الجمهـوريـــة الجزائـريـــة الديـمـقـراطيـــة الـشـعـبـيـــة
République Algérienne Démocratique et Populaire

التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientfiique

المدرسة العليا للأساتذة بسكيكدة
Ecole normale supérieure d'Enseignement de SKIKDA

قسم الرياضيات

Département de Mathématiques

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ تعليم متوسط -رياضيات-
تحت عنوان

المنطـــق الريـاضـــي

من إعداد :

- حولي أحمد ماهر عبد القادر
- بن شاكر مناف

الأستاذالمشرف :

- فنيزري فاطمة

لجنة المناقشة

◄ عياش مصعب	أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة	◄ مناقش
◄ فـراق عزوز	أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة	◄ مناقش
◄ دردار نجم الدين	أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة	◄ رئيسي

السنة الجامعية: 2024-2023

شكـــر وعرفـــــان

قال الله تعالى "وَمَن يَشْكُرْ فَإِنَّمَا يَشْكُرُ لِنَفْسِهِ وَمَن كَفَرَ فَإِنَّ اللَّهَ غَنِيٌّ حَمِيدٌ" (النمل: 40).
الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين، أما بعد:.
نودُّ تقديم الشكر الجزيل والتقدير العميق لكل من ساهم ووقف بجانبنا خلال رحلة إعداد هذه المذكرة. شكرنا الخالص للأستاذة فنيزيري فاطة على مساهمتها القيمة وتوجيهاتها الثمينة التي ساهمت في نجاح هذه المذكرة رغم انها لم تكمل معنا الرحلة . نسأل الله أن يشفيها و يوفقها في كل خطوة تخطوها ويجعلها من العباد الصالحين..
ونخص بجزيل الشكر والعرفان إلى الاستاذ عزوز فراق .
كذلك، نشكر جميع الأساتذة الأفاضل في المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي على دعمهم وتوجيهاتهم القيمة التي ساهمت في تطوير أفكارنا ومسار عملنا. نسأل الله أن يجزيهم عنا خير الجزاء .
إلى من قدموا لنا المساعدات والتوجيهات دون أن يشعروا بدورهم بذلك .
كما نشكر أعضاء اللجنة التي تشرفنا بقبولها مناقشة هذه المذكرة .

إهـــداء

بسم الله و الصلاة و السلام على رسول الله أشرف الخلق و المرسلين .
أهدي هذا العمل إلى من ألهمني وشجعني، وأعطاني القوة والإرشاد في كل خطوة. إلى أحبائي الذين كانوا دائمًا بجانبي، يملؤن حياتي بالفرح والحب. لأسرتي العزيزة التي كانت ركيزة قوية لي، ولأصدقائي الذين شاركوني اللحظات السعيدة والتحديات.
كلمات الشكر لا تكفي لتعبر عن مدى امتناني لكم جميعًا. لقد كنتم الدعم والدافع والنور في حياتي. فلكم كل الحب والامتنان، وأتمنى أن يكون هذا العمل هو عربون شكري لكم جميعًا.

ح.أ.ماهر عبد القادر

الحمد لله الذي تتم بنعمتة الصالحات أهدي هذا العمل المتواضع إلى أصحاب الكلمات التي سارت بي نحو النجاح و من ساندوا خطاي أمي وأبي حفظهما الرحمان ، عسى أن أكون مصدر فخر لكما . وإلى كل أفراد عائلتي دون إستثناء، وإلى زميلي في العمل "أحمد ماهر " . وكل اصدقائي " طارق ، شرف الدين ، محمد الأمين ، أحمد ، الحارث، هيثم ، سيف الدين ، عبد السلام ، أيمن ،عبد القادر ، معز ، محمد صلاح ، علي ، رؤوف ، ،وليد " . وكل من أعطاني يد العون من قريب أو بعيد وساعدني في إنجاز هذه المذكرة وأخص بالذكر الأستاذ " فراق عزوز " .

بن شاكر مناف

المحتويات

مقدمة

يعد المنطق الرياضي فرعاً من فروع الرياضيات، حيث تشترك الرياضيات والمنطق الرياضي في كونهما يعتمدان على الاستنتاج الصوري (المنطقي). هذا يثير التساؤل حول الفرق بين المنطق الصوري (الأرسطي) والمنطق الرياضي، فهما علمان متداخلان يبرهن كل منهما على صحة الآخر، لذا كان تطورهما متلازماً وإن كان ذلك وفق منحنيين مستقلين يتقاطعان أحياناً ويبتعدان أحياناً أخرى. فالصلة بينهما هي صلة استغراق الرياضيات بأكملها في المنطق وارتدادها إليه، بحيث لا يمكن تعلم أي موضوع في الرياضيات دون أسس منطقية، وهذا ما بينه برتراند راسل.

يعنى المنطق الرياضي بدراسة مختلف الأنماط العامة للاستدلال، ويستخدم أسلوب التدوين الرمزي، أي القائم على الرموز المنطقية الرياضية. كل نظرية في المنطق الرياضي تقوم على أساس الاستدلال. من أهم ما يعالجه المنطق الرياضي: نظرية القضايا مثل حساب القضايا الأولية، نظرية دالات القضايا مثل حساب المحاميل، نظريات المجموعات، بالإضافة إلى دراسة العلاقات.

لقد اخترنا هذا الموضوع لعدة أسباب:

1. أولاً: لأن المنطق من بين الوسائل التي تساعد في التعرف على مبدأ الصحة والخطأ في أي موضوع كان.
2. ثانياً: حددنا نوع المنطق (المنطق الرياضي) لأن الرياضيات هي أكثر المواد استعمالاً للمنطق في نظرياتها ومسلماتها.
3. ثالثاً: اخترنا هذا الموضوع لتوضيح مختلف مفاهيم المنطق الأساسية.

وعليه سمينا موضوعنا ``المنطق الرياضي''. يطرح هذا الموضوع عدة إشكاليات:

- ما هو المنطق الرياضي؟
- ما هي مفاهيمه الأساسية ومركباته؟
- ما هي نظرياته ومسلماته الشائعة؟

ولكي نحاول حل الإشكاليات المذكورة، قسمنا البحث وفق خطة تتضمن ما يلي:

الفصل الأول: المنطق الجملي

يشمل هذا الفصل مقدمة، مفاهيم أساسية، حساب القضايا، قيم الصحة، ، مفهوم التثنية، وتطبيقات المنطق الجملي في الدوائر الكهربائية.

الفصل الثاني: المكممات

يتناول هذا الفصل المنطق ذو الرتبة الأولى، المكممات، المحاميل، المتغير الحر والمقيد، خصائص المكممات، الأشكال الاعتيادية السابقة الضم للعبارات المنطقية، والأشكال القياسية للعبارات المنطقية.

الفصل الثالث: الاستدلال

يركز هذا الفصل على نظام البديهيات والحساب الجملي، مورفولوجية المنطق الصوري، قوانين التركيب، قواعد الاستدلال، الأنظمة التسليمية في المنطق الرياضي، نماذج لبعض الأنظمة التسليمية، ونظريات متعلقة بها.

اعتمدنا في بحثنا على ببلوغرافيا تحتوي على مجموعة من الكتب العربية لتسخيرها في بحثنا [1], [2] [3], [4]. كانت التساؤلات تتوالد باستمرار، وكنا نحاول جاهدين الإجابة عنها.

نبذة تاريخية لبعض علماء الرياضيات المذكورين في المذكرة

ألفريد نورث وايتهيد (1861-1947)

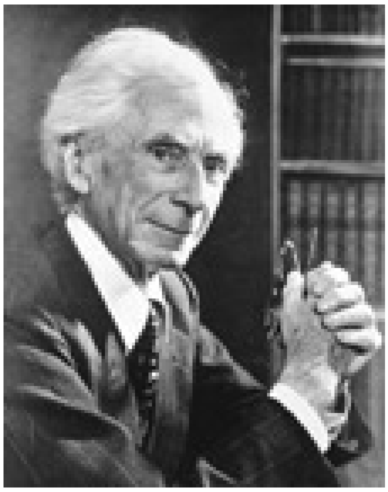
ولد في إنجلترا في 15 فبراير 1861، كان عالم رياضيات وفيلسوفًا إنجليزيًا. درس الرياضيات والتاريخ في جزيرة ثانت بكنت وفي رامسغيت. بدأ حياته الأكاديمية في كلية ترينيتي بجامعة كامبريدج بين عامي 1880 و1884، حيث برع في الرياضيات البحتة والتطبيقية، وتم تعيينه محاضرًا في الجامعة نفسها بين عامي 1885 و1910. انتقل إلى لندن لتدريس الرياضيات التطبيقية في الفترة من 1910 إلى 1914، ثم أصبح أستاذًا في الكلية الإمبراطورية للعلوم والتكنولوجيا حتى عام 1924. توفي في 30 ديسمبر 1947، وقد تم تكريمه بزمالة الجمعية الملكية ونوط الاستحقاق، كما شارك في تأليف "مبادئ الرياضيات الحديثة" مع برتراند راسل، بالإضافة إلى وضع الأطروحة الميتافيزيقية العملية والواقعية.

فريدريك لودفيج فريغه

ولد في باد كلينن بألمانيا، وهو عالم رياضيات ومنطقي وفيلسوف ألماني، يُعد واحدًا من أبرز علماء الرياضيات والفلسفة التحليلية في العصر الحديث. لعمله تأثير كبير في تأسيس فلسفة القرن العشرين، وخاصة في مجالات الدلاليات.

