الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي - سكيكدة –

تخصص رياضيات

مذكرة لنيل شهادة أستاذ تعليم المتوسط :

دراسة السلاسل (العددية و التوابع)

من إعداد الطلبة:

- عزاب سيف الدين
- منصر طارق

تحت اشراف الاستاذة:

معيزي محمد

لجنة المناقشة

- **منصوري بوزيد .....أستاذ رئيسي**
- **بوسنة جلال .....أستاذ ممتحن**
- **فراق عزوز..... أستاذ مشرف**

السنة الجامعية: 2024/2023

المحتويات

1 المتتاليات و السلاسل العددية **6**
1.1 مفاهيم و معارف اساسية: 7
1.1.1 تذكير 7
1.1.2 السلاسل ذات الحدود الموجبة : 8
1.1.3 السلاسل ذات الحدود الكيفية : 16
1.1.4 السلاسل المتقاربة مطلقا : 19

2 متتاليات التوابع **24**
2.1 عموميات و معارف اساسية: 25
2.2 متتالية التوابع و الإستمرار: 29
2.3 متتالية التوابع القابلة للمكاملة: 34
2.4 متتالية التوابع و قابلية الإشتقاق: 36

3 سلاسل التوابع **39**
3.1 عموميات و معارف اساسية: 40
3.2 أنواع التقاربات لسلاسل التوابع : 42
3.3 التقارب المنتظم و خواص مجاميع سلاسل التوابع : 46

إهداء :

قال تعالى :"قل إعملوا فسير الله عملكم و الرسول و المؤمنين " إلى من بلغ الرسالة و أدى الأمانة ... و نصح الامة ...إلى نبي الرحمة ونور العالمين

سيدنا محمد صلى الله عليه و سلم

إلى من كلله الله بالهيبة و الوقار ... إلى من علمني العطاء بدون أنتظار ... إلى من أحمل أسمه بكل أفتخار ... أرجو من الله يرحمك و يتقبلك من الشهداء و ستبقى كلماتك نجوم أهتدي بها اليوم وفي الغد و إلى الأبد

والدي العزيز ـ رحمه الله ـ

إلى ملاكي في الحياة ... إلى معنى الحب و إلى معنى الحنان ... إلى بسمة الحياة و سر الوجود

أمي الحبيبة

إلى منارة العلم و العلماء إلى صرح الشامل ... المدرسة العليا

إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة ... إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم و المعرفة ... أساتذتنا الأفاضل

وشكرًا

" طارق منصر "

إهداء :

سبحان الله الذي اذا أحب عبدا أكرمه و الحمد الله الذي بحمده تدوم النعم و الصلاة و السلام على سيدنا محمد ـ صلى الله عليه و سلم ـ

بعد رحلة من الجهد و الأجتهاد تكللنا بانجاز هذا العمل . نحمد الله عزوجل على النعمة التي منٌ بها علينا ,فهو العلي القدير .

إلى أمي الغالية ... إلى والدي العزيز ... إلى أخوتي و أخواتي ...

الذين كانوا كلهم سندي في مسيرتي الدراسية و في فترة تربصي ,

كما لايسعني إلآ أن نخص بأسمى عبارات الشكر و التقدير للأساتذة لما قدموه من جهد و نصائح و معرفة طيلة هذا التربص ,

و في الأخير أقدم تحياتي

إلى كل من أقسمو أن لايبرحو حتى يبلغو ...

إلى كل من شرف بحمل رسالة التعليم للناس ...

إن هذه الأمة لكم و منكم و ليكن النهوض بها من أولويتكم ...

وشكرًا

" سيف الدين"

المقدمة :

العلم هو المصباح الذي ينير دروب الحياة ويخرج الإنسان من حصون الجهل و الظلام , و لقد شرف الله العلم و أهله , و جعل العلماء ورثة الأنبياء و منارة يهتدى بهم .

يعتمد التحليل الرياضي على العديد من الوسائل القوية إذ تعتبر نظرية السلاسل إحدى اهم وسائله ,بإعتمادها على العديد من التطبيقات (نظرية الأعداد , المعادلات التفاضلية , الحساب التقريبي ...). كانت للسلاسل العددية الفضل الكبير في إثبات و برهان العديد من المفاهيم المتعلقة بالنهايات ,الإستمرار و المكاملة ... و يجدر بالذكر أن مفهوم النهاية متعلق بالتحليل الرياضي . من خلال مذكرتنا التي شملت نوعين من السلاسل (العددية و التوابع), توجهنا في البداية لدراسة السلاسل العددية التي تمثل جوهر دراسة سلاسل التوابع إذ تطرقنا بصفة خاصة لخواص و قواعدالتقارب . قسمت مذكرتنا لثلاثة فصول :

الفصل الأول :

شمل هذا الفصل كل من الخواص و التعاريف المتعلقة بالسلاسل إضافة إلى العلاقة بين السلاسل و المتتاليات و كذالك فضاء السلاسل .

الفصل الثاني :

درسنا في هذا الجزء بعض أنواع السلاسل (السلاسل ذات الحدود الموجبة , السلاسل ذات الحدود الكيفية) و شرط التقارب و المقارنة بين السلاسل و بعض المقاييس كالتكامل و مقياس دالمبار و مقياس كوشي ... الخ .

الفصل الثالث :

تطرقنا فيه لسلاسل التوابع و انواع التقاربات(المنتظم و الناظمي). و انهيناه بخواص مجاميع سلاسل التوابع مثل الإستمرار و المكاملة , الإشتقاق .

باب 1

المتتاليات و السلاسل العددية

إخترنا ان نفتتح مذكرتنا بتذكير حول أهم التعاريف والمفاهيم الأساسية التي سنستعين بها في الفصلين الثاني والثالث.

1.1 مفاهيم و معارف اساسية:

1.1.1 تذكير

متتاليات كوشي:

تعريف 1.1.1

نقول عن متتالية عددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها لكوشي اذا حققت الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p > q \geq N_0) \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

تعريف 2.1.1

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية . نسمي $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية المجاميع الجزئية التي حدها العام يعطى بالعلاقة التالية : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

نقول عن السلسلة $\sum u_n$ أنها متقاربة إذا وفقط إذا تقاربت متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من S و نكتب عندئذ $S = \sum_{n\geq 0} u_n$

تكون متتالية متقاربة إذا وفقط إذا حققت شرط كوشي و منه تكافؤ الخواص الآتية :

*السلسلة $\sum u_n$ متقاربة

*المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ تحقق شرط كوشي

* $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, (q \geq N_\varepsilon, p \in \mathbb{N}) \Rightarrow \left|\sum_{k=q}^{q+p} u_k\right| < \varepsilon$

ملاحظة :

هذا المعيار لتقارب السلسلة يمكننا في إثبات تقارب سلسلة دون معرفة مجموعها .

* ينتج عن الشرط السابق القضية التالية :

قضية 1.1.1

* إذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

ملاحظة

إن هذا الشرط ليس كاف .

مثال :

لنعتبر في $\mathbb{R}$ المتتالية العددية $u_n = \frac{1}{n}$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

لكن السلسلة $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة .

* إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متباعدة .

خواص :

لتكن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ سلسيلتين متقاربتين , عندئذ تكون السلسلة $\sum(\lambda u_n + v_n)$ متقاربة مهما كان λ في $\mathbb{k}$,و يكون :

$$\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n$$

1.1.2 السلاسل ذات الحدود الموجبة :

تعريف 3.1.1

نقول عن سلسلة $\sum u_n$ أنها موجبة تماما إذا و فقط إذا تحقق :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

قضية 2.1.1

إذا كانت المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأعلى فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة .

البرهان :

لدينا $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$, و منه $S_n - S_{n-1} = u_n$. إذن متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة(لأن $u_n \geq 0$), هذا يعني أنه اذا كانت المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأعلى فإنها متقاربة (السلسلة $\sum u_n$ متقاربة) .

ملاحظة :

إذا كانت المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست محدودة فإن $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ و السلسلة $\sum u_n$ متباعدة .

قضية 3.1.1 (معيار المقارنة)
لتكن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ سلسلتين ذات حدود موجبة . و تحقق $u_n \leq v_n$ ابتداء من رتبة معينة عندئذ :
*$\sum v_n$ متقاربة => $\sum u_n$ متقاربة
*$\sum u_n$ متباعدة => $\sum v_n$ متباعدة
إذا كانت المتراجحة $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ محققة نقول أن السلسلة $\sum u_n$ محدودة من الأعلى بالسلسلة $\sum v_n$ و نكتب $\sum u_n \leq \sum v_n$.
البرهان:
لنفرض ان $\sum v_n$ متقاربة

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n_0 \leq n, u_n \leq v_n \Rightarrow u_{n_0} + u_{n_0+1} + ... + u_n \leq v_{n_0} + v_{n_0+1} + ... + v_n \leq \sum_{n\geq 0} v_n = S$$

إذن المجموع الجزئي للسلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ محدود من الاعلى و بالتالي $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة.
مثال :
1. لنعتبر السلسلتين $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ و $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$
لدينا: $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ من أجل كل $n \geq 1$.
و بما ان $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ متباعدة فإن السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة كذلك .
2.لتكن السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2}$ لدينا
$\forall x \in \mathbb{R}$ فإن : $|\cos(n)| \leq 1$ و بالتالي :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

و بما أن السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ متقاربة كذلك .

مبرهنة 1.1.1

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين حدودهما موجبة.
1.اذا كان $0 \leq u_n \leq v_n \quad \forall n \geq n_0,$ و كانت $\sum v_n$ متقاربة فإن $\sum u_n$ متقاربة واذا كانت $\sum u_n$ متباعدة فإن $\sum v_n$ متباعدة.
2.اذا وجد عددان موجبان تماما a و b يحققان $\forall n \geq n_0, a \leq \frac{u_n}{v_n} \leq b$ كان للسلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ نفس الطبيعة .
3.اذا كان $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$ حيث $\ell \in R_+^*$ كان للسلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ نفس الطبيعة .
4.اذا كان $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ و تقاربت السلسلة $\sum v_n$ فإن السلسلة $\sum u_n$ تتقارب.
5.اذا كان $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty$ و تباعدت السلسلة $\sum v_n$ فإن السلسلة $\sum u_n$ تتباعد.

6.إذا كانت لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ و تقاربت السلسلة $\sum v_n$ فإن السلسلة $\sum u_n$ تتقارب كذلك و إذا تباعدت $\sum u_n$ فإن $\sum v_n$ تتباعد أيضا .

البرهان :

1.اذا كانت المتتالية $(\sum_{k=0}^{n} v_k)_{n\geqslant 0}$ محدودة كانت المتتالية $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\geqslant 0}$ محدودة ايضا.

