|p\|_{C[a,b]} \sum_{j=0}^{i-1} \left(A \left| {}^{NPP}\hat{\varepsilon}_j \right| + B \left| \hat{\varepsilon}_j \right| \right) + \left| {}^{NPP}\delta(h, t_i) \right| \\ &\leq hW \|p\|_{C[a,b]} \max(A, B) \sum_{j=0}^{i-1} E_j + \left| {}^{NPP}\delta(h, t_i) \right| \end{aligned}$$

Nous avons aussi,

$$\begin{aligned} {}^{NPP}\hat{\varepsilon}_i &= \sum_{j=0}^i \kappa_{i,j} \frac{\partial k}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, V_j) - \int_{t_0}^{t_i} p(t_i - s) \frac{\partial k}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \\ &+ \sum_{j=0}^i \hat{\kappa}_{i,j} k(t_i, t_j, U_j, V_j) - \int_{t_0}^{t_i} \frac{\partial p}{\partial t}(t_i - s) k(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \end{aligned}$$

D'après la définition de $\hat{\delta}(h, t_i)$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} {}^{NPP}\hat{\varepsilon}_i &= \sum_{j=0}^i \hat{\kappa}_{i,j} \{k(t_i, t_j, U_j, V_j) - k(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j))\} \\ &+ \sum_{j=0}^i \kappa_{i,j} \left\{ \frac{\partial k}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, V_j) - \frac{\partial k}{\partial t}(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \right\} - {}^{NPP}\delta(h, t_i) \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \left| {}^{NPP}\hat{\varepsilon}_i \right| &\leq \sum_{j=0}^i \hat{\kappa}_{i,j} \left(A \left| {}^{(NPP)}\hat{\varepsilon}_j \right| + B \left| \hat{\varepsilon}_j \right| \right) + \sum_{j=0}^i \kappa_{i,j} \left(\bar{A} \left| {}^{NPP}\hat{\varepsilon}_i \right| + \bar{B} \left| \hat{\varepsilon}_j \right| \right) + \left| {}^{NPP}\delta(h, t_i) \right|, \\ &\leq \max(A, B) \sum_{j=0}^i \hat{\kappa}_{i,j} \frac{{}^{NPP}E_j}{j} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \sum_{j=0}^i \kappa_{i,j} \frac{{}^{NPP}E_j}{j} + \left| {}^{NPP}\delta(h, t_i) \right|, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} {}^{NPP}E_i &\leq \sum_{j=0}^{i-1} \left[hW\|p\|_{C[a,b]} \max(A, B) + \max(A, B) \hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \kappa_{i,j} \right] {}^{NPP}E_j \\ &\quad + \left[\max(A, B) \hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \kappa_{i,j} \right] \frac{{}^{NPP}E_i + \Delta(h, t_i)}{\Delta(h, t_i)} \\ {}^{NPP}E_i &\leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left[hW\|p\|_{C[a,b]} \max(A, B) + \max(A, B) \hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \kappa_{i,j} \right] {}^{NPP}E_j}{1 - \left[\max(A, B) \hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \kappa_{i,j} \right]} \\ &\quad + \frac{\Delta(h, t_i)}{1 - \left[\max(A, B) \hat{\kappa}_{i,j} + \max(\bar{A}, \bar{B}) \kappa_{i,j} \right]} \end{aligned}$$

En appliquant lemme 1 et 2, nous obtenons le résultat désiré.

Exemple

Considérons l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$\forall t \in [0, 1], u(t) = f(t) + \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}} \frac{e^t s^2}{u^2(s) + (u'(s))^2 + 1} ds \quad (4.13)$$

Le noyau

$$k(t, s, x, y) = \frac{e^t s^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

satisfais (H7) avec

$$M = e, A = B = \bar{A} = \bar{B} = 2e$$

Si nous prenons

$$f(t) = \sin(t) - 8/105 t^{\frac{7}{2}} e^t$$

nous obtenons

$$u(t) = \sin(t)$$

Les termes U_n et V_n ne sont pas calculés exactement, ils sont approchés en utilisant la méthode d'itération de Bannach avec

Chapitre 4 : Équation intégral-différentielle de Volterra à noyau faiblement singulier et non linéaire

$$\|X_{\text{new}} - X_{\text{old}}\| \leq 10^{-7},$$

comme condition d'arrêt.

Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur entre la solution exacte et approximative de l'équation (4.13) pour méthodes NPP.

$$E(h) = \max_{0 \leq i \leq n} |U_i - u(t_i)| + \max_{0 \leq i \leq n} |V_i - u'(t_i)|;$$

h	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$\frac{\text{NPP}}{E}(h)$	$1.42E - 002$	$4.78E - 003$	$3.96E - 004$	$1.37E - 004$	$1.19E - 005$

Table Résultats numérique de l'exemple par la méthode NPP

Conclusion

Cette conclusions les plus pertinentes mémoire a porté sur l'étude des équations de Volterra non linéaires à noyau faiblement singulier, dans leurs formes intégrale et intégréo-différentielle. Cette étude a été structurée en quatre chapitres, suivant une progression logique. Le premier chapitre a été dédié aux notions et résultats théoriques nécessaires à la compréhension du sujet. Le deuxième chapitre a traité l'étude analytique des équations intégrales du second type et des équations intégréo-différentielles non linéaires, avec des résultats d'existence et d'unicité. Le troisième chapitre a concerné les équations intégrales à noyau faiblement singulier, étudiées analytiquement et accompagnées d'un cadre numérique proposé. Quant au quatrième chapitre, il a été consacré aux équations intégréo-différentielles à noyau faiblement singulier, où une étude analytique a été suivie par la présentation de la méthode numérique adoptée, à savoir la méthode NPP. Cette mémoire constitue une base pour l'analyse de ce type d'équations, et montre l'importance de combiner les approches analytiques et numériques dans les cas à noyaux faiblement singuliers.

Perspectives Parmi les perspectives possibles :

Appliquer la méthode NPP sur des exemples numériques concrets ;

Comparer son efficacité à d'autres méthodes numériques ;

Étendre l'étude à des espaces fonctionnels plus généraux.

Bibliographie

- [1] M.Bedri , Cherrati.H , "La Méthode De Décomposition D'Adomian", Mémoire de Master , Université Saad Dahlab Blida 1
- [2] H. Guebbai, M. Z. Aïssaoui, I. Debbar, B. Khalla, "Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation". AMC, 229 (2014), p 367-373.
- [3] Messaoud Guesba. "Sur quelques équations intégrales non linéaires". Mémoire de magister université Kasdi Merbah Ouargla
- [4] Mourad Ghat, Hamza Guebbai, "Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear volterra equation with weakly singular kernel". Computational Applied Mathematics, 2018, DOI : 10.1007/s40314-018-0597-3.
- [5] Mourad Ghat, Hamza Guebbai, "New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation". Asian-European Journal of Mathematics, 2018, DOI : 10.1142/S1793557119500165.
- [6] Mourad Ghat , "Étude analytique et numérique des équations intégrales-différentielles de Volterra : Traitement des noyaux faiblement singuliers" , thèse , Université 8 mai 1945 Guelma '
- [7] A.Rahmoune , "Équations Intégrales linéaires et non linéaires" , Analyse et technique de résolution , 2018
- [8] P.K.SAHU,"Numerical Approximate Methods for Solving Linear and Nonlinear Integral equations" 2016
- [9] Z. Gu, X. Guo, D. Sun, "Series expansion method for weakly singular Volterra integral equations". Journal Applied Numerical Mathematics, 105 (2016)
- [10] A.M.WAZWAZ,"Linear and nonlinear integral equations",639,2011,Springer.