غوتلوب فريج يُعتبر أحد أعظم المنطقيين بعد أرسطو وأوكام وليبنتز. قام بإنشاء المنطق الحديث، وخاصة الجبر القضوي الحديث وحساب المحولات. ابتكر أيضًا لغة اصطناعية باستخدام الرموز المنطقية، التي ألهمت جميع المنطقيين لاحقًا. قام بتصوير المنطق بشكل رمزي، مما جعله حسابًا صوريًا دقيقًا، استنادًا إلى كتابه "أسس علم الحساب"، حيث حاول استنتاج علم الحساب من المنطق.

برتراند أرثر ويليام راسل



فيلسوف وعالم منطق ورياضي ومؤرخ وناقد اجتماعي بريطاني، وُلد في 18 مايو 1872 في رايفنسكروفت، تريليش. يُعتبر أحد مؤسسي الفلسفة التحليلية، وعمل مع ألفريد نورث وايتهيد على "مبادئ الرياضيات" و "Principia Mathematica"، وهو كتاب بارز في مجال الرياضيات والفلسفة. كان مدرسًا لودفيش فيتغنشتاين، وفاز بجائزة نوبل للأدب عام 1950. توفي في 2 فبراير 1970.

دافيد هيلبرت

أحد أكبر رواد الرياضيات في القرن العشرين هو العالم الألماني الذي وُلد في 23 يناير 1862 في بروسيا الشرقية. قدم هيلبرت مؤتمر الرياضيات الدولي في باريس عام 1900 قائمة بثلاثة وعشرين مسألة رياضية مستعصية، وأشار هيلبرت إلى أن حل هذه المسائل سيشكل مستقبل الرياضيات خلال القرن العشرين، حيث اختار مسائل ترتبط بفروع متعددة في الرياضيات، مما يُفتح المجال لظهور نظريات ونتائج جديدة.

في عام 1897، حدد هيلبرت معالم نظرية الأعداد الجبرية في عمله الذي حمل عنوان "تقرير حول الأعداد". كما نجح في حل مسألة هامة وُضعت من قبل العالم إدوارد فيرينغ عام 1770، والتي أصبحت معروفة باسم "مسألة فيرينغ".

توفي هيلبرت في 14 فبراير 1943 في مدينة غوتنغن الألمانية، تاركًا وراءه إرثًا كبيرًا في عالم الرياضيات.

باب 1

المنطق الجملي

1.1 مقدمة

اخترنا ان نفتتح مذكرتنا بتذكير حول أهم التعاريف والمفاهيم الأساسية التي سنستعين بها في الفصلين الثاني والثالث. في عالم المنطق الرياضي، يشكل فصل المنطق الجملي أساسًا أساسيًا لفهم وتحليل العلاقات اللفظية والدلالية بين العبارات والجمل. إن فهم هذا الفصل يعني الاستيعاب العميق لكيفية تكوين الجمل المنطقية وكيفية تحليلها وتحديد صحتها أو خطأها. يمثل فهم الجمل المنطقية في سياق المنطق الرياضي الأساس لفهم الأدوات اللغوية والتقنيات اللازمة للتفكير الرياضي الدقيق والتحليل الدقيق للمسائل والمشكلات. في هذاالفصل سنتناول أهم مفاهيم المنطق الجملي و نبين أهميته في مجال المنطق الرياضي، ومساهمته في تطوير المهارات الحسابية والتفكير النقدي في مجال الرياضيات.

2.1 مفاهيم اساسية

1.2.1 المنطق الرياضي

تعريف 1

هو كتابة العبارات الرياضية بصورة رمزية و يرتكز على مبادئ وقواعد واضحة متفق عليها عالميا ، وله رموز وأدوات خاصة به لربط الجمل معا ، تساعد في معالجة النصوص الرياضية وفق قواعد معينة للوصول إلى نتائج انطلاقا من معطيات ما لتعطى معان محددة تماما لا تقبل اللبس أو الغموض وهذا يدفع إلى القول بأن المنطق الرياضى لغة علمية متفق عليها بين الرياضيين ولا غنى عنها فى الرياضيات أو فى فروع العلوم المختلفة .

2.2.1 القضية او العبارة

تعريف 2

القضية هي جملة خبرية يمكن الحكم عليها بأنها صحيحة أوخاطئة ولكن لا يمكن أن تكون صحيحةً أو خاطئة في نفس الوقت.اي أنه يمكننا القول أن هذه الجملة الخبرية تكون قضية إذا تعلقت بالنتائج الصحيحة أو الخاطئة .

مثال 1

1) القدس عاصمة فلسطين (قضية صحيحة).
2) $exp(0) = 0$ (قضية خاطئة).

تعريف 3

القضية التي تحمل خبرا واحدا تسمى قضية بسيطة،إما القضية التي تحمل أكثر من خبرا قضية مركبة,أي أن هذه الاخيرة تتكون من قضيتين بسيطتين أو أكثر و يربط بين كل منها إ حدى أدوات الربط و نرمز للقضايا البسيطة بالحروف الصغيرة $p, q, r....$ والقضية المركبة التي تكون من هذه القضايا البسيطة تسمى افتراض $Proposition$ وسوف نستخدم الحروف الكبيرة A, B, C للدلالة على القضايا المركبة. وعند تكوين قضية مركبة فإنه لايهم وجود أي نوع من العلاقة سواء في المعنى أو المحتوى بين القضايا البسيطة التي تدخل في تكوينها .

مثال 2

القضية
"الشمس ساطعة" أو "$3 + 5 = 8$" تمثل قضية مركبة وهي تتكون من قضيتين بسيطين هما :
q: $3 + 5 = 8$
p: الشمس ساطعة
وكما نلاحظ فإنه لايوجد أي نوع من العلاقة سواء في المعنى أو المحتوى بين القضيتين .

3.2.1 جدول الحقيقة

1) **مفهوم جدول الحقيقة**

هو ذلك الجدول الذي يصف الدستور المعين لأجل عملية منطقية، أي من أجل كل توفيق من القيم الحقيقية للقضايا البسيطة التي تتألف منها العبارة المدروسة و المشكلة بواسطة العملية ، فإن جدول الحقيقة يعطي قيمة الحقيقة للعبارة المذكورة ، حيث إذا كانت القضية المراد إنشاء جدول الحقيقة لها بها n قضية أولية فإن جدول الحقيقة يتكون من 2^n ويتعامل جدول الحقيقة بالرمزين (1) للقضية الصحيحة و (0) للقضية الخاطئة .

تعريف 4

لتكن p قضية ما من P ، نسمي الجدول التالي جدول الحقيقة للقضية p :

p
1
0

نلاحظ أنه مؤلف من عمود وسطران ، وعدد الامكانات لقيم الحقيقة لقضية ما p تساوي 2.

ونعرف بصورة مشابهة جدول الحقيقة لقضيتين ما p و q من P كالتالي :

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

نلاحظ أن هذا الاخير يتألف من عمودان وأربعة أسطر، وعدد الامكانات لقيم الحقيقة لقضيتين يساوي $4 = 2^2$.

كما نعرف أيضا جدول الحقيقة لثلاث قضايا p, q, r بأنه الجدول الذي يتألف من ثلاثة أعمدة وثمانية أسطر ، ليأخذ الشكل الموالي :

p	q	r
0	1	1
1	0	1
0	1	0
1	0	0
0	1	1
1	0	1
0	1	0
1	0	0

وعدد الإمكانات لقيم الحقيقة لثلاث قضايا يساوي $2^3 = 8$.
وبصفة أعم، إذا كانت لدينا n قضية بحيث $(n \geq 1)$ فإنه توجد 2^n إمكانًا لقيم الحقيقة لها، وبالتالي فجدول الحقيقة لهذه القضايا يتألف من n عمود و 2^n سطر .

3.1 حساب القضايا

1.3.1 أدوات الربط

في المنطق الرياضي تنقسم الروابط إلى قسمين :

1) **الروابط الاحادية**

- **النفي المنطقي :** هو رابط آحادي , و نرمز لنفي قضية p ب $\neg p$ و التي تعني كلمة النفي " لا " التي تستخدم لنفى القضية البسيطة ينظر اليها أيضا كأداة ربط بالرغم من أنها لا تربط بين قضيتين بسيطتين وإنما تنفى قضية بسيطة، ويمكن نفى القضية p بعدة صور كالآتي :
  - لا p
  - ليس p
  - ليس صحيحا أن p
  - من الخطأ القول أن p

  و التي تكون صحيحة اذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة اذا كانت p صحيحة . و نلخص ذلك في جدول الحقيقة التالي :

p	$\neg p$
1	0
0	1

2) **الروابط الثنائية :**

أدوات الربط بين القضايا البسيطة تسمى بالعمليات المنطقية وهي :
أداة الوصل او العطف " و " و نرمز لها ب $\wedge$
أداة الفصل او التخيير " أو " نرمز لها بالرمز $\vee$
أداة الربط الشرطية (الاستلزام) " إذا كان ... فأن ..." يرمز اليه ب $\Longrightarrow$
أداة الربط الشرطية المزدوجة (التكافؤ) "... إذا وفقط إذا كان..." و نرمز له بالرمز $\Longleftrightarrow$

- **الوصل:**

عند ربط قضيتين بسيطتين باستخدام أداة الوصل " و " فإن التقرير المركب الناتج يسمى وصلة فمثلا القضية : "اليوم هو الأحد وغدا يوم الأربعاء" هي من نوع الوصل لان أداة الربط المستخدمة هي أداة الوصل " و " ويجب أن نتذكر دائما أننا لا نبحث في معنى القضية ولكننا نبحث وتركز اهتمامنا على نوع القضية ، أي على نوع أداة الربط المستخدمة , حيث اذا كانت p و q قضيتين ما من P, فإن $p \wedge q$ هي قضية مركبة و تقرأ p و q و هي ناتجة عن تأثير العملية المنطقية $\wedge$ في القضيتين p و q, اي ناتجة عن ربط القضية p بالقضية q بواسطة هذه الأداة و نحصل على جدول الحقيقة لهذه القضية الجديدة بالأستعانة بجداول الحقيقة للقضيتين p و q