2.يكفي تطبيق الخاصة السابقة على السلاسل $\sum av_n$ و $\sum u_n$ و $\sum bv_n$.

3.لتكن $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ نجد في N عددا n_0 يحقق

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - \ell\right| < \frac{\ell}{2}$$

و من ثم

$$\forall n \geq n_0, \frac{\ell}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3\ell}{2} v_n$$

و ينتج المطلوب بالاستفادة من 2.

4.لتكن $\varepsilon = 1$ نجد في $\mathbb{N}$ عددا n_0 يحقق

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} < 1$$

و من ثم $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$, و ينتج المطلوب بناءا على 1.

5.لتكن $\varepsilon = 1$ نجد في N عددا n_0 يحقق

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} > 1$$

و من ثم

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq v_n$$

و ينتج المطلوب بناءا على 1.

6. نفرض المتراجحة محققة من أجل الرتبة P

$$\forall n \geq p : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

و بالتالي

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq \frac{u_{n-2}}{v_{n-2}} \leq \cdots \leq \frac{u_p}{v_p} = \alpha \ \ \left(\alpha \in \mathbb{R}^+\right),$$

إذن

$$\forall n \geq p : \frac{u_n}{v_n} \leq \alpha \Rightarrow u_n \leq \alpha v_n,$$

حسب معيار المقارنة فإن هذه الخاصية محققة .

امثلة:

1) لندرس طبيعة السلسلة $\sum u_n$ حيث $u_n = \frac{2n^2+1}{2n} - \sqrt{n^2+1}$

نلاحظ ان

$$u_n = n - \sqrt{n^2+1} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}$$
$$= \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2n\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)} = \frac{1}{2n\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} n^3 u_n = \frac{1}{8} \neq 0 \text{ و من ثم}$$

لدينا $(\ell = \frac{1}{8} \neq 0)$ و منه حسب 3 فيكون للسلسلتين $\sum u_n$ و $\sum \frac{1}{n^3}$ نفس الطبيعة ,أي تكون $\sum u_n$ متقاربة .

2) لندرس طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1} e^{-n^\alpha}$ ليكن $0 < \alpha$ بما أن $\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-n^\alpha} = 0$ و السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n\geq 1} e^{-n^\alpha}$ متقاربة كذلك .

قضية 4.1.1 (معيار كوشي)

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة. نضع

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$$

1. اذا كان $l < 1$ فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة.
2. اذا كان $l > 1$ فإن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.
3. اذا كان $l = 1$ لا يفيد هذا المعيار في تحديد طبيعة هذه السلسلة.

البرهان :

1. نفرض أن $l < 1$ و ليكن k عددا بحيث $l < k < 1$,يوجد اذن عدد N بحيث مهما كان $n \geq N$ و $\sqrt[n]{u_n} \leq k$ و بالتالي :

$$\forall n \geq N, u_n \leq k^n$$

فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة لأن السلسلة $\sum K^n$ متقاربة . $(\ 0 < k < 1\ )$

2. نفرض أن $l > 1$ يوجد إذن N بحيث $\forall n \geq N : \sqrt[n]{u_n} \geq 1$ أي

$(u_n)_{n\geq 0}$ $\forall n \geq N, u_n \geq 1$

ينتج عن ذلك تباعد السلسلة $\sum u_n$ لأن الشرط الضروري للتقارب نهاية u_n لا تؤول للصفر

3. اما في حالة $l = 1$:

لدينا المتتالية $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ نلاحظ أن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ لكن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة إذا كانت $\alpha \leq 1$, و متقاربة إذا كانت $\alpha > 1$, و منه لا يمكن الحكم في هذه الحالة .

امثلة:

لندرس طبيعة السلاسل التالية:

1) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4^n}$

متقاربة $u_n=\frac{1}{4^n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\frac{1}{(4^n)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{4}<1\Rightarrow \sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n}$

2) $\sum_{n\geq 1}(\frac{4}{3})^n$

متباعدة $\sum_{n\geq 1}(\frac{4}{3})^n\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(\frac{4}{3})=\frac{4}{3}>1 \quad \Rightarrow \sum_{n\geq 1}(\frac{4}{3})^n$

3) السلسلتين $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$

مختلفتان في الطبيعة, لكن بالرغم من ذلك لدينا

أ) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ (متقاربة)

$$: \quad u_n=\frac{1}{n^2}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{2}{n}\log n}=1$$

ب) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ (متباعدة)

$$v_n=\frac{1}{n}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{1}{n}\log n}=1$$

فإنه لا يمكن القول أي شيء عن طبيعة السلسلة في هذه الحالة .

قضية 5.1.1 (معيار دالمبار)

لتكن $\sum u_n$ سلسلة ذات حدود موجبة.

نضع

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$$

1.اذا كان $l<1$ فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة .

2.اذا كان $l>1$ فإن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة .

3.اذا كان $l=1$ لا يفيد هذا المعيار في تحديد طبيعة هذه السلسلة.

البرهان :

ليكن $\varepsilon>0$ يوجد اذن عدد n_0 في $\mathbb{N}$ من أجل كل $n\geq n_0$ تحقق :

$$(l-\varepsilon)<\frac{u_{n+1}}{u_n}<(l+\varepsilon)\,.$$

1.اذا كان $l<1$ نختار عددا $\mu=l+\varepsilon<1$ يحقق

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\mu=\frac{(\mu)^{n+1}}{(\mu)^n}=\frac{v_{n+1}}{v_n}/v_n=(\mu)^n$$

تقارب $\sum\mu^n$ يقتضي تقارب $\sum u_n$ و ذلك حسب الخاصية 6 من المبرهنة 1.1.1

2.اذا كان $l>1$ نختار عددا $\mu=l-\varepsilon>1$ يحقق

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \mu = \frac{(\mu)^{n+1}}{(\mu)^n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}/v_n = (\mu)^n$$

تباعد $\sum \mu^n$ يقتضي تباعد $\sum u_n$ و ذلك حسب الخاصية 6 من المبرهنة 1.1.1

3. اما في حالة $l = 1$, لدينا المتتالية $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ حيث $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ لكن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة إذا كانت $\alpha \leq 1$. و متقاربة إذا كانت $\alpha > 1$.

ملاحظة:

تعميم لقاعدة دالمبار :

$L = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ و $\ell = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1.اذا كان $L < 1$ فإن السلسلة $\sum u_n$ متقاربة .

2.اذا كان $\ell > 1$ فإن السلسلة $\sum u_n$ متباعدة .

3.اننا لا نستطيع الحكم اذا كان $\ell \leqslant 1 \leqslant L$ او $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

مقارنة مقياسي كوشي و دالمبار :

مبرهنة 2.1.1

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية ذات حدود موجبة .

إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ موجودة فإن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ موجودة

البرهان :

لتكن $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ و لنفترض ان $\ell > 0$. ثم نختار عدد λ من $]0 : \ell[$, يوجد عندئذ N يحقق

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \lambda$$

فالمتتالية $(\lambda^{-n} u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة بدءا من الحد ذي الدليل N و من ثم يوجد $U > 0$ يحقق

$$\forall n \geq N, \quad u_n \geq U\lambda^n$$

و منه

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \geq \lambda \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U} = \lambda$$

لكن العدد λ عدد كيفي على المجال $]0 : \ell[$ اذن $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \geq \ell$ و بالطبع هذه النتيجة واضحة عندما تكون $\ell = 0$.

بتطبيق النتيجة السابقة على المتتالية $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ نجد أن

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

لانه مهما كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ذات الحدود الموجبة تماما كان :

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=\frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty}u_n}$$

مع الاصطلاح $\frac{1}{0}=\infty$ و $\frac{1}{\infty}=0$

ملاحظة:

المبرهنة السابقة تفيد بأن معيار كوشي أدق من معيار دالمبار .

مثال:

ليكن a,b عددين من $\mathbb{R}$ حيث $0<a<b<1$. ولتكن السلسلة $\sum u_n$ المعطاة بالعلاقتين $u_{2n}=b^{2n}$ و $u_{2n+1}=a^{2n+1}$ نلاحظ ان

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=b<1$$

فالسلسلة $\sum u_n$ متقاربة حسب معيار كوشي في حين يكون

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty \text{ و } \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$$

و معيار دالمبار لا يفيد في تحديد طبيعة هذه المتسلسلة.

قضية 6.1.1 (معيار التكامل)

لتكن الدالة f المعرفة على $[1,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}_+$

$$\left(f:[1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}_+\right)$$

مستمرة و متناقصة نضع :

$$u_n=f(n)$$

اذن :

متقاربة $\sum_{n\geq 1}u_n \Leftrightarrow$ موجود $\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(n)dx$

البرهان :

نضع $u_n=f(n)$ مع f تابع مستمر و موجب على المجال $[1,+\infty[$ و متناقصة الى 0 .

في كل جزء $[n,n+1]$ لدينا : $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$, و بالتالي

$$\int_n^{n+1}f(n+1)\,dx\leq\int_n^{n+1}f(x)\,dx\leq\int_n^{n+1}f(n)\,dx$$

مما يعطي

$$f(n+1)\leq\int_n^{n+1}f(x)\,dx\leq f(n).$$

و بما أن

$$\int_1^{n+1}f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx+\cdots+\int_n^{n+1}f(x)\,dx,$$

يكون لدينا

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(n+1)\leq\int_1^{n+1}f(x)\,dx\leq f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$$

و لدينا من الفرض $u_n=f(n),\forall n\geq 1$.
أي :

$$S_{n+1}-u_1=u_2+u_3+\cdots+u_{n+1}\leq\int_1^{n+1}f(x)\,dx\leq u_1+u_2+\cdots+u_n=S_n$$

*إذا كانت المتتالية $\left(\int_1^n f(x)\,dx\right)_n$ متقاربة فهي محدودة من الأعلى و لدينا

$$S_{n+1}\leq\int_1^{n+1}f(x)\,dx+u_1,$$

هذا يعني أن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأعلى .
*و اذا كانت $lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\,dx=+\infty$ نجد

$$\int_1^{n+1}f(x)\,dx\leq S_n$$

هذا يعني أن

$$\lim_{n\to+\infty}S_n\geq\lim_{n\to+\infty}\left(\int_1^{n+1}f(x)\,dx\right)=+\infty,$$

أي $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة .
*عكسيا اذا كانت السلسلة u_n متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(n)dx$ موجود .
اذا كانت السلسلة u_n متباعدة فإن $\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(n)dx=+\infty$.
مثال : (سلسلة ريمان)
نسمي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ بسلسلة ريمان .
*إذا كانت $\alpha\leq 0$: تكون سلسلة ريمان $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ متباعدة لأن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\neq 0$ (من أجل $\alpha=0,\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha}=1$)
*إذا كانت $\alpha>0$: $u_n=\frac{1}{n^\alpha}=f(n)$, $\forall n\geq 1$, حيث $f(n)=\frac{1}{x^\alpha}$, $x>0$ موجبة و متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}f(x)=0$ حسب معيار التكامل , السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ متقاربة إذا و فقط إذا كان التكامل $\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\,dx$ منتهي .
*إذا كانت $\alpha\neq 1$:

$$\int_1^n f(x)\,dx=\int_1^n\frac{1}{x^\alpha}dx=\left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^n=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}-1\right)$$

*إذا كانت $\alpha = 1$:

$$\int_1^n f(x)\,dx = \ln n,$$

إذن

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & ;\alpha > 1 \\ +\infty & ;\ 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

نتيجة :
تكون سلسلة ريمان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ متقاربة إذا كانت $\alpha > 1$, و متباعدة إذا كانت $\alpha \leq 1$.

