وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
- عزابة - سكيكدة
- قسم الرياضيات -

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure
-Azzaba - Skikda
Département de Mathématiques

التقريب العددي لمؤثرات التكاملات الكسرية

مُذكّرَة تخَرج لنيَل شهَادة أُستَاذ تعلِيم ثانَوي

من إعداد:
الطالبة: حناشي إكرام
الطالبة: بوساليع إكرام

تحت إشراف الأستاذ:
دردار نجم الدين

نوقشت من طرف اللجنة:

-مزياني محمد سيف الدين :الأستاذ	رئيسا
- الأستاذ: دردار نجم الدين	مشرفا
- الأستاذ: خشمان حسام الدين	ممتحنا
- الأستاذة: كاف أسماء	ممتحنا

السنة الجامعية: 2024/2023

دفعة جوان 2024

ملخص

تعتبر مؤثرات التكاملات الكسرية مجال بحث مهم في التحليل الرياضي بسبب تطبيقاتها الواسعة، نظرا لتعقيدها يمكن أن يكون الحل الدقيق لهذه التكاملات الكسرية أمرا صعبا و لذلك يتعين علينا إستخدام الطرق العددية لتقريب هذه التكاملات الكسرية.

نهدف في هذه المذكرة لدراسة التكاملات الكسرية عدديا بإستخدام الطرق العددية التي تعتمد على كثير حدود الإستقطاب و ذلك لإيجاد قيم تقريبية للتكامل الكسري لريمان -ليوفيل و المشتقة الكسرية لكابيتو باستعمال الطرق العددية الثلاث: طريقة المستطيلات، طريقة شبه المنحرف، طريقة سيمسون و في الأخير نرفق النتائج المحصل عليها بأمثلة عددية توضيحية.

الكلمات المفتاحية: الحساب الكسري، المشتق الكسري بمفهوم كابيتو، التكامل الكسري بمفهوم ريمان -ليوفيل، طريقة المستطيلات، طريقة شبه المنحرف و طريقة سيمسون.

❖ شكــر وعرفــــان

الحمد لله على نعمته، و الصلاة والسلام على صفوة خلقه و أنبيائه، و على آله و أصحابه، و بعد:

يطيب لنا و قد من الله علينا بإكمال هذه المذكرة أن نرد الجميل لأهله، و ننسب الفضل لأصحابه، فالشكر لله أولا و آخرا على نعمه العظيمة و آلائه الجسيمة على ما يسر لنا من إنجاز هذه المذكرة، فله الحمد و الثناء بما هو أهله.
و إنطلاقا من قول المصطفى صلى الله عليه و سلم"لا يشكر الله من لا يشكر الناس" (رواه أحمد و الترمذي)
نتقدم بجزيل الشكر و التقدير للصرح العلمي الشامخ بالمدرسة العليا للأساتذة -سكيكدة-.
و بأصدق العبارات و أوفاها نقدم شكرنا و تقديرنا للأستاذ المشرف "دردار نجم الدين" على ما أولانا به من إهتمام، و نصح و إرشاد، و إفادته لنا في إنجاز هذه المذكرة، فجزاه الله خير ما جزى به أستاذا عن طالبه.
كما نتقدم بالشكر إلى أعضاء لجنة المناقشة لقبولهم الإشراف على مناقشة مذكرتنا و على النصائح التي ستقدم لنا.
كما لا يفوتنا أن نتقدم بكل الشكر و الإمتنان لكل من ساهم في إنجاز هذا البحث و لو بدعاء.
و في الأخير لا يسعنا إلا أن ندعو الله عز وجل أن يرزقنا السداد و الرشاد.

❖ إهـــداء

قال الله تعالى :"قل إعملوا فسيرى الله عملكم و رسوله و المؤمنون"

إلاهي لا يطيب الليل إلا بشكرك و لا يطيب النهار إلا بطاعتك و لا تطيب اللحظات إلا بذكرك و لا تطيب الآخرة إلا بعفوك و لا تطيب الجنة إلا برؤيتك .

أحمد الله تعالى الذي بارك لي في إتمام بحثي هذا و أتقدم بجزيل الشكر و خالص الإمتنان إلى كل من ساعدني في إتمام مذكرتي .

إلى من كلله الله بالهيبة و الوقار ....إلى من علمني العطاء بدون إنتظار ....إلى من أحمل إسمه بكل فخر و إعتزاز أرجو من الله عز و جل أن يطيل في عمره و يحفظه .....إلى والدي العزيز .

إلى من علمتني الحب و الحنان و الإلتفات إلى بسمة الحياة و سر الوجود .....إلى من كان دعاؤها سر نجاحي و حنانها بلسم جراحي .....إلى أغلى الحبايب أمي الحبيبة.

إلى من أتقاسم معهم الدم الواحد ، من يذكرهم القلب قبل أن يكتب القلم ، إلى من قاسموني حلو الحياة و مرها ....أختاي أحلام و بسمة أنار الله طريقهن.

إلى رفيقات الدرب و خير من جادت بهن الأيام صديقتاي من الأعماق .....إلى مروة و إكرام .

حناشي إكرام

❖ إهـــداء

هاهي الأيام قد مرت بسرعة حتى وصلنا الى نهاية مشوارنا الدراسي وها نحن اليوم و الحمد لله نطوي سهر الليالي و تعب السنين ... الحمد لله الذي ماتم جهد و لا ختم سعي إلا بفضله و ما تخطى العبد من عقبات و صعوبات إلا بتوفيقه و معونته فلك المحامد كلها و الحمد لله على التمام .

إلى من لا توفيهم الكلمات و الحروف حقهم في البر و الإحسان إلى من رضا الله في رضاهم و ما توفيقي و سر نجاحي إلا بدعائهم فلن يفي أي كلام و لن تنصف الكلمات قدرهم ....إلى أمي الغالية و والدي العزيز .

إلى نور يضيئ عتمتي عندما تطفئني الأيام و الظروف ....إلى غيمة تظلني و تسقيني دون رغبة برد جميلها ....إلى الأيدي التي تمد لي العون عندما أتعثر و تدفعني لمقاومة كل هذه الأشياء التي تستدعي السقوط ....إلى إخوتي .

إلى من سرنا سويا نشق الطريق معا نحو النجاح في مسيرتنا العلمية ....إلى من تقاسمنا الضحكات رغم المصاعب و الأوقات العصيبة ....إلى من تشاركنا كل شيء حتى أسمائنا ....إلى صديقتي و رفيقة دربي إكرام.

إلى رفاق الخطوة الأولى و الخطوة ما قبل الأخيرة ....إلى من كانوا في السنوات العجاف سحابا ممطرا ....إلى من تقاسمت معهم أحزاني و أفراحي صديقاتي في الإقامة الجامعية عزابة

مروة، أحلام، إيمان، هناء، رباب، حياة، إيمان .

إلى جميع الزميلات و الزملاء الذين جمعتني بهم المدرسة العليا للأساتذة -سكيكدة-.

إلى من حملو أقدس رسائل الحياة أساتذتي الكرام.

إلى كل من نساه قلمي و لم ينساه قلبي ....إلى كل هؤلاء أهديهم هذا العمل المتواضع سائلة الله العلي القدير أن ينفعنا به و يمدنا بتوفيقه .

بوساليع إكرام

قائمة المحتويات

ترمــيزات	
الرّمــز	**مدلـولـه**
$\mathbb{N}$	مجموعة الأعداد الطبيعية
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد العقدية
$\sum$	المجموع
I_a^α	مؤثر التكامل لريمان ليوفيل
${}^{GL}D^\alpha$	مؤثر الإشتقاق لغرينوالد ليتنيكوف
${}^{L}D_a^v$	مؤثر الإشتقاق للوران
${}^{RL}D_a^\alpha$	مؤثر الإشتقاق لريمان ليوفيل
${}^{C}D_a^\alpha$	مؤثر الإشتقاق لكابيتو
$C([a,b))$	فضاء الدوال المستمرة على المجال $[a,b)$
$C^n([a,b))$	فضاء الدوال القابلة للاشتقاق n مرة على المجال $[a,b)$ و مشتقتها النونية مستمرة
$\blacksquare$	نهاية البرهان

مقـــدمّة

الحساب الكسري هو عبارة عن فرع من فروع التحليل الرياضي يشمل التكامل و التفاضل الكسريان يعرف على أنه توسيع لمفهوم الحساب الكلاسيكي إلى رتب غير صحيحة. يعود تاريخ الحساب الكسري إلى نهاية القرن السابع عشر و يستمر إلى يومنا هذا، تعكس عدد المقالات و المؤتمرات العلمية التي تخصص له في الفترة الأخيرة أهمية المشاكل التي أثارتها هذه الفكرة سواءا من الناحية النظرية أو التطبيقية لذا يمكن القول أنه أصبح تخصصا في حد ذاته.

يتفق الخبراء على أن أصوله تعود إلى نهاية 1695 عندما تساءل لايبنيز في رسالة إلى لوبيتال عن إمكانية وجود نظرية للتفاضل ذو رتبة غير صحيحة لدالة، في رده تساءل لوبيتال عن إمكانية وجود نتيجة يمكن إعطاءها للمشتق ذو الرتبة $\frac{1}{2}$، في محاولة للرد على سؤال لوبيتال حاول لايبنيز شرح إمكانية وجود المشتقة ذات الرتبة $\frac{1}{2}$ وأشار أيضا إلى أن هذا يعتبر تناقضا ظاهريا يمكن أن يستخلص منه نتائج مفيدة يوما ما.

بالفعل لم يكن حتى التسعينات من القرن الماضي حتى ظهرت أولى النتائج المفيدة يعود أول أعمالها إلى ليوفيل بين عامي $1837 - 1832$ و بشكل مستقل إقترح ريمان طريقة لبناء المشتقة الكسرية إعتمادا على التكامل الذي كان حجر الأساس في الحساب الكسري، التي تبين أنها نفس طريقة ليوفيل في الإشتقاق و التكامل الكسريان و عرفت بنظرية ريمان ليوفيل، فيما بعد تم تطوير طرق أخرى وأصبحت أكثر تنوعا.

يمكن أن يعتقد المرء أن هذا البحث في الحساب الكسري هو مسألة رياضية نقية بلا تطبيقات في مجالات أخرى، ولكن كمثال بسيط من ميكانيكا السوائل يظهر أهمية المشتقة ذات الرتبة $\frac{1}{2}$ عندما نريد توضيح تغيرات تدفق الحرارة التي تخرج جانبيا بناءا على تدفق سائل بالنسبة للتطور الزمني للمصدر الداخلي. لذلك يمكن القول أن تطبيقات الحساب الكسري لاتنحصر في مجال واحد بل عدة مجالات الكيمياء، البيولوجيا، الهندسة، الفيزياء ...إلخ

في هذا العمل نقترح دراسة عددية لإيجاد التقريب العددي لمؤثر التكامل الكسري، حيث نقوم بإيجاد تقريب للتكامل الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل و المشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو بإستعمال الطرق العددية التي تعتمد على كثير حدود الإستقطاب.

حيث تطرقنا في هذه المذكرة إلى 3 فصول منظمة كما يلي:

الفصل الأول: قدمنا بعض المفاهيم الأساسية التي نحتاجها في الفصول القادمة المتمثلة في بعض التعاريف و النظريات و الخواص المتعلقة بالحساب الكسري مثل الدالة بيتا و غاما و كان تركيزنا على تعريف المشتقة و التكامل الكسريان بمفهوم ريمان ليوفيل وكابيتو.

الفصل الثاني: تطرقنا إلى الطرق العددية التي تعتمد على كثير حدود الإستقطاب من أجل إيجاد تقريب للتكامل الكسري لريمان ليوفيل ومشتقة كابيتو، و من بين هذه الطرق: طريقة المستطيلات، شبه المنحرف و سيمسون.

الفصل الثالث: قدمنا أمثلة عددية من أجل مقارنة القيم الدقيقة و القيم التقريبية المحصل عليها بواسطة الطرق العددية

التي تمت دراستها من أجل إيجاد تقريب للتكامل الكسري لريمان ليوفيل و مشتقة كابيتو و كذا تأثير طول الخطوة h على دقة الحل.

الفصل 1

الحساب الكسري

1.1 مقدمة

سنتطرق في هذا الفصل إلى إعطاء بعض التعاريف و المفاهيم الأساسية و النظريات التي تخدم الفصل الثاني و الثالث. كما نذكر أننا إعتمدنا على المراجع التالية في هذا الفصل [1]، [3]، [4]، [7]-[9]، [11]، [13]، [14]، [16].

2.1 التوابع الخاصة

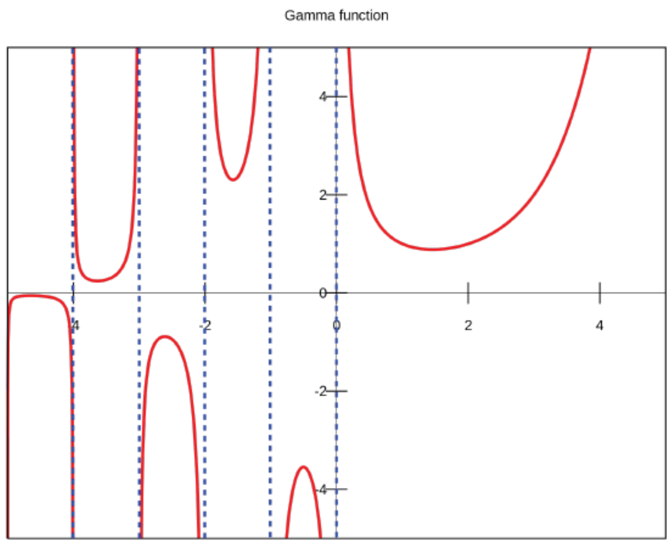
1.2.1 التابع غاما (Gamma)

تعريف 1.2.1

من أجل كل عدد مركب z حيث $Re(z) > 0$ نعرف التابع غاما لأولر (**Gamma**) كمايلي:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{1.1}$$

مع: $\Gamma(1) = 1$، $\Gamma(0^+) = +\infty$، التابع $\Gamma(z)$ متناقص تماما من أجل $0 < z \leq 1$.



