الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientfiique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي- سكيكدة
Ecole Normale Supérieure d'eneignement technologique, Skikda

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

Département de Mathématiques et informatique

مُذكّرَة تخَرج لنيَل شهَادة أُستَاذ التَّعِليم الثانوي

نظرية أسكولي أرزيلا وتطبيقاتها

من إعداد الطالبة :

★ ناصر شهيناز

تحت إشراف الأستاذ :

★ بن حيونة صالح

نوقشت من طرف لجنة المناقشة :

♦ مرابط فريدة .... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة .... رئيسة.

♦ غمراني سارة .... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة .... مناقشة.

♦ صغير فاطمة الزهراء .... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة .... مناقشة.

السنة الجامعية : 2024/2023
دفعة جوان 2024

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

السلام عليكم و رحمة الله و بركاته

تحية طيبة وبعد

❖ شكـــر و تقديـــــر

الحمد لله واسع العطاء على فضله وكمال نعمته،إذ منّ عليّ بإتمام مذكرتي وبلغني هذه اللحظات.

-إلى والداي اللذان قدما الكثير ومزالا يقدمان.

-إلى الذين آمنوا بي قبل أن أؤمن بنفسي.

-إلى الأساتذة الذين غرسوا في قلبي حبهم قبل حب مادتهم وكانوا لنا آباء وأمهات قبل أن يكونوا معلمي مادة تعليمية وتركوا أثرا طيبا لا ينسى.

-إلى كل من ساهم بحق في وصولي إلى هنا بدءا من المدرسة الإبتدائية إلى أساتذة المدرسة العليا للأساتذة سكيكدة-عزابة-.

-كما أتقدم بجزيل الشكر والعرفان إلى الأستاذ "بن حيونة صالح"على مجهوداته المبذولة وتوجيهاته طيلة الفترة الماضية.

-إلى الأستاذ "فراق عزوز"والأستاذ "قواسمية محمد"والأستاذ "بوسنة جلال" على التوجيه والمساعدة في كل مرة احتجت ذلك،بارك الله فيهم جميعا وزادهم بسطة في العلم والجسم.

-إلى زميلتي أستاذة التعليم المتوسط"تامي فاطمة الزهراء"التي لم تبخل عليّ بشيء، ودعمتني طوال السنة بارك الله فيك ونفع بك.

-كما أشكر أعضاء اللجنة لقبولهم مناقشة مذكرة تخرجي.

-وأخيرا:

-إلى كل معلمي الناس الخير أينما كانوا وأينما حلوا..

❖ إهداء

من قال أنا لها نالها،وأنا لها وان أبت رغما عنها أتيت بها،نلتها وعانقت مجدا عظيما لم يكن الحلم قريبا،ولا الطريق سهلا ولكني وصلت،فالحمد لله الذي وهبني التوفيق والسداد وأعانني على إتمام هذا العمل المتواضع،وها أنا اليوم أقف على ناصية حلم لطالما حاربت لأجله لأحصد فخر أبي وأمي.

-إلى نفسي الطموحة التي تحملت كل العثرات ولم تستسلم يوما.

-إلى الذي ضحى وسهر من أجل تربيتي وتعليمي،ومن شجعني وساندني ولولاه لما أكملت الطريق سندي وقدوتي"أبي الغالي".

-إلى نور حياتي وأغلى ما أملك،التي ساندتني في كل الخطوات وسهرت ليالي من أجل راحتي،ورافقتني بدعائها"أمي الحبيبة".

هذا نجاحكما عسى أن يرفع رأسيكما عاليا.

-إلى من امتدت أياديهم وقت ضعفي،ضلعي الثابت وأمان قلبي أختي الوحيدة"صفاء"وحبيب قلبي أخي الصغير "حبيب الرحمان"،وإلى من كن بمثابة أخوات لي بنات خالتي "سمية"و"وخولة".

-إلى التي رافقتي بدعائها دوما وشجعتني وكانت فخورة بي"جدتي"أطال الله في عمرها.

-إلى الذين غمروني بالحب وأمدوني بالقوة وكانوا موضع الإتكاء في عثراتي،صديقات قلبي "رانية"،"سوليمة"،"نسرين"و"أمينة".

-إلى كل من جمعتني بهم المدرسة الرفقة الطيبة اللواتي تعرفت عليهن طيلة هذه السنوات وأخص بالذكر "شروق"،"آية"،"و"عائشة".

-إلى كل من شجعوني ويتمنون نجاحي وكل من أحبهم القلب.

ناصر شهيناز

الفهرس

مقدمة 2

1 عموميات ومفاهيم أساسية 4

1.1 تمهيد 5

2.1 عموميات ومفاهيم أساسية 5

3.1 بعض نظريات النقطة الثابتة 8

2 تعميم نظرية أسكولي أرزيلا في C^n 9

1.2 مقدمة 10

2.2 تعميم نظرية أسكولي أرزيلا في C^n 10

3 تطبيقات لنظرية أسكولي أرزيلا المعممة 14

1.3 الحل الدوري للمعادلات التفاضلية غير الخطية من الدرجة الثانية بتأخر 15

1.1.3 تمهيد 15

2.1.3 تطبيق نظرية أسكولي أرزيلا المعممة 15

2.3 دراسة وجود حلول لمسألة من الرتب العليا ذات شروط حدية 25

1.2.3 تمهيد 25

2.2.3 تطبيق نظرية أسكولي أرزيلا المعممة في C^n وفق شروط 27

4 دراسة وجود حل لجداء معادلات تكاملية 40

1.4 تمهيد 41

2.4 تطبيق نظرية أسكولي أرزيلا المعممة في C^1 لإيجاد حل لجداء معادلات تكاملية 41

خاتمة 59

قائمة المراجع 60

مقدمــة

نظرية أسكولي،أو نظرية أسكولي-أرزيلا للتحليل الدالي والتي تم التطرق لها من طرف عالما الرياضيات جوليو أسكولي (1843-1896) وسيزار أرزيلا (1847-1912) تعطينا الشروط اللازمة والكافية لتحديد ما إذا كانت مجموعة معينة من الدوال المستمرة موجودة أم لا ومتراصة نسبيا لبعض الطبولوجيا.

تم إثبات النظرية بواسطة أسكولي،حيث أثبت الشرط الكافي للتراص، وبواسطة أرزيلا (1895)،الذي وضع الشرط الضروري وأعطى أول عرض واضح للنتيجة.

المعادلات التفاضلية ذات تأخر (DDEs) هي نوع من المعادلات التفاضلية التي يكون فيها المشتق معطى للدالة غير المعروفة في زمن معين من حيث قيم الدالة في الزمن السابق،تسمى (DDEs) أيضا بجمل التأخير الزمني،والأنظمة ذات التأخير اللاحق أو الوقت الميت،الأنظمة الوراثية،والمعادلات ذات الفرق التفاضلي.

تدخل المعادلات التفاضلية غير الخطية في نمذجة العديد من الظواهر في الفيزياء والميكانيك وعلم الأحياء.

إن وجود مثل هذا الحل الدوري له أهمية أساسية من الناحية البيولوجية لأنه يتعلق ببقاء الأنواع لفترة طويلة.

في مجال المعادلات التفاضلية،مسائل القيمة الحدية هي معادلة تفاضلية مع مجموعة من الشروط الإضافية،تسمى الشروط الحدية، حل لمشكلة القيمة الحدية هي حل للمعادلة التفاضلية التي تحقق أيضا شروط الحدودية.

تطرقنا في عملنا هذا إلى أربعة فصول حيث تناولنا في:

- ❂ الفصل الأول بعض المفاهيم الطبولوجية المستعملة وبعض نظريات النقطة الثابتة.
- ❂ الفصل الثاني نظرية أسكولي أرزيلا المعممة انطلاقا من فضاء الدوال المستمرة والقابلة للإشتقاق إلى فضاء الدوال المستمرة ذات المشتقات من الرتب العليا وبرهانها.
- ❂ الفصل الثالث وجود حلول بعض المعادلات التفاضلية غير الخطية من الدرجة الثانية ومن درجات أعلى بإستخدام نظريات النقطة الثابتة واستخدام نظرية أسكولي أرزيلا وفق شروط أبسط مقارنة بتلك المستخدمة في الدراسات السابقة.
- ❂ الفصل الرابع دراسة وجود حل لجداء معادلات تكاملية بإستخدام نظريات النقطة الثابتة واستخدام تعميم نظرية أسكولي أرزيلا.

فنسأل الله تعالى أن يوفقنا في هذا العمل المتواضع.

الفصل الأول

عموميات ومفاهيم أساسية

1.1 تمهيد

في هذا الفصل سنذكر ببعض المفاهيم الطبولوجية ،التعاريف وبعض نظريات النقطة الثابتة والتي سنعتمد عليها في بقية الفصول.

2.1 عموميات ومفاهيم أساسية

تعريف 1.2.1: الإستمرار

لتكن الدالة :

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

نقول عن f أنها مستمرة عند x_0 إذا تحقق:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \| x - x_0 \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(x_0) \| < \epsilon$$

ملاحظات 1.2.1

*إذا كانت f مستمرة فإن:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

*نقول أن الدالة f مستمرة على $C \subseteq \mathbb{R}^n$ إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من C.

تعريف 2.2.1: تساوي الإستمرار

ليكن X فضاء متري متراص،ولتكن F مجموعة جزئية من $C(X, \mathbb{R})$ أو $C(X, \mathbb{C})$.
نقول عن F أنها متساوية الإستمرار إذا كان من أجل كل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ حيث:

$$\| f(x) - f(y) \| < \epsilon$$

من أجل كل $x, y \in X$ يكون

$$|x - y| < \delta$$

ملاحظة 1.2.1

إذا كان H متساوي الإستمرار عند نقطة a من E فإن كل عنصر f منه يكون عندئذ مستمر عند a، غير أن عكس ذلك خاطئ عموما.

تعريف 3.2.1: مجموعة محدودة

نقول عن F أنها محدودة إذا وجد ثابت M حيث:

$$\| f(x) \| \leq M$$

من أجل كل $f \in F$ و $x \in X$.

نظرية 1.2.1: نظرية أسكولي أرزيلا في C

ليكن X فضاء متري متراص، ولتكن F مجموعة جزئية في $C(X,\mathbb{R})$ أو $C(X,\mathbb{C})$ تكون F متراصة نسبيا إذا وفقط إذا كانت متساوية الإستمرار ومحدودة.

من نظرية أسكولي أرزيلا نستنتج مايلي:

نتيجة 1.2.1:

المجموعة الجزئية من $C(X,\mathbb{R})$ أو $C(X,\mathbb{C})$ تكون متراصة إذا كانت محدودة ومتساوية الإستمرار.

تعريف 4.2.1: التراص

نسمي فضاء متراص كل فضاء (E,τ) يكون منفصلا ومحققا الشرط التالي:
من كل تغطية مفتوحة $(\Omega_i)_{i\in L}$ ل E يمكن استخراج تغطية منتهية $(\Omega_i)_{i\in H\subset L}$ ل E (H جزء منته من L).

تعريف 5.2.1: التراص النسبي

نقول عن جزء A من فضاء منفصل E أنه متراص نسبيا إذا كانت $\bar{A}$ متراصة.

تعريف 6.2.1: مجموعة محدودة كليا

نقول عن فضاء متري أنه محدود كليا إذا إذا تمتع بالخاصية التالية:
من أجل كل $\epsilon > 0$ توجد تغطية منتهية تتشكل من أجزاء يقل قطرها عن ϵ.

ملاحظة 2.2.1

* كل مجموعة متراصة نسبيا محدودة كليا،وكل مجموعة محدودة كليا متراصة نسبيا في أي فضاء تام.

تعريف 7.2.1: مجموعة محدبة

القول عن مجموعة $D \subset \mathbb{R}^n$ أنها محدبة إذا كانت من أجل كل ثنائية $(x,y) \in D^2$:

$$(x,y) \in D^2, \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)y \in D$$

تعريف 8.2.1: الإستمرار بإنتظام

نقول عن الدالة $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ بأنها مستمرة بإنتظام على S إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\forall \epsilon > 0; \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in S : \| x_1 - x_2 \| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2| < \epsilon$$

تعريف 9.2.1:

نقول عن $f : E \to E$ تطبيق مقلص إذا كان:

$$\exists k \in [0,1[, \forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq k d(x,y)$$

مبرهنة 1.2.1: مبرهنة التقارب المهيمن

لتكن $(f_n)_{n>0}$ متتالية دوال مستمرة بالقطع على مجال I من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{C}$، إذا كان لدينا من أجل كل x من I

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

حيث f هي دالة مستمرة بالقطع على المجال I، ولنفرض وجود $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ مستمر بالقطع وقابل للمكاملة ويحقق $|f_n(x)| < \varphi(x)$ من أجل كل $x \in I$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$$

3.1 بعض نظريات النقطة الثابتة

نظرية 1.3.1: Banach

ليكن $(E,\|.\|)$ فضاء بناخ غير خال، إذا كان $f:E\to E$ تطبيق مقلص،فإن f يملك نقطة ثابتة وحيدة معناه

$$\exists! x^*\in E, f(x^*)=x^*$$

نظرية 2.3.1: Perov

ليكن (E,d) فضاء متري تام تقلصي،إذا كان $T:E\to \overline{E}$ تطبيق ،ولتكن المصفوفة $A\in M_n(\mathbb{R})$ حيث:

$$d(T_x,T_y)\leq Ad(x,y); \forall x,y\in E$$

والقيمة الذاتية ل A من المجال $[0,1]$ إذن T يملك نقطة ثابتة وحيدة $x^*\in E$، والمتتالية التراجعية $x_m=T^m(x_0)$ تتقارب نحو x^* من أجل كل $x_0\in E$ وتحقق العلاقة:

$$d(x_m,x^*)\leq A^m(I_n-A)^{-1}d(x_0,x_1); \forall m\in\mathbb{N}^*$$

نظرية 3.3.1: Shauder

لتكن C مجموعة جزئية من فضاء بناخ E غير خالية ومحدودة ،مغلقة ومحدبة و المؤثر A مستمر من C نحو C.
إذا كان $A(C)$ متراص نسبيا إذن A يملك نقطة ثابتة.

نظرية 4.3.1: Krasnoselkii

لتكن F مجموعة جزئية غير خالية مغلقة ومحدبة من فضاء بناخ X ، T_1 و T_2 تطبيقان من F حيث إذا كان:

1/ $T_1x+T_2y\in F; \forall x,y\in F$

2/ T_1 مقلص.

3/ T_2 متراص ومستمر.