1.1.3 السلاسل ذات الحدود الكيفية :

تعريف 4.1.1

لتكن $\sum u_n$ سلسلة متناوبة إذن $\forall n \in \mathbb{N} : u_n u_{n+1} < 0$

ملاحظة
يمكن كتابة الحد العام لأي سلسلة $\sum u_n$ متناوبة على الشكل $(-1)^n v_n$ بحيث تكون حدود u_n ثابتة الاشارة

سلسلة ليبنيز:
نقول على السلسلة $\sum u_n$ انها متقاربة اذا و فقط اذا كانت المتتالية v_n متناقصة و موجبة و نهايتها تؤول للصفر

مثال
السلسلة المتناوبة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^k}$ تحقق شرط ليبنيز $\forall k \in \mathbb{N}^*$

مبرهنة 3.1.1

لتكن $\sum u_n$ سلسلة متناوبة, حدها العام يكتب كما يلي
$u_n = (-1)^n v_n$ و المتتالية الحقيقية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة و متقاربة للصفر .
و منه تكون السلسلة $\sum u_n$ متقاربة. و اذا كان

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ و } S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

فإن المتراجحتين التاليتين محققة , مهما كانت n من N,

$$|S - S_n| \leq v_{n+1} \text{ و } S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

البرهان :
المتتاليتان $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متجاورتان, لان :

$$S_{2n} - S_{2n+1} = v_{2n+1} \geq 0$$
$$S_{2n+2} - S_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$$
$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = v_{2n} - v_{2n+1} \geq 0$$

فالمتتالية $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة و المتتالية $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة,و المتتالية $(S_{2n} - S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة الى الصفر . اذن المتتاليتان متقاربتان و لهما نفس النهاية S
اذا كانت المتتالية $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ متزايدة نحوى S و المتتالية $(S_{2n})_{n\geq 0}$ متناقصة نحوى S تكون المتراجحة السابقة واضحة .
و توضح المتراجحتان :

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \text{ و } S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

أن $|S - S_n| \leq v_{n+1}$.

قضية 7.1.1 (معيار آبال)

مبرهنة 4.1.1

لتكن السلسلة $\sum u_n v_n$, نقول عن السلسلة $\sum u_n v_n$ أنها متقاربة اذا تحققت الشروط الآتية :
1 المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متناقصة و تتقارب الى الصفر .
2 يوجد $M > 0$ بحيث $\forall n \in \mathbb{N} : |\sum_{k=0}^{n} u_k| \leq M$
البرهان :
لنضع $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k$. و $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$ ما ياتي :

$$
\begin{aligned}
|T_{p+q}-T_p| &= \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} u_k v_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} (S_k - S_{k-1})v_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} S_k v_k - \sum_{k=p+1}^{p+q} S_{k-1}v_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=p+1}^{p+q} S_k v_k - \sum_{k=p}^{p+q+q+1} S_k v_{k+1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=p+1}^{p+q-1} S_k v_k + S_{p+q}v_{p+q} - S_p v_{p+1} - \sum_{k=p+1}^{p+q-1} S_k v_{k+1}\right| \\
&= \left|S_{p+q}v_{p+q} - S_p v_{p+1} - \sum_{k=p+1}^{p+q+1} S_k(v_k - v_{k+1})\right| \\
&\leq |S_{p+q}|\,|v_{p+q}| + |S_p|\,|v_{p+1}| + \sum_{k=p+1}^{p+q-1} |S_k|\,|(v_k - v_{k+1})| \\
&\leq M\,|v_{p+q}| + M\,|v_{p+1}| + M\sum_{k=p+1}^{p+q+1} |S_k(v_k - v_{k+1})|
\end{aligned}
$$

و بما أن المتتالية v_n متناقصة إذن :

$$|T_{p+q}-T_p| \leq Mv_{p+q} + Mv_{p+1} + M\,(v_{p+1} - v_{p+q}) \leq 2Mv_{p+1},$$

و بما أن المتتالية v_n تتقارب الى الصفر فإنه يوجد $N_\epsilon > 0$, بحيث $n > N_\epsilon$, لدينا $v_n \leq \frac{\epsilon}{2M}$ و بالتالي

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall p,\ q \in \mathbb{N}^* :\ (p \geq N_\epsilon \Longrightarrow |T_{p+q} - T_p| < \epsilon)\,.$$

و بالتالي المتتالية T_n متتالية كوشي أي أنها متقاربة و من هنا تكون السلسلة $\sum u_n v_n$ منقاربة

مثال

السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة لأنها تحقق معيار آبال .

بالفعل :

$$v_n =, u_n = (-1)^n$$

لدينا :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in \mathbb{R}$

2) $(v_n)_{n\geq 0}$ متناقصة و حدها العام يؤول الى الصفر لما n يؤل الى المالانهاية.

و لدينا $|u_n| = \sum_{i=1}^{k=n}(-1)^k \leq 1$ أي محدودة.

1.1.4 السلاسل المتقاربة مطلقا :

قضية 8.1.1 (جداء سلسلتين)
لتكن $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $V=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين . و لتكن المتتالية $W=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ جداء U و V و نرمز لها ب $U*V$ كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j$$

مبرهنة 5.1.1

لتكن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ سلسلتين متقاربتين مطلقا. إن جدائهما سلسلة متقاربة مطلقا و مجموعها هو جداء مجموعي السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$$

البرهان :
لتكن $\sum a_n$ سلسلة ما نرمز ب :

$$s_n(\mid a \mid) = \mid a_0 \mid + \ldots + \mid a_n \mid$$
$$s(\mid a \mid) = \lim s_n(\mid a \mid)$$

لدينا من أجل كل m :

$$s_m(|w|) \leq \sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} |u_k v_{n-k}| \leq s_m(|u|)s_m(|v|)$$
$$\leq s(|u|), s(|v|) < \infty$$

و منه يأتي التقارب المطلق للسلسلة $\sum w_n$
نتأكد بسهولة أن :

$$s_{2n}(w) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} u_i v_j + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=n+1}^{2n-i} u_i v_j + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=n+1}^{2n-j} u_i v_j$$
$$= s_n(u)s_n(v) + U_n + V_n$$

و بما أن :

$$|U_n| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=n+1}^{2n} |u_i v_j| = s_{n-1}(|u|)\left(s_{2n}(|v|) - s_n(|v|)\right)$$

و :

$$|V_n| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=n+1}^{2n} |u_i v_j| = s_{n-1}(|v|)\left(s_{2n}(|u|) - s_n(|u|)\right)$$

نستنتج بمراعات تقارب السلسلتين أن $\sum |u_n|$ و $\sum |v_n|$

$$\lim U_n = \lim V_n = 0$$

و بالتالي :

$$\lim S_{2n}(w) = \lim S_n(u).\lim S_n(v)$$

و بذلك ينتهي البرهان .

مبرهنة 6.1.1

يمكننا البرهنة أيضا أنه اذا كانت احدى السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ متقاربة مطلقا و الاخرى متقاربة فإن جدائهما $\sum w_n$ متقارب و لدينا :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$$

البرهان :

لنضع الرموز التالية

$M = \sup_{n\geq 0} \left|S_n^V\right|$, $S^{|U|} = \sum_{n\geq 0} |u_n|$, $S_n^V = \sum_{k=0}^{n} v_k$

نلاحظ ان

$$\begin{array}{rcl}
w_0 & = & u_0 v_0 \\
w_1 & = & u_0 v_1 + u_1 v_0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \qquad \ddots \\
\vdots & \vdots & \qquad\qquad \ddots \\
w_n & = & u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 \\
\sum_{k=0}^{n} w_k & = & u_0 S_n^V + u_1 S_{n-1}^V + \cdots + u_n S_0^V
\end{array}$$

و من ثم مهما يكن $n \geq 0$ وجدنا

$$\sum_{k=0}^{n} w_k - S^V \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}(S_k^V - S^V)$$

ليكن $\varepsilon > 0$ نجد في $\mathbb{N}$ عدد N يحقق

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, n \geq N \Rightarrow \left(\left|S_n^V - S^V\right| < \frac{\varepsilon}{2S^{|U|}}\right) \wedge \left(\sum_{k=n}^{n+m} |u_k| < \frac{\varepsilon}{4M}\right)$$

و ذلك لان $\sum u_n$ متقاربة بالاطلاق و $\sum v_n$ متقاربة . اذن فالشرط $2N < n$ يستلزم ان يكون

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} w_k - S^V \sum_{k=0}^{n} u_k\right| &\leq \left|\sum_{k=0}^{N} u_{n-k}(S_k^V - S^V)\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{n} u_{n-k}(S_k^V - S^V)\right| \\
&\leq 2M \sum_{k=0}^{N} |u_{n-k}| + \frac{\varepsilon}{2S^{V|U|}} \sum_{k=0}^{n} |u_{n-k}| \\
&\leq 2M \sum_{k=n-N}^{n} |u_k| + \frac{\varepsilon}{2S^{|U|}} \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \\
&< 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2S^{|U|}} S^{|U|} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ينتج لنا من المناقشة السابقة $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} w_k - S^V \sum_{k=0}^{n} u_k\right) = 0$ و هذا يبرهن تقارب السلسلة $\sum w_n$ و تحقق المساواة $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\right)$

ملاحظة:

تقارب احدى السلسلتين $\sum u_n$ او $\sum v_n$ بالاطلاق شرط لازم في المبرهنة السابقة لا يمكن حذفه .