شكل 1.1: منحنى بياني للتابع غاما

نلخص بعض خواص التابع غاما في القضية التالية:

قضية 1.2.1
من أجل $n \in \mathbb{N}$، $Re(z) > 0$ لدينا:

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2. $\Gamma(n+1) = n!$

3. $\Gamma(\frac{1}{2}+n)=\dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$

4. $\Gamma(z)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!n^z}{z(z+1)....(z+n)}$

البرهان

من أجل كل عدد طبيعي n و $z\in\mathbb{C}$ حيث $Re(z)>0$ لدينا:

1. باستعمال التكامل بالتجزئة نجد:

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{+\infty}t^z e^{-t}dt=\big[-t^z e^{-t}\big]_0^{+\infty}+z\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}dt=z\Gamma(z).$$

2. من الخاصية (1) نجد:

$$\begin{aligned}
&\Gamma(2)=1.\Gamma(1)=1!,\\
&\Gamma(3)=2.\Gamma(2)=2.1!=2!,\\
&\Gamma(4)=3.\Gamma(3)=3.2!=3!,\\
&\vdots\\
&\Gamma(n+1)=n.\Gamma(n)=n.(n-1)!=n!.
\end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \Gamma((n-\frac{1}{2})+1)\\
&= (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})\\
&= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\Gamma(n-\frac{3}{2})\\
&= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1}{2^n}\Gamma(\frac{1}{2})\\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots 4.3.2.1}{2^n(2n)(2n-2)\dots 4.2}\Gamma(\frac{1}{2})\\
&= \frac{(2n)!}{2^n.2^n[(n)(n-1)\dots 2.1]}\Gamma(\frac{1}{2})\\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma(\frac{1}{2}),
\end{aligned}$$

و من كون $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ فإن:

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.$$

4. من أجل برهان هذه الخاصية أنظر [16] صفحة 4-6.

■

خاصية 1.2.1

من أجل كل عدد مركب z حيث $Re(z)>0$ لدينا:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^{z-1}dt = \frac{\Gamma(z)}{p^z}.$$

إثبات

بوضع المتغير $s=pt$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^{z-1}dt = \int_0^{+\infty} e^{-s}\left(\frac{s}{p}\right)^{z-1}\frac{1}{p}ds = \frac{1}{p^z}\int_0^{+\infty} e^{-s}s^{z-1}ds = \frac{\Gamma(z)}{p^z}.$$

■

مثال 1.2.1

أحسب $\Gamma(\frac{1}{2})$ ؟

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{-1}{2}}dt, \tag{2.1}$$

نضع:

$$y = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y^2 = t \Rightarrow 2ydy = dt$$

بالتعويض في العبارة (2.1) نجد:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy, \tag{3.1}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx, \tag{4.1}$$

بضرب (3.1) في (4.1) نجد:

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}rdrd\theta\\ &= \pi,\end{aligned}$$

ومنه:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

2.2.1 التابع بيتا (Beta)

تعريف 2.2.1

يعرف التابع بيتا (**Beta**) من أجل $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ بحيث: $Re(p) > 0$ و $Re(q) > 0$ كما يلي:

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt. \tag{5.1}$$

خواص

من أجل $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ بحيث: $Re(z) > 0$، $Re(w) > 0$ لدينا:

1. $B(z,w) = B(w,z)$
2. $B(z,w+1) = \frac{w}{z}B(z+1,w)$

3. $B(z+1,w)=\dfrac{z}{z+w}B(z,w)$

4. $B(z,n+1)=\dfrac{n}{z(z+1)......(z+n)},\ n\in\mathbb{N}^*$

3.2.1 العلاقة بين التابعين غاما و بيتا

التابع غاما يرتبط بالتابع بيتا بالعلاقة التالية:

$$\forall (z,w)\in\mathbb{C}^2,\ Re(z)>0,\ Re(w)>0,\ B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

البرهان

لدينا:

$$\forall (z,w)\in\mathbb{C}^2,\ Re(z)>0,\ Re(w)>0,\ B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt$$

بوضع $u=\dfrac{t}{1-t}$ نجد أن:

$$\forall (z,w)\in\mathbb{C}^2,\ Re(z)>0,\ Re(w)>0,\ B(z,w)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{z-1}}{(1+u)^{z+w}}du, \tag{6.1}$$

حسب (الخاصية **1.2.1**)

$$\forall a\in\mathbb{C},\ Re(a)>0,\ \int_0^{+\infty}e^{-pt}t^{a-1}dt=\frac{\Gamma(a)}{p^a},$$

بوضع المتغيرين $p=1+u$ و $a=z+w$ نجد أن:

$$\frac{1}{(1+u)^{z+w}}=\frac{1}{\Gamma(z+w)}\int_0^{+\infty}e^{-(1+u)t}t^{z+w-1}dt, \tag{7.1}$$

بتعويض (7.1) في (6.1) نجد أن:

$$\begin{aligned}B(z,w)&=\frac{1}{\Gamma(z+w)}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z+w-1}dt\int_0^{+\infty}e^{-ut}u^{z-1}du\\&=\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+w)}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{w-1}dt\\&=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.\end{aligned}$$

3.1 صيغة ديريكلي

لتكن $h(x,y)$ دالة مستمرة و α,β عددان حقيقيان موجبان. نعرف صيغة ديريكلي بالعبارة التالية:

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1}h(x,y)dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}h(x,y)dx. \quad (8.1)$$

4.1 التكامل ذو الرتب الكسرية

1.4.1 التكامل الكسري على مجال $[a,b]$

لتكن f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ نعرف التكامل التالي:

$$\begin{aligned}
I_a^1 f(t) &= \int_a^t f(s)ds.\\
I_a^2 f(t) &= \int_a^t \Big(I_a^1 f(\tau)\Big)d\tau\\
&= \int_a^t \Big(\int_a^\tau f(s)ds\Big)d\tau\\
&= \int_a^t f(s)\Big(\int_s^t d\tau\Big)ds && \text{(حسب صيغة ديريكلي)}\\
&= \int_a^t (t-s)f(s)ds.\\
I_a^3 f(t) &= \int_a^t \Big(I_a^2 f(\tau)\Big)d\tau\\
&= \int_a^t \Big(\int_a^\tau (\tau-s)f(s)ds\Big)d\tau\\
&= \int_a^t f(s)\Big(\int_s^t (\tau-s)d\tau\Big)ds && \text{(حسب صيغة ديريكلي)}\\
&= \int_a^t \Big(\frac{1}{2}t^2 - st - \frac{1}{2}s^2 + s^2\Big)f(s)ds\\
&= \int_a^t \frac{1}{2}\Big(t^2 - 2st + s^2\Big)f(s)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_a^t (t-s)^2 f(s)ds.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$I_a^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{(n-1)} f(s)ds.$$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n تسمى هذه الصيغة بصيغة كوشي.

2.4.1 التكامل الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل Riemann-Liouville

إن تعميم صيغة كوشي من الرتبة α (α عدد حقيقي موجب) يحقق إستبدال الدالة عاملي بالدالة غاما كالتالي:

تعريف 1.4.1

لتكن f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$، نعرف التكامل الكسري لريمان ليوفيل من الرتبة $\alpha > 0$ بالعبارة التالية:

$$I_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, & \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

مع $t \geq 0$

خاصية 1.4.1

لتكن $f \in C([a,b))$ و α، β عددان حقيقيان حيث $\alpha > 0$، $\beta > 0$ لدينا:

$$I_a^\alpha \circ I_a^\beta = I_a^{\alpha+\beta}.$$

البرهان

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \circ I_a^\beta (f(t)) &= I_a^\alpha [I_a^\beta (f(t))] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} I_a^\beta f(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left(\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right) d\tau. \end{aligned}$$

نقوم بتبديل المتغير: $s=\tau+(t-\tau)y$ حيث $0\leq y\leq 1$

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha\circ I_a^\beta\big(f(t)\big) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\left(\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dy\right)d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)\,d\tau\\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\,d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{(\alpha+\beta)-1}\,d\tau\\
&= I_a^{\alpha+\beta}f(t).
\end{aligned}$$

■

خاصية 2.4.1
التكامل الكسري من رتبة $\alpha>0$ هو مؤثر خطي.

البرهان
لتكن f و g دالتان معرفتان على $[a,b]$ و $\lambda\,,\,\mu\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha\big(\lambda f+\mu\,g\big)\,(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\,(\lambda f+\mu\,g)\,(s)\;ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\lambda f\,(s)\;ds+\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\mu\,g\,(s)\;ds\right]\\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f\,(s)\;ds+\frac{\mu}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\,g\,(s)\;ds\\
&= \lambda I_a^\alpha f\,(t)+\mu I_a^\alpha g\,(t)\,.
\end{aligned}$$

ومنه I^α مؤثر خطي. ■

خاصية 3.4.1
إذا كان $\alpha>1$ فإن:

$$\frac{d}{dt}(I_a^\alpha f)(t)=(I_a^{\alpha-1}f)(t).$$

البرهان

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I_a^{\alpha}f(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^t \frac{d}{dt}(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}f(s)ds \\
&= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int\limits_a^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int\limits_a^t (t-s)^{\alpha-2}f(s)\,ds \\
&= I_a^{\alpha-1}f(t).
\end{aligned}$$

■

خاصية 4.4.1

من أجل $\alpha = 0$ لدينا:

$$I_a^0 f(t) = f(t).$$

البرهان

$$\begin{aligned}
I_a^n f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_a^t (t-s)^{n-1}f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_a^t f(s)\,\frac{d}{ds}\left(-\frac{(t-s)^n}{n}\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left[f(a)(t-a)^n + \int\limits_a^t f'(s)(t-s)^n ds\right],
\end{aligned}$$

نجد:

$$I_a^0 f(t) = 1\left[f(a)\,1 + \int\limits_a^t f'(s)\,ds\right]$$

$$\begin{aligned}&= f(a) + f(t) - f(a)\\&= f(t),\end{aligned}$$

ومنه النتيجة:
$$I_a^0 f(t) = f(t).$$

■

خاصية 5.4.1

$$I_a^{\alpha} \circ I_a^{\beta} f(t) = I_a^{\beta} \circ I_a^{\alpha} f(t).$$

البرهان

$$\begin{aligned}I_a^{\alpha} \circ I_a^{\beta} f(t) &= I_a^{\alpha+\beta} f(t)\\&= I_a^{\beta+\alpha} f(t)\\&= I_a^{\beta} \circ I_a^{\alpha} f(t).\end{aligned}$$

■

التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل لبعض الدوال

تكامل دالة كثير حدود من الشكل $(t-a)^{\beta}$

$$I_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}.$$

البرهان

$$f(t) = (t-a)^{\beta}, \qquad \beta > -1, \qquad t \in [a,b].$$

حساب $I_a^{\alpha}(t-a)^{\beta}$:

$$I_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^{\beta}\, ds,$$

نقوم بتغيير المتغير $s = a + (t-a)\,y$ حيث $0 \leq y \leq 1$ نجد $s - a = (t-a)\,y$

$$I_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \Big(t-a-(t-a)\,y\Big)^{\alpha-1} \Big(t+(t-a)\,y-t\Big)^{\beta} (t-a)\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \Big(t - a - (t-a)\, y\Big)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta+1} y^{\beta}\, dy$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \Big((t-a)(1-y)\Big)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta+1} y^{\beta}\, dy,$$

و منه:

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} f(t) &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta}\, dy \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{(\beta+1)-1}\, dy \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \; \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}, \end{aligned}$$

إذن:

$$I_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}.$$

■

تكامل دالة ثابتة

لتكن الدالة $f(t) = c$ حيث $c \in \mathbb{R}$
بإستعمال العلاقة (9.1) للتكامل الكسري لريمان-ليوفيل نجد:

$$I_a^{\alpha} c = \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^{\alpha}.$$

5.1 الإشتقاق ذو الرتب الكسرية

توجد العديد من التعريفات الرياضية التي تعبر عن الإشتقاق الكسري نذكر منها:

1.5.1 الإشتقاق الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل (Riemann-Liouville)

تعريف 1.5.1

من أجل $m \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{R}$ نعبر عن المشتقة من الرتبة α بمفهوم ريمان - ليوفيل للدالة f حيث $f \in C([a,+\infty),\mathbb{R})$ ب:

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) = \begin{cases} D^m I_a^{m-\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)d\tau\right), & m-1<\alpha<m, \\ \\ \dfrac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases}
$$

مثال 1.5.1

نعرف الدالة

$$f(t) = (t-a)^{\beta} \quad ,t > a.$$

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) &= D^m I_a^{m-\alpha}(t-a)^{\beta} \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}(t-a)^{\beta+m-\alpha}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}
$$

ملاحظة

بتعويض $\beta = 0$ في المثال السابق نحصل على النتيجة التالية:

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}(t-a)^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},
$$

و هذا يعني أن المشتقة الكسرية بمفهوم ريمان ليوفيل من الرتبة α لدالة ثابتة تكون غير معدومة و غير ثابتة أي:

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha} c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.
$$

حالة خاصة

إذا كان $\alpha = m \in \mathbb{N}$ فإن: ${}^{RL}D_a^m f(t) = f^{(m)}(t)$

البرهان

لدينا: $\alpha = m \Rightarrow n = m+1$

إذن:

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^m f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m+1-m)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1}\int_a^t (t-s)^{m+1-m-1} f(s)\,ds \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1}\int_a^t f(s)\,ds \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^{m}\frac{d}{dt}\int_a^t f(s)\,ds \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^{m} f(t) \\
&= f^{(m)}(t)\,.
\end{aligned}
$$

■

خاصية 1.5.1

مؤثر الإشتقاق بمفهوم ريمان ليوفيل ${}^{RL}D$ خطي.

البرهان

لتكن $f,g \in C([a,b])$ و $\forall \mu,\lambda \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^\alpha\Big(\lambda f(t)+\mu g(t)\Big) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(\lambda f+\mu g)(s)\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_a^t \Big(\lambda(t-s)^{n-\alpha-1}f(s)+\mu(t-s)^{n-\alpha-1}g(s)\Big)\,ds \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)\,ds \\
&+ \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}g(s)\,ds \\
&= \lambda\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} I_a^{n-\alpha}f(t)+\mu\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} I_a^{n-\alpha}g(t) \\
&= \lambda\,{}^{RL}D_a^\alpha f(t)+\mu\,{}^{RL}D_a^\alpha g(t).
\end{aligned}
$$

■

خاصية 2.5.1

لتكن $f \in C([a,b))$ و $m-1<\alpha<m$، $m \in \mathbb{N}^*$

$$^{RL}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha} f = f.$$

البرهان

$$\begin{aligned} ^{RL}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha}\big(f(t)\big) &= {}^{RL}D_a^{\alpha}\big(I_a^{\alpha} f(t)\big) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha}\big(I^{\alpha} f(t)\big) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \big(I^{n-\alpha+\alpha} f(t)\big) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^n f(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

■

حالة عامة

من أجل $f \in C([a,b))$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

- إذا كان $0<\beta<\alpha$ فإن: $\qquad {}^{RL}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\beta} f = {}^{RL}D_a^{\alpha-\beta} f.$
- إذا كان $0<\alpha<\beta$ فإن: $\qquad {}^{RL}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\beta} f = I_a^{\beta-\alpha} f.$

البرهان

$$\begin{aligned} ^{RL}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\beta} f(t) &= {}^{RL}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha} \circ I_a^{\beta-\alpha} f(t) \\ &= I_a^{\beta-\alpha} f(t) \\ &= {}^{RL}D_a^{\alpha-\beta} f(t). \end{aligned}$$

■

ملاحظة

تركيب الإشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل ليس تبديلي أي:

$$^{RL}D_a^{\alpha} \circ {}^{RL}D_a^{\beta} \neq {}^{RL}D_a^{\beta} \circ {}^{RL}D_a^{\alpha} \neq {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}.$$

من أجل $\alpha \neq \beta$، $\alpha>0$، $\beta>0$.