إذن T_1+T_2 يعرف نقطة ثابتة في F أو نقول يوجد $x\in F$ حيث:

$$T_1x+T_2x=x$$

ملاحظة 1.3.1

نظرية بناخ وبيروف يحققان شرط الوجود والوحدانية أما باقي نظريات النقطة الثابتة يحققان الوجود فقط.

الفصل الثاني

تعميم نظرية أسكولي أرزيلا في C^n

1.2 مقدمة

إن مشكلة إثبات التراص لمجموعات جزئية في فضاء متري يتم مواجهتها بشكل متكرر في التحليل،إن نظرية أسكولي أرزيلا هي نظرية أساسية في التحليل تسمح لنا بمعرفة ما إذا كانت المجموعة الجزئية في فضاء الدوال المستمرة متراصة أم لا، على الرغم من وجود العديد من الطرق لإثبات ذلك لكن نظرية أسكولي أرزيلا غالبا ماتكون أسهل في التطبيق،حيث تبسط هذه النظرية التحقق من التراص في فضاء الدوال المستمرة،كما أن لها العديد من التطبيقات في فروع أخرى من الرياضيات وخاصة في حل المعادلات التفاضلية.

نطرح الآن سؤال مهم هل المجموعة الجزئية F من $C([a,b])$ متراصة؟ نعلم أن في $\mathbb{R}^n$ المجموعة الجزئية المغلقة والمحدودة تكون متراصة،لكن هذا غير صحيح في $C([a,b])$.

مثال 1.1.2

$\{f \in C([0,1]) / \| f\|_\infty \leq 1\}$ ليست متراصة في $C([0,1])$.

لأنه بأخذ متتالية الدوال التالية $f_n(x) = x^n$ نجد أنها محدودة ومغلقة ولكنها ليست متساوية الإستمرار فعند أخذ القيمتين 0 و 1 لا نجد نفس النهاية ومنه فهي ليست متراصة.

2.2 تعميم نظرية أسكولي أرزيلا في C^n

قبل إعطاء تعميم للنظرية نعطي التعاريف التالية في $C^n(X,E)$.

تعريف 1.2.2:

ليكن E فضاء الدوال المستمرة المزود بالنظيم $\|.\|_1$ ،ولتكن X مجموعة جزئية متراصة من $\mathbb{R}$ نرمز ب $C^n(X,E)$ فضاء كل الدوال المستمرة والقابلة للإشتقاق n مرة معرفة من X نحو E هذا الفضاء مزود بالنظيم $\| f \| = \sum_{i=0}^{n} \| f^{(i)}\|_\infty$ حيث:

$$\| f\|_\infty = \sup_{x\in E}\{\| f(x)\|_1\}$$

تعريف 2.2.2:

نقول عن العائلة $F \subset C^n(X,E)$ أنها متساوية الإستمرار من أجل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ حيث:

$$\| f^{(i)}(x) - f^{(i)}(y)\|_1 < \epsilon$$

من أجل كل $i = 0,...n$ و $x, y \in X$ حيث:

$$|x - y| < \delta$$

تعريف 3.2.2:

نقول عن العائلة $F \subset C^n(X,E)$ أنها محدودة إذا وجد ثابت M حيث

$$\| f^{(i)}(x)\|_1 \leq M$$

من أجل كل $i = 1,...n$ ومن أجل $f \in F$ و $x \in X$

من التعاريف السابقة نعطي نظرية أسكولي أرزيلا في C^n.

نظرية 1.2.2:

لتكن F مجموعة جزئية من $C^n(X,E)$ تكون F متراصة نسبيا إذا وفقط إذا كانت متساوية الإستمرار ومحدودة.

البرهان:

نفرض أن F متراصة نسبيا،هذا يعني أن $\bar{F}$ متراصة،ونثبت أن F متساوية الإستمرار ومحدودة.

بما أن $\bar{F}$ متراصة هذا يعني أنها محدودة وبما أن $F \subset \bar{F}$ هذا ينتج أن F محدودة،الآن نبرهن أن F متساوية الإستمرار.

ليكن $\epsilon > 0$ إذن يوجد $f_1,...,f_m C^n(X,E)$ حيث:

$$F \subset B\frac{\epsilon}{3(n+1)}(f_1) \cup ... \cup B\frac{\epsilon}{3(n+1)}(f_m)$$

بما أن f_i^j مستمرة بإنتظام إذن يوجد $\delta > 0$ حيث من أجل $x, y \in X$ لدينا:

$$|x - y| < \delta$$

ومن أجل كل $i = 0,...,n$ و $j = 1,...,m$ فإن

$$\| f_j^{(i)}(x) - f_j^{(i)}(y)\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$$

وليكن $f\in F$ إذن يوجد $j\in\{1,...m\}$ حيث: $f\in B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_j)$
ومن أجل: $i=0,...,n$

$$\| f^{(i)}(x)-f^{(i)}(y)\|_1 \leq \| f^{(i)}(x)-f_j^{(i)}(x)\|_1+\| f_j^{(i)}(x)-f_j^{(i)}(y)\|_1+\| f^{(i)}(y)-f_j^{(i)}(y)\|<\epsilon$$

هذا يعني أن F متساوية الإستمرار.
عكسيا الأن نفرض أن F متساوية الإستمرار ومحدودة ونثبت أنها متراصة نسبيا.
بما أن F محدودة هذا يعني أن $\bar{F}$ محدودة ومنه $\bar{F}$ متراصة.
بما أن F متساوية الإستمرار إذن من أجل $x\in X$ $\epsilon>0$ يوجد δ_x حيث $y\in X$ و

$$|x-y|<\delta_x$$

و لدينا من أجل كل $i=0,...,n$

$$\| f^{(i)}(x)-f^{(i)}(y)\|_1<\frac{\epsilon}{4(n+1)} f\in F$$

المجموعة $\{B_{\delta x}(x)\}_{x\in X}$ هي تغطية مفتوحة للمجموعة الجزئية المتراصة X إذن يوجد $x_1,x_2,...,x_m\in X$ حيث: $X=\bigcup_{j=1}^{m} B_{\delta_{x_j}}$.
هذا يعني أنه من أجل كل $x\in B_{\delta_{x_j}}$ ومن أجل كل $i=0,...,n$ فإن:

$$\| f^{(i)}(x)-f^{(i)}(x_j)\|_1<\frac{\epsilon}{4(n+1)}, f\in F$$

بما أن F محدودة،إذن المجموعة:

$$F=\left\{(f(x_j),f'(x_j),...,f^{(n)}(x_j)), j=1,...,m; f\in F\right\}$$

هي مجموعة محدودة.
بما أن هذه المجموعة محدودة في $\mathbb{R}^{n+1}$ إذن توجد مجموعة جزئية

$$\left\{(y_{1,i},y_{2,i},...,y_{n+1,i}), i=1,...,k\right\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$$

حيث:

$$F\subset\bigcup_{i=1}^{k} B\frac{\epsilon}{4(n+1)}(y_{1,i},y_{2,i},...,y_{n+1,i})$$

من أجل كل تطبيق $\varphi:\{1,...,m\}\to\{1,...,k\}$ المعرف بالمجموعة:

$$F_\varphi=\left\{f\in F:(f(x_j),f'(x_j),...,f^{(n)}(x_j))\in B_{\frac{\epsilon}{4(n+1)}}(y_{1,\varphi j},y_{2,\varphi j},...,y_{n+1,\varphi j}); j=1,...m\right\}$$

واضح أن: $F=\bigcup F_\varphi$ والأن نلاحظ أن أقطار F_φ أقل من ϵ.
ليكن $f,g\in F_\varphi$ و$x\in X$ يوجد $j\in\{1,..,m\}$ حيث: $x\in B_{\delta xj}$ من أجل كل $i=1,...n$ لدينا:

$$\| f^{(i)}(x)-g^{(i)}(x)\|_1 \leq \| f^{(i)}(x)-f^{(i)}(x_j)\|_1+\| f^{(i)}(x_j)-y_{i+1,\varphi j}\|_1$$
$$+\| g^{(i)}(x_j)-y_{i+1,\varphi j}\|_1+\| g^{(i)}(x_j)-g^{(i)}(x)\|_1 \leq \epsilon$$

هذا يعني أن نصف القطر لF_φأقل من ϵ ومنه F هي تغطية منتهية بكرات نصف قطرها أقل من ϵ.
وهكذا وجدنا أن F محدودة والدليل على ذلك أنها تامة. $\square$

الفصل الثالث

تطبيقات لنظرية أسكولي أرزيلا المعممة

1.3 الحل الدوري للمعادلات التفاضلية غير الخطية من الدرجة الثانية بتأخر

1.1.3 تمهيد

في هذا الفصل نقوم بدراسة وجود الحل لمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ذات تأخر والمعطاة بالشكل:

$$x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t)),x'(t-\tau(t))),t\in\mathbb{R} \qquad (1.3)$$

هذا النوع من المعادلات ذات تأخر يدخل في العديد من الظواهر في الفيزياء ،الميكانيك البيولوجيا وغيرها ، وقد كانت الدراسة في البداية للمعادلة :

$$\frac{d}{dt}(x(t)-g(t,x(t-\tau(t)))=r(t)x(t)-f(t,x(t-\tau(t)))$$

من طرف المؤلفين Ardjouni و Djoudi كما درس Raffoul المعادلة:

$$x'(t)=-a(t)x(t)+c(t)x'(t-\tau(t))+q(t,x(t(t-\tau(t))) \qquad (2.3)$$

ودرس Liu المعادلة :

$$x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=\lambda h(t)f(t,x(t-\tau(t)))+r(t)$$

ودرس wang المعادلة التالية:

$$x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=r(t)x'(t-\tau(t))+f(t,x(t),x(t-\tau(t)))$$

كما درست العديد من المعادلات الأخرى من طرف العديد من المؤلفين الرياضيين.

2.1.3 تطبيق نظرية أسكولي أرزيلا المعممة

في هذا الجزء نحاول تطبيق نظرية أسكولي أرزيلا المعممة في C^1 على معادلة من الدرجة الثانية بتأخر (1.3).

نعتبر العدد الثابت الموجب T والفضاءات التالية:

$$P_T=\phi\in C(\mathbb{R}),\phi(t+T)=\phi(t),\forall t\in\mathbb{R}$$

$$P_T^1=\phi\in C^1(\mathbb{R}),\phi(t+T)=\phi(t),\forall t\in\mathbb{R}$$

واضح أن P_T^1 هو فضاء بناخ مزود بالنظيم:

$$\|x\|=\sup_{t\in[0,T]}|x|+\sup_{t\in[0,T]}|x'|$$

سنقوم بدراسة المعادلة (1.3) وفق الفرضيات التالية:

- (i) $f \in C(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ ويوجد $T > 0$ حيث:

$$f(t+T, x, y, z) = f(t, x, y, z), \forall (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$$

- (ii) يوجد $\beta, \gamma, \delta \geq 0$ و $\phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ محدودة حيث :

$$|f(t, u, v, w))| \leq \phi(t) + \beta |u| + \gamma |v| + \delta |w|, \forall (t, u, v, w) \in \mathbb{R}^4$$

- (iii) $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دوال دورية مستمرة $T-$ حيث: $\int\limits_0^T p(s) > 0, \int\limits_0^T q(s) > 0$ و $\tau'(t) \neq 1$ من أجل كل $t \in [0,1]$.

نحتاج في دراستنا إلى التذكير بالتوطئات التالية:

توطئة 1.1.3:

نفرض أن (iii) محققة و :

$$R_1 \frac{\left(\exp\left(\int\limits_0^T p(u)du\right) - 1\right)}{Q_1 T} \geq 1$$

أين يكون:

$$R_1 = \max_{t \in [0,T]} \left| \int\limits_t^{1+t} \frac{\exp\left(\int\limits_t^s p(u)du\right)}{\exp\left(\int\limits_0^T p(u)du\right) - 1} q(s)d(s) \right|, Q_1 = \left(1 + \exp\left(\int\limits_0^T p(u)du\right)\right)^2 R_1^2$$

حيث يوجد دوال دورية ومستمرة $T-$ و a و b حيث: $b(t) > 0$, $\int\limits_0^T a(u)d(u) > 0$ و

$$a(t) + b(t) = p(t), b'(t) + a(t)b(t) = q(t), t \in \mathbb{R}$$

توطئة 2.1.3:

نفرض أن الشرط الموجود في التوطئة 1 محقق و $\phi \in P_T$.

والمعادلة:

$$x'' + p(x)x'(t) + q(x)x(t) = \phi(t)$$

تملك حلا دوريا نستطيع التعبير عنه ب

$$x(t) = \int_t^{t+T} G(t,s)\phi(s)ds$$

حيث يكون:

$$G(t,s) = \frac{\int_t^s \exp\left(\int_t^u b(v)dv + \int_u^s a(v)dv\right)du + \int_s^{t+T} \exp\left(\int_t^{t+T} b(v)dv + \int_u^{s+T} a(v)dv\right)du}{\left(\exp\left(\int_0^T a(u)du\right) - 1\right)\left(exp\left(\int_0^T b(u)du\right) - 1\right)}$$

نتيجة 1.1.3:

دالة غرين $G(t,s)$ تحقق الخصائص التالية:

$$G(t,t+T) = G(t,t), G(t+T) = G(t,s)$$

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = -b(t)G(t,s) + F(t,s)$$

حيث يكون:

$$F(t,s) = \frac{\exp\left(\int_t^s a(v)dv\right)}{\exp\left(\int_0^T b(v)dv\right) - 1}$$

توطئة 3.1.3:

ليكن :

$$A = \int_0^T p(u)du, B = T^2 \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ln(q(u))du\right)$$

إذا كان $A^2 \geq 4B$ فإن:

$$\min\left\{\int_0^T a(u)du, \int_0^T b(u)du\right\} \geq \frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - 4B}) = l$$

$$\max\left\{\int_0^T a(u)du, \int_0^T b(u)du\right\} \leq \frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - 4B} = L$$

نتيجة 2.1.3:

دالة غرين $G(t,s)$ تحقق:

$$m = \frac{T}{(e^L - 1)^2} \leq G(t,s) \leq \frac{T\exp\left(\int_0^T p(u)du\right)}{(e^l - 1)^2} = M$$

من السهل التأكد بإستعمال التوطئة 2 أن x هو حل ل (1.3) في الفضاء P_T^1 إذا وفقط إذا كان x هو الحل لهذه المعادلة التكاملية في الفضاء P_T^1.

$$x(t) = \int_t^{t+T} G(t,s)\left[f(s, x(s), x(s - \tau(s)), x'(s - \tau(s)))\right]ds \tag{3.3}$$

حسب الفرضيات (i) (ii)، (iii)، والتوطئات والنتائج السابقة ،سوف نستعمل نظرية النقطة الثابتة لشودر لإثبات النظرية التالية.