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

- **الفصل :**

عند ربط قضيتين بسيطتين باستخدام أداة الفصل "او "فإن القضية المركبة الناتجة تسمى فصلا . فمثلا القضايا :

السماء تمطر أو الشمس مشرقة
إما السماء تمطر أو الشمس مشرقة
احمد يدرس الرياضيات أو التاريخ

عبد الله طالب بكلية الطب أو كلية الصيدلة
إما عبد الله طالب بكلية الطب أو كلية الصيدلة
كل من هذه القضايا من نوع الفاصلة لأن أداة الربط المستخدمة هي أداة الفصل "أو "
لتكن p و q قضيتين من P إن $p \vee q$ هي قضية جديدة و تقرأ p و q حيث هي قضية ناتجة عن تأثير العملية المنطقية $\vee$ في القضيتين p و q اي ناتجة عن ربط القضية p بالقضية q بواسطة الاداة $\vee$ و نحصل على جدول الحقيقة لهذه القضية الجديدة $p \vee q$ بالاستعانة بجداول الحقيقة للقضيتين p و q على النحو التالي :

p	q	$p \vee q$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

- **الاستلزام :**

القضية المركبة الناتجة من ربط قضيتين بسيطتين باستخدام أداة الربط "إذا كان ...فإن ... " يسمى استلزام وجزء القضية المحصور بين " إذا كان ... فإن ..." يسمى المقدمة بينما جزء القضية الذي يتبع " فإن " يسمى النتيجة فمثلا القضية :
" إذا كان الجو بارد فإن السماء تمطر " من نوع الاستلزام و جزء المقدمة هو " الجو بارد " وجزء النتيجة هو "السماء تمطر"
اذا كانت p و q قضيتين ، فإن $p \Longrightarrow q$ هي قضية جديدة وتقرأ "إذا p فإن q " وهي قضية نابعة من تأثير العملية المنطقية $\Longrightarrow$ في القضيتين p و q
و نجد قيم الحقيقة للقضية الجديدة $p \Longrightarrow q$ بالاستفادة كما سبق من جدول الحقيقة للقضيتين p و q كما يلي:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ونلاحظ أنه تكون القضية $p \Longrightarrow q$ "خاطئة" في حالة وحيدة، وهي لما تكون القضية p "صحيحة" والقضية q "خاطئة".

ملاحظة :
يدل عموما الرمز $\Rightarrow$ على القضية الشرطية :
"إذا ... فإن" مثلا ، عند التعبير على الجملة التالية: إذا تحصل الطالب على معدل يفوق العشرة ولم تكون له علامة إقصائية ، ينتقل إلى السنة الموالية".
نكتب : $A \wedge B \Rightarrow C$
لكن الاستلزام المنطقي يختلف عن الاستلزام اللغوي الذي يحتوي دوما على علاقة سببية بين عبارة معطاة (الفرضية) نتيجة (التال) إذ أن الاستلزام المنطقي في حد ذاته قضية منطقية لا تهتم أصلا بوجود أي علاقة بين المقدم و التالي ولا تخضع إلا لتعريف هذا الرمز . لنعالج الأمثلة التالية :

- (5 جويلية عيد الاستقلال الجزائري) $\Rightarrow$ $(7 \neq 5)$
- (5 جويلية عيد الاستقلال الجزائري) $\Rightarrow$ $(7 \geq 5)$
- (بسكرة عاصمة الجزائر) $\Rightarrow$ $(7 \geq 5)$

تعتبر القضايا أ، ب، وجـ كلها صحيحة منطقيا ولكنها غير سليمة لغويا إذ أن العلاقة السببية بين المقدم والتالي معدومة.

- **التكافؤ :**

القضية المركبة الناتجة من ربط قضيتين بسيطتين باستخدام أداة الربط "... إذا وفقط إذا كان..." تسمى تكافؤ .

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

والآن وبعد أن تعرفنا على أنواع القضايا وأدوات الربط فإنه لأى قضية معطاة ينبغي علينا أن نكون قادرين على تحديد ما إذا كانت القضية بسيطة أو مركبة ، وفى حالة إذا كانت القضية مركبة نتعرف على نوعه فيما إذا كان نفى - وصل - فصل - استلزام - تكافؤ.

2.3.1 قواعد الأسبقية

إن كثرة استخدام الأقواس تؤدي في بعض الأحيان إلى ثقل في كتابة الجمل المنطقية وتجعلها مملة؛ لذا فإن حذف البعض منها يساعد في توضيحها إذا ما احترمت قواعد الأولوية و الأسبقية ونعني بذلك التسلسل في الأهمية عند كتابة الرموز المنطقية وهي كما يلي :

1. $(\neg)$
2. $(\wedge)$ و $(\vee)$
3. $(\Rightarrow)$
4. $(\Leftrightarrow)$

4.1 قيم الصحة :

لتكن القضية A حيث
$$A = A(p_1, p_2, ..., p_n)$$
مركبة من n قضية أولية $(A_1, A_2..., A_n)$ لنرمز بـ $E = (0, 1)$: لمجموعة قيم الصحة التي يمكن أن تأخذها كل قضية بسيطة p_i و ذلك من أجل كل $i \in [1, n]$ ؛ لنضع $\varepsilon_i = \vee(p_i)$: حيث $\varepsilon_i \in E$ ، $i \in [1, n]$ و $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n)$

إن قيمة صحة القضية A مرتبطة باختيار القيم ε_i في المجموعة E. بفضل عملية بسيطة، نلاحظ أنه توجد 2^n طريقة مختلفة لإسناد القيم ε_i للقضايا p_i إذ أن هذا العدد يعبر على $cardE^n$.

قصد تفسير الجمل المركبة من خلالها الكلمات المكونة لها، تطرح في المنطق الرياضي مسألة معرفة القيمة $v(A)$ بدلالة القيم ε_i .

إن الإجابة على هذا السؤال صعبة على العموم؛ رغم هذا سنحاول عرض بعض النتائج العامة، ومن أجل ذلك نشرع في إعطاء بعض التعاريف.

مثال 3

لتكن القضية المركبة A المعرفة ب : $A = [p \wedge (\bar{q} \Rightarrow p)] \vee q$ المطلوب معرفة قيمة صحة هذه القضية .

انشاء جدول الحقيقة :

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge (\bar{q} \Rightarrow p)$	$p \wedge (\bar{q} \Rightarrow p)$	A
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0

تعاريف :

تعريف 1

نسمي تفسيرا للقضية A كل اختيار للقيم ε_i ونكتب :

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_n)$$

تعريف 2

نقول أن التفسير ε ، يؤكد القضية Aإذا كان $v_\varepsilon(A) = 1$ وأن التفسير يبطل القضية A إذا حقق $v_\varepsilon(A) = 0$.

ملاحظة :

انشاء جدول الحقيقة للقضية A مرفق بالقيم ε_i للقضايا p_i لا بد منه لمعرفة قيمة صحة القضية A.

1.4.1 القضية البينة :

تعريف 3

القضية البينية أو ما نعبر عنه عادة تحصيل حاصل تسمى هكذا اذا كانت قضية صحيحة دومًا لأجل كل تفسير لها. نرمز للقضية البينة بالرمز 1 أو T .

مثال 4

القضية

$$(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow (p \vee q)$$

هي قضية بينة , و بالفعل لدينا جدول الحقيقة لهذه القضية مبين كالتالي :

p	q	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$p \vee q$	$(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow (p \vee q)$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1

2.4.1 بعض القضايا البينة الشهيرة

فيما يلي نعرض بعض القضايا الجازمة الشهيرة مع أن القائمة تبقى مفتوحة.

- $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- (قانون كلافيس): $(p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$
- $p \Rightarrow (q \vee p)$
- $\overline{q} \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow (p \Rightarrow q))$
- $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
- (قانون بيرس): $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
- $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$
- $(p \vee q) \wedge \overline{p} \Rightarrow q$
- $(p \Rightarrow q \wedge \overline{q})$
- $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
- (قانون فريج): $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

3.4.1 القضية المتناقضة

تعريف 4

قضية A هي قضية متناقضة اذا كانت قضية خاطئة (كاذبة) من اجل كل تفسير لها . نرمز للقضية المتناقضة بـ 0 .

مثال 5

القضية

$$(p \wedge q) \wedge \overline{q}$$

قضية متناقضة و بالفعل لدينا جدول الحقيقة لهذه القضية مبين كآلي :

p	q	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge \overline{q}$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

4.4.1 القضية القابلة للتحقيق

نسمى قضية ما قابلة للتحقيق إذا كانت صحيحة (صادقة) من أجل بعض التفسيرات و خاطئة (كاذبة) من اجل بعض التفسيرات الأخرى .