2.5.1 الإشتقاق الكسري بمفهوم كابيتو(Caputo)

تعريف 2.5.1

من أجل $m - 1 < \alpha \leq m$، $m \in \mathbb{N}^*$ و $f \in C^m([a, +\infty))$ نعبر عن المشتقة الكسرية ل كابيتو من الرتبة α للدالة f بـ:

$$
{}^{C}D_a^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} \frac{d^m}{ds^m} f(s) ds = I_a^{m-\alpha} D^m f(t), & m - 1 < \alpha < m, \\ \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases}
$$

الإشتقاق الكسري بمفهوم كابيتو لبعض الدوال

إشتقاق دالة كثير حدود من الشكل $(t-a)^{\beta}$

$$^{C}D_{a}^{\alpha}(t-a)^{\beta}=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1-\alpha\right)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

البرهان

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}(t-a)^{\beta}=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1-n\right)}(t-a)^{\beta-n}.$$

$$\begin{aligned}I_{a}^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}(t-a)^{\beta}\right]&=I_{a}^{n-\alpha}\left[\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1-n\right)}(t-a)^{\beta-n}\right]\\&=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1-n\right)}I_{a}^{n-\alpha}(t-a)^{\beta-n}\\&=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1-n\right)}\frac{\Gamma\left(\beta-n+1\right)}{\Gamma\left(n-\alpha+\beta-n+1\right)}(t-a)^{\beta-\alpha},\end{aligned}$$

ومنه:

$$^{C}D_{a}^{\alpha}f(t)=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+1-\alpha\right)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

■

مثال 2.5.1

أحسب $^{C}D_{a}^{\frac{3}{2}}(t-a)^{\frac{5}{2}}$ ؟

$$\begin{aligned}^{C}D_{a}^{\frac{3}{2}}(t-a)^{\frac{5}{2}}&=I_{a}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d^{2}}{dt^{2}}(t-a)^{\frac{5}{2}}\right)\\&=I_{a}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Gamma(\frac{5}{2}+1)}{\Gamma(\frac{5}{2}-2+1)}(t-a)^{\frac{1}{2}}\right)\\&=I_{a}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2})}(t-a)^{\frac{1}{2}}\right)\\&=I_{a}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}(t-a)^{\frac{1}{2}}\right)\\&=\frac{15}{4}(I_{a}^{\frac{1}{2}})(t-a)^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{15}{4}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)}(t-a)\right)\\&=\frac{15\sqrt{\pi}}{8}(t-a).\end{aligned}$$

إشتقاق دالة ثابتة

بتعويض $\beta = 0$ في المثال السابق نحصل على النتيجة التالية:

$$^{C}D_a^{\frac{3}{2}}(t-a)^0 = (I_a^{2-\frac{3}{2}})(0) = 0.$$

و هذا يعني أن المشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو من الرتبة α لدالة ثابتة تكون معدومة.

خواص

- $(^{C}D_a^{\alpha})(I_a^{\alpha}f)(t) = f(t)$
- $(C_j) \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2 \dots m-1$ $\quad {}^{C}D_a^{\alpha}f(t) = 0 \Rightarrow f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j(t-a)^j,$
- $(C_j) \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2 \dots m-1$ $\quad I_a^{\alpha}(^{C}D_a^{\alpha}f)(t) = f(t) + \sum_{j=0}^{m-1} C_j(t-a)^j,$

العلاقة بين مشتق ريمان-ليوفيل و مشتق كابيتو

نظرية 1.5.1

لتكن $f \in C^m([a, +\infty))$ و $m-1 < \alpha < m$ حيث $m \in N^*$ و $a \in \mathbb{R}$. العلاقة بين مشتق ريمان ليوفيل و مشتق كابيتو تعطى بالشكل التالي:

$$^{RL}D_a^{\alpha}f(t) =^{C} D_a^{\alpha}f(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} f^{(j)}(a).$$

و يمكن كتابتها أيضا على الشكل:

$$^{C}D_a^{\alpha}f(t) =^{RL} D_a^{\alpha}\left(f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\right).$$

ملاحظة

$$(f^{(j)}(a) = 0, j = 0, 1, 2 \dots m-1) \Longrightarrow (^{RL}D_a^{\alpha}f(t) =^{C} D_a^{\alpha}f(t)).$$

الفصل 2

التقريب العددي لمؤثر التكامل الكسري

1.2 مقدمة

في هذا الفصل سوف نتطرق بالتفصيل للطرق العددية من أجل الحصول على تقريبات عددية لتكاملات و مشتقات كسرية بالإعتماد على كثير الحدود الإستقطاب. كما نذكر أننا إعتمدنا في هذا الفصل على المراجع [2]، [4]-[10]، [12]، [13]، [15]، [17].

2.2 الطرق العددية بالإعتماد على كثير حدود الإستقطاب

نريد إيجاد قيمة تكامل الدالة f على المجال $[a,b]$.
إذا كانت الدالة الأصلية F معروفة عندئذ يمكننا حساب التكامل مباشرة حيث:

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

لكن في حالات خاصة:

- **الحالة** 01 : تكون الدالة f معرفة بنقاط معطاة في جدول أي لانعرف عن هذه الدالة إلا نقاط منها فقط.
- **الحالة** 02 : وجود بعض الدوال المعقدة مثلا:

$$\int_a^b \exp^{\sin x} dx, \int_a^b \exp^{-x^2} dx, \int_a^b \sqrt{1+\cos^2 x}dx, \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}dx$$

عندئذ يصعب إيجاد الدالة الأصلية للدالة f، لهذا السبب نلجأ للطرق العددية لإيجاد صيغ لتقريب تكامل الدالة f من بين هذه الطرق طرق تعتمد على كثير حدود الإستقطاب لأن الدوال الأصلية لكثيرات الحدود سهلة الحساب. تؤدي كثيرات الحدود المختلفة إلى صيغ مختلفة، هذه الصيغ يتم إستخدامها بشكل شائع في التطبيقات على النحو التالي:
نضع:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

تقسيم للمجال $[a,b]$ إلى n مجال جزئي $[x_i,x_{i+1}]$ بخطوة ثابتة $h=\frac{b-a}{n}$ و $x_i=a+ih$ من أجل $i=0,1,2,\ldots,n$.
الهدف هو حساب التكامل التالي:

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

1.2.2 طريقة المستطيلات

نعوض الدالة f بكثير حدود يشمل نقطة $(\alpha_i, f(\alpha_i))$ أي دالة ثابتة على كل مجال جزئي $[x_i,x_{i+1}]$
نحصل على صيغة المستطيلات على الشكل التالي:

$$f(x)\approx f(\alpha_i)$$

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\alpha_i)dx.$$

إذن:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i).$$

يمكن أن نأخذ $\alpha_i = x_i$ (نقطة اليسار) نحصل على صيغة المستطيلات على الشكل التالي:

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)dx.$$

أو يمكن أن نأخذ $\alpha_i = x_{i+1}$ (نقطة اليمين) نحصل على صيغة المستطيلات على الشكل التالي:

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})dx.$$

و لكن أحسن قيمة ل α_i هي قيمة نقطة المنتصف $\alpha_i=\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1})$ و نحصل على صيغة المستطيلات على الشكل التالي:

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})dx.$$

2.2.2 طريقة شبه المنحرف

في طريقة شبه المنحرف نعوض الدالة f بكثير حدود يشمل نقطتين $(x_i, f(x_i))$ و $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ (أي كثير حدود من الدرجة 1) على كل مجال جزئي $[x_i, x_{i+1}]$
نحصل على صيغة شبه المنحرف على الشكل التالي:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\Big(f(x_i)+f(x_{i+1})\Big).$$

3.2.2 طريقة سيمسون

في هذه الطريقة نعوض الدالة f على كل مجال جزئي $[x_i, x_{i+1}]$ بكثير حدود يشمل ثلاث نقاط $(x_i, f(x_i))$ و $(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}, f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}))$ و $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ (أي كثير حدود من الدرجة الثانية)
نحصل على صيغة سيمسون على الشكل التالي:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{3}\Big[f(x_i)+4f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})+f(x_{i+1})\Big].$$

3.2 التقريب العددي للتكاملات الكسرية

يلعب مؤثر التكامل الكسري دورا مهما في الحساب الكسري، من أجل ذلك يجب دراسة طرق عددية لتقريب التكاملات الكسرية. نعتمد في هذه الدراسة على الطرق العددية التي تعتمد على كثير حدود الإستقطاب.
نضع $f \in C([0,T])$ حيث $h = \frac{T}{n}$ و $k = 0, 1 \ldots, n$، $t_k = kh$
سوف ندرس كيفية حساب التكامل العددي التالي:

$$(I_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds. \tag{1.2}$$

إحدى الطرق العددية لحساب (1.2) هي تقريب f بواسطة دالة $\tilde{f}$على المجال $[0,T]$ حيث يمكن حسابه بدقة، نظريا يمكن حساب (1.2) بدقة إذا كانت $\tilde{f}(s)$ كثير حدود.
من أجل $t = t_n$، $n \in \mathbb{N}$ يمكن كتابة $[I_0^\alpha f(t)]_{t=t_n}$ على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}[I_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n-s)^{\alpha-1} f(s)ds.\end{aligned}$$

الآن سنتطرق للطرق العددية التي تعتمد على كثير حدود الإستقطاب لحساب (1.2).

1.3.2 طريقة المستطيلات لتقريب التكامل الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل

في هذه الطريقة نقرب f بواسطة كثير حدود من الدرجة 0 (أي دالة ثابتة) في كل مجال جزئي $[t_k, t_{k+1}]$ حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

$$f(s)|_{[t_k,t_{k+1}]} \approx \tilde{f}(s)|_{[t_k,t_{k+1}]} = f(t_k),$$

في هذه الحالة (1.2) تكتب كما يلي:

$$\begin{aligned}\Big[I_0^\alpha f(t)\Big]_{t=t_n} &\approx \Big[I_0^\alpha \tilde{f}(t)\Big]_{t=t_n} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n-s)^{\alpha-1} \tilde{f}(s)ds,\end{aligned}$$

بالتعويض نجد:

$$\begin{aligned}
\left[I_0^\alpha f(t)\right]_{t=t_n} &\approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha-1}f(t_k)ds\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}f(t_k)\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha-1}ds\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}f(t_k)\left[\frac{(t_n-s)^\alpha}{-\alpha}\right]_{t_k}^{t_{k+1}}\\
&=\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)f(t_k)\Big((t_n-t_{k+1})^\alpha-(t_n-t_k)^\alpha\Big)\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n-1}f(t_k)\Big[(t_n-t_k)^\alpha-(t_n-t_{k+1})^\alpha\Big]\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n-1}f(t_k)\Big[(nh-kh)^\alpha-(nh-(k+1)h)^\alpha\Big]\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n-1}f(t_k)\Big[h^\alpha(n-k)^\alpha-h^\alpha(n-k-1)^\alpha\Big]\\
&=\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n-1}f(t_k)\Big[(n-k)^\alpha-(n-k-1)^\alpha\Big],
\end{aligned}$$

$$[I_0^\alpha f(t)]_{t=t_n} \approx \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1}f(t_k). \tag{2.2}$$

حيث:

$$b_k=\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(k+1)^\alpha-k^\alpha\right].$$

نسمي العبارة (2.2) بالصيغة المستطيلة من اليسار لتكامل ريمان-ليوفيل.

بنفس الشكل السابق على كل مجال جزئي $[t_k, t_{k+1}]$ حيث $k=1,2,\dots,n-1$

$$f(s)|_{[t_k,t_{k+1}]}\approx \tilde{f}(s)|_{[t_k,t_{k+1}]}=f(t_{k+1})$$

نحصل على الصيغة المستطيلة من اليمين لتكامل ريمان-ليوفيل:

$$\Big[I_0^\alpha f(t)\Big]_{t=t_n}\approx \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1}f(t_{k+1}). \tag{3.2}$$

تعتبر الصيغة المستطيلة الكسرية من اليسار (2.2) و الصيغة المستطيلة الكسرية من اليمين (3.2) حالات خاصة من الصيغة المستطيلة الكسرية الموزونة التالية:

$$\Big[I_0^\alpha f(t)\Big]_{t=t_n} \approx \Big[I_0^\alpha \tilde{f}(t)\Big]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1}\Big[\theta f(t_k)+(1-\theta)f(t_{k+1})\Big], \qquad 0\leq\theta\leq 1.$$

وتكافئها الصيغة التالية:

$$\Big[I_0^\alpha f(t)\Big]_{t=t_n} \approx \Big[I_0^\alpha \tilde{f}(t)\Big]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} f(t_k+(1-\theta)h), \qquad 0\leq\theta\leq 1.$$

2.3.2 طريقة شبه المنحرف لتقريب التكامل الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل

في هذه الطريقة نقرب f بواسطة كثيرحدود من الدرجة الاولى في كل مجال جزئي $[t_k, t_{k+1}]$

$$f(s)|_{[t_k,t_{k+1}]} \approx \tilde{f}(s)|_{[t_k,t_{k+1}]} = \frac{t_{k+1}-s}{t_{k+1}-t_k} f(t_k) + \frac{s-t_k}{t_{k+1}-t_k} f(t_{k+1}).$$

و بالتالي:

$$\begin{aligned}
\Big[I_0^\alpha f(t)\Big]_{t=t_n} &\approx \Big[I_0^\alpha \tilde{f}(t)\Big]_{t=t_n} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n-s)^{\alpha-1}\Big[\frac{t_{k+1}-s}{t_{k+1}-t_k} f(t_k) + \frac{s-t_k}{t_{k+1}-t_k} f(t_{k+1})\Big] ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_{t_0}^{t_1} (t_n-s)^{\alpha-1}\frac{t_1-s}{t_1-t_0} f(t_0) ds + \int_{t_0}^{t_1} (t_n-s)^{\alpha-1}\frac{s-t_0}{t_1-t_0} f(t_1) ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} (t_n-s)^{\alpha-1}\frac{t_2-s}{t_2-t_1} f(t_1) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_n-s)^{\alpha-1}\frac{s-t_1}{t_2-t_1} f(t_2) ds \\
&+ \ldots + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} (t_n-s)^{\alpha-1}\frac{t_{n-1}-s}{t_{n-1}-t_{n-2}} f(t_{n-2}) ds \\
&+ \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} (t_n-s)^{\alpha-1}\frac{s-t_{n-2}}{t_{n-1}-t_{n-2}} f(t_{n-1}) ds + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n-s)^{\alpha-1}\frac{t_n-s}{t_n-t_{n-1}} f(t_{n-1}) ds \\
&+ \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n-s)^{\alpha-1}\frac{s-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} f(t_n) ds\Big] \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} f(t_k).
\end{aligned}$$