نـظـريـة 1.1.3:

إذا كانت الفرضيات (i) (ii)، (iii)، محققة وإذا كان:

$$k = T(M(\| b\|_\infty + 1) + \| F\|_\infty)Max\{\delta, (\beta + \gamma)\} < 1 \tag{4.3}$$

ومنه المعادلة (1.3) تملك حل في $C^1(\mathbb{R})$.

البرهان:

حل المعادلة التكاملية (3.3) يكافئ إيجاد النقطة الثابتة للمؤثر A بإستعمال العبارة التالية:

$$A(x)=\int_{0}^{t+T} G(t,s)\left[f(s,x(s),x(s-\tau(s)),x'(s-\tau(s)))\right]ds$$

واضح أن المؤثر A معرف من P_T^1 نحو P_T^1 ومشتقته هي :

$$(Ax)'(t)=\int_{t}^{t+T} \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\left[f(s,x(s),x(s-\tau(s)),x'(s-\tau(s)))\right]ds$$

ينقسم البرهان على ثلاث مراحل كما يلي :

مرحلة 1 :

يوجد $\alpha>0$ حيث A يحول $C=\{x\in P_T^1, \| x \|\leq \alpha\}$ في نفسها.

واضح أن C ليست خالية محدودة ،مغلقة ومتراصة .

بالإضافة إلى ذلك من أجل كل $x\in C$ و $t\in[0,T]$ لدينا:

$$\begin{aligned}|Ax(t)| &= \left|\int_{t}^{t+T} G(t,s)\left[f(s,x(s),x(s-\tau(s)),x'(s-\tau(s)))\right]ds\right| \\ &\leq \int_{t}^{t+T} |G(t,s)|\left[\phi(s)+\beta\,|x(s)|+\gamma\,|x(s-\tau(s))|+\delta\,\left|x'(s-\tau(s))\right|\right]ds \\ &\leq MT\left[\| \phi\|_\infty+(\beta+\gamma)\| x\|_\infty+\delta\| x'\|_\infty\right] \qquad (5.3)\end{aligned}$$

ولدينا أيضا:

$$\begin{aligned}\left|Ax'(t)\right| &= \left|\int_{t}^{t+T} \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\left[f(s,x(s),x(s-\tau(s)),x'(s-\tau(s)))\right]ds\right| \\ &\leq \int_{t}^{t+T} \left|\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|\left[\phi(s)+\beta\,|x(s)|+\gamma\,|x(s-\tau(s))|+\delta\,\left|x'(s-\tau(s))\right|\right]ds \\ &\leq \int_{t}^{t+T} \left|\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|\left[\| \phi\|_\infty+(\beta+\gamma)\| x\|_\infty\right]ds \\ &\leq \int_{t}^{t+T} (|b(t)\,\|\,G(t,s)|+|F(t,s)|)\left[\| \phi\|_\infty+(\beta+\gamma)\| x\|_\infty+\delta\| x'\|_\infty\right]ds \\ &\leq T(\| b\|_\infty M+\| F\|_\infty)\left[\| \phi\|_\infty+(\beta+\gamma)\| x\|_\infty+\delta\| x'\|_\infty\right] \qquad (6.3)\end{aligned}$$

حيث:

$$\| b\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} \{|b(t)|\}$$

و

$$\| F\|_\infty = \max_{0\leq t\leq T, t\leq s\leq t+T} \{|F(t,s)|\}$$

ومن هنا بواسطة (5.3) و (6.3) نحصل على

$$\begin{aligned}\| Ax \| &\leq T(M(\| b\|_\infty + 1) + \| F\|_\infty)\big[\| \phi\|_\infty + (\beta+\gamma)\| x\|_\infty + \delta \| x'\|_\infty\big]\\ &\leq T(M(\| b\|_\infty + 1) + \| F\|_\infty)\| \phi\|_\infty + k\| x \|\\ &\leq T(M(\| b\|_\infty + 1) + \| F\|_\infty)\| \phi\|_\infty + k\alpha\end{aligned}$$

حيث K تم تعريفه سابقا في (4.3) نستنتج أن A يحول C إلى نفسها إذا كان :

$$T(M(\| b\|_\infty + 1) + \| F\|_\infty + k\alpha \leq \alpha$$

وهو مايعني أنه مع وجود الشرط (4.3) فإن:

$$\frac{T(M(\| b\|_\infty + 1) + \| F\|_\infty)}{1-k} \leq \alpha$$

ومنه A يحول C في نفسها من أجل :

$$\alpha = \frac{T(M(\| b\|_\infty + 1) + \| F\|_\infty)\| \phi\|_\infty}{1-k}$$

مرحلة 2 :

المؤثر A مستمر.

ليكن $(x_n)\in C$ متتالية متقاربة نحو $x\in C$ ،وهو مايعني أن $(x_n^{(i)})$ تتقارب نحو $x^{(i)}(i=1,2)$ في الفضاء $C([0,T],[-\alpha,\alpha])$.

بما أن f مستمرة بإنتظام على المجموعة المتراصة $[0,T]\times[-\alpha,\alpha]^4$ ، والسلسلة:

$$(f(s,x_n(s),x_n(s-\tau(s)),x'(s-\tau(s))))$$

تتقارب نحو $f(s,x(s),x(s-\tau(s)),x'(s-\tau(s)))$ في $C([0,T],\mathbb{R})$.

واضح أن :

$$\begin{aligned}\| Ax_n - Ax \| \leq T(M(\| b\|_\infty + 1)\| F\|_\infty)\| f(s,x_n(s),\\ x_n(s-\tau(s)),x_n'(s-\tau(s))) - f(s,x(s),x(s-\tau(s)),x'(s-\tau(s)))\|_\infty\end{aligned}$$

وهذا مايدل على أن (Ax_n) متقاربة نحو Ax والمؤثر A مستمر.

مرحلة 3 :

$A(C)$ متراصة نسبيا ،إذن واضح أن المؤثر A محدود.

الآن لنثبت أن $A(C)$ متساوي الإستمرار نأخذ t_1 و t_2 من l.

ليكن $H(s) = f(x, x(s), x(s-\tau(s)), x'(s-\tau(s)))$ بإستعمال (ii) نجد:

$$\| H\|_\infty \leq \| \phi\|_\infty + \alpha \max(\beta + \gamma, \delta)$$

يتبع ذلك:

$$
\begin{aligned}
|Ax(t_1)-Ax(t_2)| &= \left|\int_{t_1}^{t_1+T} G(t_1,s)H(s)ds - \int_{t_2}^{t_2+T} G(t_2,s)H(s)ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_1}^{t_1+T} G(t_1,s)H(s)ds - \int_{t_1}^{t_1+T} G(t_2,s)H(s)ds\right| \\
&+ \left|\int_{t_1}^{t_1+T} G(t_2,s)H(s)ds - \int_{t_2}^{t_2+T} G(t_2,s)H(s)ds\right| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_1+T} |G(t_1,s)-G(t_2,s)|\,|H(s)|\,ds + \left|\int_{t_1}^{t_2} G(t_2,s)H(s)ds\right. \\
&+ \left.\int_{t_2}^{t_2+T} G(t_2,s)H(s)ds + \int_{t_{2+T}}^{t_1+T} G(t_2,s)H(s)ds - \int_{t_2}^{t_2+T} G(t_2,s)H(s)ds\right| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_1+T} |G(t,s)-G(t_2,s)|\,|H(s)|\,ds + \int_{t_1}^{t_2} |G(t_2,s)H(s)|ds \\
&+ \int_{t_1+T}^{t_2+T} |G(t_2,s)H(s)|ds \\
&\leq \| H \| \int_{t_1}^{t_1+T} |G(t_1,s)-G(t_2,s)|ds \\
&+ \| H \| \int_{t_1}^{t_2} |G(t_2,s)|ds + \| H \| \int_{t_2+T}^{t_1+T} |G(t_2,s)|ds \\
&\leq \| H \| \int_{t_1}^{t_1+T} |G(t_1,s)-G(t_2,s)|ds + 2M \| H \| \, |t_1-t_2| \\
&\leq (\| \phi \|_\infty + \alpha \max(\beta+\gamma,\delta)) \int_{t}^{t_1+T} |G(t_1,s)-G(t_2,s)|ds \\
&+ 2M(\| \phi \|_\infty + \alpha \max(\beta+\gamma,\delta))\,|t_1-t_2| \qquad (7.3)
\end{aligned}
$$

بإستعمال نفس البراهين السابقة نثبت أن

$$
\begin{aligned}
\left|A'x(t_1)-A'x(t_2)\right| &\leq \| H \| \int_{t_1}^{t_1+T} \left|\frac{\partial G(t_1,s)}{\partial t}-\frac{\partial G(t_2,s)}{\partial t}\right| ds \\
&+ \| H \| \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\partial G(t_2,s)}{\partial t}\right| ds + \| H \| \int_{t_2+T}^{t_1+T} \left|\frac{\partial G(t_2,s)}{\partial t}\right| ds \\
&\leq \| H \| \int_{t_1}^{t_1+T} \left|\frac{\partial G(t_1,s)}{\partial t}-\frac{\partial G(t_2,s)}{\partial t}\right| ds \\
&+ 2(M \| b\|_\infty + \| F\|_\infty) \| H \| \, |t_2-t_1| \\
&\leq (\| \phi\|_\infty + \alpha \max(\beta+\gamma,\delta)) \int_{t_1}^{t_1+T} \left|\frac{\partial G(t_1,s)}{\partial t}-\frac{\partial G(t_2,s)}{\partial t}\right| ds \\
&+ 2(M \| b\|_\infty + \| F\|_\infty)(\| \phi\|_\infty + \alpha \max(\beta+\gamma,\delta)) |t_2-t_1| \qquad (8.3)
\end{aligned}
$$

والآن ليكن $\epsilon > 0$ بما أن الدالة $G(t,s)$ و $\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}$ مستمرة بإنتظام على المجموعة المتراصة $[0,T]\times[0,2T]$ إذن يوجد $\delta_1 > 0$ حيث إذا كان $|t_2-t_1| \leq \delta_1$ إذن يكون

$$
\forall s \in [0,2T], |G(t_2,s)-G(t_1,s)| \leq \frac{\epsilon}{2T(\| \phi\|_\infty + \alpha \max(\beta+\gamma,\delta))'}
$$

و

$$
\left|\frac{\partial G(t_1,s)}{\partial t}-\frac{\partial G(t_2,s)}{\partial t}\right| \leq \frac{\epsilon}{2T(\| \phi\|_\infty + \alpha \max(\beta+\gamma,\delta))'}, \forall s \in [0,2T]
$$

ومن خلال (7.3) و (8.3) إذا كان :

$$
|t_2-t_1| \leq \delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}
$$

حيث:

$$
\begin{cases}
\delta_2 = \frac{\epsilon}{4M(\|\phi\|_\infty+\alpha \max(\beta+\gamma,\delta))'} \\
\delta_3 = \frac{\epsilon}{4(M\|b\|_\infty+\|F\|_\infty)(\|\phi\|_\infty+\alpha \max(\beta+\gamma,\delta))'}
\end{cases}
$$

نستنتج أنه من أجل $i=0,1$ أنه

$$
\left|Ax^{(i)}(t_2)-Ax^{(i)}(t_1)\right| \leq \epsilon
$$

وبالتالي المجموعة $A(C)$ متساوية الإستمرار لذلك حسب النظرية (1,2,3) ، ومنه $A(C)$ متراصة نسبيا.

برهان النظرية (2,2,3) يستخرج من نظرية النقطة الثابتة لشودر. □

مثال 1.1.3

بأخذ المعادلة التالية من الدرجة الثانية بتأخر:
(9.3)

$$x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=\cos(6t)+\frac{r}{2}x(t)+\frac{r}{2}x(t-\tau(t))+rx'(t-\tau(t)), t\in\mathbb{R}$$

حيث

$$p(t)=\frac{1}{2}, q(t)=\frac{1}{16}, \tau(t)=1+\sin(6t)$$

وبالتالي بإستعمال خواص النظرية (2,2,3) لدينا

$$T=\frac{\pi}{3}, \phi(t)=\cos(6t), \beta=\gamma=\frac{r}{2}, \delta=r$$

حيث r عدد موجب.
نستطيع أن نقول أن شرط التوطئة (1,2,3) محقق،و $a(t)=b(t)=\frac{1}{4}$

$$F(t,s)=\frac{\exp\left(\frac{1}{4}(s-t)\right)}{\exp\left(\frac{1}{4}T\right)-1}$$

$$G(t,s)=\frac{(s-t)\exp\left(\frac{1}{4}(s-t)\right)+(t+\frac{\pi}{3}-s)\exp\left(\frac{1}{4}(s+\frac{\pi}{3}-s\right)\exp\left(\frac{1}{4}(s+\frac{\pi}{3}-t)\right)}{(\exp(\frac{\pi}{12}))^2}$$

بإستعمال خواص التوطئة (3,2,3) يكون لدينا $A=\frac{\pi}{6}, B=\frac{\pi^2}{144}$ مما يعني أن

$$l=\frac{\pi}{12}, M=\frac{\pi\exp\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\left(exp(\frac{\pi}{12})-1\right)^2}$$

و

$$\|F\|_\infty=\frac{\exp\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\exp\left(\frac{\pi}{12}\right)-1}$$

لذلك المتراجحة في النظرية السابقة تأخذ الشكل

$$\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi\exp\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\exp(\frac{\pi}{12})-1\right)^2}\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{\exp\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\exp\left(\frac{\pi}{12}\right)-1}\right)r<1$$

ومنه حسب النظرية نستنتج أن المعادلة من الدرجة الثانية بتأخر (4) تملك حلا دوريا إذا كان:

$$r<\frac{24\left(\exp(\frac{\pi}{12})-1\right)^2}{5\pi^2\exp\left(\frac{\pi}{6}\right)+4\pi\exp\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\exp(\frac{\pi}{12})-1\right)}$$

2.3 دراسة وجود حلول لمسألة من الرتب العليا ذات شروط حدية

1.2.3 تمهيد

نعتبر المسألة لتالية من الرتب العليا ذات شروط حدية:

$$\begin{cases} u^{(n)}+f(t,u,u',...,u^{(n-2)})=0, n\geq 2, t\in I=[0,1] \\ u^{(t)}(0)=0, 0\leq i\leq n-3 \end{cases} \tag{10.3}$$

تحت الشرط

$$\begin{cases} \alpha u^{(n-2)}(0)-\beta u^{(n-1)}(0)=0 \\ \gamma u^{(n-2)}(1)+\delta u^{(n-1)}(1)=0 \end{cases} \tag{11.3}$$

ومن الناحية الأخرى مع الشرط

$$\begin{cases} u^{(n-2)}(0)=0 \\ \alpha u(\eta)=u(1) \end{cases} \tag{12.3}$$

من جهة أخرى حيث n عدد صحيح موجب، $\alpha,\gamma>0,\beta,\delta\geq 0, 0<\eta<1, 0<\alpha\eta^{n-1}<1$ f مستمر ويحقق

$$|f(s,u_0,u_1,...,u_{n-2})|\leq a(s)+\sum_{k=0}^{n-2} b_K|u_k|$$

حيث a مستمر في I و $b_k\in\mathbb{R}$ و $k=0,...,n-2$.