مثال 6

$(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$	$p \vee q$	$p \wedge q$	q	p
1	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	0	0	0	0

5.1 مفهوم التثنية

تعريف 1

لتكن القضية A المركبة من n قضية اولية اي :

$$A = A(P_1, P_2, \dots, P_n)_{1\le i\le n}$$

ثنوية A هي القضية الناتجة عن نفي القضية العكسية لـ A و التي نرمز لها بـ $R(A)$ حيث :

$$R(A) = A(\overline{P_1}, \overline{P_2}, \dots, \overline{P_n})_{1\le i\le n}$$

اي انه

$$A^* = \overline{R(A)} = \overline{A}(\overline{P_1, P_2}, \dots, \overline{P_n})_{1\le i\le n}$$

1.5.1 خواص القضية الثنوية :

لتكن A و B قضيتين كيفيتين عندئذ لدينا :

1. A قضية اولية فإن $A = A^*$
2. $A = (A^*)^*$
3. $A \Leftrightarrow B \equiv R(A) \Leftrightarrow R(B) \equiv A^* \Leftrightarrow B^*$

2.5.1 ثنوية رابط منطقي

R^* هي ثنوية الرابط الثنائي R و نعرفه ب :

1. في حالة قضيتين أوليتين يكون كالتالي :

$$pR^*q = (pRq)^*$$

2. في حالة قضيتين مركبتين يكون كما يلي :

$$AR^*B = \overline{\overline{A}R\overline{B}}$$

3.5.1 امثلة توضيحية

1. ثنوية الوصل :

$$P \wedge^* Q = \overline{\overline{P} \wedge \overline{Q}} = P \vee Q$$

2. ثنوية رابط الفصل:

$$P \vee^* Q = \overline{\overline{P} \vee \overline{Q}} = P \wedge Q$$

3. ثنوية رابط الإستلزام :

$$P \Longrightarrow^* Q = \overline{\overline{P} \Longrightarrow \overline{Q}} = P \overline{\Longrightarrow} Q$$

4. ثنوية رابط التكافؤ

$$P \Longleftrightarrow^* Q = \overline{\overline{P} \Longleftrightarrow \overline{Q}} = P \overline{\Longleftrightarrow} Q$$

4.5.1 خواص ثنوية رابط ثنائي

نظرية 1

ليكن

R رابط ثنائي .

1. تكون ثنوية الرابط R وحيدة .
2. $(R^*)^* = R$
3. A و B قضيتين مركبتين و منه :

$$(ARB)^* = A^* R^* B^*$$

البرهان :

1. نفرض وجود C_1 و C_2 رابطتين ثنويتين ل R

$$(pRq)^* = pC_1q = pC_2q \Rightarrow C_1 = C_2$$

اذن ثنوية الرابط R وحيدة

2.

$$p(R^*)^* q = \overline{\overline{p} R^* \overline{q}} = \overline{\overline{pRq}} = pRq$$
$$\Longrightarrow (R^*)^* = R$$

مثلا :

$$P(\wedge^*)^* Q = \overline{\overline{P} \wedge^* \overline{Q}} = P \overline{\vee} Q = P \wedge Q$$
$$\Longrightarrow (\wedge^*) = \wedge$$

3.

$$(ARB)^* = \overline{A(\overline{p}_1, ..., \overline{p_n}) R B(\overline{p_1}, ..., \overline{p_n})}$$
$$= \overline{\overline{A^*} R \overline{B^*}} = A^* R^* B^*$$

5.5.1 مبدأ التثنية

لتكن $A = A(p_1, p_2, ..., p_n)$ قضية مركبة و A' القضية المحصل عليها بالتعويض في عبارة A كل رابط بـ ثنويته عندئذ

$$A^* = A'$$

الاثبات :

لنكتب القضية على الشكل الاعتيادي الانفصالي

$$A = \vee_{i \in I} (\wedge_{j \in J} p_{ij})$$

عندئذ

$$A^* = \overline{\vee_{i \in I} (\wedge_{j \in J} \overline{p}_{ij})}$$

ومنه بفضل قانون دي مورغان

$$A^* = \vee_{i \in I} (\wedge_{j \in J} p_{ij})$$

يعني

$$A^* = A'$$

مثال 7

اذا كانت

$$A = (p \lor \overline{q}) \land (\overline{p} \land q) \lor q$$

فأن

$$A^* = (p \land \overline{q}) \lor (\overline{p} \lor q) \land q$$

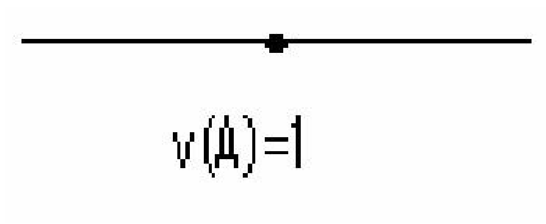
6.1 الدوائر الكهربائية :

1.6.1 تمهيد :

في ختام الفصل الأول نود تقديم طريقة عملية للحساب الجملي نستطيع من خلالها تعيين قيمة صحة قضية مركبة بدون أن نلجأ إلى جداول صحتها حيث تعتمد فكرة هذه الطريقة إلى انجاز دوائر كهربائية بحيث نمثل كل قضية أولية بمفتاح كهربائي أو مقلاد كهربائي

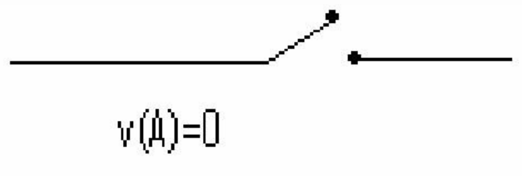
يعبر المفتاح المفتوح (عدم مرور التيار الكهربائي) على قضية كاذبة, عند مرور التيار الكهربائي على قضية صادقة . ومن التطبيقات الخاصة بالمنطق الرياضي استخدامه في تصميم شبكات المفاتيح الكهربائية، وهي عبارة عن دوائر كهربائية مثل تلك الموجودة في مفاتيح الإضاءة. هذه الدوائر عبارة عن ترتيبات للأسلاك والمفاتيح الكهربائية. كما نعلم جميعاً، تستخدم المفاتيح الكهربائية لتوصيل أو فصل الكهرباء في الدائرة الكهربائية وتكون بأحد الوضعين:

الوضع الأول: المفتاح الكهربائي قيد التشغيل أي أن التيار يمر عبر الدائرة.



شكل 1.1

الوضع الثاني: المفتاح الكهربائي في وضع "إيقاف التشغيل"، مما يعني عدم مرور تيار عبر الدائرة.

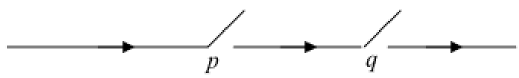


شكل 2.1

و تعتبر طريقة المفاتيح الكهربائية افضل من طريقة جداول الحقيقة التي تكون في بعض الاحيان صعبة و طويلة و ذلك حسب القضية , حيث نمثل القضايا المركبة في دائرة كهربائية على شكل مفتاح (قاطعة) حيث ان الوضع الاول يدل على مرور التيار الكهربائي أي أن القضية صائبة و نرمز لها بالرمز $V(A) = 1$ اما بالنسبة للقضية الخاطئة التي تمثل بالوضع الثاني فنرمز لها ب $V(A) = 0$

2.6.1 تحقيق الروابط العادية :

1) **الطريقة الاولى بالربط على التسلسل :**

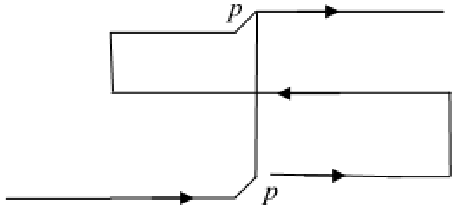


شكل 3.1

نلاحظ أن توصيل المفتاحين p و q على التسلسل يشبه الوصل $p \wedge q$ وكما نعلم فإن الوصل $p \wedge q$ تكون صحيحة فقط عندما يكون كل من p و q صحيحة وخلاف ذلك تكون خاطئة وبالمثل عند توصيل المفتاحين p و q على التسلسل فإن التيار الكهربي يمر بالدائرة فقط إذا كان كل من المفتاحين p و q في حالة تشغيل ON وخلاف ذلك لا يمر التيار الكهربي بالدائرة .

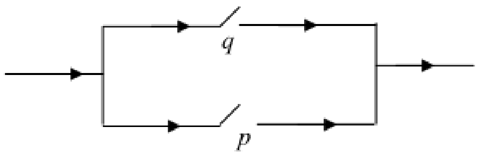
(**حالة خاصة**)

تسمى القضية $p \wedge \overline{p}$ بالقضية المتناقضة و يكون تمثيلها كالاتي :



شكل 4.1

2) الطريقة الثانية بالربط على التفرع :

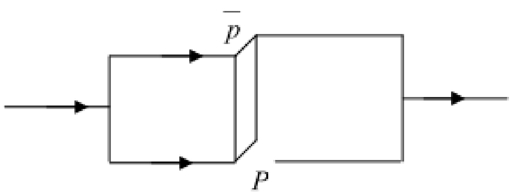


شكل 5.1

نلاحظ أن توصيل المفتاحين p و q على التفرع يشبه الفصل $p \vee q$ وكما نعلم فإن الفصل $p \vee q$ تكون صحيحة فقط عندما تكون على الاقل p او q صحيحة وخلاف ذلك تكون خاطئة وبالمثل عند توصيل المفتاحين p و q على التفرع فإن التيار الكهربي يمر بالدائرة فقط إذا كان احد المفتاحين p او q في حالة تشغيل ON وخلاف ذلك لا يمر التيار الكهربي بالدائرة .