حيث:

$$a_{k,n}=\begin{cases}\int_{t_0}^{t_1}\frac{t_1-s}{t_1-t_0}(t_n-s)^{\alpha-1}ds, & k=0,\\ \\ \int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{\alpha-1}\frac{s-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}ds+\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha-1}\frac{t_{k+1}-s}{t_{k+1}-t_k}ds, & 1\leq k\leq n-1,\\ \\ \int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\frac{s-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}ds, & k=n.\end{cases}$$

- من أجل $k=0$

$$\begin{aligned}a_{0,n}&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t_1}\frac{t_1-s}{t_1-t_0}(t_n-s)^{\alpha-1}ds\\&=\frac{1}{h\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t_1}(t_1-s)(t_n-s)^{\alpha-1}ds.\end{aligned}$$

بإستعمال التكامل بالتجزئة:

$$u=(t_1-s)\Rightarrow u^{'}=-1.$$

$$v^{'}=(t_n-s)^{\alpha-1}\Rightarrow v=\frac{-1}{\alpha}(t_n-s)^{\alpha}.$$

نجد:

$$\begin{aligned}a_{0,n}&=\frac{1}{h\Gamma(\alpha)}\left(\left[\frac{-1}{\alpha}(t_1-s)(t_n-s)^{\alpha}\right]_{t_0}^{t_1}-\frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{t_1}(t_n-s)^{\alpha}ds\right)\\&=\frac{1}{\alpha h\Gamma(\alpha)}\left(n^{\alpha}h^{\alpha+1}+\left[\frac{1}{\alpha+1}(t_n-s)^{\alpha+1}\right]_{t_0}^{t_1}\right)\\&=\frac{1}{\alpha h\Gamma(\alpha)}\left(n^{\alpha}h^{\alpha+1}+\left[\frac{1}{\alpha+1}(t_n-t_1)^{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}(t_n-t_0)^{\alpha+1}\right]\right)\\&=\frac{1}{\alpha h\Gamma(\alpha)}\left[n^{\alpha}h^{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+1}\left(h^{\alpha+1}(n-1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}h^{\alpha+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{(\alpha+1)h\Gamma(\alpha+1)}\left[(\alpha+1)(n^{\alpha}h^{\alpha+1})+h^{\alpha+1}((n-1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1})\right]\\&=\frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\left[(n-1)^{\alpha+1}-n^{\alpha}(n-\alpha-1)\right].\end{aligned}$$

- من أجل $1 \leq k \leq n-1$

$$a_{k,n} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{\alpha-1}\frac{s-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha-1}\frac{t_{k+1}-s}{t_{k+1}-t_k}ds\right]$$
$$= \frac{1}{h\Gamma(\alpha)}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{\alpha-1}(s-t_{k-1})ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha-1}(t_{k+1}-s)ds\right].$$

نضع:

$$I_1 = \int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{\alpha-1}(s-t_{k-1})ds.$$

و

$$I_2 = \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha-1}(t_{k+1}-s)ds.$$

حساب I_1

$$I_1 = \int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{\alpha-1}(s-t_{k-1})ds.$$

بالتكامل بالتجزئة :

$$u = (s-t_{k-1}) \Rightarrow u^{'} = 1.$$

$$v^{'} = (t_n-s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha}(t_n-s)^{\alpha}.$$

نجد:

$$I_1 = \left[\frac{-1}{\alpha}(s-t_{k-1})(t_n-s)^{\alpha}\right]_{t_{k-1}}^{t_k} + \int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{1}{\alpha}(t_n-s)^{\alpha}ds$$
$$= \frac{1}{\alpha}\left[-(n-k)^{\alpha}h^{\alpha+1} - \left[\frac{1}{\alpha+1}(t_n-s)^{\alpha+1}\right]_{t_{k-1}}^{t_k}\right]$$
$$= \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\left[-(\alpha+1)(n-k)^{\alpha} - (n-k)^{\alpha+1} + (n-k+1)^{\alpha+1}\right].$$

حساب I_2

$$I_2 = \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha-1}(t_{k+1}-s)ds.$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$u = (t_{k+1}-s) \Rightarrow u^{'} = -1.$$

$$v^{'} = (t_n-s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha}(t_n-s)^{\alpha}.$$

نجد:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left[\frac{-1}{\alpha}(t_{k+1}-s)(t_n-s)^{\alpha}\right]_{t_k}^{t_{k+1}} - \frac{1}{\alpha}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha}ds \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[(n-k)^{\alpha}h^{\alpha+1} + \left[\frac{1}{\alpha+1}(t_n-s)^{\alpha+1}\right]_{t_k}^{t_{k+1}}\right] \\
&= \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\Big[(\alpha+1)(n-k)^{\alpha} - (n-k)^{\alpha+1} + (n-k-1)^{\alpha+1}\Big].
\end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned}
a_{k,n} &= \frac{1}{h\Gamma(\alpha)}\Big[I_1 + I_2\Big] \\
&= \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\Big[(n-k+1)^{\alpha+1} + (n-k-1)^{\alpha+1} - 2(n-k)^{\alpha+1}\Big].
\end{aligned}$$

- من أجل $k=n$

$$\begin{aligned}
a_{n,n} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\frac{(s-t_{n-1})}{t_n-t_{n-1}}ds \\
&= \frac{1}{h\Gamma(\alpha)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}(s-t_{n-1})ds.
\end{aligned}$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$u = (s-t_{n-1}) \Rightarrow u' = 1.$$

$$v' = (t_n-s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha}(t_n-s)^{\alpha}.$$

و منه نجد:

$$\begin{aligned}
a_{n,n} &= \frac{1}{h\Gamma(\alpha)}\left(\left[\frac{-1}{\alpha}(s-t_{n-1})(t_n-s)^{\alpha}\right]_{t_{n-1}}^{t_n} + \frac{1}{\alpha}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-s)^{\alpha}ds\right) \\
&= \frac{1}{h\Gamma(\alpha+1)}\left[\frac{-1}{(\alpha+1)}(t_n-s)^{\alpha+1}\right]_{t_{n-1}}^{t_n} \\
&= \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}.
\end{aligned}$$

إذن:

$$a_{k,n}=\frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}\begin{cases}(n-1)^{\alpha+1}-n^{\alpha}(n-\alpha-1), & k=0,\\ \\ (n-k+1)^{\alpha+1}+(n-k-1)^{\alpha+1}-2(n-k)^{\alpha+1}, & 1\leq k\leq n-1,\\ \\ 1, & k=n.\end{cases}$$

3.3.2 طريقة سيمسون لتقريب التكامل الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل

في طريقة سيمسون نقوم بتقريب الدالة f عند فواصل النقاط t_{k+1}، $t_{k+\frac{1}{2}}$، t_k بكثير حدود من الدرجة الثانية في كل مجال جزئي $[t_k,t_{k+1}]$

$$f(s)|_{[t_k,t_{k+1}]}\approx\tilde{f}(s)|_{[t_k,t_{k+1}]}=\sum_{i\in S}L_{k,i}(s)f(t_{k+i}).$$

حيث $L_{k,i}(s)$ أساس لاغرونج يعطى كما يلي:

$$L_{k,i}(s)=\prod_{j\in S,j\neq i}\frac{s-t_{k+j}}{t_{k+i}-t_{k+j}},\qquad i\in S.$$

حيث:

$$S=\{0,\frac{1}{2},1\}\quad,\qquad t_{k+\frac{1}{2}}=\frac{t_k+t_{k+1}}{2}.$$

إذن تصبح عبارة التكامل كما يلي:

$$\begin{aligned}f(s)|_{[t_k,t_{k+1}]}&\approx\tilde{f}(s)|_{[t_k,t_{k+1}]}\\&=\frac{(s-t_{k+1})(s-t_{k+\frac{1}{2}})}{(t_k-t_{k+1})(t_k-t_{k+\frac{1}{2}})}f(t_k)+\frac{(s-t_k)(s-t_{k+\frac{1}{2}})}{(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k+\frac{1}{2}})}f(t_{k+1})\\&=\frac{(s-t_{k+1})(s-t_k)}{(t_{k+\frac{1}{2}}-t_{k+1})(t_{k+\frac{1}{2}}-t_k)}f(t_{k+\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Big[I_0^{\alpha}f(t)\Big]_{t=t_n}&\approx\Big[I_0^{\alpha}\tilde{f}(t)\Big]_{t=t_n}\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha-1}\Big[\frac{(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})}{(t_k-t_{k+\frac{1}{2}})(t_k-t_{k+1})}f(t_k)\\&+\frac{(s-t_k)(s-t_{k+1})}{(t_{k+\frac{1}{2}}-t_k)(t_{k+\frac{1}{2}}-t_{k+1})}f(t_{k+\frac{1}{2}})+\frac{(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_k)}{(t_{k+1}-t_{k+\frac{1}{2}})(t_{k+1}-t_k)}f(t_{k+1})\Big]ds\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{h^2\Gamma(\alpha)}\Bigg(\int_{t_0}^{t_1}(t_n-s)^{(\alpha-1)}\Big[(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)f(t_0)$$
$$-2(s-t_0)(s-t_1)f(t_{\frac{1}{2}})+(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_0)f(t_1)\Big]ds+\int_{t_1}^{t_2}(t_n-s)^{\alpha-1}$$
$$+\Big[(s-t_{\frac{3}{2}})(s-t_2)f(t_1)-2(s-t_1)(s-t_2)f(t_{\frac{3}{2}})+(s-t_{\frac{3}{2}})(s-t_1)f(t_2)\Big]ds+\dots$$
$$+\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}\Big[(s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_n)f(t_{n-1})-2(s-t_{n-1})(s-t_n)f(t_{n-\frac{1}{2}})$$
$$+(s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1})f(t_n)\Big]ds\Bigg)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}c_{k,n}f(t_k)+\sum_{k=0}^{n-1}\hat{c}_{k,n}f(t_{k+\frac{1}{2}}).$$

حيث:

$$c_{k,n}=\frac{2}{h^2\Gamma(\alpha)}\begin{cases}\int_{t_0}^{t_1}(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)(t_n-s)^{\alpha-1}ds, & k=0,\\[2ex] \int_{t_{k-1}}^{t_k}(s-t_{k-\frac{1}{2}})(s-t_{k-1})(t_n-s)^{\alpha-1}ds \\ +\int_{t_k}^{t_{k+1}}(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})(t_n-s)^{\alpha-1}ds, & 1\leq k\leq n-1,\\[2ex] \int_{t_{n-1}}^{t_n}(s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1})(t_n-s)^{\alpha-1}ds, & k=n.\end{cases}$$

$$\hat{c}_{k,n}=\frac{-4}{h^2\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(s-t_k)(s-t_{k+1})(t_n-s)^{\alpha-1}ds,\qquad 0\leq k\leq n-1.$$

- من أجل $k=0$ نجد:

$$c_{0,n}=\frac{2}{h^2\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t_1}(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)(t_n-s)^{\alpha-1}ds.$$

بإستعمال التكامل بالتجزئة:

$$u=(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)\Rightarrow u'=2s-t_{\frac{1}{2}}-t_1.$$

$$v'=(t_n-s)^{\alpha-1}\Rightarrow v=-\frac{(t_n-s)^{\alpha}}{\alpha}.$$

$$c_{0,n}=\frac{2}{h^2\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t_1}(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)(t_n-s)^{\alpha-1}ds$$
$$=\frac{2}{h^2\Gamma(\alpha+1)}\Bigg(\Big[-(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)(t_n-s)^{\alpha}\Big]_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}(t_n-s)^{\alpha}(2s-t_{\frac{1}{2}}-t_1)ds\Bigg)$$

$$= \frac{n^\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{2}{h^2\Gamma(\alpha+2)}\Bigg(\Big[(2s - t_{\frac{1}{2}} - t_1)(t_n - s)^{\alpha+1}\Big]_{t_0}^{t_1} - 2\int_{t_0}^{t_1}(t_n - s)^{\alpha+1}ds\Bigg)$$
$$= \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+3)}\Bigg(4\Big[n^{\alpha+2} - (n-1)^{\alpha+2}\Big] - (\alpha+2)\Big[3n^{\alpha+1} + (n-1)^{\alpha+1}\Big] + (\alpha+1)(\alpha+2)n^\alpha\Bigg).$$

- من أجل $1 \leq k \leq n-1$ لدينا:

$$c_{k,n} = \frac{2}{h^2\Gamma(\alpha)}\Bigg(\int_{t_{k-1}}^{t_k}(s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1})(t_n - s)^{\alpha-1}ds$$
$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n - s)^{\alpha-1}(s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1})ds\Bigg).$$

نضع:

$$I = \int_{t_{k-1}}^{t_k}(s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1})(t_n - s)^{\alpha-1}ds.$$

$$J = \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n - s)^{\alpha-1}(s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1})ds.$$

أولا حساب I

$$I = \int_{t_{k-1}}^{t_k}(s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1})(t_n - s)^{\alpha-1}ds.$$

بالتكامل بالتجزئة

$$u = (s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1}) \Rightarrow u' = 2s - t_{k-\frac{1}{2}} - t_{k-1}.$$

$$v' = (t_n - s)^{\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{\alpha}(t_n - s)^\alpha.$$

$$I = \frac{1}{\alpha}\Bigg(\Big[-(s - t_{k-\frac{1}{2}})(s - t_{k-1})(t_n - s)^\alpha\Big]_{t_{k-1}}^{t_k} + \int_{t_{k-1}}^{t_k}(2s - t_{k-\frac{1}{2}} - t_{k-1})(t_n - s)^\alpha ds\Bigg)$$
$$= -\frac{h^{\alpha+2}(n-k)^\alpha}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\Bigg(\Big[(2s - t_{k-\frac{1}{2}} - t_{k-1})(t_n - s)^{\alpha+1}\Big]_{t_{k-1}}^{t_k} - 2\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n - s)^{\alpha+1}ds\Bigg)$$
$$= \frac{h^{\alpha+2}}{(2\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)}\Big[-(\alpha+1)(\alpha+2)(n-k)^\alpha - 3(\alpha+2)(n-k)^{\alpha+1}$$
$$-(\alpha+2)(n-k+1)^{\alpha+1} - 4(n-k)^{\alpha+2} + 4(n-k+1)^{\alpha+2}\Big].$$

ثانيا حساب J

$$J = \int_{t_k}^{t_{k+1}}(s - t_{k+\frac{1}{2}})(s - t_{k+1})(t_n - s)^{\alpha-1}ds.$$