المعادلة (10.3) درست من طرف العديد من المؤلفين مثل wong و Agrwal حيث قاموا بدراسة مسألة من الرتب العليا ذات الشروط الحدية التالية :

$$\begin{cases} u^{(n)}+\lambda Q(t,u,u',...,u^{(n-2)})=\lambda P(t,u,u',...,u^{(n-2)}) \\ u^{(i)}(0)=0, 0\leq i\leq n-3, \\ \alpha u^{(n-2)}(0)-\beta u^{(n-1)}(0)=0, \\ \gamma u^{(n-2)}(1)+\delta u^{(n-1)}(1)=0 \end{cases}$$

حسب الشروط السابقة توجد دالة بحيث: $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ و $p_1,p,q_1,q:(0,1)\to\mathbb{R}$ حيث:

$$(i) q(t)\leq \frac{Q(t,u_0,u_1,...,u_{n-2})}{f(u)}\leq q_1(t), p(t)\leq \frac{P(t,u_0,u_1,...,u_{n-2})}{f(u)}\leq p_1(t).$$

$$(ii) q(t)-p_1(t)\geq 0$$

Agrwal و Wong قاموا بدراسة وجود الحل الموجب للمسألة (10،3) وفق الشرط يوجد $L\geq 0$ حيث

$$f(t,u,u',...,u^{(n-2)})+L\geq 0$$

في $[0,1]\times[0,\infty)^{n-1}$,

$$\int_0^1 g(s,s)\left[(s,u,u',...,u^{(n-2)})+L\right]ds\leq\lambda$$

وقاموا بالدراسة أيضا وفق شروط أخرى.
Chyan و Henderson درسوا وجود الحل الموجب للمسألة التالية

$$\begin{cases} u^{(n)}+\lambda q(t)f(u)=0, \\ u^{(i)}(0)=u^{(n-2)}(1)=0, 0\leq i\leq n-2 \end{cases}$$

حيث f و q مستمرين والدالة ليست سالبة.
ودرست المسألة التالية درس من طرف Eloe و Ahmad

$$\begin{cases} u^{(n)}+f(t,u)=0, t\in(0,1) \\ u^{(i)}(0)=0, 0\leq i\leq n-2, \\ \alpha u(\eta)=u(1), 0<\eta<1 \end{cases}$$

المسألة التالية الأكثر تعميما ودرست من طرف J.R.Graef و T.Moussaoui

$$\begin{cases} u^{(n)}+f(t,u)=0, t\in(0,1) \\ u^{(i)}(0)=0, 0\leq i\leq n-2 \\ \sum_{i=1}^{m-2}\alpha u(\eta_i)=u(1), 0, 0<\eta<1 \end{cases}$$

حيث المشتقات $x^{(i)}, 0\leq i\leq n-2$ لا تظهر في العبارات غير الخطية.

الهدف الرئيسي هو استعمال نظرية أسكولي أرزيلا في الفضاء $C^n(X,E)$ بهدف إثبات التراص النسبي واستعمال نظرية النقطة الثابتة في الفضاء C لإثبات وجود حل لمسألة من الرتب العليا ذات الشروط الحدية.

2.2.3 تطبيق نظرية أسكولي أرزيلا المعممة في C^n وفق شروط

وفق الشرط الأول

في هذه المرحلة سوف ندرس وجود الحلول لمسألة من الرتب العليا ذات الشروط الحدية (10.3) وفق الشرط (11.3) بإستعمال نظرية أسكولي أرزيلا المعممة.
من السهل التأكد من أن u حل ل (10.3) في $C^n(I,\mathbb{R})$ إذا وفقط إذا كان u حل للمعادلة التكاملية التالية:

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u,u',...,u^{(n-2)}ds \qquad (13.3)$$

في $C^{n-2}(I,\mathbb{R})$ حيث

$$g(t,s)=\frac{\partial^{n-2}G(t,s)}{\partial t^{n-2}}$$

هي دالة غرين من الرتبة الثانية لمسألة القيم المحدودة

$$\begin{cases} -u^{(2)}=0, t\in[0,1], \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0, \\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=0 \end{cases}$$

بالإضافة إلى

$$g(t,s)=\frac{1}{\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma}\begin{cases} (\beta+\alpha s)[\delta+\gamma(1-t)], 0\le s\le t, \\ (\beta+\alpha t)[\delta+\gamma(1-s)], t\le s\le 1 \end{cases} \qquad (14.3)$$

سوف نقوم بدراسة المعادلة (13.3) وفق الفرضيات التالية :

- (i) $f\in C(I\times\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R})$
- (ii) توجد دالة $a\in C(I,\mathbb{R}^+)$ وثابت $b_k\in\mathbb{R}^+(k=0,...,n-2)$ حيث:

$$|f(s,u_0,u_1,...,u_{n-2}| \leq a(s) + \sum_{k=0}^{n-2} b_k u_k$$

من الفرضيات (ii)و(i) سوف نقوم بإستخدام نظرية النقطة الثابتة لشودر لإثبات النظرية التالية.

نظرية 1.2.3:

إذا كانت الفرضيات (i) و(ii) محققة و كان

$$r\sum_{i=0}^{n-2}\left\|\int_0^1 \left|\partial_1^{(i)}G(t,s)\right|ds\right\|_{\infty} < 1$$

حيث

$$r = Max\{b_0,...,b_{n-2}\}$$

ومنه المعادلة التكاملية (13.3) تملك حل في $C^{n-2}(I,\mathbb{R})$.

البرهان:

حل المعادلة (13.3) يكافئ إيجاد النقطة الثابتة للمؤثر A المعرف في الفضاء $E = C^{n-2}(I,\mathbb{R})$ بالعبارة التالية:

$$Ax(t) = \int_0^t G(t,s)f(s,x,x',...,x^{(n-2)})ds$$

واضح أن المؤثر A معرف من E إلى نفسه .

بالإضافة إلى ذلك من أجل كل $x \in E$ و $i = 0,...,n-2$ يكون لدينا :

$$(Ax)^{(i)}(t) = \int_0^t \partial_1^{(i)}G(t,s)f(s,x,x',...,x^{(n-2)})ds$$

ينقسم البرهان على ثلاث مراحل كما يلي:

مرحلة 1 :

يوجد $\alpha > 0$ حيث A يحول $C = \{x \in E, \| x \| \leq \alpha\}$ في نفسها .

واضح أن C ليست خالية ،محدودة،مغلقة،ومحدبة في المجموعة الجزئية E.

بالإضافة إلى ذلك من أجل كل $t \in I,\ x \in C$ و $i = 0,...,n-2$ لدينا:

$$\begin{aligned} |(Ax)(t)| &= \left| \int_0^1 \partial_1^{(i)} G(t,s) f(s,x,x',...,x^{(n-2)}) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 \left|\partial_1^{(i)} G(t,s)\right| \left(a(s) + \sum_{k=0}^{n-2} b_k \left|x^{(k)}(s)\right| \right) ds \\ &\leq \left(\| a\|_\infty + \sum_{k=0}^{n-2} b_k \| x^{(k)}\|_\infty \right) \int_0^1 \left|\partial_1^{(i)} G(t,s)\right| ds \qquad (15.3) \end{aligned}$$

حيث من أجل $r = Max\{b_0,...,b_{n-2}\}$ نحصل على

$$\begin{aligned} \| Ax \| &= \sum_{i=0}^{n-2} \| A^{(i)} x\|_\infty \\ &\leq (\| a\|_\infty + r\alpha) \sum_{i=0}^{n-2} \left\| \int_0^1 \left|\partial_1^{(i)} G(t,s)\right| ds \right\|_\infty \end{aligned}$$

نستنتج أن A يحول C في نفسها إذا كان

$$(\| a\|_\infty + r\alpha) \sum_{i=0}^{n-2} \left\| \int_0^1 \left|\partial_1^{(i)} G(t,s)\right| ds \right\|_\infty \leq \alpha$$

مما يعني أنه حسب شرط النظرية $(1,2,3)$ فإن

$$\frac{\| a\|_\infty \sum_{i=0}^{n-2} \left\| \int_0^1 \left|\partial_1^{(i)} G(t,s)\right| ds \right\|_\infty}{1 - r \sum_{i=0}^{n-2} \left\| \int_0^1 \left|\partial_1^{(i)} G(t,s)\right| ds \right\|_\infty} \leq \alpha$$

ثم A يحول c في نفسها من أجل

$$\alpha = \frac{\| a\|_\infty \sum_{i=0}^{n-2} \left\| \int_0^1 \left|\partial_1^{(i)} G(t,s)\right| ds \right\|_\infty}{1 - r \sum_{i=0}^{n-2} \left\| \int_0^1 \left|\partial_1^{(i)} G(t,s)\right| ds \right\|_\infty}$$

مرحلة2 :

المؤثر A مستمر .

ليكن $(x_m)\in C$ متتالية متقاربة نحو $x\in C$ مما يعني أن $(x_m^{(i)})$ متقاربة نحو $x^{(i)}$ في الفضاء $C(I,[-\alpha,\alpha])$ من أجل كل $i=0,...,n-2$ بما أن f مستمرة بإنتظام في المجموعة المتراصة

$$I\times\underbrace{[-\alpha,\alpha]\times...\times[-\alpha,\alpha]}_{n-1 times}$$

و المتتالية $(f(s,x_m,x'_m,...,x_m^{(n-2)}))$ تتقارب نحو $f(s,x,x',...,x^{(n-2)})$ في $C(I,\mathbb{R})$

وكذلك

$$\| Ax_m-Ax \|\le\| f(s,x_m,x'_m,...,x_m^{n-2})-f(s,x,x',...,x^{n-2})\|_\infty\sum_{i=0}^{n-2}\left\|\int_0^1\partial_1^{(i)}G(t,s)ds\right\|_\infty$$

مما يعني أن (Ax_m) تتقارب نحو Ax والمؤثر A مستمر.

مرحلة3 :

$A(C)$ متراصة نسبيا ،واضح أن $A(C)$ محدودة.

لإثبات أن $A(C)$ متساوي الإستمرار نأخذ t_1 و t_2 من I ،ومن أجل كل $i=0,...,n-3$ يوجد ζ_i بين t_1 و t_1 حيث:

$$\partial_1^{(i)}G(t_2,s)-\partial_1^{(i)}G(t_1,s)=(t_2-t_1)\partial_1^{(i+1)}G(\zeta_i s)$$

لذلك من أجل كل $i=0,...,n-3,$

$$\begin{aligned}\left|Ax^{(i)}(t_2)-Ax^{(i)}(t_1)\right| &= \left|\int_0^1 f(s,x,x',...,x^{(n-2)})(\partial_1^{(i)}G(t_2,s)-\partial_1^{(i)}G(t_1,s))ds\right|\\ &\le\int_0^1\left|f(s,x,x',...,x^{(n-2)})\partial_1^{(i+1)}G(\zeta,s)(t_2-t_1)\right|ds\\ &\le|t_2-t_1|(\| a\|_\infty+r\alpha)\left\|\int_0^1\left|\partial_1^{(i+1)}G(t,s)\right|ds\right\|_\infty \qquad (16.3)\end{aligned}$$

الآن ليكن $\epsilon>0$ نلاحظ أن :

$$\lambda=\max_{0\le i\le n-3}\left\|\int_0^1\left|\partial_1^{(i+1)}G(t,s)\right|ds\right\|_\infty$$

ومنه من (16.3) إذا كان $|t_2-t_1|\le\delta_1=\frac{\epsilon}{1+(\|a\|_\infty+r\alpha)\lambda'}$ ومن أجل كل $i=0,...,n-3$, يكون

$$\left|Ax^{(i)}(t_2)-Ax^{(i)}(t_1)\right|\le\epsilon$$

من جهة أخرى لتكن الدالة $g(t,s)$ مستمرة بإنتظام في $I \times I$.
ومنه يوجد $\delta_2 > 0$ حيث إذا كان $|t_2 - t_1| \leq \delta_2$ ومن أجل كل $s \in I$ فإن

$$|g(t_2,s) - g(t_1,s)| < \frac{\epsilon}{1+ \| a\|_\infty + r\alpha}$$

مما يعني أنه من أجل كل $i = n-2$ فإن

$$\begin{aligned}\left|(Ax)^{(n-2)}x(t_2) - (Ax)^{(n-2)}x(t_1)\right| &= \left|\int_0^1 f(s,x,x',...,x^{(n-2)})(g(t_2,s)-g(t_1,s))ds\right| \\ &\leq (\| a\|_\infty + r\alpha)\| g(t_2,s) - g(t_1,s)\|_\infty \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

ومنه المرحلة الثالثة تكتمل بالقول أن $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$ لذلك المجموعة $A(C)$ متساوية الإستمرار.