(حالة خاصة)

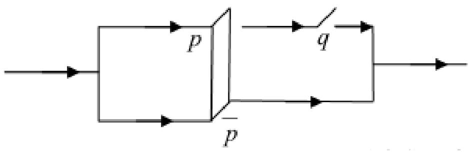
$p \vee \overline{p}$ يكون تمثيلها نفس تمثيل $\overline{p}$ و يكون كالاتي :



شكل 6.1

3) تحقيق رابط الاستلزام :

يكون كالاتي :



شكل 7.1

باب 2

المكممات

1.2 المنطق ذو الرتبة الاولى

مدخل:

تطرقنا في الفصل الأول إلى كيفية معالجة الحساب الجملي للقضايا المنطقية بصفة أقل ما نقول عنها إجمالية إذ أنها لا تهتم بالبنية الجوهرية لتلك القضايا، المثالان التاليان يبينان بوضوح عجز الحساب الجملي على تحليل بعض القضايا المنطقية :

2.2 المكممات

1.2.2 تعاريف

لتكن X مجموعة كيفية غير خالية و لتكن p مجموعة من القضايا المنطقية .
نسمي محمول كل تطبيق

$$\begin{aligned} P : X &\rightarrow p \\ x &\rightarrow P(x) \end{aligned}$$

تعريف 1

إذا كانت القضية $P(x)$ صادقة من أجل كل عنصر x ، نكتب $\forall x \in X P(x)$

المكمم يسمح لنا بتحديد مجال فعالية القضية او العبارة المنطقية . الرمز $\forall$ الذي يعني "مهما يكن " او "من اجل كل " يسمى المكمم الكلي . و هو الحرف "A" مقلوب حيث يمثل بداية الكلمة الانجليزية "ALL" و يكون دائما متبوع برمز الانتماء $\in$

مثال 1

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

تعريف 2

إذا وجد على الأقل عنصر x من X بحيث $p(x)$ تكون صادقة ، نكتب $\exists x \in X P(x)$

ونسمي الرمز الرمز $\exists$ يعني "يوجد على الاقل ... حيث " حيث يعبر عن ما يسمى بالمكمم الوجودي و اصل هذه التسمية هي حرف E مقلوب الذي يمثل بداية الكلمة الانجليزية "$Exist$". كما نسطيع اضافة علامة التعجب ! من اجل تبين الوحدانية كالاتي : $\exists!$ و التي تعني : "يوجد عنصر وحيد ... حيث "

مثال 2

$$(\exists! x \in [0,1], x^2 + 4x + 1 = 0)$$

تعريف 3

1. نفي القضية
$$\exists x \in E P(x)$$
هي القضية
$$\forall x \in E, \neg P(x)$$
2. نفي القضية
$$\forall x \in E, P(x)$$
هي القضية
$$\exists x \in E \neg P(x)$$

3.2 المحاميل

تعريف 1

لتكن X مجموعة. نسمي محمولا على X كل قضية p لمتغير واحد او اكثر من X.

1.3.2 امثلة لمحاميل لمتغير واحد او اكثر

1. لتكن المجموعة X " الفضاء الكلي للأشخاص" و P خاصية الموت. تعبر عندئذ القضية $\forall x \in X P(x)$ عن كون كل إنسان فان، وهي قضية صادقة.

2. باعتبار على نفس المجموعة X الخاصية ذي متغيرين المعرفة بـ $Q(x,y)$ "x تحب y" تدل العبارة $\exists x \exists y Q(x,y)$ على وجود على الأقل شخصين متحابين في هذا الكون،وهي قضية صادقة.

3. لنضع $X=\mathbb{R}^2$ و $R(x)$ علاقة الترتيب $x \geq y$. من الواضح أن القضية $\exists x \forall y R(x,y)$ قضية كاذبة

4. X مجموعة المثلثات .

P خاصية تساوي الساقين.

عندئذ $\forall X P(x)$ قضية كاذبة، في حين القضية $\exists X P(x)$ صادقة.

2.3.2 عمليات حول المحاميل

لتكن X مجموعة غير خالية و Q و P محمولين معرفين على X.

تعريف 2

نسمي نفي المحمول P المحمول $\overline{P}$ المعرف كما يلي :

$$\forall x \in X, \overline{P}(x) = \overline{P(x)}$$

تعريف 3

من أجل كل $x \in X$ نعرف المحاميل التالية :

$$(P \vee Q)(x) = P(x) \vee Q(x)$$
$$(P \wedge Q)(x) = P(x) \wedge Q(x)$$
$$(P \Rightarrow Q)(x) = P(x) \Rightarrow Q(x)$$
$$(P \Rightarrow Q)(x) = P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

4.2 المتغير الحر و المقيد

في العبارة $\forall x A(x)$ يسمي المتغير x بمتغير مكمم بالمكمم $(\forall)$ اما المكان الذي يشغله x في هذه العبارة نسميه ' تواجد x '

تعريف 1

اذا كان تواجد المتغير x في العبارة A مرتبط بالمكمم $\forall$ او $\exists$ فإننا نقول عن x أنه متغير مقيد . غير ذلك فهو متغير حر .

مثال 3

.1

$$\forall x\left((\exists y Q(x,y)) \wedge P(x,y,z)\right)$$

التواجد الاول ل x مقيد بالمكمم الكلي $(\forall)$ ، كذلك التواجد الثاني له مقيد بنفس المكمم لوجود الاقواس ، اما تواجد y الاول فهو مقيد بالمكمم $\exists$ و تواجده الثاني حر .

تواجد z حر لعدم ارتباطه بأي مكمم .

.2

$$\exists y Q(y) \vee \forall x P(x,y)$$

يتواجد y كمتغير حر و مقيد في حين يتواجد x كمتغير مقيد.

ملاحظة :

لتكن $P(x,y,z)$ عبارة منطقية ، عندئذ يمكن تعويض العبارة P بعبارة اخرى مكافئة P' لا تحوي متغير له تواجد حر و مقيد في أن واحد .

مثال 4

$$F\left(x,y,z\right)=\exists x\left[P\left(x,y\right)\wedge Q\left(x,y,z\right)\right]\Rightarrow\forall x\forall y\left[\overline{R}\left(x,y,z\right)\right]$$

تواجد x مقيد، تواجد z حر أما تواجد المتغير y فهو حر ومقيد في آن واحد. لذا نكتب العبارة F على الشكل المكافئ التالي:

$$F'\left(x,y\mid t,z\right)=\exists x\left[P\left(x,y\right)\wedge Q\left(x,y,z\right)\right]\Rightarrow\forall x\ \forall t\left[\overline{R}(x,t,z)\right].$$

5.2 خصائص المكممين

1.5.2 خواص المكمم الكلي

1) المكمم الكلي تبديلي

$$\forall x\forall yP(x,y)\equiv\forall y\forall xP(x,y)$$

2) المكمم الكلي توزيعي على الوصل

$$\forall x(P(x)\wedge Q(x))\equiv\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$$

القضايا التالية بينة

3) $(\forall xP(x)\vee\forall xQ(x))\Rightarrow\forall x(P(x)\vee Q(x))$

4) $\forall x(P(x)\Rightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall xP(x)\Rightarrow\forall xQ(x))$

5) $\forall x(P(x)\Leftrightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall xP(x)\Leftrightarrow\forall xQ(x))$

ملاحظة :
لإثبات أن قضية كلية ليست صحيحة، يكفي ببساطة العثور على قيمة واحدة فقط لـ x التي لا تتفق مع العبارة P . هذا ما يُعرف بـ " البرهان باستعمال مثال مضاد ".

مثال 5

لتكن القضية 'جميع قراء هذا الفصل يفهمون كل ما هو مكتوب.' نفيه سيكون: 'يوجد على الأقل قارئ واحد لا يفهم هذا الفصل.'

2.5.2 خواص المكمم الوجودي

1) المكمم الوجودي تبديلي

$$\exists x \exists y P(x,y) = \exists y \exists x P(x,y)$$

2) المكمم الوجودي توزيعي على الفصل

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

القضيتان التاليتان بينيتان

3)
$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow [(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))]$$
$$[\exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)] \Rightarrow [\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x))]$$

3.5.2 الاستخدام المزدوج للمكممين

القضايا التالية بينة

1)
- $\forall x P(x) \Rightarrow P(y)$
- $P(y) \Rightarrow \exists x P(x)$
- $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$

2)
- $\overline{\forall x P(x)} \Leftrightarrow \exists x \overline{P(x)}$
- $\overline{\exists x P(x)} \Leftrightarrow \forall x \overline{P(x)}$

3) $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$

4) $Qx(P_1(x) R P_2(y)) \Leftrightarrow Qx P_1(x) R P_2(y)$

حيث يرمز Q الى احدى المكممين و R الى احد الروابط المنطقية و حيث y متغير حر

5)
$$Q_1 x Q_2 y\left[P_1(x) R P_2(y)\right] \Leftrightarrow Q_1 x P_1(x) R Q_2 y P_2(y)$$
$$\Leftrightarrow Q_2 y Q_1 x\left[P_1(x) R P_2(y)\right]$$

حيث يرمز كل من Q_1 , Q_2 الى احدى المكممين و R الى الوصل او الفصل المنطقي و حيث y, x على التوالي متغير حر بالنسبة الى احد المحمولين P_2, P_1

4.5.2 اثبات الخصائص

لنعتبر المجموعتين $X=\{x_i, i \in I\}$ و $Y=\{y_j, j \in I\}$. المحاميل ذات المتغير الواحد تكون معرفة على X و المحاميل ذات متغيرين تكون معرفة على المجموعة $X \times Y$.