بالتكامل بالتجزئة

$$u=(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})\Rightarrow u^{'}=2s-t_{k+\frac{1}{2}}-t_{k+1}.$$

$$v^{'}=(t_n-s)^{\alpha-1}\Rightarrow v=\frac{-1}{\alpha}(t_n-s)^{\alpha}.$$

إذن:

$$\begin{aligned}
J&=\frac{1}{\alpha}\Bigg(\Big[-(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})(t_n-s)^{\alpha}\Big]_{t_k}^{t_{k+1}}+\int_{t_k}^{t_{k+1}}(2s-t_{k+\frac{1}{2}}-t_{k+1})(t_n-s)^{\alpha}ds\Bigg)\\
&=\frac{h^{\alpha+2}(n-k)^{\alpha}}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\Bigg(\Big[(2s-t_{k-\frac{1}{2}}-t_{k-1})(t_n-s)^{\alpha+1}\Big]_{t_k}^{t_{k+1}}-2\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha+1}ds\Bigg)\\
&=\frac{h^{\alpha+2}}{(2\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)}\Big[(\alpha+1)(\alpha+2)(n-k)^{\alpha}-3(\alpha+2)(n-k)^{\alpha+1}\\
&-(\alpha+2)(n-k-1)^{\alpha+1}-4(n-k-1)^{\alpha+2}+4(n-k)^{\alpha+2}\Big].
\end{aligned}$$

اذن:

$$\begin{aligned}
c_{k,n}&=\frac{2}{h^2\Gamma(\alpha)}[I+J]\\
&=\frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)}\Bigg(-(\alpha+2)\Big[(n-k+1)^{\alpha+1}+(n-k-1)^{\alpha+1}+6(n-k)^{\alpha+1}\Big]\\
&+4\Big[(n-k+1)^{\alpha+2}-(n-k-1)^{\alpha+2}\Big]\Bigg).
\end{aligned}$$

- من أجل $k=n$

$$c_{n,n}=\frac{2}{h^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-s)^{\alpha-1}(s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1})ds.$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$u=(s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1})\Rightarrow u^{'}=2s-t_{n-\frac{1}{2}}-t_{n-1}.$$

$$v^{'}=(t_n-s)^{\alpha-1}\Rightarrow v=\frac{-1}{\alpha}(t_n-s)^{\alpha}.$$

$$c_{n,n}=\frac{2}{h^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}\Big[-(s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1})(t_n-s)^{\alpha}\Big]_{t_{n-1}}^{t_n}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2}{h^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(2s-t_{n-\frac{1}{2}}-t_{n-1})(t_n-s)^{\alpha}ds\\
&=\frac{2}{h^{\alpha}\Gamma(\alpha+2)}\Big[-(2s-t_{n-\frac{1}{2}}-t_{n-1})(t_n-s)^{\alpha+1}\Big]_{t_{n-1}}^{t_n}+\frac{4}{h^{\alpha}\Gamma(\alpha+2)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-s)^{\alpha+1}ds\\
&=\frac{2}{h^{\alpha}\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{-h^{\alpha+2}}{2}-\left[\frac{2}{\alpha+2}(t_n-s)^{\alpha+2}\right]_{t_{n-1}}^{t_n}\right)\\
&=\frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)}(2-\alpha).
\end{aligned}
$$

- من أجل $0\leq k\leq n-1$ لدينا:

$$
\hat{c}_{k,n}=\frac{-4}{h^2\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha-1}(s-t_k)(s-t_{k+1})ds.
$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$
u=(s-t_k)(s-t_{k+1})\Rightarrow u^{'}=2s-t_k-t_{k+1}.
$$

$$
v^{'}=(t_n-s)^{\alpha-1}\Rightarrow v=\frac{-1}{\alpha}(t_n-s)^{\alpha}.
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_{k,n}&=\frac{4}{h^2\Gamma(\alpha)}\left(\left[\frac{1}{\alpha}(s-t_k)(s-t_{k+1})(t_n-s)^{\alpha}\right]_{t_k}^{t_{k+1}}-\Gamma(\alpha)\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{1}{\alpha}(2s-t_k-t_{k+1})(t_n-s)^{\alpha}ds\right)\\
&=\frac{4}{h^2\Gamma(\alpha+2)}\left(\Big[(2s-t_k-t_{k+1})(t_n-s)^{\alpha+1}\Big]_{t_k}^{t_{k+1}}-2\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{\alpha+1}ds\right)\\
&=\frac{4h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)}\Big((\alpha+2)\Big[(n-k)^{\alpha+1}+(n-k-1)^{\alpha+1}\Big]-2\Big[(n-k)^{\alpha+2}-(n-k-1)^{\alpha+2}\Big]\Big).
\end{aligned}
$$

إذن:

$$
c_{k,n}=\frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)}\begin{cases}
4\big[n^{\alpha+2}-(n-1)^{\alpha+2}\big]-(\alpha+2)\big[3n^{\alpha+1}+(n-1)^{\alpha+1}\big] & \\
+(\alpha+1)(\alpha+2)n^{\alpha}, & k=0,\\
& \\
-(\alpha+2)\big[(n-k+1)^{\alpha+1}+(n-k-1)^{\alpha+1}+6(n-k)^{\alpha+1}\big] & \\
+4\big[(n-k+1)^{\alpha+2}-(n-k-1)^{\alpha+2}\big], & 1\leq k\leq n-1,\\
& \\
(2-\alpha), & k=n.
\end{cases}
$$

• من أجل $0 \leq k \leq n-1$

$$\hat{c}_{k,n} = \frac{4h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+3)}\Big((\alpha+2)\big[(n-k)^{\alpha+1}+(n-k-1)^{\alpha+1}\big]-2\big[(n-k)^{\alpha+2}-(n-k-1)^{\alpha+2}\big]\Big).$$

4.2 التقريب العددي للمشتقات الكسرية

من تعريف المشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو من الرتبة $(m-1<\alpha<m)$ للدالة f نجد أنها تمثل التكامل الكسري من الرتبة $(m-\alpha)$ لذلك يمكننا توسيع الطرق العددية التي تحدثنا عنها في السابق لمحاكاة الحلول العددية لمشتقة كابيتو، هنا نقدم الصيغ العامة و بعض حالاتها الخاصة و التعديلات عليها.

$$^{C}D_0^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(s)ds.$$

بوضع $t=t_n$

$$\Big[{}^{C}D_0^{\alpha}f(t)\Big]_{t=t_n} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^{t_n}(t_n-s)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(s)ds,$$

$$\Big[{}^{C}D_0^{\alpha}f(t)\Big]_{t=t_n} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(s)ds. \qquad (4.2)$$

1.4.2 طريقة المستطيلات لتقريب المشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو

نقرب الدالة $f^{(m)}$ على كل مجال جزئي $[t_k,t_{k+1}]$ بكثير حدود من درجة 0 (ثابت).

$$f^{(m)}(s)|_{[t_k,t_{k+1}]} \approx f^{(m)}(t_k).$$

بالتعويض في (4.2) نجد:

$$\begin{aligned}\Big[{}^{C}D_0^{\alpha}f(t)\Big]_{t=t_n} &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(s)ds\\ &\approx \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(t_k)ds,\end{aligned}$$

و منه نجد

$$\left[{}^{C}D_{0}^{\alpha}f(t)\right]_{t=t_n} \approx \sum_{k=0}^{n-1} V_{n-k-1} f^{(m)}(t_k). \tag{5.2}$$

حيث:

$$V_K = \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}\left((k+1)^{m-\alpha} - k^{m-\alpha}\right).$$

الصيغة (5.2) تمثل الصيغة المستطيلة من اليسار للمشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو.
عند أخذ

$$f^{(m)}(s)|_{[t_k,t_{k+1}]} \approx f^{(m)}(t_{k+1}).$$

نجد

$$\left[{}^{C}D_{0}^{\alpha}f(t)\right]_{t=t_n} \approx \sum_{k=0}^{n-1} V_{n-k-1} f^{(m)}(t_{k+1}). \tag{6.2}$$

الصيغة (6.2) تمثل الصيغة المستطيلة من اليمين للمشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو ومنه نجد الصيغة المستطيلة العامة للمشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو تكون من الشكل

$$\left[{}^{C}D_{0}^{\alpha}f(t)\right]_{t=t_n} \approx \sum_{k=0}^{n-1} V_{n-k-1} f^{(m)}(t_k + (1-\theta)h), \qquad 0 \le \theta \le 1. \tag{7.2}$$

إذا كانت المشتقة من الرتبة m للدالة f معروفة فإن الصيغة (7.2) توفر تنفيذا سهلا للطريقة لكنها في الكثير من الأحيان تكون غير معروفة لذا من الضروري دمج (7.2) و طرق الحساب العددية للمشتقة الكلاسيكية لإعطاء الصيغ الأكثر ملاءمة و من أجل توضيح الطريقة العددية نعبر عنها ب:

$$f^{(1)}(t_k) = \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{h}.$$

$$f^{(2)}(t_k) = \frac{f(t_{k+1}) - 2f(t_k) + f(t_{k-1})}{h}.$$

2.4.2 طريقة شبه المنحرف لتقريب المشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو

في مجال جزئي $[t_k, t_{k+1}]$ نقرب الدالة $f^{(m)}$ بكثير حدود الإستقطاب من الدرجة الأولى.

$$f^{(m)}(s)|_{[t_k,t_{k+1}]} \approx \frac{t_{k+1}-s}{t_{k+1}-t_k} f^{(m)}(t_k) + \frac{s-t_k}{t_{k+1}-t_k} f^{(m)}(t_{k+1}).$$

بالتعويض في (4.2) نجد:

$$
\begin{aligned}
\left[{}^C D_0^\alpha f(t)\right]_{t=t_n} &\approx \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{m-\alpha-1} \left[\frac{t_{k+1}-s}{t_{k+1}-t_k} f^{(m)}(t_k) + \frac{s-t_k}{t_{k+1}-t_k} f^{m}(t_{k+1})\right] ds \\
&= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)} \Bigg[\int_{t_0}^{t_1} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (t_1 - s) f^{(m)}(t_0) ds \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (s - t_0) f^{(m)}(t_1) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (t_2 - s) f^{(m)}(t_1) ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (s - t_1) f^{(m)}(t_2) ds + \ldots + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (t_{n-1} - s) f^{(m)}(t_{n-2}) ds \\
&+ \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (s - t_{n-2}) f^{(m)}(t_{n-1}) ds + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (t_n - s) f^{(m)}(t_{n-1}) ds \\
&+ \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (s - t_{n-1}) f^{(m)}(t_n) ds \Bigg] \\
&= \sum_{k=0}^{n} W_{k,n} f^{m}(t_k).
\end{aligned}
$$

حيث:

$$
W_{k,n} = \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)} \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (t_1 - s) ds, & k = 0, \\ \\ \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (s - t_{k-1}) ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (t_{k+1} - s) ds, & 1 \le k \le n-1, \\ \\ \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (s - t_{n-1}) ds, & k = n. \end{cases}
$$

- من أجل $k = 0$ نجد:

$$
W_{0,n} = \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^{t_1} (t_n - s)^{m-\alpha-1} (t_1 - s) ds.
$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$
u = t_1 - s \Rightarrow u^{'} = -1.
$$

$$
v^{'} = (t_n - s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{m-\alpha} (t_n - s)^{m-\alpha}.
$$

إذن:

$$
W_{0,n} = \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)} \left(\left[\frac{-1}{m-\alpha} (t_n - s)^{m-\alpha} (t_1 - s) \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{m-\alpha} (t_n - s)^{m-\alpha} ds \right)
$$

$$= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha+1)}\left(n^{m-\alpha}h^{m-\alpha+1} + \left[\frac{1}{m-\alpha+1}(t_n-s)^{m-\alpha+1}\right]_{t_0}^{t_1}\right)$$
$$= \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+2)}((n-1)^{m-\alpha+1} - n^{m-\alpha}(n-m+\alpha-1)).$$

- من أجل $1 \leq k \leq n-1$ لدينا:

$$W_{k,n} = \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{k-1})ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(t_{k+1}-s)ds\right].$$

نضع:

$$I = \int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{k-1})ds.$$
$$J = \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(t_{k+1}-s)ds.$$

أولا حساب I

$$I = \int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{k-1})ds.$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$u = s - t_{k-1} \Rightarrow u^{'} = 1.$$
$$v^{'} = (t_n-s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}.$$

$$I = \left[\frac{-1}{m-\alpha}(s-t_{k-1})(t_n-s)^{m-\alpha}\right]_{t_{k-1}}^{t_k} + \frac{1}{m-\alpha}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{m-\alpha}ds$$
$$= \frac{1}{m-\alpha}\left(-(n-k)^{m-\alpha}h^{m-\alpha+1} - \left[\frac{1}{(m-\alpha+1)}(t_n-s)^{m-\alpha+1}\right]_{t_{k-1}}^{t_k}\right)$$
$$= \frac{h^{m-\alpha+1}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)}\Big(-(m-\alpha+1)(n-k)^{m-\alpha} - (n-k)^{m-\alpha+1} + (n-k+1)^{m-\alpha+1}\Big).$$

ثانيا حساب J

$$J = \int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(t_{k+1}-s)ds.$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$u = t_{k+1} - s \Rightarrow u^{'} = -1.$$
$$v^{'} = (t_n-s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}.$$

إذن:

$$\begin{aligned}
J &= \left[\frac{-1}{m-\alpha}(t_{k+1}-s)(t_n-s)^{m-\alpha}\right]_{t_k}^{t_{k+1}} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}ds \\
&= \frac{1}{m-\alpha}\left((n-k)^{m-\alpha}h^{m-\alpha+1} + \left[\frac{1}{m-\alpha+1}(t_n-s)^{m-\alpha+1}\right]_{t_k}^{t_{k+1}}\right) \\
&= \frac{h^{m-\alpha+1}}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)}\Big((m-\alpha+1)(n-k)^{m-\alpha} - (n-k)^{m-\alpha+1} + (n-k-1)^{m-\alpha+1}\Big).
\end{aligned}$$

و منه:

$$\begin{aligned}
W_{k,n} &= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)}\Big[I+J\Big] \\
&= \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+2)}\Big[(n-k+1)^{m-\alpha+1} + (n-k-1)^{m-\alpha+1} - 2(n-k)^{m-\alpha+1}\Big].
\end{aligned}$$

- من أجل $k=n$

$$W_{n,n} = \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{n-1})ds.$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$u = s - t_{n-1} \Rightarrow u^{'} = 1.$$

$$v^{'} = (t_n-s)^{m-\alpha-1} \Rightarrow v = \frac{-1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}.$$

و منه:

$$\begin{aligned}
W_{n,n} &= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha)}\left(\left[\frac{-1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}(s-t_{n-1})\right]_{t_{n-1}}^{t_n} + \frac{1}{m-\alpha}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-s)^{m-\alpha}ds\right) \\
&= \frac{1}{h\Gamma(m-\alpha+1)}\left[\frac{-1}{m-\alpha+1}(t_n-s)^{m-\alpha+1}\right]_{t_{n-1}}^{t_n} \\
&= \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+2)}.
\end{aligned}$$