برهان النظرية (1,2,3) يستنتج من نظرية النقطة الثابتة لشودر. □

مثال 1.2.3

نعتبر المسألة التالية من الدرجة الثالثة ذات الشروط الحدية:

$$\begin{cases} u^{(3)} - \lambda \ln(2 + u^2 + (u')^2) = 0, t \in I = [0,1], \\ u(0) = 0 \\ u'(0) - u^{(2)}(0) = 0, \\ u'(1) + u^{(2)}(1) = 0 \end{cases} \tag{17.3}$$

حيث λ عدد موجب ومنه بإستعمال خواص النظرية (1,2,3) حيث :

$$n = 3, f(t,u,u') = \lambda \ln(2 + u^2 + (u^{'})^2), \alpha = \gamma = \beta = \delta = 1$$

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = g(t,s)$$

حيث:

$$g(t,s) = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} (1+s)[1+(1-t], 0 \leq s \leq t, \\ (1+t)[1+(1-s)], t \leq s \leq 1 \end{Bmatrix}$$

مما يعني أن $\int_0^1 |g(t,s)|ds = \frac{1}{2}(1-t+t^2)$ و $\left\| \int_0^1 |g(t,s)|ds \right\| = \frac{5}{8}$ من جهة أخرى لدينا:

$$G(t,s) = \int_0^t g(r,s)dr = \frac{1}{3}\begin{cases} (1+s)\left[2t-\frac{t^2}{2}\right], 0 \le s \le t, \\ (2-s)\left[t+\frac{t^2}{2}\right], t \le s \le 1. \end{cases}$$

مما يعني أن

$$\int_0^t |G(t,s)|ds = \frac{1}{4}(2t+t^2)$$

و

$$\left\| \int_0^t |G(t,s)ds| \right\| = \frac{3}{4}$$

من السهل التأكد من أن :

$$|f(s,u_0,u_1)| \le \lambda \ln(2) + \lambda |u_0| + \lambda |u_1|$$

ومنه الشرط (i) و (ii) يستوفى لما يكون $a(s) = \lambda \ln(2), b_0 = b_1 = \lambda$

ومنه المتراجحة في النظرية (1,2,3) تأخذ الشكل:

$$\lambda\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\right) < 1 \Leftrightarrow \lambda < \frac{8}{11}$$

ومنه حسب النظرية (1,2,3) نستنتج أن المسألة من الدرجة الثالثة ذات الشروط الحدية تملك حل حيث $u \in C^3(I,\mathbb{R})$ ويكون $\lambda < \frac{8}{11}$.

وفق الشرط الثاني

في هذه المرحلة سوف ندرس وجود الحل للمسألة (10.3) مع الشرط (12.3)
من السهل التأطد من أن u هو حل للمعادلة (10.3) في $C^n(I,\mathbb{R})$ إذا وفقط إذا كان u هو حل للمعادلة التكاملية التالية :

$$u(t) = -\int_0^1 G(t,s)f(s,u,u',...,u^{(n-2)}ds \tag{18.3}$$

في $C^{n-2}(I,\mathbb{R})$ حيث دالة غرين $G(t,s)$ معرفة ب:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{a(s)t^{n-1}}{(n-1)!}, if\, 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ \\ \frac{a(s)t^{n-1}+(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, if\, 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

حيث

$$a(s) = \begin{cases} -\frac{(1-s)^{n-1}}{1-\alpha\eta^{n-1}}, \eta \leq s, \\ \\ -\frac{(1-s)^{n-1}-\alpha(\eta-s)^{n-1}}{1-\alpha\eta^{n-1}}, s \leq \eta \end{cases}$$

بالإضافة إلى

$$\partial_1^{(i)}G(t,s) = \begin{cases} \frac{a(s)t^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, if\, 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ \\ \frac{a(s)t^{n-i-1}+(t-s)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, if\, 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

المعادلة (18.3) سوف نقوم بدراستها حسب الفرضيات الآتية:

- (i) $f \in C(I,\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R})$
- (ii) توجد دالة $\phi \in C(I,\mathbb{R}^+)$ وثابت $b_k \in \mathbb{R}^+)(k=0,...,n-2)$ حيث:

$$|f(s,u_0,u_1,...,u_{n-2})| \leq \phi(s) + \sum_{k=0}^{n-2} b_k\, |u_k|$$

حسب الفرضيات (i) و(ii)، سوف نقوم بإستعمال نظرية النقطة الثابتة لشودر لإثبات النظرية التالية.

نظرية 2.2.3:

إذا كانت الفرضيات (i) و(ii) محققة وكان

$$r\left(\frac{1+\alpha\eta^n}{n(1-\alpha\eta^{n-1})}+1\right)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}<1$$

حيث

$$r=Max\{b_0,...,b_{n-2}\}$$

ومنه المعادلة التكاملية (18.3) تملك حل في $C^{n-2}(I,\mathbb{R})$.

البرهان:

حل المعادلة (18.3) يكافئ إيجاد النقطة الثابتة للمؤثر A المعرف في الفضاء $E=C^{n-2}(I,\mathbb{R})$ بالعبارة

$$Ax(t)=-\int_0^1 G(t,s)f(s,x,x',...,x^{(n-2)})ds$$

واضح أن المؤثر A مستمر ومعرف من E نحو E بالإضافة إلى ذلك لدينا $x\in E$ و $t\in I$ و $i=0,...,n-2$ بالإضافة إلى ذلك:

$$(Ax)^{(i)}(t)=-\int_0^1 \partial_1^{(i)}G(t,s)f(s,x,x',...,x^{(n-2)})ds$$

البرهان يمر على ثلاث مراحل كما يلي :

مرحلة 1 :

يوجد $\beta>0$ حيث A يحول $C=\{x\in E,\|x\|\leq\beta\}$ في نفسها.

واضح أن C ليست خالية، محدودة ومحدبة في المجموعة الجزئية E .

بالإضافة إلى ذلك من أجل $x \in C, t \in I$ و $i = 0, ..., n-2$ يكون لدينا:

$$\left|(Ax)^{(i)}(t)\right| = \left|\int_0^1 \partial_1^{(i)} G(t,s) f(s, x, x', ..., x^{(n-2)} ds\right|$$

$$\leq \int_0^1 \left|\partial_1^{(i)} G(t,s)\right| (\varphi(s) + \sum_{k=0}^{n-2} b_k \left|x^{(k)}(s)\right|) ds$$

$$\leq \left(\| \varphi \|_\infty + \sum_{k=0}^{n-2} b_k \| x^{(k)} \|_\infty\right) \int_0^1 \left|\partial_1^{(i)} G(t,s)\right| ds \qquad (19.3)$$

ومنه من أجل $r = Max\{b_0, ..., b_{n-2}\}$ نحصل على :

$$\| Ax \| = \sum_{i=0}^{n-2} \| A^{(i)} x \|_\infty$$

$$\leq (\| \varphi \|_\infty + r\beta) \sum_{i=0}^{n-2} \| \int_0^1 \left|\partial_1^{(i)} G(t,s)\right| ds \|_\infty$$

$$\leq (\| \varphi \|_\infty + r\beta) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(n-i-1)!} \int_0^1 (|a(s)| + 1) ds$$

$$\leq (\| \varphi \|_\infty + r\beta) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(n-i-1)!} \left(\int_0^\eta |a(s)| ds + \int_\eta^1 |a(s)| ds + 1 \right)$$

$$\leq (\| \varphi \|_\infty + r\beta) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(n-i-1)!} \left(\frac{-(1-s)^n}{n(1-\alpha\eta^{n-1})} \Big|_0^1 + \frac{-\alpha(\eta-s)^n}{n(1-\alpha\eta^{n-1})} \Big|_0^\eta + 1 \right)$$

$$\leq (\| \varphi \|_\infty + r\beta) \left(\frac{1+\alpha\eta^n}{n(1-\alpha\eta^{n-1})} + 1 \right) \sum_{n=0}^{n-2} \frac{1}{(n-i-1)!}$$

$$\leq (\| \varphi \|_\infty + r\beta) \left(\frac{1+\alpha\eta^n}{n(1-\alpha\eta^{n-1}} + 1 \right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!}$$

نستنتج أن A يحول C في نفسها إذا كان

$$(\| \varphi \|_\infty + r\beta) \left(\frac{1+\alpha\eta^n}{n(1-\alpha\eta^{n-1})} + 1 \right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} \leq \beta$$

مما يعني أنه حسب شرط النظرية (2,2,3) فإن

$$\frac{\| \varphi \|_\infty \left(\frac{1+\alpha\eta^n}{n(1-\alpha\eta^{n-1})} + 1 \right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n!}}{1 - r\left(\frac{1+\alpha\eta^n}{n(1-\alpha\eta^{n-1}} + 1 \right) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!}} \leq \beta$$

ومنه C يحول A في نفسها من أجل

$$\frac{\|\varphi\|_\infty\left(\frac{1+\alpha\eta^n}{n(1-\alpha\eta^{n-1})}+1\right)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n!}}{1-r\left(\frac{1+\alpha\eta^n}{n(1-\alpha\eta^{n-1}}+1\right)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}}$$

مرحلة 2 :

المؤثر A مستمر.

لتكن $(x_m)\in C$ متتالية متقاربة نحو $x\in C$ مما يعني أن $(x_m^{(i)})$ تتقارب نحو $x^{(i)}$ في الفضاء $C(I,[-\beta,\beta])$ من أجل كل $i=0,...,n-2$

ومنه fمستمرة بإنتظام في المجموعة المتراصة $I\times\underbrace{[-\beta,\beta]\times...\times[-\beta,\beta]}_{n-1 times}$ ومنه المتتالية $(f(s,x_m,x'_m,...,x_m^{(n-2)}))$ تتقارب نحو $(f(s,x_m,x'_m,...,x_m^{(n-2)}))$ في $C(I,\mathbb{R})$

واضح أن

$$\|Ax_m-Ax\|\leq\|f(s,x_m,x'_m,...,x_m^{n-2})-f(s,x,x',...,x^{n-2})\|_\infty\sum_{i=0}^{n-2}\left\|\int_0^1\partial_1^{(i)}G(t,s)ds\right\|_\infty$$

مما يعني أن (Ax_m) تتقارب نحو Ax والمؤثر A مستمر.

مرحلة 3 :

$A(C)$ متراصة نسبيا،واضح أن $A(C)$ محدودة.

والآن لإثبات أن $A(C)$ متساوي الإستمرار نأخذ t_1 و t_2 من I.

ثم من أجل كل $i=0,...,n-3$ ، يوجد ζ بين t_1 و t_2 حيث:

$$\partial_1^{(i)}G(t_2,s)-\partial_1^{(i)}G(t_1,s)=(t_2-t_1)\partial_1^{(i+1)}G(\zeta_i,s).$$

ومنه من أجل كل $i=0,...,n-2$ حيث

$$\begin{aligned}\left|Ax^{(i)}(t_2)-Ax^{(i)}(t_1)\right|&=\left|\int_0^1 f(s,x,x',...,x^{(n-2)})(\partial_1^{(i)}G(t_2,s)-\partial_1^{(i)}G(t_1,s))ds\right|\\&\leq\int_0^1\left|f(s,x,x',...,x^{(n-2)})\partial_1^{(i+1)}G(\zeta_i,s)(t_2-t_1)\right|ds\\&\leq|t_2-t_1|(\varphi\|_\infty+r\beta)\left\|\int_0^1\left|\partial_1^{(i+1)}G(t,s)\right|ds\right\| \qquad (20.3)\end{aligned}$$

والآن ليكن $\epsilon > 0$ نلاحظ أن

$$\lambda = \max_{0\leq i\leq n-2} \left\| \int_0^1 \left| \partial_1^{(i+1)} G(t,s) \right| ds \right\|_\infty$$

ثم من (19.3) إذا كان $|t_2 - t_1| \leq \delta = \frac{\epsilon}{1+(\|\varphi\|_\infty + r\beta)\lambda}$ ومن أجل كل $i = 0, \ldots, n-2$ لدينا

$$\left| Ax^{(i)}(t_2) - Ax^{(i)}(t_1) \right| \leq \epsilon$$

ومنه المرحلة الثالثة اكتملت.

برهان النظرية (3;2,2) يستنتج من نظرية النقطة الثابتة لشودر. □

مثال 2.2.3

نعتبر المسألة التالية من الدرجة الثالثة ذات الشروط الحدية:

$$\begin{cases} u^{(3)} + \lambda \ln(2 + u^2 + (u')^2) = 0, t \in I = [0,1], \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0, \\ u(\frac{1}{2}) = u(1) \end{cases} \quad (21.3)$$

حيث λ عدد موجب،بإستعمال خواص النظرية (2,2,3) نجد

$$n = 3, f(t,u,u') = \lambda \ln(2 + u^2 + (u')^2), \alpha = 1, \eta = \frac{1}{2}$$

حيث

$$a(s) = \begin{cases} -\frac{(1-s)^2}{1-(\frac{1}{2})'}, \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \\ \\ -\frac{(1-s)^2 - (\frac{1}{2}-s)^2}{1-(\frac{1}{2})^2}, s \leq \eta. \end{cases}$$

و

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{a(s)t^2}{2}, if 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ \\ \frac{a(s)t^2 + (t-s)^2}{2}, if 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

من السهل التأكد من أن

$$|f(s,u_0,u_1)| \leq \lambda \ln(2) + \lambda |u_0| + \lambda |u_1|.$$

ومنه الشرط (i) و (ii) يستوفى لما يكون $\varphi(s) = \lambda \ln(2), b_0 = b_1 = \lambda, r = \lambda$.

ومنه،المتراجحة في النظرية (2,2,3) تأخذ الشكل

$$\lambda\left(\frac{1+(\frac{1}{2})^3}{3(1-\frac{1}{2})^2}+1\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)<1 \Leftrightarrow \lambda<\frac{4}{9}$$

ومنه حسب النظرية (2,2,3) نستنتج أن المسألة من الدرجة الثالثة ذات الشروط الحدية تملك حل حيث $u \in C^3(I,\mathbb{R})$ حيث $\lambda < \frac{4}{9}$.

الفصل الرابع

دراسة وجود حل لجداء معادلات تكاملية

1.4 تمهيد

في هذا الفصل نقوم بدراسة وجود حل لمعادلة الجداء التالية :

$$x(t)=\left[p(t)+\int_0^t h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds\right]\times\left[q(t)+\int_0^t h_2(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds\right]. \quad (1.4)$$

وقد درست معادلات الجداء التي تدخل في العديد من الظواهر مثل الفيزياء،البيولوجيا،الميكانيك..من طرف العديد من الرياضيين وفي أشكال مختلفة .

درس A.Bellour و S.Djebali المعادلة

$$x(t)=f(t,x(t))+f_1\left(t,\int_0^t v_1(t,s,x(s))ds\right)\times f_2\left(t,\int_0^t v_2(t,s,x(s))ds\right)\,(2.4)$$

وفي عملنا هذا سنقوم بدراسة حلول المعادلة (1.4) بإستعمال نظرية النقطة الثابتة لشودر ونظرية أسكولي أرزيلا المعممة.