مثال :

المتتالية $U = (u_n)_{n\geq 1}$ حيث $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ نعلم ان السلسلة $\sum u_n$ نصف متقاربة فإذا عرفنا $W = U * U = (w_n)_{n\geq 2}$ كان

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}$$

نضع $x = \frac{k}{n}$

و لما كان $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ في حالة x من $[0,1]$ يصبح لدينا

$$n \geq 2 \Rightarrow |w_n| \geq \frac{2(n-1)}{n}$$

فالسلسلة $\sum w_n$ متباعدة لأن حدها العام لايتقارب الى الصفر .

قضية 9.1.1 (توطئة)
لتكن المتتاليتين العدديتين $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $V=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و نرمز للجداء $U*V$ بالرمز $W=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$
إذا كان $\lim_{n\to\infty}u_n=u$ و $\lim_{n\to\infty}v_n=v$ يقتضي لنا

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_n}{n+1}=u\cdot v$$

البرهان :
نلاحظ أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$ يكن

$$\Delta_n=\frac{w_n}{n+1}-\frac{u}{n+1}\sum_{k=0}^{n}v_k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k-a)v_{n-k}$$

و لما كان $\lim_{n\to\infty}v_n=v$ كانت المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ محدودة و منه يمكننا وضع التعريف $M=\sup_{n\geq 0}|v_n|$ فيكون

$$|\Delta_n|\leq\frac{M}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k-u|$$

فإذا طبقنا مبرهنة *Cesàro* على المتتالية $(|u_n-u|)_{n\geq 0}$ التي تتقارب الى الصفر نجد أن المتتالية $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ تتقارب للصفر أيضا. و لما كانت المتتالية $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}v_k\right)_{n\geq 0}$ تؤول الى v حسب مبرهنة *cesàro* فإننا نستنتج

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_n}{n+1}=u\cdot v$$

مبرهنة 7.1.1

لتكن $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $V=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين ونرمز الى جدائهما $U*V$ بالرمز $W=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ اذا تقاربت السلاسل $\sum u_n$ و $\sum v_n$ و $\sum w_n$ فإن

$$\sum_{n=0}^{\infty}w_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}v_n\right)$$

البرهان :
لنضع الرموز التالية :
$U_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ و $V_n=\sum_{k=0}^{n}v_k$ و $\Delta_n=\sum_{k=0}^{n}w_k$
نلاحظ أن

$$
\begin{aligned}
w_0 &= u_0v_0 \\
w_1 &= u_0v_1 + u_1v_0 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \ddots \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad\quad \ddots \\
w_k &= u_0v_k + u_1v_{k-1} + \cdots + u_kv_0 \\
\Delta_k &= u_0V_k + u_1V_{k-1} + \cdots + u_kV_0
\end{aligned}
$$

و منه

$$
\begin{aligned}
\Delta_0 &= V_0u_0 \\
\Delta_1 &= V_0u_1 + V_1u_0 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \ddots \\
&\vdots \quad \vdots \qquad\quad \ddots \\
\Delta_n &= V_0u_n + V_1u_{n-1} + \cdots + V_nu_0 \\
\textstyle\sum_{k=0}^{n} \Delta_k &= V_0U_n + V_1U_{n-1} + \cdots + V_nU_0
\end{aligned}
$$

و بما أنه

$\lim_{n\to\infty} U_n = \sum_{n\geq 0} u_n = u$ و $\lim_{n\to\infty} V_n = \sum_{n\geq 0} v_n = v$ فإننا نجد ما تنص عنه التوطئة السابقة

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\Delta_k\right) = u\cdot v$$

و لكن $\lim_{n\to\infty} \Delta_n = \sum_{n\geq 0} w_n = w$ و منه نستنتج من مبرهنة *cesàro* أن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\Delta_k\right) = w$$

و منه يكون المطلوب $w = uv$

باب 2

متتاليات التوابع

2.1 عموميات و معارف اساسية:

تعريف 1.1.2

لتكن A مجموعة جزئية من الحقل $\mathbb{K}$ غير خالية , نعرف متتالية التوابع العددية بالتطبيق التالي :

$$u : \mathbb{N} \to \quad \mathcal{U}\ (\mathrm{A}, \mathbb{K})$$

و نرمز لمتتاليات التوابع بالرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و u_n عنصر من $\mathcal{U}(A,\mathbb{K})$

تعريف 2.1.2

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$ غير خالية , و نعرف المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث :
$u_n \in \mathcal{U}(\mathrm{A},\mathbb{K})$ نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ انها تتقارب ببساطة من u التابع الذي ينتمي الى $\mathcal{U}(A,\mathbb{K})$ إذا و فقط إذا تحقق :

$$\forall x \in A, \quad \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$$

و نسمي u النهاية البسيطة لمتتالية التوابع $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و نكتب $\lim_{n\to\infty} u_n \overset{s}{=} u$ $\forall x \in A,$

تعريف 3.1.2

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$ غير خالية و نعرف المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالتطبيق التالي :

$$u : \mathbb{N} \to \quad \mathcal{U}\ (\mathrm{A}, \mathbb{K})$$

نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ انها تتقارب بإنتظام من u التابع الذي ينتمي الى $\mathcal{U}(A,\mathbb{K})$ إذا و فقط إذا تقاربت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من الصفر من عناصر $\overline{\mathbb{R}}$ المعرفة بالعلاقة :

$$\mu_n = \sup_{x\in A} |u_n(x) - u(x)|$$

أو كذلك :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}_\varepsilon > 0 / \forall x \in A,\ \forall n [n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon]$$

و نسمي u النهاية المنتظمة لمتتالية التوابع $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و نكتب $\lim_{n\to\infty} u_n \overset{u}{=} u \quad \forall x \in A,$

ملاحظة:

إن التقارب المنتظم يستلزم التقارب البسيط لأن :

$$\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n(x) - u(x)| \leq \sup_{x\in A} |u_n(x) - u(x)|$$

غير أن الاستلزام العكسي غير صحيح .

مثال :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \qquad x \in [0, +\infty[$$

متقاربة نحو u ذات العبارة :

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

بما أن :

$$\sup_{x>0} |u_n(x) - u(x)| = \sup_{x>0} \frac{1}{1+nx} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+nx} = 1$$

و منه $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. لا تتقارب بإنتظام .

مثال مضاد :

لتكن

$$u_n(x) = x^n, \qquad x \in [0, 1]$$

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|u_n(x) - u(x)\right| = \sup_{x\in[0,1]} x^n = 1$$

لأن :

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \\ 1 & x = 1 \end{cases},$$

و منه التقارب ليس منتظم . لكن اذا اخذنا $x \in [0,a]$ حيث : $0 < a < 1$ فإن متتالية التوابع $x \to x^n$ تتقارب بإنتظام من الصفر لأن :

$$sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n_{n\to\infty} = 0$$

ملاحظة:

إذا تقاربة متتالية التوابع $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ببساطة من التابع u من $\mathcal{U}(A,\mathbb{K})$

نقول أنها لا تتقارب بإنتظام إذا و فقط اذا وجدت متتالية $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر A بحيث لا تتقارب المتتالية التي حدها العام $|u_n(\xi_n) - u(\xi_n)|$ من 0 .

مثال :

دراسة التقارب المنتظم و التقارب البسيط لمتتالية التوابع $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{U}(\mathbb{R}^*_+,\mathbb{R})$ المعرفة كما يأتي :

$$u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, q \mapsto \frac{4nq}{1+n^2q^2}$$

من الواضح أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب ببساطة من التابع الثابت الذي يساوي 0 على $\mathbb{R}$ أي $\lim_{n\to\infty} u_n \overset{s}{=} 0$ و لكن

$$\forall n > 0, \quad \left|u_n\left(\frac{1}{n}\right) - \mathbb{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 1$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لا تتقارب بإنتظام .

تعريف 4.1.2

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$ غير خالية, نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ انها متقاربة بإنتظام على كل مجموعة متراصة من u حيث : $u \in \mathcal{U}(A,\mathbb{K})$ إذا و فقط إذا حققت المتتالية $\mu_n(V) = sup_{x\in V}|u_n(x) - u(x)|$ مايلي :

$$\forall V \subseteq A, lim_{n\to\infty}\mu_n(V) = lim_{n\to\infty} \sup_{x\in V} |u_n(x) - u(x)| = 0$$

حيث V و A مجموعتان متراصتان .

نلاحظ أن التقارب المنتظم لمتتالية التوابع $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{U}(A,\mathbb{K})$ من تابع u يقتضي تقاربها المنتظم على كل مجموعة متراصة على التابع u و هذا يستلزم تقاربها البسيط من u أما الإستلزامان العكسيان فهما خاطئان .

مثال :

لتكن متتالية التوابع $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{U}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ حيث :

$$u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{nx} : x \neq 0, \\ 0 \quad\quad : x = 0. \end{cases}$$

المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بإنتظام على كل مجموعة متراصة من التابع الثابت $\mathbb{O}$ ، الذي يساوي 0 على $\mathbb{R}$

إذا كانت V مجموعة متراصة في $\mathbb{R}$ ، بامكاننا ايجاد $M_V > 0$ يحقق $V \subset [-M_V, M_V]$ ومنه يكون

$$\begin{aligned} \forall n > 0, \mu_n(V) &= \sup_{x\in V} \left| u_n(x) \right| \\ &\leq \sup_{0<|x|\leq M_V} x^2 \left| \sin \frac{1}{nx} \right| \\ &\leq \sup_{0<|x|\leq M_V} \frac{x^2}{|nx|} = \frac{M_V}{n} \end{aligned}$$

و لكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست متقاربة بإنتظام من $\mathbb{O}$ لأن $\lim_{n\to\infty} |u_n(n)| = 1$.

تعريف 5.1.2

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$ غير خالية , نقول عن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{U}(A, \mathbb{K})$ أنها كوشية بإنتظام إذا و فقط إذا تحققت الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \left.\begin{matrix} (p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p \geq q \geq N_\varepsilon \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sup_{x\in A} \left| u_p(x) - u_q(x) \right| < \varepsilon$$

مبرهنة 1.1.2

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$ غير خالية و لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{U}(A, \mathbb{K})$.
إذا حققت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ شرط كوشي بإنتظام فهي متقاربة بإنتظام من التابع u

البرهان :

1) لزوم الشرط :

نفرض أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بإنتظام من تابع u من $\mathcal{U}(A, \mathbb{K})$ و لتكن $\varepsilon > 0$ نجد إذن N_ε في $\mathbb{N}$ يحقق

$$p \geq N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in A} |u_p(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

بإستخدام متراجحة المثلث نجد :

$$(p \geq N_\varepsilon) \wedge (q \geq N_\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in A} |u_p(x) - u_q(x)| < \varepsilon$$

و بهذا تكون المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حققت شرط كوشي بإنتظام .