إذن:

$$W_{k,n} = \frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+2)} \begin{cases} (n-1)^{m-\alpha+1} - n^{m-\alpha}(n-m+\alpha-1), & k=0, \\ (n-k+1)^{m-\alpha+1} + (n-k-1)^{m-\alpha+1} - 2(n-k)^{m-\alpha+1}, & 1 \leq k \leq n-1, \\ 1, & k=n. \end{cases}$$

3.4.2 طريقة سيمسون لتقريب المشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو

في هذه الطريقة نقرب $f^{(m)}$ بكثير حدود من الدرجة الثانية في كل مجال جزئي $[t_k, t_{k+1}]$.

$$f^{(m)}(s)|_{[t_k,t_{k+1}]} \approx \frac{(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})}{(t_k-t_{k+\frac{1}{2}})(t_k-t_{k+1})} f^{(m)}(t_k) + \frac{(s-t_k)(s-t_{k+1})}{(t_{k+\frac{1}{2}}-t_k)(t_{k+\frac{1}{2}}-t_{k+1})} f^{(m)}(t_{k+\frac{1}{2}})$$
$$+ \frac{(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_k)}{(t_{k+1}-t_{k+\frac{1}{2}})(t_{k+1}-t_k)} f^{(m)}(t_{k+1}).$$

و منه بالتعويض في (4.2) نجد:

$$\left[{}^C D_0^\alpha f(t)\right]_{t=t_n} \approx \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n-s)^{m-\alpha-1} \left[\frac{(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})}{(t_k-t_{k+\frac{1}{2}})(t_k-t_{k+1})} f^{(m)}(t_k) \right.$$
$$\left. + \frac{(s-t_k)(s-t_{k+1})}{(t_{k+\frac{1}{2}}-t_k)(t_{k+\frac{1}{2}}-t_{k+1})} f^{(m)}(t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_k)}{(t_{k+1}-t_{k+\frac{1}{2}})(t_{k+1}-t_k)} f^{(m)}(t_{k+1}) \right] ds$$
$$= \frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha)} \left(\int_{t_0}^{t_1} (t_n-s)^{m-\alpha-1} \left[(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1) f^{(m)}(t_0) - 2(s-t_0)(s-t_1) f^{(m)}(t_{\frac{1}{2}}) \right. \right.$$
$$\left. + (s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_0) f^{(m)}(t_1) \right] ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_n-s)^{m-\alpha-1} \left[(s-t_{\frac{3}{2}})(s-t_2) f^{(m)}(t_1) \right.$$
$$\left. - 2(s-t_1)(s-t_2) f^{(m)}(t_{\frac{3}{2}}) + (s-t_{\frac{3}{2}})(s-t_1) f^{(m)}(t_2) \right] ds + \dots$$
$$+ \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n-s)^{m-\alpha-1} \left[(s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_n) f^{(m)}(t_{n-1}) - 2(s-t_{n-1})(s-t_n) f^{(m)}(t_{n-\frac{1}{2}}) \right.$$
$$\left. \left. + (s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1}) f^{(m)}(t_n) \right] ds \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} e_{k,n} f^{(m)}(t_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{e}_{k,n} f^{(m)}(t_{k+\frac{1}{2}}).$$

حيث:

$$e_{k,n}=\frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha)}\begin{cases}\int_{t_0}^{t_1}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)ds, & k=0,\\ \int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{k-\frac{1}{2}})(s-t_{k-1})ds \\ +\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1}), & 1\leq k\leq n-1,\\ \int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1})ds, & k=n.\end{cases}$$

و

$$\hat{e}_{k,n}=\frac{-4}{h^2\Gamma(m-\alpha)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_k)(s-t_{k+1})ds \qquad ,0\leq k\leq n-1.$$

• من أجل $k=0$ لدينا:

$$e_{0,n}=\frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha)}\int_{t_0}^{t_1}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)ds.$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$u=(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)\Rightarrow u^{'}=2s-t_{\frac{1}{2}}-t_1.$$

$$v^{'}=(t_n-s)^{m-\alpha-1}\Rightarrow v=\frac{-1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}.$$

و منه:

$$\begin{aligned}e_{0,n}&=\frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha)}\int_{t_0}^{t_1}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)ds\\&=\frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha+1)}\left(\left[-(t_n-s)^{m-\alpha}(s-t_{\frac{1}{2}})(s-t_1)\right]_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}(t_n-s)^{m-\alpha}(2s-t_{\frac{1}{2}}-t_1)ds\right)\\&=\frac{n^{m-\alpha}h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}-\frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha+2)}\left(\left[(2s-t_{\frac{1}{2}}-t_1)(t_n-s)^{m-\alpha+1}\right]_{t_0}^{t_1}-2\int_{t_0}^{t_1}(t_n-s)^{m-\alpha+1}ds\right)\\&=\frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+3)}\Bigg[4\Big(n^{m-\alpha+2}-(n-1)^{m-\alpha+2}\Big)-(m-\alpha+2)\Big(3n^{m-\alpha+1}+(n-1)^{m-\alpha+1}\Big)\\&+(m-\alpha+1)(m-\alpha+2)n^{m-\alpha}\Bigg].\end{aligned}$$

• من أجل $1\leq k\leq n-1$

$$e_{k,n}=\frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha)}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{k-\frac{1}{2}})(s-t_{k-1})ds\right.$$

$$+\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})\Big).$$

نضع:

$$I=\int_{t_{k-1}}^{t_k}(s-t_{k-\frac{1}{2}})(s-t_{k-1})(t_n-s)^{m-\alpha-1}ds.$$

$$J=\int_{t_k}^{t_{k+1}}(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})(t_n-s)^{m-\alpha-1}ds.$$

أولا حساب I

$$I=\int_{t_{k-1}}^{t_k}(s-t_{k-\frac{1}{2}})(s-t_{k-1})(t_n-s)^{m-\alpha-1}ds.$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$u=(s-t_{k-\frac{1}{2}})(s-t_{k-1})\Rightarrow u^{'}=2s-t_{k-\frac{1}{2}}-t_{k-1}.$$

$$v^{'}=(t_n-s)^{m-\alpha-1}\Rightarrow v=\frac{-1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}.$$

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{m-\alpha}\Bigg(\Big[-(s-t_{k-\frac{1}{2}})(s-t_{k-1})(t_n-s)^{m-\alpha}\Big]_{t_{k-1}}^{t_k}+\int_{t_{k-1}}^{t_k}(2s-t_{k-\frac{1}{2}}-t_{k-1})(t_n-s)^{m-\alpha}ds\Bigg)\\
&=\frac{-1}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)}\Bigg(\Big[(2s-t_{k-\frac{1}{2}}-t_{k-1})(t_n-s)^{m-\alpha+1}\Big]_{t_{k-1}}^{t_k}-2\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_n-s)^{m-\alpha+1}ds\Bigg)\\
&-\frac{h^{m-\alpha+2}(n-k)^{m-\alpha}}{2(m-\alpha)}\\
&=\frac{h^{m-\alpha+2}}{2(m-\alpha)(m-\alpha+1)(m-\alpha+2)}\Big[-(m-\alpha+1)(m-\alpha+2)(n-k)^{m-\alpha}\\
&-3(m-\alpha+2)(n-k)^{m-\alpha+1}-(m-\alpha+2)(n-k+1)^{m-\alpha+1}-4(n-k)^{m-\alpha+2}+4(n-k+1)^{m-\alpha+2}\Big].
\end{aligned}$$

ثانيا حساب J

$$J=\int_{t_k}^{t_{k+1}}(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})(t_n-s)^{m-\alpha-1}ds.$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$u=(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})\Rightarrow u^{'}=2s-t_{k+\frac{1}{2}}-t_{k+1}.$$

$$v^{'}=(t_n-s)^{m-\alpha-1}\Rightarrow v=\frac{-1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}.$$

$$J=\frac{1}{m-\alpha}\Bigg(\Bigg[-(s-t_{k+\frac{1}{2}})(s-t_{k+1})(t_n-s)^{m-\alpha}\Bigg]_{t_k}^{t_{k+1}}$$
$$+\int_{t_k}^{t_{k+1}}(2s-t_{k+\frac{1}{2}}-t_{k+1})(t_n-s)^{m-\alpha}ds\Bigg)$$
$$=\frac{-1}{(m-\alpha)(m-\alpha+1)}\Bigg(\Bigg[(2s-t_{k+\frac{1}{2}}-t_{k+1})(t_n-s)^{m-\alpha+1}\Bigg]_{t_k}^{t_{k+1}}-2\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{m-\alpha+1}ds\Bigg)$$
$$+\frac{h^{m-\alpha+2}(n-k)^{m-\alpha}}{2(m-\alpha)}$$
$$=\frac{h^{m-\alpha+2}}{2(m-\alpha)(m-\alpha+1)(m-\alpha+2)}\Bigg((m-\alpha+1)(m-\alpha+2)(n-k)^{m-\alpha}+4(n-k)^{m-\alpha+2}$$
$$-(m-\alpha+2)(n-k-1)^{m-\alpha+1}-4(n-k-1)^{m-\alpha+2}-3(m-\alpha+2)(n-k)^{m-\alpha+1}\Bigg).$$

إذن:

$$e_{k,n}=\frac{2}{h^2\Gamma(m-\alpha)}[I+J]$$
$$=\frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+3)}\Bigg(-(m-\alpha+2)\Bigg[(n-k+1)^{m-\alpha+1}+(n-k-1)^{m-\alpha+1}+6(n-k)^{m-\alpha+1}\Bigg]$$
$$+4\Bigg[(n-k+1)^{m-\alpha+2}-(n-k-1)^{m-\alpha+2}\Bigg]\Bigg).$$

- من أجل $k=n$

$$e_{n,n}=\frac{2}{h^{m-\alpha}\Gamma(m-\alpha)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1}).$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$u=(s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1})\Rightarrow u^{'}=2s-t_{n-\frac{1}{2}}-t_{n-1}.$$

$$v^{'}=(t_n-s)^{m-\alpha-1}\Rightarrow v=\frac{-1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}.$$

$$e_{n,n}=\frac{2}{h^{m-\alpha}\Gamma(m-\alpha+1)}\Bigg[-(s-t_{n-\frac{1}{2}})(s-t_{n-1})(t_n-s)^{m-\alpha}\Bigg]_{t_{n-1}}^{t_n}$$
$$+\frac{2}{h^{m-\alpha}\Gamma(m-\alpha+1)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(2s-t_{n-\frac{1}{2}}-t_{n-1})(t_n-s)^{m-\alpha}ds$$
$$=\frac{2}{h^{m-\alpha}\Gamma(m-\alpha+2)}\Bigg[-(2s-t_{n-\frac{1}{2}}-t_{n-1})(t_n-s)^{m-\alpha+1}\Bigg]_{t_{n-1}}^{t_n}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{4}{h^{m-\alpha}\Gamma(m-\alpha+2)}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-s)^{m-\alpha+1}ds\\
&=\frac{2}{h^{m-\alpha}\Gamma(m-\alpha+2)}\left(\frac{-h^{m-\alpha+2}}{2}-\left[\frac{2}{m-\alpha+2}(t_n-s)^{m-\alpha+2}\right]_{t_{n-1}}^{t_n}\right)\\
&=\frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+3)}(2-m+\alpha).
\end{aligned}
$$

- من أجل $0\leq k\leq n-1$

$$\hat{e}_{k,n}=\frac{-4}{h^2\Gamma(m-\alpha)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{m-\alpha-1}(s-t_k)(s-t_{k+1})ds.$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$u=(s-t_k)(s-t_{k+1})\Rightarrow u^{'}=2s-t_k-t_{k+1}.$$

$$v^{'}=(t_n-s)^{m-\alpha-1}\Rightarrow v=\frac{-1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}.$$

$$
\begin{aligned}
\hat{e}_{k,n}&=\frac{4}{h^2\Gamma(m-\alpha)}\left[(s-t_k)(s-t_{k+1})\frac{1}{m-\alpha}(t_n-s)^{m-\alpha}\right]_{t_k}^{t_{k+1}}\\
&-\frac{4}{h^2\Gamma(m-\alpha)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{1}{m-\alpha}(2s-t_k-t_{k+1})(t_n-s)^{m-\alpha}ds\\
&=\frac{4}{h^2\Gamma(m-\alpha)}\left(\left[(2s-t_k-t_{k+1})(t_n-s)^{m-\alpha+1}\right]_{t_k}^{t_{k+1}}-2\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_n-s)^{m-\alpha+1}ds\right)\\
&=\frac{4h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+3)}\Bigg[(m-\alpha+2)\Big((n-k)^{m-\alpha+1}+(n-k-1)^{m-\alpha+1}\Big)-2\Big((n-k)^{m-\alpha+2}\\
&-(n-k-1)^{m-\alpha+2}\Big)\Bigg].
\end{aligned}
$$

إذن:

$$
e_{k,n}=\frac{h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+3)}\begin{cases}
4\Big(n^{m-\alpha+2}-(n-1)^{m-\alpha+2}\Big)-(m-\alpha+2)\Big(3n^{m-\alpha+1}+(n-1)^{m-\alpha+1}\Big)\\
+(m-\alpha+1)(m-\alpha+2)n^{m-\alpha}, & k=0,\\
\\
-(m-\alpha+2)\Big((n-k+1)^{m-\alpha+1}+(n-k-1)^{m-\alpha+1}+6(n-k)^{m-\alpha+1}\Big)\\
+4\Big((n-k+1)^{m-\alpha+2}-(n-k-1)^{m-\alpha+2}\Big), & 1\leq k\leq n-1,\\
\\
(2-m+\alpha), & k=n.
\end{cases}
$$

و من أجل $0 \leq k \leq n-1$

$$\hat{e}_{k,n}\frac{4h^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+3)}\Bigg[(m{-}\alpha{+}2)\Bigg((n{-}k)^{m-\alpha+1}{+}(n{-}k{-}1)^{m-\alpha+1}\Bigg){-}2\Bigg((n{-}k)^{m-\alpha+2}{-}(n{-}k{-}1)^{m-\alpha+2}\Bigg)\Bigg].$$

الفصل 3

نتائج عددية

1.3 مقدمة

في هذا الفصل نقدم أمثلة عددية لمقارنة النتائج الدقيقة مع النتائج التقريبية المحصل عليها بواسطة طريقة المستطيلات، طريقة شبه المنحرف و طريقة سيمسون لتقريب التكامل الكسري لريمان-ليوفيل والمشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو بالإضافة إلى مدى تأثير طول الخطوة في إعطاء نتائج ممتازة و دقيقة جدا.