الخواص

1) الوصل تبديلي

$$\begin{aligned}
\forall x \forall y P(x, y) &= \forall x\left[\forall y P(x, y)\right] \\
&\equiv \forall x\left[\wedge P\left(x, y_j\right)\right] \\
&= \wedge\left[\wedge P\left(x_i, y_j\right)\right] \\
&= \forall x \forall y P(x, y)
\end{aligned}$$

2) الوصل تبديلي و توزيعي

$$\begin{aligned}
\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) &= \underset{i}{\wedge}\left(P\left(x_i\right) \wedge Q\left(x_i\right)\right) \\
&= \left[\underset{i}{\wedge} P\left(x_i\right)\right] \wedge\left[\underset{i}{\wedge} Q\left(x_i\right)\right] \\
&= \forall x P\left(x_i\right) \wedge \forall x Q\left(x_i\right)
\end{aligned}$$

3)

$$(\forall x P(x)) \vee(\forall x Q(x)) \equiv\left(\underset{i}{\wedge} P\left(x_i\right)\right) \vee\left(\underset{i}{\wedge} Q\left(x_i\right)\right)$$

و لما كانت القضيتان

$$P\left(x_i\right) \Rightarrow P\left(x_i\right) \vee Q\left(x_i\right)$$

$$Q\left(x_i\right) \Rightarrow P\left(x_i\right) \vee Q\left(x_i\right)$$

قضيتين بينيتين ،فكذلك تكون القضيتان :

$$\underset{i}{\wedge} P(x_i) \Rightarrow \underset{i}{\wedge} [P(x_i) \vee Q(x_i)]$$
$$\underset{i}{\wedge} Q(x_i) \Rightarrow \underset{i}{\wedge} [P(x_i) \vee Q(x_i)]$$

نستنتج بأخد فصل الطرفين ان :

$$(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Rightarrow \bigwedge_i [P(x_i) \vee Q(x_i)] \equiv \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

4) القضية

$$\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

تكافئ القضية

$$\underset{i}{\wedge} (P(x_i) \Rightarrow Q(x_i))$$

عندئذ القضية التالية بينة

$$[\forall x P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow [P(x_i) \Rightarrow Q(x_i)]$$

من جهة اخرى

$$\forall x P(x) \equiv \underset{i}{\wedge} P(x_i) \Rightarrow P(x_i)$$

عندئذ القضية

$$[\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))] \Rightarrow [\forall x P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

قضية بينية

ولكن تعريفا للوصل المنطقي لدينا

$$[\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x_i))] \Rightarrow \left[\forall x P(x) \Rightarrow \underset{i}{\wedge} Q(x_i)\right]$$

وبالتالي نجد مستخدمين مرة ثانية تعدي الاستلزام المنطقي

$$[\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))] \Rightarrow [\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)]$$

وهو المطلوب

$$(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \left(\underset{i}{\wedge} P(x_i)\right) \vee \left(\underset{i}{\wedge} Q(x_i)\right)$$

(5

$$\begin{aligned}\forall x\,(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) &= \forall x\,[(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow P(x))] \\ &= \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x\,(Q(x) \Rightarrow P(x))\end{aligned}$$

6.2 الاشكال الاعتيادية السابقة الضم للعبارات المنطقية

تعريف 1

نقول عن عبارة منطقية F أنها مكتوبة على الشكل الاعتيادي السابق الضم اذا كانت من الشكل التالي:

$$F = (Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)M(x_1\ldots x_n)$$

حيث : من أجل كل i ، Q_i يكون احد المكممين و M قضية منطقية خالية من المكممات و تسمى M مصفوفة العبارة F

مثال 6

العبارات :

$$F_1 = (\forall x)(\exists y)(P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$F_2 = Q \Rightarrow (\bar{P} \vee R)$$

$$F_3 = (\exists x)(\exists t)(\forall z)(\bar{P}(x,t) \Rightarrow [Q(z) \wedge S(x,t)]$$

موضوعة كلها على الشكل الاعتيادي سابق الضم

اما العبارتان :

$$F_4 = (\forall x)P(x,y) \wedge (\exists y)R(y,z))$$

$$F_5 = (\forall x)(\exists y)(\bar{P}(x,y) \Rightarrow (\forall z)Q(y,z)$$

ليست موضوعة على شكل اعتيادي سابق الضم .

7.2 الاشكال القياسية للعبارة المنطقية

لتكن

$$F = (Q_1x_1)(Q_2x_2)...(Q_nx_n)M(x_1...x_n)$$

عبارة منطقية موضوعة على شكل اعتيادي سابق الضم .

تعريف 1

نقول عن F انها موضوعة على الشكل القياسي اذا كان Q_i هو المكمم الكلي و ذلك من أجل كل $i \in \mathbb{N}^*$

نظرية 1

من اجل كل عبارة F موضوعة شكل اعتيادي سابق الضم ، توجد عبارة F_s موضوعة على شكل قياسي بحيث تكون القضية $(F_s \Rightarrow F)$ قضية بينة .

البرهان : ليكن $Q_r(1 \le r \le n)$ اول تواجد للمكمم الوجودي يظهر على اليسار في العبارة F نعتبر عندئذ حالتين :

1. اذا كان $r = 1$ فأننا نحذف الرمز $\exists x_1$ و نعوض في عبارة F المتغير x_1 بثابت يختلف عن جميع المتغيرات x_i حيث $2 \le i \le n$.
2. اذا كان $r > 1$ فأننا نحذف كذلك الرمز الوجودي $\exists x_r$ و نبدل في العبارة F المتغير x_i بتطبيق متعلق بالمتغيرات المقيدة السابقة $x_r = f(x_1, x_2, ..., x_{r-1})$

نواصل عندئذ العملية الى غاية حذف جميع المكممات الوجودية و الحصول على عبارة F_s تشمل فقط المكممات الكلية ، كون الاستلزام $(F_s \Rightarrow F)$ قضية بينية ينتج من القضيتين البينيتين :

$$(\forall y)P(x_0, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x, y)$$

و

$$(\forall x)P(x, f(x)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$$

مثال 7

لتكن العبارة المنطقية :

$$F=(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists t)P(x,y,z,u,v,t)$$

نمر عندئذ الى المراحل التالية:

$$F_1=(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists t)P\left(x_0,y,z,u,v,t\right)$$
$$F_2=(\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists t)P\left(x_0,y,z,f_1(y,z),v,t\right)$$
$$F_3=(\forall y)(\forall z)(\forall v)P\left(x_0,y,z,f_1(y,z),v,f_2(y,z,v)\right)$$

باب 3

الاستدلال

تمهيد:

قبل دراسة موضوع الاستدلال في المنطق الرياضي، يجب أولاً المرور بمفهوم المنطق الجملي الذي تمت مناقشته في الفصل الأول. الهدف من ذلك هو إظهار نمط جديد لهذا المفهوم يتماشى مع موضوع الاستدلال والبرهان في المنطق الرياضي.

لقد قدمنا تعريفًا للحساب الجملي باستخدام جداول الصحة، التي بدورها قدمت روابط منطقية بين القضايا بناءً على فكرة أن لكل قضية حالتان: الصحة أو الخطأ. هذا الوصف يمكن أن يؤدي إلى كتابة نصوص معقدة وطويلة، وربما يصعب فهمه في بعض الاستدلالات الرياضية التي تحوي مفاهيم داخلية.

لتفادي هذه الصعوبات، نقترح في هذا الفصل استخدام مفهوم جديد يعتمد على نظام المسلمات. هذا المفهوم يعود إلى الفلاسفة الإغريق في العصور القديمة وقد حظي بتطور رياضي في نهاية القرن التاسع عشر.

1.3 نظام البديهيات و الحساب الجملي :

1.1.3 مصطلحات

الاستدلال :

هو التفكير الذي يؤدي الى تنظيم المعلومات بشكل منطقي لإيجاد حلول للمشكلات أو اتخاذ قرارات صحيحة، ويعتمد على عمليات الاستدلال الصحيح والقواعد المنطقية لضمان الدقة والصحة في النتائج.

البديهية :

هي مفهوم في علم المنطق يُعرف على أنه معرفة أو استنتاج يعتبر واضحًا وصحيحًا دون الحاجة إلى دليل أو إثبات خارجي. في السياق الفلسفي، تُعتبر البديهية مفاهيم أو حقائق لا يمكن إنكارها بسهولة وتُعتبر واضحة بذاتها ، نستخدمها في الاستدلال لنحصل على اكبر عدد ممكن من النتائج.

البرهان:

هو تقديم أدلة أو حُجج منطقية لدعم أو إثبات موقف معين أو صحة افتراض معين. يهدف البرهان إلى إقناع الآخرين بالصحة أو الصواب من خلال استخدام الأدلة والمنطق.

المسلّمة :

هي عبارة عن افتراض أو عبارة أو حقيقة يتم افتراضها كقاعدة أساسية أو مقبولة دون الحاجة إلى إثباتها بشكل مباشر في سياق معين. وتستخدم المسلّمات كأساس للتفكير والاستنتاج في البرهان

وفي عملية اتخاذ القرارات.

الانظمة التسليمية في المنطق الرياضي :

إذا كانت قواعد الاستدلال التي تم التطرق إليها متفق عليها، فإن المسلمات التي تستمد منها كتابة النصوص الرياضية قد تختلف من نظام إلى آخر ومن عالم إلى آخر. لذا، سنقدم في هذه الفقرة بعض الأنظمة المنسوبة إلى رياضيين ومنطقيين من القرون السابقة، موضحين الفروق اللاحقة في اللغات المستخدمة، وذلك قبل تقديم بعض التعاريف والنتائج العامة.

2.3 مورفولوجية المنطق الصوري

أ. مجموعة من الحروف الأبجدية تسمى قضايا أولية ونرمز لها بالحروف اللاتينية الكبيرة أو الصغيرة ، و تكون مصحوبة احيانا بدليلات .

ب. مجموعة من الرموز تدعى روابط منطقية (الوصل ,الفصل , الاستلزام ،النفي ... الخ)

3.3 قوانين التركيب

تعتمد قوانين تركيب الصيغ ساسا على القواعد التالية :

صيغة 1 : تسمى صيغة كل قضية منطقية أولية .

صيغة 2 : اذا كانت A صيغة فأن $\overline{A}$ صيغة .

صيغة 3: اذا كانتا A و B صيغتين فأن ARB صيغة حيث R رابط ثنائي .

صيغة 4 : العبارة التي لا تحقق الصيغة 3و 1 .

من أجل كتابة نصوص لغوية ، نستخدم بعض المسلمات وهي عبارة عن فرضيات نعتبرها كصيغ ونسلم بها بحيث تكون إنطلاقة كتابة الجمل في لغة المنطق الصوري.