2) كفاية الشرط :

اذا حققت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ شرط النظرية فهي كوشية $\forall x \in A,$ و بالتالي فهي متقاربة نضع :

$$\forall x \in A, \quad \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$$

ليكن $0 < \varepsilon$ ، و $N_\varepsilon = N$ نختاره حسب شرط النظرية . لدينا :

$$(p \geq N_\varepsilon) \wedge (q \geq N_\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in A, \quad |u_p(x) - u_q(x)| \leq \varepsilon$$

و بوضع q يؤول الى ∞ نجد

$$p \geq N_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in A, \quad |u_p(x) - u(x)| \leq \varepsilon$$

أي أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بإنتظام من u .

2.2 متتالية التوابع و الإستمرار:

مثال :

لتكن متتالية التوابع $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{U}([0,1],\mathbb{R})$ المعرفة كمايلي :

$$u_n : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto t^n$$

نلاحظ أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من التوابع المستمرة التي تتقارب ببساطة من التابع u من $\mathcal{U}([0,1],\mathbb{R})$ الذي يساوي 0 على $]1;0[$ و يحقق $u(1) = 1$

فالتابع u ليس مستمر . إذن التقارب البسيط لمتتالية من التوابع المستمرة لا يكفي حتى تكون النهاية تابعا مستمر .

مبرهنة 1.2.2

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$ غير خالية , و لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{U}(A,\mathbb{K})$.

نقول عن التابع u أنه مستمر عند a من A اذا تحقق مايلي :

*المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بإنتظام نحو u .
*التوابع u_n مستمر عند a , $\forall a \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
البرهان :
لتكن $0 < \varepsilon$ يوجد N في $\mathbb{N}$ يحقق

$$\forall n > N, \forall a \in A : |u_n(x) - u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

و بما أن u_n مستمر عند a نجد $0 < \eta$ يحقق

$$\forall x \in A : |x - a| < \eta \Rightarrow |u_n(x) - u_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

و منه نستنتج أنه مهما يكن x من A التي تحقق الشرط $|x - a| < \eta$ كان

$$\begin{aligned} |u(x) - u(a)| &\leq |u(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(a)| + |u_n(a) - u(a)| \\ &\leq 3 \times \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

و بذلك ينتهي البرهان .
نتيجة :
لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$ غير خالية , و لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من التوابع المستمرة على A .
نقول عن التابع u من $\mathcal{U}(A,\mathbb{K})$ أنه مستمر على A اذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بإنتظام نحو u .

مبرهنة 2.2.2

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$ غير خالية , و لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{U}(A,\mathbb{K})$.
نقول عن التابع u من $\mathcal{U}(A,\mathbb{K})$ أنه مستمر عند A اذا تحققت الشروط التالية :
*المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بإنتظام على كل مجموعة متراصة من تابع u
*التابع u_n مستمر عند A , $\forall n \in \mathbb{N}$.
البرهان :
ليكن a عنصر من A, و لتكن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من A تؤول الى a نعلم أن المجموعة :

$$K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$

مجموعة متراصة محتواة في A و لنعرف $g_n = u_{n|K}$ و $v = u_{|K}$ أي مقصورة كل من u و u_n على K , إن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية التوابع من عناصر $\mathcal{U}(K,\mathbb{K})$ متقاربة من التابع v بإنتظام و أي v_n مستمر عند a ينتج عن ذلك أن v مستمرة عند a و بما أن

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

فإن

$$\lim_{n\to\infty} v(x_n) = v(a)$$

و هذا يبين لنا أن

$$\lim_{n\to\infty} u(x_n) = u(a)$$

و منه نستنتج أن u مستمرة عند a .

مبرهنة 3.2.2

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$ غير خالية و لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من التوابع المستمرة على A , و لتكن المتتالية $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من A .
اذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بإنتظام من التابع u من $\mathcal{U}(A,\mathbb{K})$, و كانت المتتالية $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من عنصر η من A .
عندها يكون لدينا : $\lim_{n\to\infty} u_n(\eta_n) = u(\eta)$
البرهان :
$\forall n \in \mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} |u_n(\eta_n) - u(\eta)| &\leq |u_n(\eta_n) - u(\eta_n)| + |u(\eta_n) - u(\eta)| \\ &\leq \sup_{x\in A} |u_n(x) - u(x)| + |u(\eta_n) - u(\eta)| \end{aligned}$$

من جهة اخرى لدينا u مستمرة عند η , و المتتالية $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بإنتظام نحو u .
ومنه نحصل على النتيجة المطلوبة .

مبرهنة 4.2.2

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{K}$ غير خالية و لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, حيث $u \in \mathcal{U}(A,\mathbb{K})$ أي متتالية التوابع المستمرة على A .
نقول عن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أنها متقاربة بإنتظام نحو u
اذا و فقط اذا حققت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ شرط كوشي بإنتظام .

مبرهنة 5.2.2

(فايرستراس)
ليكن $u : [0,1] \to \mathbb{K}$ تابع مستمر حينئذ توجد متتالية من كثيرات الحدود $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathbb{K}[X]$ ،
$P_n : [0,1] \to \mathbb{K}$, $n > 0$ من الصنف C^1 بحيث تحقق :

$$\lim_{n\to 0} \|u - P_n\|_{[0,\ 1]} = 0$$

حيث :

$$\|u - P_n\|_{[0,\ 1]} = sup_{x\in[0,1]}|u(x) - P_n(x)|$$

البرهان :
في حالة n من $\mathbb{N}$ و k من $\{0, 1, ..., n\}$ نعرف كثير الحدود :

$$B_n^k(X) = C_n^k X^k (1 - X)^{n-k}$$

نقوم بدراسة تمهيد لاثبات بعض خواص كثيرات الحدود B_n^k و تسمى كثيرات حدود برينشتاين،
بالإستفادة من منشور ذو الحدين يكون لدينا :

$$\sum_{k=0}^{n} B_n^k(x)\, e^{kt} = (1 - x + x\, e^t)^n$$

و نعوض $t = 0$ ثم نشتق و نعوض $t = 0$ وأخيرا نشتق مرتين و نعوض $t = 0$ نجد

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{n} B_n^k(X) &= 1 \\
\textstyle\sum_{k=0}^{n} kB_n^k(X) &= nX \\
\textstyle\sum_{k=0}^{n} k^2 B_n^k(X) &= nX + n(n-1)X^2
\end{aligned}$$

و منه

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_n^k(x) &= x^2 \sum_{k=0}^{n} B_n^k(x) - \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n} kB_n^k(x) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k^2 B_n^k(x) \\
&= x^2 - 2x^2 + \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 = \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

الان لنثبت المبرهنة, لنعرف

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} u\Big(\frac{k}{n}\Big) B_n^k(X)$$

برهان تقارب المتتالية $(x \mapsto P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ بإنتظام من التابع u
بما أن u مستمر على $[0,1]$ المجموعة المتراصة, فإن u محدود ومنه يمكننا أن نعرف

$M = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|$ و يكون أيضا u مستمر على $[0,1]$.
نضع $0 < \varepsilon$ و بما أن u مستمر بإنتظام على $[0,1]$ نجد عدد $0 < \delta_\varepsilon$ يحقق

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |u(x)-u(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ولنعرف $n_0 = 1 + |M/(\varepsilon\delta_\varepsilon^2)|$, $\forall n_0 < n$ و $x \in [0,1]$ يصبح لدينا مايأتي :

$$\begin{aligned} u(x) - P_n(x) &= u(x)\sum_{k=0}^{n} B_n^k(x) - \sum_{k=0}^{n} u\Big(\frac{k}{n}\Big) B_n^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \Big(u(x) - u\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) B_n^k(x) \end{aligned}$$

$$= \sum_{0\le k\le n \ ,\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta_\varepsilon} \Big(u(x) - u\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) B_n^k(x) + \sum_{0\le k\le n \ ,\left|x-\frac{k}{n}\right|\ge\delta_\varepsilon} \Big(u(x) - u\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) B_n^k(x)$$

و منه

$$\begin{aligned} \big|u(x) - P_n(x)\big| &\le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{0\le k\le n \ ,|x-\frac{k}{n}|\ge\delta_\varepsilon} B_n^k(x) + 2M \sum_{0\le k\le n \ ,\ge\delta_\varepsilon\, |x-\frac{k}{n}|\ge\delta_\varepsilon} B_n^k(x) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{0\le k\le n} B_n^k(x) + \frac{2M}{\delta_\varepsilon^2} \sum_{0\le k\le n \ ,|x-\frac{k}{n}|\ge\delta_\varepsilon} \Big|x-\frac{k}{n}\Big|^2 B_n^k(x) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta_\varepsilon^2} \sum_{0\le k\le n} \Big|x-\frac{k}{n}\Big|^2 B_n^k(x) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta_\varepsilon^2} \frac{|x(1-x)|}{n} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2\delta_\varepsilon^2 n} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\Big[1 + \frac{M}{\varepsilon\delta_\varepsilon^2 n}\Big] \le \frac{\varepsilon}{2}\Big[1 + \frac{n_0}{n}\Big] < \varepsilon \end{aligned}$$

و هكذا نكون قد برهنا أن

$$n > n_0 \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |u(x) - P_n(x)| \le \varepsilon$$

و هو المطلوب.

نتيجة :

ليكن $u : [a,b] \to \mathbb{K}$ تابع مستمر عندها توجد في $\mathbb{K}[X]$ متتالية التوابع $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من الصنف C^1 تتقارب بإنتظام نحو u على كل مجال $[a,b]$.

البرهان :

ليكن التابع المستمر $v : [0,1] \to \mathbb{K}, t \mapsto u(a+t(b-a))$ نجد بناء على المبرهنة السابقة متتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من كثيرات الحدودي متقاربة بإنتظام من التابع v

و لنعرف متتالية التوابع $Q_n(X) = P_n\left(\frac{X-a}{b-a}\right)$ فإن $(Q_n)_{n\in\mathbb{K}}$ تتقارب بإنتظام على كل مجال $[a,b]$ من التابع u و هو المطلوب .

ملاحظة :

كل تابع مستمر على $[a,b]$ يمكن أن نجد له تقريبا منتظا بمتتالية توابع من الصنف C^∞ لكن إذا استبدلنا المجال المغلق $[a,b]$ بمجال مفتوح أو نصف مفتوح I فإن التقريب المنتظم بكثيرات الحدود ليس دائما ممكنا, رغم ذلك توجد متتالية توابع $\{\varphi_n\}$ من الصنف C^∞ متقاربة بإنتظام نحو تابع u على كل $I \supset [a,b]$.