2.4 تطبيق نظرية أسكولي أرزيلا المعممة في C^1 لإيجاد حل لجداء معادلات تكاملية

ليكن $a\in\mathbb{R}$ عدد حقيقي موجب، نعتبر الفضاء

$$P_a^1=C^1([0,a]).$$

واضح أن P_a^1 فضاء بناخ مزود بالنظيم

$$\| x \|=\sup_{t\in[0,a]}|x|+\sup_{t\in[0,a]}|x'|$$

المعادلة (1.4) سوف نقوم بدراستها وفق الفرضيات التالية:

- $p,q\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (H_1)
- $g\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ (H_2) ، ومنه يوجد $k_1,k_2\geq 0$ و $\phi_1\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ محدودة حيث:

$$|g(t,u,v)|\leq\phi_1(t)+k_1|u|+k_2|v|,\forall(t,u,v)\in\mathbb{R}^3.$$

- (H_3) $f \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ يوجد $k_3, k_4 \geq 0, \phi_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ محدودة حيث:

$$|f(t,u,v)| \leq \phi_2(t) + k_3|u| + k_4|v|, \forall (t,u,v) \in \mathbb{R}^3.$$

- (H_4) $h_1(t,s), h_2(t,s) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ دوال مستمرة ومحدودة،من أجل كل $t,s \in [0,a]$.

نظرية 1.2.4:

لتكنΩ مجموعة قابلة للقياس من $\mathbb{R}$ و (f_k) متتالية في الفضاء $L^1(\Omega, \mathbb{R})$ حيث: $f_k \to f(x)$ توجد دالة في $L^1(\Omega, \mathbb{R})$ حيث $|f_k(s)| \leq g(s)$ و $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ و

$$\int_\Omega |f_k - f|ds \to 0$$

لما

$$k \to \infty$$

من الفرضيات (H_1, H_4) والنظرية السابقة،سوف نستعمل نظرية النقطة الثابتة لشودر لإثبات النظرية التالية.

نظرية 2.2.4:

إذا كانت الفرضيات (H_1, H_4) محققة،وإذا تحقق الشرط:

$$Max\left\{\theta + a\theta, k_5 a\theta, 3\theta + 3a\theta^2 + 2\theta^2, 2k_5\theta + 3k_5 a\theta\right\} < \frac{1}{2}$$

ومنه جداء المعادلات التكاملية غير الخطية (1.4) تملك حل في $C^1(\mathbb{R})$.

البرهان:

حل المعادلة (1.4) يكافئ إيجاد النقطة الثابتة للمؤثر A حيث A معرف بالعبارة التالية:

$$Ax(t) = \left[p(t) + \int_0^1 h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s)ds\right] \times \left[q(t) + \int_0^t h_2(t,s)f(x,x(s),x'(s)ds\right]$$

واضح أن المؤثر A معرف من P^1 إلى P^1، بالإضافة إلى ذلك

$$\begin{aligned}(Ax)'(t) = &\left[\frac{\partial p(t)}{\partial t} + h_1(t,t)g(t,x(t),x'(t)) + \int_0^t \frac{\partial h_1(t,s)}{\partial t} g(s,x(s),x'(s))ds\right]\\ &\times \left[q(t) + \int_0^1 h_2(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds\right] + \left[p(t) + \int_0^t h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds\right]\\ &\times \left[\frac{\partial q(t)}{\partial t} + h_2(t,s)f(t,x(t),x'(t)) + \int_0^t \frac{\partial h_2(t,s)}{\partial t} f(s,x(s),x'(s))ds\right].\end{aligned}$$

يمر البرهان على ثلاث مراحل:

مرحلة 1 :

يوجد $\alpha > 0$ حيث A يحول $C = \{x \in P^1, \| x \| \leq \alpha\}$ في نفسها.
واضح أن C ليست خالية، محدودة، محدبة ومغلقة.
لتبسيط الخطوات أكثر نعطي الثوابت التالية:

$$\theta = \max\left\{|p(t)|, |q(t)|, |\phi_1(t)|, |\phi_2(t)|, \left|\frac{\partial p(t,s)}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial q(t,s)}{\partial t}\right|, |h_1(t,s)|, |h_2(t,s)|, |h_3(t,s)|\right\}$$

$$h_3(t,s) = \left|\frac{\partial h_1(t,s)}{\partial t}\right|, h_4(t,s) = \left|\frac{\partial h_2(t,s)}{\partial t}\right|, k_5 = \max\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$$

بالإضافة إلى ذلك،من أجل كل $x \in C$ و $t \in [0,a]$ لدينا:

$$|Ax(t)| = \left|p(t) + \int_0^t h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s)ds\right| \times \left|q(t) + \int_0^t h_2(t,s)f(x,x(s),x'(s))ds\right|$$

$$\leq \left[|p(t)| + \int_0^t |h_1(t,s)||\phi_1(s)| + k_1|x(s)| + k_2\left|x'(s)ds\right|\right]$$

$$\times \left[|q(t)| + \int_0^t |h_2(t,s)||\phi_2(s)|(k_3|x(s)| + k_4\left|x'(s)ds\right|\right]$$

$$\leq \left[|p(t)| + \int_0^t |h_1(t,s)|\phi_1(s) + k_5(|x(s)| + \left|x'(s)\right|)ds\right]$$

$$\times \left[q(t) + \int_0^t |h_2(t,s)||\phi_2(s)| + k_5(|x(s)| + \left|x'(s)\right|)ds\right]$$

$$\leq \left[\theta + \int_0^t \theta(\theta + k_5(\| x\|_\infty + \| x'\|_\infty))ds\right]$$

$$\times \left[\theta + \int_0^t \theta(\theta + k_5(\| x\|_\infty + \| x'\|_\infty))ds\right]$$

$$\leq \theta + \int_0^t \theta[\theta + k_5 \| x \| ds] \times \left[\theta + \int_0^t [\theta + k_5 \| x \|]ds\right]$$

$$\leq [\theta + \theta a(\theta + k_5\alpha)] \times [\theta + a\theta(\theta + k_5\alpha)]$$

$$\leq [\theta + \theta a(\theta + k_5\alpha)]^2$$

(3.4)

ولدينا:

$$\begin{aligned}
\left|(Ax)'(t)\right| &= \left[\frac{\partial p(t)}{\partial t}+h_1(t,t)g(t,x(t),x'(t))+\int_0^t \frac{\partial h_1(t,s)}{\partial t}g(s,x(s),x'(s)ds\right]\\
&\times\left[q(t)+\int_0^t h_2(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds+[p(t)+\int_0^t h_1(t,s))g(s,x(s),x'(s))ds\right]\\
&\times\left[\frac{\partial q(t)}{\partial t}h_2(t,t)f(t,x(t),x'(t))+\int_0^t \frac{\partial h_2(t,s)}{\partial t}f(s,x(s),x'(s))ds\right]\\
&\le\Bigg[\left|\frac{\partial p(t)}{\partial t}\right|+|h_1(t,t)|(\phi_1(t)+k_1|x(t)|+k_2\left|x'(t)\right|)\\
&+\int_0^t\left|\frac{\partial h_1(t,s)}{\partial t}\right|+(\phi_1(s)+k_1|x(s)|+k_2\left|x'(s)\right|ds\Bigg]\\
&\times\left[|q(t)|+\int_0^t |h_2(t,s)|(\phi_2(s)+k_3|x(s)|+k_4\left|x'(s)\right|)ds\right]\\
&+\left[|p(t)|+\int_0^t |h_1(t,s)|(\phi_1(s)+k_1|x(s)|+k_2\left|x'(s)\right|)ds\right]\\
&\times\Bigg[\left|\frac{\partial q(t)}{\partial t}\right|+|h_2(t,t)|(\phi_2(t)+k_3|x(t)|+k_4\left|x'(t)\right|)\\
&+\int_0^t\left|\frac{\partial h_2(t,s)}{\partial t}\right|+(\phi_2(s)+k_3|x(s)|+k_4\left|x'(s)\right|)ds\Bigg]\\
&\le\left[\theta+\theta(\theta+k_5(\| x(t)\|_\infty+\| x'(t)\|_\infty)+a\theta(\theta+k_5(\| x(s)\|_\infty+\| x'(s)\|_\infty)\right]\\
&\times\left[\theta+a\theta(\theta+k_5(\| x(s)\|_\infty+\| x'(s)\|_\infty)\right]+\left[\theta+a\theta(\theta+k_5(\| x(s)\|_\infty+\| x'(s)\|_\infty\right]\\
&\times\left[\theta+\theta(\theta+k_5(\| x(t)\|_\infty+\| x'(t)\|_\infty)+a\theta(\theta+k_5(\| x(s)\|_\infty+\| x'(s)\|_\infty\right]\\
&\le 2[\theta+\theta(\theta+k_5\| x\|)+a\theta(\theta+k_5\| x\|]\times[\theta+a\theta(\theta+k_5)\| x\|]\\
&\le 2[\theta+\theta(\theta+k_5\alpha)+a\theta(\theta+k_5\alpha)]\times[\theta+a\theta(\theta+k_5\alpha)]
\end{aligned}$$

(4.4)

ومنه من (3.4) و (4.4) نحصل على:

$$\begin{aligned}\| A(x) \| &\leq [\theta+\theta a(\theta+k_5\alpha)]^2+2[\theta+\theta(\theta+k_5\alpha)+a\theta(\theta+k_5\alpha)]\times[\theta+a\theta(\theta+k_5\alpha)]\\ &\leq [\theta+\theta a(\theta+k_5\alpha)]\times[\theta+\theta a(\theta+k_5\alpha)]+2[\theta+\theta(\theta+k_5\alpha)+a\theta(\theta+k_5\alpha)]\\ &\leq \left[\theta+a\theta^2+a\theta k_5\alpha\right]\times\left[3\theta+3a\theta^2+2\theta^2+2k_5\theta\alpha+3k_5a\theta\alpha\right]\\ &\leq \left[\theta+a\theta^2+a\theta k_5\alpha\right]\times\left[3\theta+3a\theta^2+2\theta^2+(2\theta k_5+3k_5\theta a)\alpha\right]\end{aligned}$$

بوضع:

$$r=Max\left\{\theta+a\theta^2,k_5a\theta,3\theta+3a\theta^2+2\theta^2,2\theta k_5+3k_5a\theta\right\}$$

نحصل على:

$$\| Ax \| \leq (r+r\alpha)\times(r+r\alpha)$$

نستنتج أن A يحول C في نفسها إذا كان:

$$\| Ax \| \leq (r+r\alpha)^2 \leq \alpha$$

مما يعني أن :

$r^2+r^2\alpha^2+2r^2\alpha \leq \alpha$ و $-r^2\alpha^2+(1-2r^2)\alpha-r\geq 0$ بالحساب نجد:

$\Delta=(1-2r^2)^2-4r^4$ أي: $\Delta=(1-2r)\times(1+2r)$ حيث : $r<\frac{1}{2}$ وهذا يعني أن: $r>0$

ومنه:

$$\begin{cases}\alpha_1=\frac{1-2r^2-\sqrt{\Delta}}{2r^2}\\ \\ \alpha_2=\frac{1+2r^2+\sqrt{\Delta}}{2r^2}\end{cases}$$

نلاحظ أن $0<\alpha_1\leq\alpha<\alpha_2$ ومنه A يحول C في نفسها من أجل

$$\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$$

مرحلة2 :

المؤثر A مستمر.

ولتكن $(x_n)_n\in C$ متتالية متقاربة نحو $x\in C$، هذا يعني أن $(x_n^{(i)})$ تتقارب نحو $x^{(i)}(i=1,2)$ في الفضاء $C([0,a],[-\alpha,\alpha])$ ومنه حسب نظرية التقارب المهيمن نجد:

$$\lim_{n\to+\infty}(Ax_n)=\lim_{n\to+\infty}\left[p(t)+\int_0^t h_1(t,s)g(s,x_n(s),x'_n(s))ds\right]$$
$$\times\left[q(t)+\int_0^t h_2(t,s)f(s,x_n(s),x'_n(s))ds\right]$$
$$=(p(t)+\int_0^t h_1(t,s)\left[\lim_{n\to+\infty}g(s,x_n(s),x'_n(s))ds\right]$$
$$\times(q(t)+\int_0^t h_2(t,s)\left[\lim_{n\to+\infty}f(x,x_n(s),x'_n(s)ds\right]$$
$$=(p(t)+\int_0^t h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds)$$
$$\times(q(t)+\int_0^t h_2(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds=(Ax)(t)$$

مما يعني أن من أجل $t\in[0,a]$ فإن المتتالية (Ax_n) تتقارب نحو Ax إذن المؤثر A مستمر.

مرحلة 3 :

$A(C)$ متراصة نسبيا إذن واضح أن $A(C)$ محدودة.

لإثبات أن $A(C)$ متساوي الإستمرار،نأخذ t_1 و t_2 من $I=[0,a]$.

نضع $Ax(t)=H_1x(t)\times H_2x(t)$ حيث:

$$H_1x(t)=p(t)+\int_0^t h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds$$

و

$$H_2x(t)=q(t)+\int_0^t h_2(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds$$

ومنه

$$Ax(t)=(p(t)+\int_0^t h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds)\times(q(t)+\int_0^t h_2(t,s)f(s,x'(s))ds)$$

ومنه من اجل تساوي الإستمرار إذا كان $t_2<t_1$ حيث:

$$Ax_1(t)-Ax_2(t)=H_1x(t_1)\times H_2x(t_2)-H_1x(t_2)\times H_2x(t_2)$$
$$=H_1x(t_1)\times[H_2x(t_1)-H_2x(t_2)]+H_2x(t_2)\times[H_1x(t_1)-H_1x(t_2)] \quad (5.4)$$

قبل دراسة استمرارية A ندرس استمرارية المؤثر.

$$H_1 = p(t) + \int_0^t h_1(t,s) g(s, x(s), x'(s)) ds$$

ليكن $t_1, t_2 \in [0,a]$ حيث من أجل كل $t_2 < t_1$ لدينا:

$$|H_1x(t_1)-H_1x(t_2)| = |p(t_1)-p(t_2)| + \int_0^{t_1} h_1(t_1,s)g(s,x(s),x'(s))ds$$

$$-\int_0^{t_2} h_1(t_2,s)g(s,x(s),x'(s))ds$$

$$\leq |p(t_1)-p(t_2)| + \int_0^{t_2} h_1(t_1,s)g(s,x(s),x'(s))ds$$

$$+\int_{t_2}^{t_1} h_1(t_1,s)g(s,x(s),x'(s))ds - \int_0^{t_2} h_1(t_2,s)g(s,x(s),x'(s))ds$$

$$\leq |p(t_1)-p(t_2)| + \left|\int_0^{t_2} h_1(t_1,s)-h_1(t_2,s)g(s,x(s),x'(s))ds\right|$$

$$+\left|\int_{t_2}^{t_1} h_1(t_1,s)g(s,x(s),x'(s)ds\right|$$

$$\leq |p(t_1)-p(t_2)| + \left|\int_0^{t_2} h_1\,(t_1,s)-h_1(t_2,s)(|\phi_1(s)|+k_1\,|x(s)|\right.$$

$$\left.+k_2\left|x'(s)\right| + \int_{t_2}^{t_1} h_1(t_1,s)(|\phi_1(s)|+k_1\,|x(s)|+k_2\left|x'(s)\right|ds\right|$$

$$\leq |p(t_1)-p(t_2)| + \int_0^{t_2} |h_1(t_1,s)-h_1(t_2,s)|(\|\,\phi_1\,\|$$

$$+k_5(\|\,x\|_\infty + \|\,x'\|_\infty)) + \int_{t_2}^{t_1} |h_1(t_1,s)|(\|\,\phi_1\,\| + k_5(\|\,x\|_\infty + \|\,x'\|_\infty))ds$$

$$\leq |p(t_1)-p(t_2)| + \int_0^{t_2} |h_1(t_1,s)-h_1(t_2,s)|(\theta + k_5\,\|\,x\,\|)ds$$

$$+\int_{t_2}^{t_1} \theta(\theta+k_5)\,\|\,x\,\|$$

$$\leq |p(t_1)-p(t_2)| + a(\theta+k_5\alpha)\,\|\,h_1(t_1,s)-h_1(t_2,s)\|_\infty + \theta(\theta+k_5\alpha)\,|t_1-t_2|$$