4.3 قواعد الإستدلال

هي قواعد تركيب الجمل والنصوص إعتمادا على المسلمات المقدمة و المفترضة في النظام المقترح ونتلخص هذه القواعد فيما يلي :

القاعدة 0 : نقول عن كل مسلمة A أنها نظرية و نرمز لها بـ $\vdash A$ ونسمي نظرية كل قضية محصل عليها عن طريق قواعد الاستدلال .

قاعدة الوضع : (أو قاعدة الإثبات في القياس الاستثنائي) تنص هذه القاعدة على أنه إذا كانت A نظرية و $A \Rightarrow B$ نظرية فإن B نظرية، وترمز إلى ذلك بالمخطط التالي :

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash A \\ \vdash A \Rightarrow B\end{array}}{\vdash B}$$

حيث ان الفرضيات و النتيجة يفصل بينهم ذلك السطر .

قاعدة التعويض : لتكن A نظرية يظهر فيها متغير x يأتي في نص هذه القاعدة انه يمكننا الحصول على نظرية جديدة و ذلك عند تعويض المتغير السابق بـ قضية كيفية B و نمثلها بالمخطط التالي :

$$\frac{\vdash A}{\vdash (B/x)_A}$$

ملاحظة :

$\vdash$: رمز فريج يدل على وجود نظرية .ولكنه لا ينتمي إلى رموز لغة المنطق ،لذلك نعتبره رمزا لما بعد اللغة .

مثال 1

$$(\vdash A) \wedge (\vdash A \Rightarrow B) \Rightarrow (\vdash B)$$

هنا لم نقدم اي تعريف مادي للرمزين $\Rightarrow$, $\wedge$.

5.3 الأنظمة التسليمية في المنطق الرياضي

1.5.3 تعاريف :

- نقول عن نظام أنه متناقضٌ إذا كانت كل صيغة فيه نظرية.
- يُقال إن نظامًا متسقًا إذا لم يكن يتضمن أي تناقضات.
- يُقال إن نظامًا مكتملًا أو تامًا إذا حقق ما يلي : كلما أضيفت صيغة إلى مجموعة المسلمات، أصبح المجموع متناقضًا أو منطبقا على نفسه.

- نسمي برهانا (او استدلالا) كل مجموعة منتهية من الصيغ $S_1, S_2, ..., S_n$ بحيث تكون الصيغة S_i من اجل كل $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
  - اما مسلمة .
  - اما فرضية .
  - اما مستنبطة من الصيغ السابقة S_j حيث $(1 \leq j \leq i)$ عن طريق قواعد الاستدلال.
- ليكن $S_1, S_2, ..., S_n$ برهانا نسمي النتيجة النهائية المتحصل عليها نظرية .
- نقول عن صيغة B انها مستنتجة من صيغة A اذا وجد برهان $S_1, S_2, ..., S_n$ حيث : $S_1 = A$ و $S_n = B$.
- نقول عن صيغتين A و B انهم متكافئتين في نظام ما اذا امكن استنتاج واحدة منها من الاخرى.

2.5.3 نتائج أولية (نظرية الإتساق، نظرية التمامية الكالية)

نظرية 1

(نظرية الاتساق)
ليكن (L) نظام و لتكن B قضية منه إذن فإن B قضية بينية في الحساب الجملي شرط ان نفترض ان مسلسمات النظام L قضايا بينية .

البرهان
نستعمل البرهان بالتراجع على العدد الطبيعي n الذي يمثل المراحل المؤدية للنظرية

- **اذا كان** $n = 0$ فإنه حتما B مسلمة .
- **اذا كان** $n = 1$ فإنه توجد مسلمة A بحيث تكون $A \Rightarrow B$ مسلمة و بما ان $A = 1$ و $(A \Rightarrow B) = 1$ في الحساب الجملي فأن $B = 1$

الان لنفرض ان القضية صحيحة من اجل كل n ولنبينها من اجل $n + 1$
و لتكن $S_1, S_2, S_3 \ldots S_{n+1}$ مراحل البرهان التي تؤدي الى B عندئذ فأن $B_{n+1} = B$ و $B_n \Rightarrow B$ و منه فهي قضية بينة . من الفرضية B_n قضية بينة ومنه فأن B قضية بينة

نظرية 2

(التمامية و الكمالية)
ليكن L نظام نقول عن L أنه مكتمل إذا و فقط إذا كانت من أجل كل صيغة A ، A نظرية أو $\overline{A}$ نظرية.

برهان :
أ. لنفترض نظاما مكتملا (L) ونعتبر صيغة A . إذا كانت A نظرية فالمطلوب محقق، وإلا فإن $(L\cup A)$ نظام متناقض حسب تعريف (L) و بالتالي فإن $\overline{A}$ نظرية (كما هو الشأن بالنسبة لكل صيغة في هذا الحال)
ب. لنفترض انه من اجل كل صيغة $\overline{A}$ إما $\vdash A$ أو $\vdash \overline{A}$ إذا كانت $\vdash A$ فان $\overline{A}$ نظرية بالنسبة لـ (L) وبالتالي بالنسبة لـ $(L\cup A)$ عندئذ يكونا A و $\overline{A}$ نظريتين بالنسبة لـ $(L\cup A)$ الذي يصبح بدوره متناقضا. إذن (L) نظام متكامل .

نظرية 3

(خاصية النظام المتناقض)
ليكن L نظاما تكون فيه الصيغة $\bar{A}\Rightarrow(A\Rightarrow B)$ نظرية من اجل كل صيغتين A و B عندئذ يكون النظام (L) متناقضا إذا وفقط إذا وجدت صيغة A بحيث $(\vdash A)$ و $(\vdash \overline{A})$.

برهان :
إذا كان النظام متناقضا فان لزوم الشرط أمر بديهي عكسيا نفترض وجود صيغة A بحيث كل من A و $\overline{A}$ نظرية ، عندئذ نقوم بالاستدلال التالي ، حيث B صيغة كيفية .

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash \overline{A}\Rightarrow(A\Rightarrow B)\\ \vdash \overline{A}\end{array}}{\begin{array}{c}\vdash A\Rightarrow B\\ \vdash A\end{array}}$$

$$\overline{\vdash B}$$

و بالتالي فان كل صيغة B نظرية، و هذا يعني أن النظام (L) متناقض.

6.3 نماذج لبعض الأنظمة التسليمية

فيما يلي نقدم بعض الأنظمة التي تختلف عن بعضها البعض باختلاف المسلمات الموضوعة في كل واحد منها. سنلاحظ أن عدد المسلمات يتغير من ثلاث إلى عشر مسلمات في حين يبقى محتوى المسلمات و فحواها رهينة الأهداف المتوخاة من خلال فكرة إنشاء النظام في حد ذاته

1.6.3 نظام فزيجه :

يعتمد هذا النظام على الرمزين $\Rightarrow$ و $\neg$ و على المسلمات التالية :

$$\vdash x \Rightarrow (y \Rightarrow x) \quad (F_1)$$

$$\vdash \big(x \Rightarrow (y \Rightarrow x)\big) \Rightarrow \big((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)\big) \quad (F_2)$$

$$\vdash \big(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}\big) \Rightarrow \big((\overline{y} \Rightarrow x) \Rightarrow y\big) \quad (F_3)$$

لكن لـ نوفيكوف $(NOVIKOF)$ رأي اخر حيث رأى انه يمكن استبدال $F(3)$ بالمسلمة التالية:

$$\vdash \big(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}\big) \Rightarrow \big(x \Rightarrow y\big) \quad (N_3)$$

و بالفعل لأن النظام اجماليا لا يتأثر بهذا التغير.

2.6.3 نظام لوغازيفتس :

يعتمد هذا النظام على الرمزين $\Rightarrow$ و $\neg$ و على المسلمات التالية :

$$\vdash [x \Rightarrow y] \Rightarrow [(y \neq z) \Rightarrow (x \neq z)] \quad (L_1)$$

$$\vdash (\overline{x} \Rightarrow x) \Rightarrow x \quad (L_2)$$

$$\vdash x \Rightarrow (x \neq y) \quad (L_3)$$

3.6.3 نظام هلبرت اكرمان :

أ. يعتمد هذا النظام على كل من رمز الاستلزام و الفصل و على المسلمات التالية :

$$\vdash (x \vee x) \Rightarrow x \quad \text{(H.A.1)}$$

$$\vdash x \Rightarrow (x \vee y) \quad \text{(H.A.2)}$$

$$\vdash (x \vee y) \Rightarrow (y \vee x) \quad \text{(H.A.3)}$$

$$\vdash (x \Rightarrow y) \Rightarrow [(z \vee x) \Rightarrow (z \vee y)] \quad \text{(H.A.4)}$$

4.6.3 نظام روسل-وايتهيد

يعتمد هذا النظام على ثلاثة رموز $\vee$ و $\bar{}$ و $\Rightarrow$
اما المسلمات فهي ثلاثة :

$$\vdash x \Rightarrow (x \wedge x) \quad (\mathrm{R}_1)$$
$$\vdash (x \wedge y) \Rightarrow z \quad (\mathrm{R}_2)$$
$$\vdash (x \Rightarrow y) \Rightarrow \left((\overline{y \wedge z})\right) \Rightarrow (\overline{z \wedge x})) \quad (\mathrm{R}_3)$$

5.6.3 نظام جترنا

يعتمد على الرموز الاربع $\neg$ ، $\Rightarrow$ ، $\wedge$ ، $\vee$ و المسلمات الاحد عشر التالية :

$$\vdash x \Rightarrow (y \Rightarrow x \quad (G_1)$$

$$\vdash (x \Rightarrow (y \Rightarrow x)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z) \quad (G_2)$$

$$\vdash x \wedge y \Rightarrow x \quad (G_3)$$

$$\vdash x \wedge y \Rightarrow y \quad (G_4)$$

$$\vdash \left(x \Rightarrow y\right) \Rightarrow \left((x \Rightarrow z) \Rightarrow \left(x \Rightarrow y \wedge z\right) \quad (G_5)\right.$$

$$\vdash x \Rightarrow x \vee y \quad (G_6)$$

$$\vdash y \Rightarrow x \vee y \quad (G_7)$$

$$\vdash (x \Rightarrow z) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \vee y \Rightarrow z) \quad (G_8)$$

$$\vdash \left(x \Rightarrow y\right) \Rightarrow \left(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}\right) \quad (G_9)$$

$$\vdash x \Rightarrow \overline{\overline{x}} \quad (G_{10})$$

$$\vdash \overline{\overline{x}} \Rightarrow \overline{x} \quad (G_{11})$$

7.3 نظريات

نقدم في هذه الفقرة بعض النظريات المستنبطة من المسمات عن طريقة استخدام قواعد الاستدلال، نبرز بذلك كيفية اجراء البراهين الرياضية عندما نبتعد تماما عن مفاهيم الصحة و الخطأ و نهتم فقط بالتسلسل المنطقي للبرهان.