2.3 متتالية التوابع القابلة للمكاملة:

نهاية متتالية التوابع القابلة للمكاملة و متقاربة ببساطة ليست دائما قابلة للمكاملة حتى إذا كان التابع محدود

مثال :

تابع دير كليت $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ نهاية بسيطة للمتتالية u_n المعرفة كالتالي :

لتكن المتتالية (X_n) ذات حدود الأعداد الكسرية التي تنتمي إلى $[0,1]$ نضع u_n التابع المميز للمجموعة $\mathsf{E_n} = \{\mathsf{x_0}, ..., \mathsf{x_n}\}$ أي :

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad u_n \mapsto \begin{cases} 1 : x \in \mathsf{E}_n, \\ 0 : x \notin \mathsf{E}_n. \end{cases}$$

بما أن نقاط المجموعة المنتهية E_n تقطع u_n فإن التابع u_n قابل للمكاملة على $[0,1]$.

من الواضح أن المتتالية u_n لها نهاية تساوي تابع دير كليت الذي لايقبل المكاملة .

و منه التقارب البسيط لا يحتفظ قابلية المكاملة . لكن الأمر ليس كذلك عندما يكون التقارب منتظما .

قضية 1.3.2

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متتالية الدوال القابلة للمكاملة على المجال $X = [a,b]$ و متقاربة بإنتظام نحو u فإن :

* u قابل للمكاملة على X .

* $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u(x)dx$.

البرهان :

1) ليكن $\exists n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ بحيث :

$$\forall x \in [a,b],\ u_n(x) - \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)} < u(x) < u_n(x) + \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (1)$$

لأن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بإنتظام نحو u .
الدالة u_n قابلة للمكاملة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أي يوجد تجزئة للمجال I :

$$\sigma = \{x_0, x_1, \ldots\ldots, x_k\}$$

بحيث : $\sum_{i=1}^{k}(M_{n_i} - m_{n_i})(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)
و

$$m_{n_i} = \operatorname*{lnf}_{[x_{i-1},x_i]} u_n \; M_{n_i} = \sup_{[x_{(i-1)},x_i]} u_n$$

نضع : $M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} u$ و $m_{n_i} = \operatorname{lnf}_{[x_{i-1},x_i]} u$
من العلاقة (1) لدينا من أجل كل $1 \le i \le k$:

$$m_{n_i} - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \le m_i \le M_i \le M_{n_i} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

مما يستلزم نظرا ل (2)

$$\sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{k}(M_{n_i} - m_{n_i})(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

و هذا يعني أن قابلة للمكاملة.
2) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\int_a^b u_n(x)dx - \int_a^b u(x)dx\right| \le \int_a^b |u_n(x) - u(x)|\,dx$$
$$\le \sup_{x\in[a,b]} |u_n(x) - u(x)|(b-a)$$

و بما أن :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} \left|u_n(x) - u(x)\right| = 0$$

فإن : $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u(x)dx$

2.3.2 قضية

إذا كانت $U(x)=\int_a^x u(t)dt$, $U_n(x)=\int_a^x u_n(t)dt$ فإن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام نحو U على $[a,b]$.

البرهان :

$$\forall x\in[a,b], |U_n(x)-U(x)| \leq \int_a^x |u_n(t)-u(t)|dt$$
$$\leq \int_a^b |u_n(t)-u(t)|dt$$
$$\leq \sup_{t\in[a,b]} |u_n(t)-u(t)|(b-a)$$

ملاحظة :

الشرط تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نحو u بإنتظام كاف لكن ليس لازم لتحقق المساواة التالية : $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b u_n(x)dx=\int_a^b u(x)dx$.

مثال :

نعتبر متتالية الدوال $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ على المجال $\mathbb{X}=[0,1]$:

$$u_n(x)=\begin{cases}0\,; & x=0\\ 1\,; 0<x<\frac{1}{n}\\ 0\,; \frac{1}{n}\leq x\leq 1\end{cases}$$

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} u_n = u = 0$ رغم أن تقارب u_n من u ليس تقارب منتظم على المجال $[0,1]$

لأن : $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ sup_{x\in[0,1]}u_n(x)=1$

لكن : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 u_n(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\int_0^1 u(x)dx=0$

2.4 متتالية التوابع و قابلية الإشتقاق:

ليكن I مجال غير تافه من $\mathbb{R}$ و لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من التوابع المعرفة على I و تأخذ قيمها في $\mathbb{K}$ و لنفرض أن u_n قابلة للإشتقاق على I مهما كان n من $\mathbb{N}$ هذا يسمح لنا بتعريف متتالية التوابع $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و من هنا يمكننا طرح العديد من الأسئلة :

*هل يقتضي التقارب المنتظم أو البسيط للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تقارب $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ؟

*إذا تقارب كل من المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هل يكون التابع $\lim_{n\to\infty} u'_n$ مشتق التابع $\lim_{n\to\infty} u_n$ ؟

تبين الأمثلة الأتية أن الجواب عن الأسئلة السابقة هو "لا" في الحالة العامة.

أمثلة :

*المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كمايلي :

$$u_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \quad n=1,2,\ldots$$

هي متتالية من التوابع القابلة للاشتقاق ، متقاربة بانتظام من التابع الصفري $\mathbb{O}$.

لأن :

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|u_n(x)| = \|u_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

لدينا $\mathbf{u'(x)=\sqrt{n}\cos(nx)}$ و $\mathbf{u'(x)=\mathbb{O}}$, لكن $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية لا تتقارب عند أي نقطة من u .

*المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كمايلي :

$$u_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$$

هي متتالية من التوابع القابلة للاشتقاق، متقاربة بانتظام من التابع $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto|x|$ و لكن u لا تقبل الإشتقاق عند 0.

*المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كمايلي :

$$u_n : [0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

هي متتالية من التوابع القابلة للاشتقاق، متقاربة بانتظام التابع $u=\mathbb{O}$ و لكن $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب ببساطة من التابع :

$$v:[0,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}0:0\le x<1\\ 1:\quad x=1\end{cases}$$

و بالرغم من ذلك فإن $u'\neq v$.

مبرهنة 1.4.2

ليكن $[a,b]$ مجال محدود غير تافه في $\mathbb{R}$ ولتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةالتوابع القابلة للاشتقاق و تحقق الفرضيات التالية :

أ) المتتالية $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بإنتظام نحو v على $[a,b]$.
ب) توجد x_0 من $[a,b]$ تتقارب عندها المتتالية $(u_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$.
عندها :
* تتقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بإنتظام على $[a,b]$ من التابع u قابل للإشتقاق بإستمرار و لدينا $u'=v$
و بعبارة أخرى $\lim_{n\to\infty} u'_n(x) = (\lim_{n\to\infty} u_n(x))'$
البرهان :
لدينا : $u_n(x) = u_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} u'_n(t)\,dt$
بما أن u مستمرة و حسب الفرض (أ) :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} u'_n \; dt = \int_{x_0}^{x} v \; dt$$

مع العلم أن هذا التقارب منتظم في $[a,b]$ ومنه المتتالية
متقاربة بإنتظام نحو u المعرف ب: $u_n(x) = u_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} v, dt$
بما أن v مستمر فإن التابع u يقبل الإشتقاق بإستمرار و لدينا : $u'=v$.

باب 3

سلاسل التوابع

ترد سلاسل التوابع إلى دراسة متتاليات التوابع (المتتاليات المؤلفة من المجاميع الجزئية). هنا نطبق نتائج الفصل السابق على مسائل الاستمرار والاشتقاق والمكاملة لمجاميع سلاسل التوابع .

3.1 عموميات و معارف اساسية:

تعاريف هذا الفصل نفس التعاريف التي وردت في دراسة السلاسل العددية.

تعريف 1.1.3

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية التوابع ذات قيم عقدية معرفة على مجموعة غير خالية $A \subset \mathbb{R}$ نصل هذه المتتالية بمتتالية التوابع $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ نسمي سلسلة توابع (على A) حدها العام u_n الثنائية $((u_n),(S_n))$ المؤلفة من المتتاليتين ، $(u_n),(S_n)$ يسمى S_n بتابع المجموع الجزئي من الرتبة n للسلسلة كما هو الحال بالنسبة للسلسلة العددية فإننا نرمز لسلسلة التوابع $((u_n),(S_n))$ بـ :

$$u_0 + u_1 + ... + u_n + ..., \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \sum_{n} u_n$$

نعتبر أيضا السلاسل العددية ذات الشكل $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ حيث $k > 0$

تعريف 2.1.3

السلسلة $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ تسمى بباقي السلسلة $\sum_k u_k$ من الرتبة n .
و نرمز لها ب : $R_n(x)$

ملاحظة :
إن نوع الجزء $A \subset IR$ المعرفة عليه التوابع u_n لا يلعب أي دور أساسي، إذ أن كل التعاريف والنظريات تظل قائمة عندما تكون A مجموعة كيفية، لكن معالجة خواص مجاميع السلاسل (الاستمرار، قابلية الاشتقاق...) تتطلب بطبيعة الحال اعتبار مجموعات A يكون فيها معنى لهذه المفاهيم، نعتبر مثلا $I = A$ مجالات من $\mathbb{R}$. لتكن $\sum_n u_n$. $U_n : A \to IC$ سلسلة توابع و S_n متتالية مجاميعها الجزئية.

تعريف 3.1.3

* نقول عن السلسلة $\sum u_n$ أنها متقاربة عند $X_0 \in A$ إذا و فقط إذا كانت السلسلة العددية $\sum_n u_n(X_0)$ متقاربة.

* نقول عن السلسلة $\sum u_n$ أنها متقاربة على A (أو على جزء $B \subset A$ على التوالي) إذا و فقط إذا كانت السلسلة $\sum_n u_n(X)$ متقاربة عند كل نقطة($X \in A$ أو عند كل نقطة $X \in B$ على التوالي) لدينا إذًا التكافؤات التالية:

1) $\sum u_n$ متقاربة عند $X_0 \Leftrightarrow \sum_n u_n(X_0)$ متقاربة $\Leftrightarrow (S_n(X_0))$ متقاربة.

2) $\sum u_n$ متقاربة على $A \Leftrightarrow \sum_n u_n(X)$ متقاربة مهما كان $X \Leftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة على A .

وهكذا فإن التقارب البسيط لسلسلة على A يكافئ التقارب البسيط لمتتالية مجاميعها الجزئية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ على A .

تعريف 4.1.3

لتكن $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ سلسلة متقاربة على A و $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية مجاميعها الجزئية. نسمي التابع $S : A \to \mathbb{C}$ المعرفة بـ $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ بمجموع السلسلة ونرمز له بـ $S = \sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

ملاحظة :

1) نقول عن السلسلتان $\sum\limits_{n\geq 0} Reu_n$ (الجزء الحقيقي) و $\sum\limits_{n\geq 0} Imu_n$ (الجزء التخيلي) أنهما متقاربتان على A إذا و فقط إذا كانت السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ متقاربة على A حيث :

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} Reu_n + i\sum_{n\geq 0} Imu_n$$

2) نقول عن السلسلة $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ (باقي السلسلة $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$) على A إذا وفقط إذا تقارب السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ على A ولدينا: $\forall k : S = \sum_{n=0}^{k} u_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$.