وأخيرا نجد:

$$|H_1x(t_1)-H_1x(t_2)| \leq |p(t_1)-p(t_2)|+a(\theta+k_5\alpha)\parallel h_1(t_1,s)-h_1(t_2,s)\|_\infty$$
$$+\theta(\theta+k_5\alpha)|t_1-t_2| \quad (6.4)$$

بنفس الطريقة نجد :

$$|H_2x(t_1)-H_2x(t_2)| \leq |q(t_1)-q(t_2)|+a(\theta+k_5\alpha)\parallel h_2(t_1,s)-h_2(t_2,s)\|_\infty$$
$$+\theta(\theta+k_5\alpha)|t_2-t_1| \quad (7.4)$$

ليكن $\epsilon > 0$ ومنه الدوال $h_1(t,s)$ و $h_1(t,s)$ و p وq كلهم مستمرين بإنتظام في المجموعة $[0,2a]\times[0,a]$، أي يوجد $\delta > 0$ حيث إذا كان $|t_2-t_1| \leq \delta$ يكون لدينا من أجل كل $s \in [0,2a]$ متتالية.

المجموعة $H_2(C),H_1(C)$ متساوية الإستمرار ولدينا :

$$|H_1x(t)| = \left|p(t)+\int_0^t h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds\right|$$
$$\leq |\theta+\theta a(\theta+k_5\alpha)|$$

ولدينا أيضا

$$|H_2x(t)| = \left|q(t)+\int_0^t h_2(t,s)f(s,x(s),x'(s)ds\right|$$
$$\leq |\theta+\theta a(\theta+k_5\alpha)|$$

حيث H_1,H_2 محدودة،إذن من (5.4)، (6.4) و (7.4)

لدينا:

$$Ax(t_1)-Ax(t_2) = H_1x(t_1)\times H_2x(t_2)-H_1x(t_2)\times H_2x(t_2)$$
$$= H_1x(t_1)\times[H_2x(t_1)-H_2x(t_2)]+H_2x(t_2)\times[H_1x(t_1)-H_1x(t_2)]$$

ونجد

$$|Ax(t_1)-Ax(t_2)| = [\theta+\theta a(\theta+k_5\alpha)]\times[|H_2x(t_1)-H_2x(t_2)|+H_1x(t_1)-H_1x(t_2)]$$
$$\leq [\theta+\theta a(\theta+k_5\alpha)]\times[|q(t_1)-q(t_2)|+a(\theta+k_5\alpha)$$
$$\times \parallel h_2(t_1,s)-h_2(t_2,s)\|_\infty\ \theta(\theta+k_5\alpha)|t_1-t_2|]$$
$$+[|p(t_1)-p(t_2)|+a(\theta+k_5\alpha)\parallel h_1(t_1,s)-h_2(t_2,s)\|_\infty$$
$$+\theta(\theta+k_5\alpha)|t_1-t_2|]$$

ومنه :

$$(Ax)'(t)=\left[\frac{\partial p(t)}{\partial t}+h_1(t,t)g(t,x(t),x'(t))+\int\limits_0^t\frac{\partial h_1(t,s)}{\partial t}g(s,x(s),x'(s))ds\right]$$
$$\times\left[q(t)+\int\limits_0^t h_2(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds\right]+\left[p(t)+\int\limits_0^t h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds\right]$$
$$\times\left[\frac{\partial q(t)}{\partial t}+h_2(t,t)f(t,x(t),x'(t))+\int\limits_0^t\frac{\partial h_2(t,s)}{\partial t}f(s,x(s),x'(s))ds\right]$$

إذا وضعنا

$$p_1(t)=\frac{\partial p(t)}{\partial t}+h_1(t,t)g(t,x(t),x'(t)),q_1(t)=\frac{\partial q(t)}{\partial t}+h_2(t,t)f(t,x(t),x'(t))$$

نجد :

$$(Ax)'(t)=\left[p_1(t)+\int\limits_0^t h_3(t,s)g(s,x(s),x'(s)ds\right]\times\left[q(t)+\int\limits_0^t h_2(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds\right]$$
$$+\left[p(t)+\int\limits_0^t h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds\right]\times\left[q_1(t)+\int\limits_0^t h_4(t,s)f(s,x(s),x'(s)ds\right]$$

ليكن

$$\begin{cases}H_1(t)=p(t)+\int\limits_0^t h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds\\H_2(t)=q(t)+\int\limits_0^t h_2(t,s)f(x,x(s),x'(s))ds\\H_3(t)=p_1(t)+\int\limits_0^t h_3(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds\\H_4(t)=q_1(t)+\int\limits_0^t h_4(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds\end{cases}\qquad(8.4)$$

إذن

$$(Ax)'(t)=H_3(t)\times H_2(t)+H_1(t)\times H_4(t)$$

بإستعمال الفرضيات السابقة،نثبت أن

$$\begin{aligned}
A'x(t_1)-A'x(t_2) &= H_3x(t_1)\times H_2x(t_2)+H_1x(t_1)\times H_4x(t_1)\\
&-H_3x(t_2)\times H_2x(t_2)-H_1x(t_2)\times H_4x(t_2)\\
&=H_3x(t_1)\times H_2x(t_1)-H_3x(t_2)\times H_2x(t_2)\\
&+H_1x(t_1)\times H_4x(t_1)-H_1x(t_2)\times H_4x(t_2)\\
&+H_3x(t_1)\times[H_2x(t_1)-H_2x(t_2)]\\
&+H_2x(t_2)\times[H_3x(t_1)-H_3x(t_2)]+H_1x(t_1)\\
&\times\left[(H_4x(t_1)-(H_4x(t_2)\right]+H_4x(t_2)\times[(H_1x(t_1)-H_1x(t_2)] \qquad (9.4)
\end{aligned}$$

لدينا

H_3, H_4 محدودة لأن

$$\begin{aligned}
|H_3(t)| &= \left|p_1(t)+\int_0^t h_3(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds\right|\\
&=\left|\frac{\partial p(t)}{\partial t}+h_1(t,t)g(t,x(t),x'(t))+\int_0^t\frac{\partial h_1(t)}{\partial t}g(s,x(s),x'(s))ds\right|\\
&\leq \theta+\theta(\theta+k_5\parallel x\parallel)+\int_0^t(\theta(\theta+k_5\alpha))ds\\
&\leq \theta+\theta(\theta+k_5\alpha)+\int_0^t(\theta+k_5\alpha))ds\\
&\leq \theta+\theta(\theta+k_5\alpha)+a\theta(\theta+k_5\alpha) \qquad (10.4)
\end{aligned}$$

نستنتج أن:

$$\begin{aligned}
\left|H_4(t)\right| &= \left|q_1(t)+\int_0^t h_4(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds\right| \\
&\left|\frac{\partial q(t)}{\partial t}+h_1(t,t)f(t,x(t),x'(t))+\int_0^t \frac{\partial h_2(t)}{\partial t}f(s,x(s),x'(s))ds\right| \\
&\leq \theta+\theta(\theta+k_5\parallel x\parallel)+\int_0^t (\theta(\theta+k_5\alpha))ds \\
&\leq \theta+\theta(\theta+k_5\alpha)+\int_0^t (\theta+k_5\alpha))ds \\
&\leq \theta+\theta(\theta+k_5\alpha)+a\theta(\theta+k_5\alpha)
\end{aligned} \tag{11.4}$$

ومنه H_1, H_2, H_3, H_4 محدودة ولدينا:

$$\begin{cases}
|H_1(t)| = \left|p(t)+\int_0^t h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds\right| \leq \theta+a\theta(\theta+k_5\alpha) \\
|H_2(t)| = \left|q(t)+\int_0^t h_2(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds\right| \leq \theta+a\theta(\theta+k_5\alpha) \\
|H_3(t)| \leq \theta+\theta(\theta+k_5\alpha)+a\theta(\theta+k_5\alpha) \\
\left|H_4(t)\right| \leq \theta+\theta(\theta+k_5\alpha)+a\theta(\theta+k_5\alpha)
\end{cases} \tag{12.4}$$

ومنه يكون لدينا:

$$|H_3x(t_1)-H_3x(t_2)|=\left|p_1(t_1)+\int_0^{t_1}h_3(t_1,s)g(s,x(s),x'(s))ds-p_1(t_2)\right.$$

$$\left.+\int_0^{t_2}h_3(t_2,s)g(s,x(s),x'(s))ds\right|$$

$$\leq\left|\partial p(t_1)\partial t+h_1(t_1,t_1)g(t_1,x(t_1),x'(t_1))+\int_0^{t_1}\frac{\partial h_1}{\partial t}g(s,x(s),x'(s))ds\right.$$

$$\left.-\frac{\partial p(t_2)}{\partial t}-h_1(t_2,t_2)g(t_2,x(t_2),x'(t_2))-\int_0^{t_2}\frac{\partial h_1(t_2)}{\partial t}g(s,x(s),x'(s))ds\right|$$

$$\leq\left|\frac{\partial p(t_1)}{\partial t}-\frac{\partial p(t_2)}{\partial t}\right|+|h_1\,(t_1,t_1)g(t_1,x(t_1),x'(t_1))$$

$$-h_1(t_2,t_2)g(t_2,x(t_2),x'(t_2))|$$

$$+\left|\int_0^{t_1}\frac{\partial h_1(t_1)}{\partial t}g(s,x(s),x'(s))ds-\int_0^{t_2}\frac{\partial h_1(t_2)}{\partial t}g(s,x(s),x'(s))ds\right|$$

$$\leq\left|\frac{\partial p(t_1)}{\partial t}-\frac{\partial p(t_2)}{\partial t}\right|+|h_1\,(t_1,t_1)g(t_1,x(t_1),x'(t_1))$$

$$-h_1(t_2,t_2)g(t_2,x(t_2),x'(t_2))|+\left|\int_0^{t_2}\frac{\partial h_1(t_1)}{\partial t}g(s,x(s),x'(s))ds\right.$$

$$\left.+\int_{t_2}^{t_1}\frac{\partial h_1(t)}{\partial t}f(s,x(s),x'(s))ds-\int_0^{t_2}\frac{\partial h_1(t_2)}{\partial t}g(s,x(s),x'(s))ds\right|$$

$$\leq\left|\frac{\partial p(t_1)}{\partial t}-\frac{\partial p(t_2)}{\partial t}\right|+|h_1\,(t_1,t_1)g(t_1,x(t_1),x'(t_1))$$

$$-h_1(t_2,t_2)g(t_2,x(t_2),x'(t_2))|+\left|\left(\int_0^{t_2}\frac{\partial h_1(t_1)}{\partial t}-\frac{\partial h_1(t_2)}{\partial t}\right)g(s,x(s),x'(s))ds\right.$$

$$\left.+\int_{t_2}^{t_1}\frac{\partial h_1(t)}{\partial t}g(s,x(s),x'(s))ds\right|$$

$$\leq\left|\frac{\partial p(t_1)}{\partial t}-\frac{\partial p(t_2)}{\partial t}\right|+|h_1\,(t_1,t_1)g(t_1,x(t_1),x'(t_1))$$

$$-h_1(t_2,t_2)g(t_2,x(t_2),x'(t_2))| \tag{13.4}$$

$$+(\theta+k_5\alpha)\int_0^{t_2}\left|\frac{\partial h_1(t_1)}{\partial t}-\frac{\partial h_1(t_2)}{\partial t}\right|ds+\theta(\theta+k_5\alpha)\,|t_1-t_2|$$

ونستنتج أن

$$
\begin{aligned}
\left|H_4x(t_1)-H_4x(t_2)\right| = & \left|q_1(t_1)+\int_0^{t_1} h_4(t_1,s)f(s,x(s),x'(s))ds-q_1(t_2)\right.\\
& \left.+\int_0^{t_2} h_4(t_2,s)f(s,x(s),x'(s))ds\right|\\
& \leq \left|\partial q(t_1)\partial t+h_2(t_1,t_1)f(t_1,x(t_1),x'(t_1))+\int_0^{t_1}\frac{\partial h_2}{\partial t}f(s,x(s),x'(s))ds\right.\\
& \left.-\frac{\partial q(t_2)}{\partial t}-h_2(t_2,t_2)f(t_2,x(t_2),x'(t_2))-\int_0^{t_2}\frac{\partial h_2(t_2)}{\partial t}f(s,x(s),x'(s))ds\right|\\
& \leq \left|\frac{\partial q(t_1)}{\partial t}-\frac{\partial q(t_2)}{\partial t}\right|+|h_2\,(t_1,t_1)f(t_1,x(t_1),x'(t_1))\\
& -h_2(t_2,t_2)f(t_2,x(t_2),x'(t_2))|\\
& +\left|\int_0^{t_1}\frac{\partial h_2(t_1)}{\partial t}f(s,x(s),x'(s))ds-\int_0^{t_2}\frac{\partial h_2(t_2)}{\partial t}f(s,x(s),x'(s))ds\right|\\
& \leq \left|\frac{\partial q(t_1)}{\partial t}-\frac{\partial q(t_2)}{\partial t}\right|+|h_2\,(t_1,t_1)f(t_1,x(t_1),x'(t_1))\\
& -h_2(t_2,t_2)f(t_2,x(t_2),x'(t_2))|+\left|\int_0^{t_2}\frac{\partial h_2(t_1)}{\partial t}f(s,x(s),x'(s))ds\right.\\
& \left.+\int_{t_2}^{t_1}\frac{\partial h_2(t)}{\partial t}f(s,x(s),x'(s))ds-\int_0^{t_2}\frac{\partial h_1(t_2)}{\partial t}f(s,x(s),x'(s))ds\right|\\
& \leq \left|\frac{\partial q(t_1)}{\partial t}-\frac{\partial q(t_2)}{\partial t}\right|+|h_2\,(t_1,t_1)f(t_1,x(t_1),x'(t_1))\\
& -h_2(t_2,t_2)f(t_2,x(t_2),x'(t_2))|\\
& +(\theta+k_5\alpha)\int_0^{t_2}\left|\frac{\partial h_2(t_1)}{\partial t}-\frac{\partial h_2(t_2)}{\partial t}\right|ds+\theta(\theta+k_5\alpha)|t_1-t_2|
\end{aligned}
\tag{14.4}
$$

ليكن $\epsilon > 0$ ومنه الدوال $h_3(t,s), h_4(t,s)$ و p_1, q_1 مستمرين بإنتظام في المجموعة المتراصة $[0,a], [0,2a]$ ومنه يوجد $\delta_1 > 0$ حيث إذا كان : $|t_2 - t_1| \leq \delta$ يكون لدينا من أجل كل $s \in [0,2a]$ إذن $H_3(C), H_4(C)$ متساوية الإستمرار.