نظرية 4

من اجل كل صيغة A لدينا $\vdash A \Rightarrow A$

البرهان بتعويض x و y بـ A و y بـ $A \Rightarrow A$ في المسلمتين (F_1) و (F_2) نجد

$$\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$$

$$\vdash (A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A))) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$$

و منه حسب القاعدة (ق1)

$$\vdash (A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$$

لكن بتطبيق قاعدة التعويض (ق2) في F_1 تعطي :

$$(y/A) \quad \vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$$

و منه مرة ثانية بتطبيق (ق1)

$$\vdash A \Rightarrow A$$

1.7.3 نظرية القياس الشرطي

نظرية 5

$$\frac{\begin{array}{l}\vdash A \Rightarrow B\\ \vdash B \Rightarrow C\end{array}}{\vdash A \Rightarrow C}$$

البرهان :

$$\vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C).$$

$$\frac{\vdash B \Rightarrow C}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}$$

$$\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

$$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

$$\frac{\vdash A \Rightarrow B}{\vdash A \Rightarrow C}$$

2.7.3 نقيض الاستلزام

نظرية 6

$$\vdash (\bar{A} \Rightarrow \bar{B}) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

يعتمد اثبات النظرية على التوطئة التالية :

توطئة :

من اجل كل صيغة A

$$\vdash A \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \Rightarrow B]$$

اثبات التوطئة:

$$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

$$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B))$$

$$\vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$(\mathrm{F}_1) \vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$$

$$\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

و هو المطلوب .

اثبات النظرية

$$(\mathrm{F}_1) \vdash \lfloor(\bar{B} \Rightarrow A) \Rightarrow B\rfloor \Rightarrow \lfloor A \Rightarrow ((\bar{B} \Rightarrow A) \Rightarrow B)\rfloor$$

$$(\mathrm{F}_2) \vdash \lfloor A \Rightarrow ((\bar{B} \Rightarrow A) \Rightarrow B)\rfloor \Rightarrow \lfloor(A \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)\rfloor$$

$$\vdash \lfloor(\bar{B} \Rightarrow A) \Rightarrow B\rfloor \Rightarrow \lfloor(A \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)\rfloor$$

$$\vdash \lfloor(A \Rightarrow \lfloor\bar{B} \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)\rfloor \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

و ذلك بإستعمال التوطئة السابقة و التعويض التالي:

$$B \Rightarrow A \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow A \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow A)$$

$$\vdash \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow A) \Rightarrow B\rfloor \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

$$(\mathrm{F}_3) \vdash (\bar{B} \Rightarrow \bar{A}) \Rightarrow ((\bar{B} \Rightarrow A) \Rightarrow B)$$

$$.(\bar{B} \Rightarrow \bar{A}) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

.

3.7.3 نظرية طارسكي -هيربراند

نظرية 7

1. إذا كانت الصيغة B نتيجة للصيغة A فإن الصيغة $(A \Rightarrow B)$ نظرية .
2. بصفة عامة ، إذا كانت B نتيجة لصيغ $A_1, \ldots, A_2, A_\mathrm{n}(n \geq 1)$ فأنه لدينا النظرية التالية:

$$\vdash A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\ldots(A_n \Rightarrow B)\ldots))$$

نحتاج التوطئتين لاثبات النظرية :

توطئة 1:

$$\vdash A \Rightarrow A$$

اثبات التوطئة 1

- $\vdash (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) \quad (\mathrm{G}_2)$
- $\vdash (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow x)) \quad (z/x)$
- $\vdash x \Rightarrow (y \Rightarrow x) \quad (\mathrm{G}_1)$
- $\vdash (x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow x)$

بتطبيق قاعدة التعويض (ق 2) على السطرين الأخيرين مع $y \mid (x \Rightarrow x)$ نجد النظريتين التاليتين:

- $\vdash x \Rightarrow ((x \Rightarrow x) \Rightarrow x)$
- $\vdash (x \Rightarrow (x \Rightarrow x)) \Rightarrow (x \Rightarrow x)$

أخيرا بفضل قاعدة الوضع (ق 1)، نصل إلى النظرية $\vdash x \Rightarrow x$

توطئة 2:

نفرض أن $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$، عندئذ $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash (A_n \Rightarrow B)$، حيث تدل الفرضية على كون B نتيجة لـ

$A_1, A_2, \ldots, A_n$.

اثبات التوطئة 2 :

لنعتبر $S_1, S_2, \ldots, S_m$ حيث $S_m = B$ البرهان المؤدي من الفرضيات

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

إلى النتيجة B، لنتطرق حينئذ إلى ثلاث حالات و ذلك من اجل كل $i \in \{1,2,\ldots,m\}$.

- إما أن تكون S_i مسلمة،
- إما أن يوجد دليل $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ بحيث $S_i = A_j$.
- إما أن تكون S_i مستنبطة من المراحل السابقة S_k حيث $i \geq K$ بواسطة قاعدة الوضع .

1. في الحالة الأولى، تستخدم قاعدة التعويض لدى المسلمة (G_1) للحصول على النظرية

$$\vdash S_i \Rightarrow (A_n \Rightarrow S_i)$$

لكن $\vdash S_i$ اذن $\vdash A_n \Rightarrow S_i$ يعني

$$\vdash A_n \Rightarrow B$$

و هو المطلوب .

في الحالة الخاصة $S_i = B = A_n$ نستخدم التوطئة 1 .

2. في الحالة الثانية نجد بنفس الطريقة الاستدلال التالي :

$$\frac{\begin{array}{ll}(\mathrm{G}_1) & \vdash A_j \Rightarrow (A_n \Rightarrow A_j) \\ & \vdash A_j\end{array}}{\vdash A_n \Rightarrow A_j}$$

حيث $A_j = B$ و هو المطلوب .

3. في الحالة الأخيرة، يوجد دليلان k و l أصغران من l بحيث $(S_1 \Rightarrow S_i) = S_k$
لنقوم على هذا المستوى ببرهان بالتدريج على الدليل i حيث $(1 \leq i \leq m)$ حسب فرضية التدرج لدينا :

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \Rightarrow S$$

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \Rightarrow (S_1 \Rightarrow S_i)$$

و لكن قاعدة التعويض في المسلمة $(G2)$ تؤدي إلى النظرية.

$$(A_n \Rightarrow (S_1 \Rightarrow S_i)) \Rightarrow ((A_n \Rightarrow S_1) \Rightarrow (A_n \Rightarrow S_K))$$

ثم مرة ثانية

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A_n \Rightarrow S_k$$

و منه النتيجة بالتدريج و بصفة خاصة من أجل i = m.

اثبات نظرية طاركسي :

لنفرض أن $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$
عندئذ حسب التوطئة 2

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash (A_n \Rightarrow B).$$

و مرة ثانية

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-2} \vdash A_{n-1} \Rightarrow (A_n \Rightarrow B)$$

فمرة ثالثة ، رابعة .. إلى غاية المرة n لنجد

$$\vdash A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow (\ldots A_n \Rightarrow B)\ldots))$$

خاتمة

يمكننا أن نؤكد على الأهمية الكبيرة التي يحتلها هذا المجال في عالم الرياضيات وعلوم الحاسب والذكاء الاصطناعي. لقد استعرضنا في هذا البحث الأسس النظرية للمنطق الرياضي، وتطبيقاته المتعددة، ودوره المحوري في تطوير النظريات والمفاهيم الرياضية.

تناولنا أيضًا كيفية استخدام المنطق الرياضي في البرهنة على صحة النظريات الرياضية وإيجاد الحلول للمسائل المعقدة. ومن خلال تحليلنا، تبين أن المنطق الرياضي ليس مجرد أداة رياضية بل هو لغة شاملة تساعد في وصف وتحليل العديد من الظواهر الطبيعية والبشرية.

ختامًا، نأمل أن يكون هذا البحث قد أضاف لبنة في فهمنا للمنطق الرياضي وأهميته. ونشجع الباحثين والمختصين على مواصلة البحث في هذا المجال الحيوي لاستكشاف المزيد من الآفاق العلمية والتطبيقية التي يمكن أن يقدمها المنطق الرياضي. إن الاستثمار في هذا المجال يعد استثمارًا في مستقبل المعرفة والتكنولوجيا.

المصادر

[1] يوسف قرقور ، المبادئ الاساسية في المنطق الرياضي ، المدرسة العليا للاساتدة القبة .

[2] رافت رياض رزق الله ، المنطق الرياضي ، كلية التربية -جامعة عين شمس .

[3] يوسف عتيق ، مبادئ المنطق الرياضي ،وزارة التربية و التعليم الاساسي .

[4] عبد الحفيظ مقران ، مجلة الخوارزمي ،الجزائر 16 (1982) .