2.3 أمثلة عددية لتقريب التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل

مثال 1.2.3

نعلم أن التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل من الرتبة $\alpha > 0$ للدالة f يعطى بالعبارة التالية:

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

بأخذ الدالة $f(t) = t^\beta$ حيث $t \in [0,1]$

تصبح عبارة الحل الدقيق من الشكل:

$$I_0^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}.$$

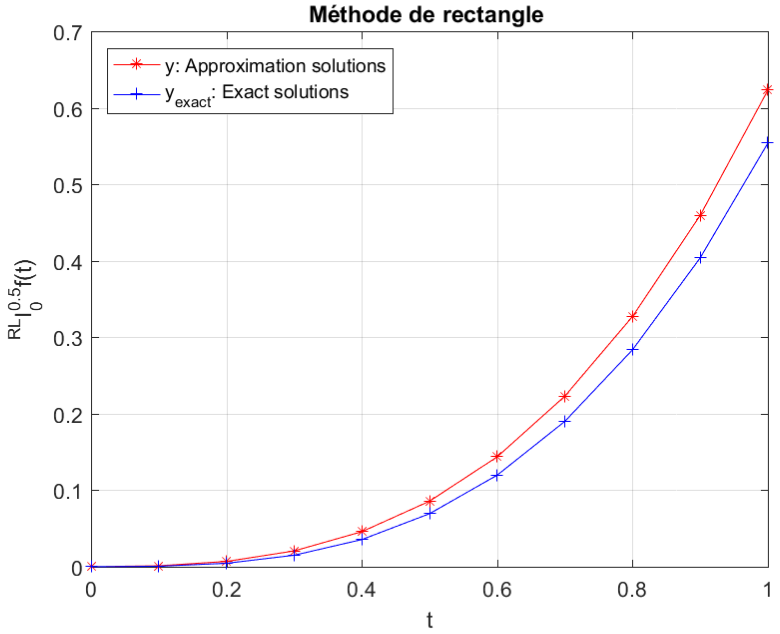
سنقوم في هذا المثال بايجاد الحل التقريبي لتكامل هاته الدالة f من أجل $\alpha = 0.5$ و $\beta = 2.5$ باستعمال الطرق الثلاث. بعد ذلك نقارن بين الحل الدقيق و الحل التقريبي للدالة f من أجل قيم مختلفة $h = 0.1$، $h = 0.01$ و $h = 0.001$ عند كل t لتبيان أهمية طول الخطوة $h = \frac{1}{N}$ في الاقتراب من الحل الدقيق، سنعطي الخطأ المطلق في جدول وذلك من أجل كل طريقة من الطرق الثلاث.

بتطبيق طريقة المستطيل نحصل على النتائج التالية:

n	t	$Val.exact$	$Val.app$	$Erreur$
1	0	0	0	0
2	0.1	0.000553	0.001128	5.744873E − 04
3	0.2	0.004431	0.006850	2.419331E − 03
4	0.3	0.014955	0.020592	5.637208E − 03
5	0.4	0.035449	0.045725	1.027607E − 02
6	0.5	0.069236	0.085602	1.636568E − 02
7	0.6	0.119640	0.143567	2.392688E − 02
8	0.7	0.189984	0.222960	3.297532E − 02
9	0.8	0.283592	0.327115	4.352331E − 02
10	0.9	0.403787	0.459368	5.558088E − 02
11	1	0.553891	0.623048	6.915639E − 02

جدول 1.3: الحل التقريبي باستخدام طريقة المستطيلات لـ$I_0^\alpha t^\beta$.

من خلال الجدول (1.3) نلاحظ أن الحلول التقريبية تقترب من الحلول الدقيقة بشكل مقبول.



شكل 1،3: المقارنة البيانية بين النتائج التقريبية و الدقيقة المحصل عليها بتطبيق طريقة المستطيلات لـ$I_0^{\alpha}t^{\beta}$.

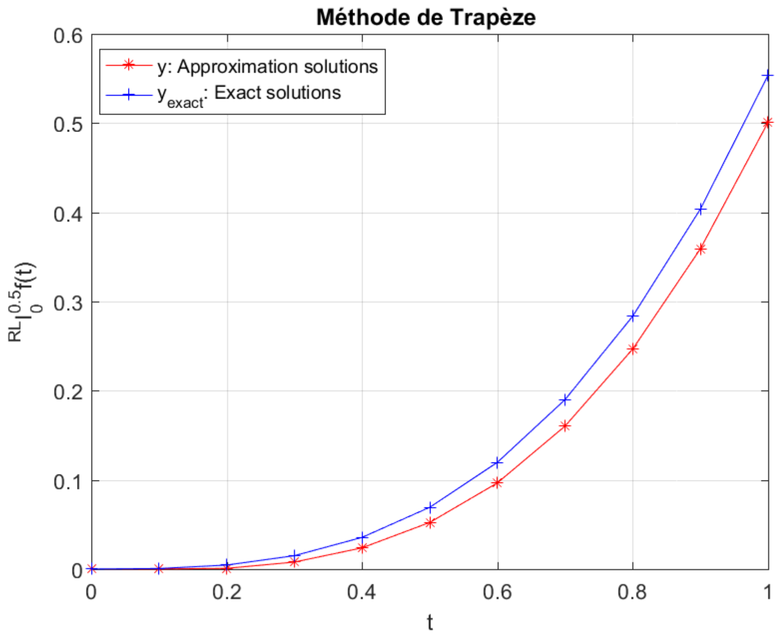
t	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
0	0	0	0
0.1	5.744873E − 04	6.915639E − 05	7.774145E − 06
0.2	2.419331E − 03	2.896070E − 04	3.168103E − 05
0.3	5.637208E − 03	6.663235E − 04	7.188873E − 05
0.4	1.027607E − 02	1.201171E − 03	1.284576E − 04
0.5	1.636568E − 02	1.895238E − 03	2.014225E − 04
0.6	2.392688E − 02	2.749261E − 03	2.908071E − 04
0.7	3.297532E − 02	3.763780E − 03	3.966286E − 04
0.8	4.352331E − 02	4.939218E − 03	5.189004E − 04
0.9	5.558088E − 02	6.275913E − 03	6.576334E − 04
1	6.915639E − 02	7.774145E − 03	8.128365E − 04

جدول 2،3: المقارنة بين الأخطاء المطلقة من أجل $h = 0.1$، 0.01، 0.001.

بتطبيق طريقة شبه المنحرف نتحصل على النتائج التالية:

n	t	$Val.Exact$	$Val.app$	$Erreur$
1	0	0	0	0
2	0.1	0.000553	0	5.538918E − 04
3	0.2	0.004431	0.000752	3.678881E − 03
4	0.3	0.014955	0.007780	7.174419E − 03
5	0.4	0.035449	0.023735	1.171317E − 02
6	0.5	0.069236	0.052193	1.704249E − 02
7	0.6	0.119640	0.096587	2.305291E − 02
8	0.7	0.189984	0.160311	2.967352E − 02
9	0.8	0.283592	0.246739	3.685267E − 02
10	0.9	0.403787	0.359236	4.455031E − 02
11	1	0.553891	0.501157	5.273412E − 02

جدول 3.3: الحل التقريبي باستخدام طريقة شبه المنحرف لـ$I_0^{\alpha}t^{\beta}$.



شكل 2.3: المقارنة البيانية بين النتائج التقريبية و الدقيقة المحصل عليها بتطبيق طريقة شبه المنحرف لـ$I_0^{\alpha}t^{\beta}$.

من خلال الجدول (3.3) نلاحظ أن الحلول التقريبية تقترب من الحلول الدقيقة بصفة أدق من الطريقة السابقة -طريقة المستطيلات-

t	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
0	0	0	0
0.1	5.538918E − 04	5.273412E − 05	1.839632E − 06
0.2	3.678881E − 03	1.568675E − 04	5.244967E − 06
0.3	7.174419E − 03	2.935284E − 04	9.665828E − 06
0.4	1.171317E − 02	4.563514E − 04	1.490754E − 05
0.5	1.704249E − 02	6.417062E − 04	2.085773E − 05
0.6	2.305291E − 02	8.471581E − 04	2.744060E − 05
0.7	2.967352E − 02	1.070926E − 03	3.460054E − 05
0.8	3.685267E − 02	1.311632E − 03	4.229445E − 05
0.9	4.455031E − 02	1.568173E − 03	5.048768E − 05
1	5.273412E − 02	1.839632E − 03	5.915155E − 05

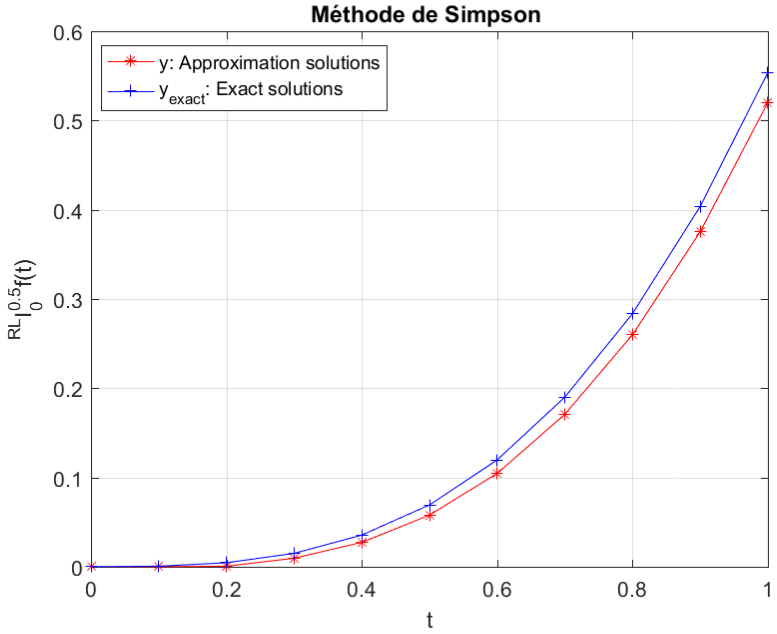
جدول 4.3: المقارنة بين الأخطاء المطلقة من أجل $h = 0.1$، 0.01، 0.001.

بتطبيق طريقة سيمسون نحصل على النتائج التالية:

n	t	$Val.Exact$	$Val.app$	$Erreur$
1	0	0	0	0
2	0.1	0.000553	0	5.538918E − 04
3	0.2	0.004431	0.000557	3.873398E − 03
4	0.3	0.014955	0.009502	5.453018E − 03
5	0.4	0.035449	0.027284	8.164540E − 03
6	0.5	0.069236	0.057805	1.143085E − 02
7	0.6	0.119640	0.104502	1.513810E − 02
8	0.7	0.189984	0.170756	1.922835E − 02
9	0.8	0.283592	0.259928	2.366394E − 02
10	0.9	0.403787	0.375369	2.841739E − 02
11	1	0.553891	0.520424	3.346731E − 02

جدول 5.3: الحل التقريبي بإستخدام طريقة سيمسون لـ$I_0^{\alpha}t^{\beta}$.

من خلال الجدول (5.3) نلاحظ أن الحلول التقريبية و الدقيقة تكون متقاربة جدا بدرجة تقارب أكثر من الطريقة التي تسبقها.



شكل 3.3: المقارنة البيانية بين النتائج التقريبية والدقيقة المحصل عليها بتطبيق طريقة سيمسون لـ$I_0^{\alpha}t^{\beta}$.

t	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
0	0	0	0
0.1	$5.538918\mathrm{E}-04$	$3.346731\mathrm{E}-05$	$1.120053\mathrm{E}-06$
0.2	$3.873398\mathrm{E}-03$	$9.745522\mathrm{E}-05$	$3.179666\mathrm{E}-06$
0.3	$5.453018\mathrm{E}-03$	$1.810303\mathrm{E}-04$	$5.848650\mathrm{E}-06$
0.4	$8.164540\mathrm{E}-03$	$2.803262\mathrm{E}-04$	$9.010175\mathrm{E}-06$
0.5	$1.143085\mathrm{E}-02$	$3.931532\mathrm{E}-04$	$1.259680\mathrm{E}-05$
0.6	$1.513810\mathrm{E}-02$	$5.180456\mathrm{E}-04$	$1.656304\mathrm{E}-05$
0.7	$1.922835\mathrm{E}-02$	$6.539325\mathrm{E}-04$	$2.087553\mathrm{E}-05$
0.8	$2.366394\mathrm{E}-02$	$7.999864\mathrm{E}-04$	$2.550841\mathrm{E}-05$
0.9	$2.841739\mathrm{E}-02$	$9.555430\mathrm{E}-04$	$3.044089\mathrm{E}-05$
1	$3.346731\mathrm{E}-02$	$1.120053\mathrm{E}-03$	$3.565576\mathrm{E}-05$

جدول 6.3: المقارنة بين الأخطاء المطلقة من أجل $h = 0.1$، 0.01، 0.001.

من خلال الجداول الثلاث(2.3)، (4.3)، (6.3)، نلاحظ أن الخطأ المطلق في الطرق الثلاث (طريقة المستطيلات طريقة شبه المنحرف و طريقة سيمسون) عند $h = 0.1$ أكبر منه عند $h = 0.01$ و $h = 0.001$ و منه نستنتج أنه كلما قللنا في سعة الخطوة h كلما كانت قيمة الخطأ صغيرة جدا و يؤول الحل التقريبي الى الحل الحقيقي.

3.3 أمثلة عددية لتقريب المشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو

مثال 1.3.3
نعلم أن المشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو من الرتبة $\alpha > 0$ للدالة f تعطى بالعبارة التالية:

$$^{C}D_0^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(s)ds.$$

بأخذ الدالة $f(t) = t^{\beta}$ حيث $t \in [0,1]$ تصبح عبارة الحل الدقيق من الشكل:

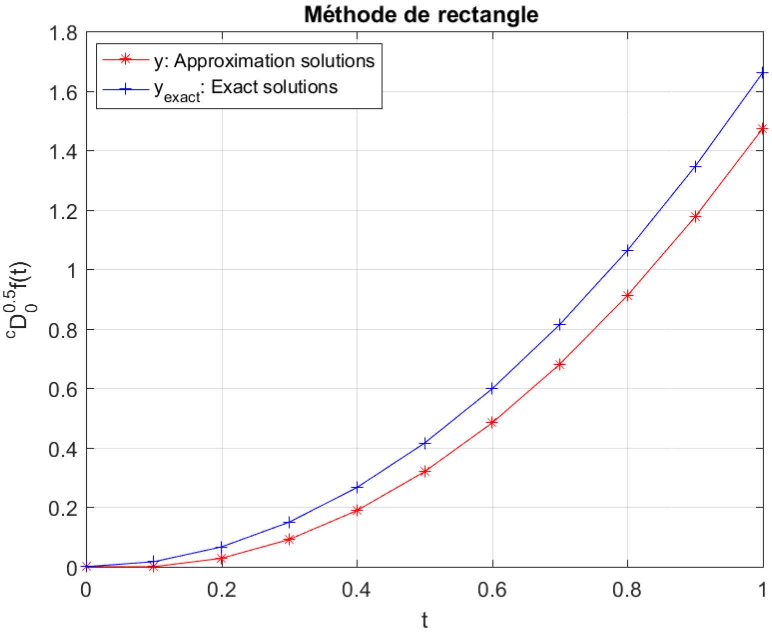
$$^{C}D_0^{\alpha}t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}t^{\beta-\alpha}.$$

سنقوم في هذا المثال بإيجاد الحل التقريبي لمشتقة كابيتو للدالة f من أجل $\alpha = 0.5$ و $\beta = 2.5$ باستعمال الطرق الثلاث. بعد ذلك نقارن بين الحل الدقيق و الحل التقريبي للدالة f من أجل قيم مختلفة $h = 0.1$، $h = 0.01$ و $h = 0.001$ عند كل t لتبيان أهمية طول الخطوة $h = \frac{1}{N}$ في الاقتراب من الحل الدقيق، سنعطي الخطأ المطلق في جدول وذلك من أجل كل طريقة من الطرق الثلاث.