ومنه حسب (6.4), (7.4), (9.4), (12.4), (13.4), (14.4) نحصل على:

$$\begin{aligned}
\left|A'x(t_1) - A'x(t_2)\right| &= |H_3x(t_1) \times H_2x(t_2) + H_1x(t_1) \times H_4x(t_1) - H_3x(t_2) \times H_2x(t_2) \\
&- H_1x(t_2) \times H_4x(t_2)| \\
&= |H_3x(t_1) \times H_2x(t_1) - H_3x(t_2) \times H_2x(t_2) + H_1x(t_1) \times H_4x(t_1) \\
&- H_1x(t_2) \times H_4x(t_2)| \\
&= |H_3\, x(t_1) \times [H_2x(t_2) - H_2x(t_2)] + H_2x(t_2) \times [H_3x(t_1) - H_3x(t_2)] \\
&+ H_1x(t_1) \times \left[(H_4x(t_1) - (H_4x(t_2)\right] + H_4x(t_2) \times [(H_1x(t_1) - H_1x(t_2)]| \\
&\leq [\theta + \theta(\theta + k_5\alpha) + a\theta(\theta + k_5\alpha)] \times |H_2x(t_1) - H_2x(t_2)| + [\theta + a\theta(\theta + k_5\alpha)] \\
&\times |H_3x(t_1) - H_3x(t_2)| + [\theta + a\theta(\theta + k_5\alpha)] \left|H_4x(t_1) - (H_4x(t_2)\right| \\
&+ [\theta + \theta(\theta + k_5\alpha) + a(\theta(\theta + k_5\alpha)] |H_1x(t_1) - H_2x(t_2)| \\
&\leq [\theta + \theta(\theta + k_5\alpha) + a\theta(\theta + k_5\alpha)] \times (|q(t_1) - q(t_2)|) + a(\theta + k_5\alpha) \\
&\times \| h_2(t_1,s) - h_2(t_2,s)\|_\infty + \theta(\theta + k_5\alpha)(|t_2 - t_1)| + [\theta + a\theta(\theta + k_5\alpha)] \\
&\times \left|\frac{\partial p(t_1)}{\partial t} - \frac{\partial p(t_2}{\partial t}\right| + |h_1\,(t_1,t_1)g(t_1,x(t_1),x'(t_1)) \\
&- h_1(t_2,x(t_2),x'(t_2)))| + (\theta + k_5\alpha)\int_0^{t_2}\left|\frac{\partial h(t_1)}{\partial t} - \frac{\partial h(t_2)}{\partial t}\right| ds \\
&+ [\theta + a\theta(\theta + k_5\alpha)] \times \left|\frac{\partial p(t_1)}{\partial t} - \frac{\partial p(t_2)}{\partial t}\right| + |h_2\,(t_1,t_1)f(t_1,x(t_1),x'(t_1)) \\
&- h_2(t_2,t_2)f(t_2,t_2)f(t_2,x(t_2),x'(t_2))| + (\theta + k_5\alpha)\int_0^{t_2}\left|\frac{\partial h_2(t_1)}{\partial t} - \frac{\partial h_2(t_2)}{\partial t}\right| ds \\
&+ \theta(\theta + k_5\alpha)|t_1 - t_2| + [\theta + \theta(\theta + k_5\alpha) + a\theta(\theta + k_5\alpha)] \\
&\times (|p(t_1) - p(t_2)| + a(\theta + k_5\alpha)\, \| h_1(t_1,s) - h_1(t_2,s)\|_\infty \\
&+ \theta(\theta + k_5\alpha)|t_1 - t_2|) \qquad (15.4)
\end{aligned}$$

إذن من (5.4), (6.4), (7.4), (15.4) نستنتج أنه من أجل كل $i = 0,1$ فإن:

$$\left|Ax^{(i)}(t_2) - Ax^{(i)}(t_1)\right| \leq \epsilon$$

وبالتالي المجموعة $A(C)$ متساوية الإستمرار.

ومنه حسب النظرية $(1,2,4)$ فإن $A(C)$ متراصة نسبيا.
برهان النظرية $(4,2,3)$ يستخرج من نظرية النقطة الثابتة لشودر.

□

مثال 1.2.4

نعتبر المعادلة التكاملية التالية (1.4)

$$x(t)=\left[p(t)+\int_0^t h_1(t,s)g(s,x(s),x'(s))ds\right]\times\left[q(t)+\int_0^t h_2(t,s)f(s,x(s),x'(s))ds\right]$$

لذلك بإستعمال خواص النظرية $(2,2,4)$ ومن أجل :

$$\begin{cases} g(t,u,v)=2\lambda t+\frac{1}{5}\cos(u), \\ f(t,u,v)=\lambda+\frac{1}{6}\sin(u)+\frac{1}{5} \\ h_1(t,s)=2\lambda t\cos(s), \lambda_2(t,s)=3\lambda\sin(s) \\ p(t)=3\lambda t, q(t)=2\lambda t \end{cases} \qquad (16.4)$$

إذا وضعنا $a=1$ نحصل على $k_1=k_4=\frac{1}{5}, k_3=0$ إذن $k_5=\max\{k_1,k_2,k_3,k_4\}=\frac{1}{5}$ ويكون لدينا:

$$\theta=\max_{t\in[0,a]}\{|p(t)|,|q(t)|,|\phi_1(t)|,|\phi_2(t)|,\left|\frac{\partial p(t,s)}{\partial t}\right|,\left|\frac{\partial q(t,s)}{\partial t}\right|$$
$$,|h_1(t,s)|,|h_2(t,s)|,|h_3(t,s)|,|h_4(t,s)|\}$$

إذن:

$$\theta=\max_{t\in[0,1]}\{|3\lambda t|,|2\lambda t|\}=3\lambda$$

من أجل شرط النظرية $(2,2,4)$

$$Max\left\{\theta+a\theta^2,k_5a\theta,3\theta+3a\theta^2+2\theta^2,2\theta k_5+3k_5a\theta\right\}<\frac{1}{2}$$

ونجد:

$$Max\left\{3\lambda+9\lambda^2,\frac{3}{5}\lambda,9\lambda+45\lambda^2,\frac{6\lambda}{5}+\frac{9}{5}\lambda\right\}<\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow Max\left\{9\lambda+45\lambda^2,3\lambda\right\}<\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 3\lambda<\frac{1}{2} \\ 9\lambda+45\lambda^2<\frac{1}{2} \end{cases}$$

إذا كان:

$$9\lambda + 45\lambda^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow 90\lambda^2 + 18\lambda - 1 < 0$$

بالحساب نجد :

$\Delta' = \sqrt{171}$ مما يعني أن $\Delta' > 0$ ونحصل على:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-9+\sqrt{171}}{90} \\ \\ \lambda_2 = \frac{-9-\sqrt{171}}{90} \end{cases}$$

نحصل على: $\lambda \in]\lambda_2, \lambda_1[$ و $\lambda < \frac{1}{6}$ فنستنتج أن $\lambda \in]\lambda_2, \lambda_1[$

وحسب النظرية (2,2,4) نستنتج أن جداء المعادلات التكاملية (1.4) تملك حل حيث $u \in C^1(I, \mathbb{R})$.

خاتمة

إن موضوع نظرية أسكولي أرزيلا وتطبيقاتها شاسع جدا والبحث فيه طويل ويتطلب الكثير من الجهد والصبر،ولقد قمنا في هذه المذكرة بتعميم جديد لنظرية أسكولي أرزيلا من فضاء الدوال المستمرة C إلى فضاء الدوال المستمرة ذات الترتيب العالي مشتق C^n ،ومن ناحية أخرى استخدمنا هذا التعميم الجديد لدراسة وجود الحلول لبعض المعادلات التكاملية التفاضلية ومسائل القيم الحدودية ذات الرتب العليا في ظل شروط بسيطة.

ناقشنا أيضا وجود حل للمعادلات التكاملية المكافئة للمعادلة التفاضلية غير الخطية،وفي نهاية كل فصل تم تقديم بعض الأمثلة العددية لتوضيح النتائج النظرية.

إن الأشكال العامة للأجزاء غير الخطية في الغالب تحتوي على مشتقات الدالة المجهولة،فلا يمكننا تحويلها إلى معادلة تكاملية في فضاء الدوال المستمرة C لذلك لا يمكننا استخدام نظرية أسكولي أرزيلا المعرفة في C^n لإثبات وجود الحلول.

المراجع العلمية

[1] A.Abdeldaim, On some new Gronwall-bellman-Ou-lange type integral inequalities to study certain epidemic models,Journal of integral equations and applications 24(2012),149-166.

[2] R.P.Agrwal,F.H.wong,Existence of positive solution for non-positive higher-order BVPs,J.comput.Appl.Math.88(1998),3-14.

[3] A.Ardjouni,A.Djoudi,Existence of positive periodic solution for a nonlinear neutral disferential equation with variable dealy,Appl.Math.E-notes.12(2012),94-101.

[4] A.Ardjouni,A.Djoudi,The existence of periodic solutions for a second order non-linear neutral differential equation with functional dealy,Electron.J.Qual.Theory.Differ.Equ.31(2012),1-9.

[5] A.Ardjouni,A.Djoudi,Periodic solutions for a second-order nonlinear neutral differential with variable dealy.Electronic Journal of Differential Equations.11(2011),No.128,1072-6691.

[6] A.Bellour,A.Dads E,Periodic solutions for nonlinear neutral Dealy integro-differential equations,Electron.J.Differntial Equatuins.100(2015) ,1072-6691.

[7] M.Bousselsal,A.Bellour,S.Djebali,Solvability OF nonlinear integral equations of product type.Electronic Journal of differential Equations.19(2018),1-20.

[8] M.Bousselsal,A.Bellour and M-A.Touadi,A continuous solution of a perturbed integral equation of product type.Palastine Journal of Mathematics.3(2010),191-197.

[9] C.J.Chyan,J.Henderson,Positive solutions for singular higher order nonlinear equations.Diff.Eqs.Dyn.Sys.2(1994),153-60.

[10] P.W.Eloe,B.Ahmed,Positive solutions of nonlinear nth order BVP with nonlocal conditions,Appl.Math.Lett.18(2005),521-527.

[11] P.W.Eloe,J.Henderson,Positive solutions for higher ordinary differential,Elect.J.Differ .Equ.3(1995),1-8.

[12] J.R.Graef,T.Moussaoui,A class of nth-order BVPs with nonlocal conditions .Comput.Math.Appl.58(2009),1662-1671.

[13] M.N.Islam,Y.N.Raffoul,Periodic solutions of neutral nonlinear system of differential equations with functional dealy.J.Math.Anal.Appl.331(2007),1175-1186.

[14] P.J.Y.Wong,R.P.Agrwal,Eigenvalues of boundary value problems for higher order differn-tial equations.Math.Anal.Appl.195(1996),401-434.

[15] Y.Liu,W.Ge,Positive periodic solutions of nonlinear Duffing equations with Dealy and variable coefficients.Tamsui Oxf.J.Math.Sci.20(2004),235-255.

[16] S.Long,H.S.Ding,Positive almost automorphic solutions for some nonlinear dealy integral equations.Electron.J.Differ.Equ.57(2008),1-8.

[17] M.B.Mesmouli,A.Ardjouni,A.Djoudi,Study of periodic solutions of nonlinear neutral functional differential equations via fixed points.Acta Uni.Sapientiae,Mathematica.8(2016),255-270.

[18] J.Y.Patricia,F.H.Wong,R.P.Agrwal,On eigenvalue intervals and twin eigenfunctions of higher-order boundary value problems.J.Comput.Appl.Math.88(1998),15-43.

[19] Y.N.Raffoul,Existence of positive periodic solutions in neutral nonlinear equations with functional dealy.Rpcky.MT.Math.42(2012),1-11.

[20] Benhaiouna,S.Bellour.A and Amiar.R,A generalization of ascoli-Arzela theorem in C^n with application in the existence of a solution for a class of higher-order boundary value problem.Arab J.Math.Sci.

[21] G.F.Simmons,Introduction to topology and modern analysis.Krieger Publishing Company.(2003).

[22] Y.Wang,H.Lian,W.Ge,Periodic solutions for a second nonlinear functional differential equation.Appl.Math.Letters.20(2007),110-115.

[23] E.Yankson,Existence of periodic solutions for totally nonlinear neutral differential equations with functional dealy.Opusc.Math.32(2012),1-11.

[24] E.Zeidler,Nonlinear Functional Analysis and its Applications parti1,Springer verlag.new york.(1985)

[25] المختصر في الطبولوجيا محمد حازي.

ملخص

تعتبر المعادلات التفاضلية أو التكاملية من المواضيع الأساسية في الرياضيات،ومساهمة في تقديم نظرة عن هذا الموضوع وعن كيفية إيجاد حلول لهذه المعادلات بإستعمال نظريات النقطة الثابتة كنظرية النقطة الثابتة لشودر وتوظيف نظرية أسكولي أرزيلا بعد إعطاء تعميم لهذه النظرية وبرهانها،ثم عرفنا تطبيقات لهذه النظرية.

يمكن اعتبار هذه المذكرة كمساهمة في تطوير حل المعادلات التفاضلية أو تكاملية تفاضلية.

الكلمات المفتاحية:

معادلة تفاضلية تكاملية، إيجاد حلول،نظرية أسكولي أرزيلا المعممة في C^n ،معادلة تفاضلية غير خطية،نظرية النقطة الثابتة.