ينتج عن ذلك بصفة خاصة أن: $\lim \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = 0$.

و العكس أيضا إذا كان باق ما للسلسلة متقاربا على A فإن الأمر كذلك بخصوص السلسلة نفسها.

لتكن $\sum u_n$ و $\sum v_n$ سلسيلتين متقاربتين على A , عندئذ تكون العبارة الخطية لهما $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ سلسلة متقاربة على A مهما كان λ و μ في IC ,و يكون :

$$\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\sum_{n\geq 0} u_n + \mu\sum_{n\geq 0} v_n$$

تعريف 5.1.3

إذا كانت السلسلة $\sum |u_n|$ متقاربة على A , فإن السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ متقاربة مطلقا .

نتيجة :

حسب نظرية جداء سلسلتين عدديتين متقاربتين مطلقا , إذا كانت السلسلتين $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ و $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ متقاربتين مطلقا على A يكون جدائهما $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ حيث :

$$w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \ldots + u_nv_0$$

سلسلة متقاربة مطلقا و بخصوص المجاميع لدينا :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

تعريف 6.1.3

لتكن السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$, $u_n : A \to \mathbb{C}$, سلسلة توابع . نسمي المجموعة

$$\mathrm{D} = \{x \in \mathrm{A} : \Sigma u_n(x) < \infty\}$$

بحيز التقارب للسلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ (يمكن ل D أن يكون مطابق ل A أو خاليا) .

أمثلة :

*حيز تقارب السلسلة الهندسية الحقيقية

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad x \in \mathrm{A} = \mathbb{R}$$

هي المجال $]-1,1[$.

*حيز تقارب السلسلة الهندسية العقدية

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad x \in \mathrm{A} = \mathbb{C}$$

هي القرص المفتوح ذي المركز $z = 0$ و نصف قطره 1 :

$$\mathrm{D} = \{\mathrm{z} : |\mathrm{z}| < 1\}$$

3.2 أنواع التقاربات لسلاسل التوابع :

تعريف 1.2.3 (التقارب البسيط)

لتكن $\sum_{n\geq 0} u_n$ ، $u_n : A \to \mathbb{C}$ سلسلة توابع، نقول عن هذه السلسلة أنها متقاربة ببساطة على A إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ببساطة على A .

تعريف 2.2.3 (التقارب المنتظم)
لتكن $\sum_{n\geq 0} u_n$ ، $u_n : A \to \mathbb{C}$ سلسلة توابع، نقول عن هذه السلسلة أنها متقاربة بانتظام على A إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام على A .
و نكتب :

$$.\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, \forall x \in A \left[n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon \right]$$

نلاحظ أن : $R_n = S - S_n$.
بصيغة اخرى , إذا كانت $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ببساطة و تحقق الشرط التالي :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |R_n(x)| = 0.$$

فإن $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة بإنتظام .

قضية 1.2.3 (مقياس كوشي الخاص بالتقارب المنتظم للسلاسل)
تكون السلسلة
$\sum_{n\geq 0} u_n$ ، $u_n : A \to \mathbb{C}$ متقاربة بإنتظام على A إذا و فقط إذا تحقق شرط كوشي التالي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p > q \geq N_0) \Rightarrow \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=q+1}^{p} u_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

حيث : $\sup_{x\in A} |S_p(x) - S_q(x)| = \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=q+1}^{p} u_k(x) \right|$.

قضية 2.2.3 (قاعدة ابال للتقارب المنتظم للسلاسل)
لتكن $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ ، $u_n, v_n : A \to \mathbb{C}$ سلسلة توابع، نقول عن هذه السلسلة أنها متقاربة بانتظام على A إذا و فقط إذا حققت الخاصيتين التاليايتين :
أ) توجد $M > 0$ ، بحيث $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \right| \leq M.$
ب) المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ موجبة و متناقصة و تتقارب الى الصفر .
البرهان :
بتطبيق معيار كوشي :

$$\left| \sum_{n=p+1}^{p+q} (u_n v_n)(x) \right| = \left| \sum_{n=p+1}^{p+q} (S_n(x) - S_{n-1}(x)) v_n(x) \right|$$

$$= \left| \sum_{n=p+1}^{p+q} S_n(x) v_n(x) - \sum_{n=p}^{p+q-1} S_n(x) v_{n+1}(x) \right|$$

$$= \left| S_{p+q}(x)\, v_{p+q}(x) - S_p(x)\, v_{p+1}(x) + \sum_{n=p+1}^{p+q-1} S_n(x)\,[v_n(x) - v_{n+1}(x)] \right|$$

$$= \begin{bmatrix} S_{p+q}(x)\, v_{p+q}(x) - S_p(x)\, v_{p+1}(x) + S_{p+1}(x)\,(v_{p+1}(x) - v_{p+2}(x)) \\ + \cdots + S_{p+q-1}(x)\,(v_{p+q-1}(x) - v_{p+q}(x)) \end{bmatrix}$$

$$\leq \; 2M\,(|v_{p+1}(x)| + |v_{p+q}(x)|)\,.$$

بما أن v_n متقاربة بإنتظام على A نحو 0 فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ متقاربة بإنتظام على A

تعريف 3.2.3 (التقارب النظيمي)
نقول عن سلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ أنها متقاربة نظيميا على A إذا وجدت سلسلة متقاربة ذات حدود موجبة v_n بحيث :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, |u_n| \leq v_n.$$

مثال
1) لتكن السلسلة :

$$\sum_{n\geq 0} x^n, \quad \forall x \in [0,1].$$

بما أن الحد العام ل $u_n(X) = x^n$ عبارة عن سلسلة هندسية فإن :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \; ; x \in [0,1[, \\ n+1 \quad ; x = 1. \end{cases}$$

من أجل $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} \; ; x \in [0,1[, \\ +\infty \; ; x = 1. \end{cases}$$

السلسلة $\sum_{n\geq 0} x^n$ متقاربة ببساطة على $[0,1[$ نحو الدالة S المعرفة كمايلي :

$$S(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in [0,1[$$

لاحظ أن باقي الترتيب $n \geq 1$

$$S_n(x) - S(x) = \frac{x^{n+1}}{x-1}, \quad \forall x \in [0,1[$$

ليست محدودة على المجال $[0,1[$ نستنتج أن السلسلة

ليست متقاربة بإنتظام على $[0,1[$ لكن من أجل كل عدد حقيقي a حيث $a \in]0,1[$ نحصر $u_n(X)$ على المجال $[0,a] \subset [0,1[$,

$$\sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n,$$

السلسلة $\sum x^n$ متقاربة ناظميا و منه متقاربة بإنتظام على $[0,a]$ نحو S.

2-لتكن السلسلة

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

نضع $v_n(X) = \frac{1}{n^2+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$0 < v_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |v_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$$

و $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة و منه حسب فايرستراس فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+x^2}$ متقاربة ناظميا على $\mathbb{R}$.

ملاحظة :

نقول عن سلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ أنها متقاربة نظيميا على A إذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq n_0} \|u_n\|_\infty$ متقاربة حيث :

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in A} |u_n(x)|.$$

3.2.3 قضية

إذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة نظيميا على A فإنها تكون متقاربة بانتظام على A ، أما العكس غير صحيح.

البرهان :

لتكن السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة مطلقا حسب معيار كوشي للسلسلة , توجد متتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $v_n \geq 0$ و السلسلة $\sum_{n\geq 0} v_n$ متقاربة و لدينا :

$$\sup_{x\in A}|u_n(x)| \leq v_n \ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

ليكن $\varepsilon > 0$ و بما أن السلسلة $\sum_{n\geq 0} v_n$ متقاربة و تحقق شرط كوشي بإنتظام فإنه :

$$\forall\varepsilon>0, \exists N_0\in\mathbb{N}, \forall(p,q)\in\mathbb{N}^2, (p>q\geq N_0)\Rightarrow \sum_{k=q+1}^{p} v_k \leq \varepsilon$$

إذن :

$$\forall p>q\geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=q+1}^{p}\sup_{x\in A}|u_k(x)|\leq\varepsilon.$$

و من جهة اخرى لدينا :

$$\sup_{x\in A}\sum_{k=q+1}^{p}|u_k(x)| \leq \sum_{k=q+1}^{p}\sup_{x\in A}|u_k(x)|.$$

و منه :

$$\forall p>q\geq n_0 \Rightarrow sup_{x\in A}\sum_{k=q+1}^{p}|\mathrm{u_k(x)}|\leq\varepsilon.$$

هذا يعني أن السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة بإنتظام .

ملاحظة :

التقارب الناظمي يستلزم جميع أنواع التقاربات .

3.3 التقارب المنتظم و خواص مجاميع سلاسل التوابع :

نعتبر في هذه الفقرة سلاسل التوابع على المجالات من $\mathbb{R}$.

النتائج المتعلقة بمتتاليات التوابع تعطي عند تطبيقها على المتتاليات المجاميع الجزئية نتائج مماثلة خاصة بسلاسل التوابع.

الاستمرار :

قضية 1.3.3

لتكن $u_n : [a,b]\to\mathbb{C}$. $\sum_{n\geq 0} u_n$ سلسلة توابع متقاربة بانتظام على $[a,b]$ ، إذا كانت كل التوابع U_n مستمرة عند $x\in[a,b]$ فإن المجموع S للسلسلة مستمرة عند x .

نتيجة:
إذا كانت كل التوابع u_n مستمرة على $[a,b]$ وكانت
$\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ فإن المجموع S مستمرة على $[a,b]$.
ملاحظة:
تحت الشروط السابقة نستطيع كتابة

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n\geq 0} u_n(x) = \sum_{n\geq 0}\lim_{x\to x_0} u_n(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x_0) \cdot$$

المكاملة :

قضية 2.3.3

لتكن $\sum_{n\geq 0} u_n \cdot$ سلسلة توابع متقاربة بانتظام على $[a,b]$ ، إذا كانت كل التوابع u_n قابلة للمكاملة على $x_0 \in [a,b]$ فإن الأمر كذلك فيما يخص S للسلسلة ولدينا:

$$\int_a^b S dx = \int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) dx = \sum_{n\geq 0}\int_a^b u_n dx \cdot$$

إضافة إلى ذلك فإن السلسلة

$$\sum_{n\geq 0}\int_0^x u_n(t)\,dt$$

متقاربة بانتظام على $[a,b]$ نحو $\int_a^x S(t)dt$.
مثال:
كما هو الحال فيما يخص السلسلة الهندسية فإننا نبين بسهولة أن السلسلتين:

$$\frac{1}{1\ +\ x} = \sum_{n=0}^{\infty}\ (-\ 1\ )^n x^{\ n}$$

$$\frac{1}{1\ +\ x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\ (-1\ )^n\ x^{2\ n}$$

متقاربتان بانتظام على كل مجال $[a,b] \subset\ ]-1,1[$ ، يمكننا مكاملتها حدا حدا من 0 إلى x وبالتالي نجد من أجل : $|\ x\ | \leq 1$.