بتطبيق طريقة المستطيلات نحصل على النتائج التالية:

n	t	$Val.Exact$	$Val.app$	$Erreur$
1	0	0	0	0
2	0.1	0.016616	0	0.016616
3	0.2	0.066467	0.028209	0.038257
4	0.3	0.149550	0.091473	0.058077
5	0.4	0.265868	0.188596	0.077271
6	0.5	0.415418	0.319310	0.096108
7	0.6	0.598203	0.483496	0.114706
8	0.7	0.814220	0.681092	0.133128
9	0.8	1.063472	0.912057	0.151414
10	0.9	1.345957	1.176365	0.169591
11	1	1.661675	1.473996	0.187679

جدول 7.3: الحل التقريبي باستخدام طريقة المستطيلات لـ $^{C}D_0^{\alpha}t^{\beta}$.



شكل 4.3: المقارنة البيانية بين النتائج التقريبية و الدقيقة المحصل عليها بتطبيق طريقة المستطيلات لـ ${}^{C}D_0^{\alpha}t^{\beta}$.

من خلال الجدول (7.3) نلاحظ أن الحلول التقريبية تقترب من الحلول الدقيقة بشكل مقبول.

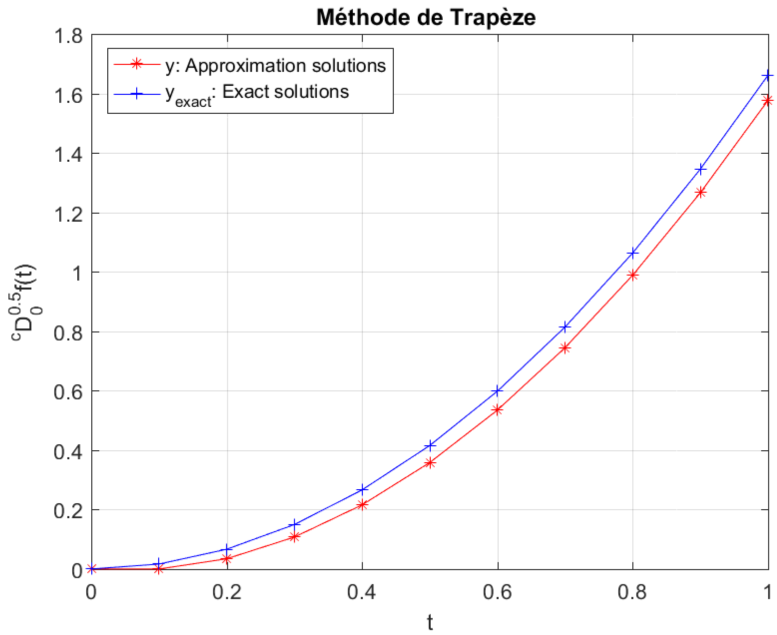
t	$h=0.1$	$h=0.01$	$h=0.001$
0	0	0	0
0.1	0.016616	1.876793E − 03	1.743863E − 04
0.2	0.038257	3.655987E − 03	3.442045E − 04
0.3	0.058077	5.407074E − 03	5.131710E − 04
0.4	0.077271	7.143876E − 03	6.816974E − 04
0.5	0.096108	8.871621E − 03	8.499428E − 04
0.6	0.114706	1.059296E − 02	1.017988E − 03
0.7	0.133128	1.230946E − 02	1.185883E − 03
0.8	0.151414	1.402213E − 02	1.353658E − 03
0.9	0.169591	1.573169E − 02	1.521335E − 03
1	0.187679	1.743863E − 02	1.688931E − 03

جدول 8.3: المقارنة بين الأخطاء المطلقة من أجل $h=0.1$، 0.01، 0.001.

بتطبيق طريقة شبه المنحرف نحصل على النتائج التالية:

n	t	$Val.Exact$	$Val.app$	$Erreur$
1	0	0	0	0
2	0.1	0.016616	0	1.661675E − 02
3	0.2	0.066467	0.034385	3.208103E − 02
4	0.3	0.149550	0.107400	4.215032E − 02
5	0.4	0.265868	0.215563	5.030489E − 02
6	0.5	0.415418	0.358067	5.735172E − 02
7	0.6	0.598203	0.534553	6.365009E − 02
8	0.7	0.814220	0.744822	6.939834E − 02
9	0.8	1.063472	0.988752	7.471991E − 02
10	0.9	1.345957	1.266259	7.969791E − 02
11	1	1.661675	1.577283	8.439148E − 02

جدول 9.3: الحل التقريبي باستخدام طريقة شبه المنحرف لـ$^{C}D_0^{\alpha}t^{\beta}$.



شكل 5.3: المقارنة البيانية بين النتائج التقريبية و الدقيقة المحصل عليها بتطبيق طريقة شبه المنحرف لـ$^{C}D_0^{\alpha}t^{\beta}$.

من خلال الجدول (9.3) نلاحظ أن الحلول التقريبية تقترب من الحلول الدقيقة بصفة أدق من الطريقة السابقة -طريقة المستطيلات-

t	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
0	0	0	0
0.1	1.661675E − 02	8.439148E − 04	2.786906E − 05
0.2	3.208103E − 02	1.219562E − 03	3.957245E − 05
0.3	4.215032E − 02	1.505759E − 03	4.854671E − 05
0.4	5.030489E − 02	1.746363E − 03	5.611032E − 05
0.5	5.735172E − 02	1.958023E − 03	6.277303E − 05
0.6	6.365009E − 02	2.149197E − 03	6.879601E − 05
0.7	6.939834E − 02	2.324887E − 03	7.433437E − 05
0.8	7.471991E − 02	2.488338E − 03	7.948911E − 05
0.9	7.969791E − 02	2.641800E − 03	8.433037E − 05
1	8.439148E − 02	2.786906E − 03	8.890922E − 05

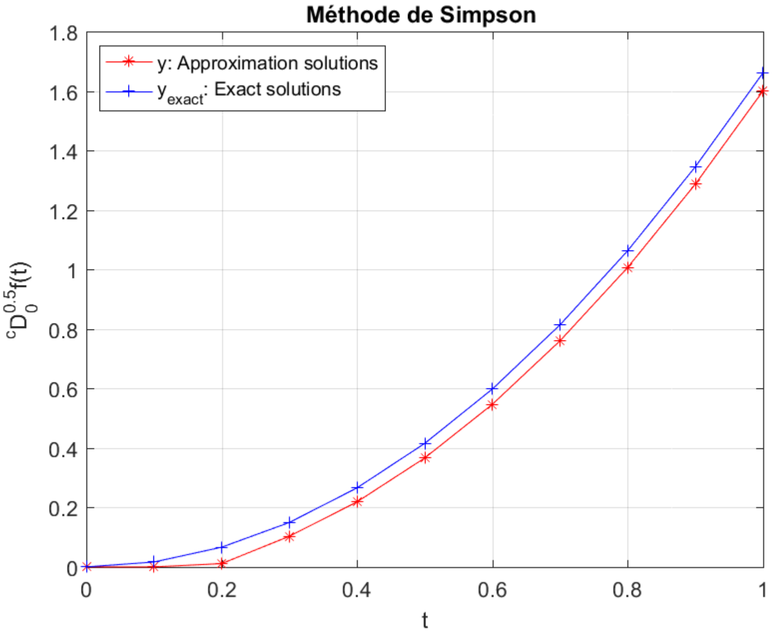
جدول 10.3: المقارنة بين الأخطاء المطلقة من أجل $h = 0.1$، 0.01، 0.001.

بتطبيق طريقة سيمسون نحصل على النتائج التالية:

n	t	$Val.Exact$	$Val.app$	$Erreur$
1	0	0	0	0
2	0.1	0.016616	0	1.661675E − 02
3	0.2	0.066467	0.011283	5.518322E − 02
4	0.3	0.149550	0.103223	4.632720E − 02
5	0.4	0.265868	0.218802	4.706594E − 02
6	0.5	0.415418	0.366383	4.903559E − 02
7	0.6	0.598203	0.546865	5.133755E − 02
8	0.7	0.814220	0.760498	5.372277E − 02
9	0.8	1.063472	1.007370	5.610225E − 02
10	0.9	1.345957	1.287516	5.844080E − 02
11	1	1.661675	1.600950	6.072454E − 02

جدول 11.3: الحل التقريبي باستخدام طريقة سيمسون لـ $^{C}D_0^{\alpha}t^{\beta}$.

من خلال الجدول (11.3) نلاحظ أن الحلول التقريبية و الحلول الدقيقة تكون متقاربة جدا بدرجة تقارب أكثر من الطريقة التي تسبقها -طريقة شبه المنحرف-



شكل 6،3: المقارنة البيانية بين النتائج التقريبية و الدقيقة المحصل عليها بتطبيق طريقة سيمسون ل$^{C}D_0^{\alpha}t^{\beta}$.

t	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
0	0	0	0
0.1	1.661675E − 02	6.072454E − 04	1.713759E − 05
0.2	5.518322E − 02	8.058023E − 04	2.408582E − 05
0.3	4.632720E − 02	9.664378E − 04	2.943789E − 05
0.4	4.706594E − 02	1.104361E − 03	3.395674E − 05
0.5	4.903559E − 02	1.227020E − 03	3.794119E − 05
0.6	5.133755E − 02	1.338552E − 03	4.154527E − 05
0.7	5.372277E − 02	1.441513E − 03	4.486074E − 05
0.8	5.610225E − 02	1.537615E − 03	4.794750E − 05
0.9	5.844080E − 02	1.628067E − 03	5.084722$texttt E$ − 05
1	6.072454E − 02	1.713759E − 03	5.359027E − 05

جدول 12،3: المقارنة بين الأخطاء المطلقة من أجل $h = 0.1$، 0.01، 0.001.

من خلال الجداول الثلاث (8،3)، (10،3)، (12،3)، نلاحظ أن الخطأ المطلق في الطرق الثلاث (طريقة المستطيلات، طريقة شبه المنحرف و طريقة سيمسون) عند $h = 0.1$ أكبر منه عند $h = 0.01$ و $h = 0.001$ و منه نستنتج أنه كلما قللنا في سعة الخطوة h كلما قلت قيمة الخطأ المطلق.

بمقارنة النتائج التقريبية مع النتائج الدقيقة لتقريب التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل و المشتقة الكسرية بمفهوم

كابيتو للدالة بإستعمال الطرق العددية (طريقة المستطيلات، طريقة شبه المنحرف و طريقة سيمسون) ومن خلال الجداول نلاحظ أن الخطأ المطلق في طريقة سيمسون أقل من الخطأ في طريقتي شبه المنحرف و المستطيلات أي أن طريقة سيمسون أدق من كلتا الطريقتين حتى عند تصغير الخطوة تعطي نتائج ممتازة.

ملاحظة: النتائج العددية في المثال المقدم تم الحصول عليها بإستعمال برنامج الماتلاب $MATLAB\ R2016a$.

خـــاتمة

أولى الباحثون في عصرنا هذا أهمية كبيرة في دراسة المشتقات و التكاملات الكسرية و هذا ما جعلنا نتخذ التقريبات التي تخصها كموضوع لمذكرتنا فقمنا أولا بتقديم نظرة عامة و شاملة حول الحساب الكسري ثم قدمنا ثلاث طرق عددية (طريقة المستطيلات، طريقة شبه المنحرف و طريقة سيمسون) لإيجاد تقريبات كل من التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل و المشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو و أتممنا هذه الدراسة بتقديم أمثلة عددية قمنا فيها بالمقارنة بين الحل التقريبي و الحل الدقيق عند تثبيت الخطوة و عند تغييرها فتوصلنا بهذا إلى العديد من النتائج من بينها: كلما قمنا بتقليص في سعة الخطوة كلما إقترب الحل التقريبي من الحل الدقيق و أن طريقة سيمسون هي الأدق من بين الطرق الثلاث في كل من التكامل الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل و المشتقة الكسرية بمفهوم كابيتو.

قائمة المراجع

[1] T. Amele, *Etude analytique des équations différentielles fractionnaires et applications*, Thèse De Doctorat LMD, Mostaganem, (**2015-2016**).

[2] T. Blaszczyk, J. Siedlecki, M. Ciesielski, *Numerical algorithms for approximation of fractional integral operators based on quadratic interpolation.* Math Meth Appl Sci, (**2018**).

[3] N. Brahim, *Méthodes numériques pour la résolution d'équations différentielles d'ordre non entier*, Mémoire de Master, (**2020-2021**).

[4] S. Das, *Functional Fractional Calculus*, Soringer-Verlag Berlin Heidelbert, (**2011**).

[5] I. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed, Yu. Luchko, *Algorithms for the Fractional Calculus :A Selection of Numerical Methods*, Preprint submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, (**2003**).

[6] A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*, L'ecole polytechnique de Montréal, (**2016**).

[7] M. K. Ishteva, *Praperties and Applications of the Caputo Fractional Operator*, Department of Mathematics, Karlsruhe University, Bulgaria, (**2005**).

[8] F. Jedrzejewski, *Introduction aux méthodes numériques*, Springer, Paris, (**2005**).

[9] A. J. Jerri, *Introduction to integral equations with applications*, John Wiley and Sons, INC, (**1999**).

[10] K. Kamlesh, K. Rajesh, Shiva Sharma. *Approximtions of fractional integrals and Caputo derivatives with appliction in solving Abel's integral equations*, Journal of King Saud University, (**2018**).

[11] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujllo. *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, Elsevier, (**2006**).

[12] R. Kress. *An approximation of the fractional integrals using quadratic interpolation*, NewYork. (**1998**).

[13] C. Li, M. Cai, *Theory and Numerical Approximations of Fractional Integrals and Derivatives*, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia. Shanghai University, February, (**2019**).

[14] K. Meriem, *Problèmes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire*, Mémoire de master, Saida, (**2016-2017**).

[15] Z. Odibat.*Approximations of fractional integrals and Caputo fractional derivatives*, Appliedmathematics and computation, 178: 527-533, (**2006**).

[16] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, New York, (**1999**).

[17] M. Rehman, I. Amna, S. Umer, *A quadrature method for numerical solutions of-fractional differential equations*, Applied Mathematics and Computation, 307: 38-49, (**2017**).