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n}$$

الاشتقاق:

قضية 3.3.3

لتكن $\sum_{n\geq 0} u_n$ سلسلة توابع حدودها $u_n : [a,b] \to \mathbb{C}$.
قابلة للاشتقاق باستمرار على $[a,b]$ أي $u_n \in C^1([a,b])$. إذا كان

- $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة على الأقل عند نقطة $x_0 \in [a,b]$.
- $\sum_{n\geq 0} (u_n)'$: متقاربة بانتظام على $[a,b]$.

فإن السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$.
المجموع $S = \sum_{n\geq 0} u_n$ قابل للاشتقاق باستمرار على $[a,b]$ ولدينا

$$S' = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)' = \sum_{n\geq 0} u'_n.$$

ملاحظات:

1- تبقي النظرية قائمة إذا عوضنا المجال $[a,b]$ بمجل كيفي (مفتوح، نصف مفتوح، محدود أو غير محدود) في هذه الحالة يصبح نص النظرية كالتالي:

- السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة بانتظام على كل مجال $I \supset [a,b]$.
- المجموع $S = \sum_{n\geq 0} u_n$ يقبل الاشتقاق باستمرار على $[a,b]$ ولدينا

$$S' = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)' = \sum_{n\geq 0} u'_n.$$

2- نشير إلى التعميم التالي:

لتكن $\sum_{n\geq 0} u_n$. $u_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ سلسلة توابع حدودها u_n قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ إذا كانت السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة على الأقل عند نقطة $x_0 \in [a,b]$ ، وكانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} U'_n$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$ فإن:

- السلسلة $\sum_{n\geq 0} u'_n$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$.
- المجموع S قابل للاشتقاق على $[a,b]$ ولدينا $S' = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)' = \sum_{n\geq 0} u'_n$.

نستعمل عادة من الناحية العلمية النتيجة التالية:

نتيجة:

لتكن $\sum_{n\geq 0} u_n$. سلسلة توابع $u_n\colon [a,b]\to C^m$ تحقق الشرطين:

- السلاسل $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}, 0\leq k\leq m-1$ متقاربة على $[a,b]$.
- السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة بانتظام على $[a,b]$.

عندئذ:

- تتقارب كل السلاسل $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}, 0\leq k\leq m$ بانتظام على $[a,b]$
- المجموع S للسلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ من الصنف C^m على $[a,b]$ ولدينا: $S^{(K)}=\sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(k)}$, $0\leq k\leq m$

البرهان :

يتم بالتدرج على m، بالفعل لدينا من اجل $m=1$ النظرية السابقة

نفرض القضية محققة من أجل m وأن الفرض محقق من أجل $m+1$ ، عند ئذ يكون فرض التدرج محققا من اجل السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ حيث $v_n=u'_n$ نرمز v لمجموع v_n ولدينا إذن:

$$v^k=\sum_{n\geq 0} v_n^{(k)}=\sum_{n\geq 0} u_n^{(k+1)}$$

كل هذه السلاسل متقاربة بانتظام. تبين النظرية السابقة أن السلسلة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة بانتظام لأن السلسلة $v=\sum_{n\geq 0} u'_n$ كذلك. لدينا إذن: $S'=v$ ، وهذا يستلزم أن

$$S\in C^{m+1}([a,b])$$

نحصل أيضا على

$$S^{(k)}=v^{(k-1)}=\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}\ ,0\leq k\leq m+1$$

وبذلك ينتهي البرهان.

مثال عن تابع مستمر لا يقبل الاشتقاق عند أية نقطة:

كما سبق فإن المقصود من القول أن f يقبل الاشتقاق هو وجود مشتق منته. يعود أولا لتابع مستمر في كل $\mathbb{R}$ ولا يقبل الاشتقاق في أي مكان إلى فيرشتراس نعتبر هنا فكرة مثال أكثر بساطة

لفان دارفاردن$(vanderwaerden)$ وليكن $U_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ التابع الدوري ذا الدورة 1 المعرف على $[0,1]$ بـ:

$$u_0(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

نلاحظ أن U_0 مستمر على $\mathbb{R}$ بل هو ليبشتزي بالثابت 1، أي:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R} : |u_0(X) - u_0(Y)| \le |X - Y|$$

من أجل $1 \le n$ نضع $x \in \mathbb{R}$:

$$u_n(x) = \frac{u_0(4^n x)}{4^n}$$

وبطبيعة الحال فإن التوابع u_n دورية دورتها 4^{-n} وليبشتزية بالثابت1.

نعتبر الآن التابع $f = \sum_{n\ge 0} 3^n u_n$ ونبين أنه مستمر وغير قابل للاشتقاق في $\mathbb{R}$ مهما كان

$$\|u_n\| = \sup_{X \in \mathcal{IR}} |u_n(x)| = \frac{1}{2.4^n}$$

فإن السلسلة متقاربة ناظميا، وعليه فإن f مستمر على $\mathbb{R}$.لنثبت أن f لا يقبل الاشتقاق عند أية نقطة من $\mathbb{R}$. لتكن $X_0 \in \mathbb{R}$ نقطة كيفية . من أجل كل عدد طبيعي $0 < m$ ، يوجد عدد طبيعي k_m وحيد بحيث

$$a_m = \frac{k_m}{2.4^n} \le X_0 \le \frac{k_m + 1}{2.4^n} = b_m$$

لما كان الفرق $b_m - a_m$ مضاعفا ل 4^n (دورة u_n) من أجل كل $m < n$:

$$b_m - a_m = \frac{1}{2.4^m} = 2^{2(n-m)-1}.4^{-n}$$

فإننا نلاحظ مهما كان $m < n$ $u_n(b_m) - u_n(a_m) = 0$ وبالتالي :

$$\forall m > 0 : \frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m} = 2.4\,4^m \sum_{n=0}^{m} 3^n \Big[u_n(b_m) - u_n(a_m) \Big]$$

بما أن

$$Z \cap \left] \frac{k_m}{2}, \frac{k_m + 1}{2} \right[= \varnothing$$

فإن التابع u_0 تآلفي على $\left[\frac{k_m}{2}, \frac{k_m+1}{2}\right]$ ويكتب على الشكل $u_0(X) = AX + B$ حيث $A = \pm 1$ ينتج عن ذلك:

$$|u_m(b_m) - u_m(a_m)| = \frac{1}{4^m}\left|u_0\left(\frac{k_m+1}{2}\right) - u_0\left(\frac{k_m}{2}\right)\right| = 2^{-1}.4^{-m}...$$

ثم أن التوابع u_n ليبشتزية بالثابت 1، ومنه نستنتج من(1) و(2) ومتراجحة المثلث:

$$\left|\frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m}\right| \geq 3^m - 2.4^m \sum_{n=0}^{m-1} 3^n (b_m - a_m) = 3^m - \frac{3^m - 1}{2} > \frac{3^m}{2}$$

وبالتالى:

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m}\right| = +\infty$$

إذن f لا يقبل الاشتقاق عند X_0 .

ملاحظة:

بالفعل، لو كان f قابلا للاشتقاق عند X_0 لوجدنا:

$$\begin{aligned} f(b_m) = f(a_m) &= f(b_m) + f(X_0) - f(X_0) - f(a_m) \\ &= f'(X_0)(b_m - a_m) + O(b_m - X_0) + f'(X_0)(X_0 - a_m) + O(X_0 - a_m) \\ &= f'(X_0)(b_m - a_m) + O(b_m - a_m) \end{aligned}$$

وهذا يستلزم :

$$\cdot \lim_{m\to\infty} \frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m} = f'(X_0) \qquad (\neq \pm\infty)$$

الخاتمة :

خلاصة عرضنا المتواضع الذي تطرقنا فيه إلى دراسة بعض السلاسل و المفاهيم المرتبطة بالسلاسل العددية و سلاسل التوابع وذلك من عدة جوانب التقارب ,التباعد وعلاقتها مع المقاييس الأخرى ... و بالأعتماد على أهم النظريات و التعاريف و بعض الأمثلة التطبيقية.

ختاما نتمنى من خلال بحثنا الصغير أننا قد أفدنا ولو بالقليل على انفسنا و الطلبة الجامعيين خاصة قسم السنة الثانية رياضيات , الذين نرجو أن نكون قد ساهمنا في تسهيل بعض الصعوبات في فهم و دراسة السلاسل , و نسأل المولى الله عزوجل أن نكون قد وفقنا في بحثنا , فإن أخطأنا فمن أنفسنا و إن أصبنا فمن الله .

المراجع :

1/الوثيقة المرافقة لمصطفى شقاق - قسم الرياضيات و الاعلام الآلي - مدرسة العليا للأساتذة.

2/ كتاب عمران قوبا : التحليل الجزء الأول , من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية و التكنولوجيا , الجمهورية الغربية السورية، ،الطبعة الثانية,2017 .

3/ كتاب عمران قوبا : التحليل الجزء الثاني , من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية و التكنولوجيا , الجمهورية الغربية السورية، 2017 .

4/ كتاب قادة علاب : عناصر التحليل الرياضي

(التوابع لمتغير حقيقي واحد)-ترجمة أ.خ.سعد الله-ديوان المطبوعات الجامعية -الجزائر-1991.

5/ مطبوعة دروس الدكتور مفتاح بدر الدين : جامعة 8 ماي 1945 – قالمة – كلية الرياضيات, علوم الحاسوب وعلوم المادة,قسم الرياضيات المادة الدراسية للوحدة -الرياضيات 3- مخصص للطلاب في السنة الثانية من العلوم والتكنولوجيا الأساسية .

6/ مطبوعة دروس المدرسة العليا للأساتذة -القبة القديمة(الجزائر)- قسم الرياضيات -2007

7/ مطبوعة دروس بوفنوش رزيقة : دورة التحليل 3 مقرر لطلاب السنة الثانية من درجة البكالوريوس في الرياضيات جامعة محمد صديق بن يحي -جيجل - كلية العلوم الدقيقة وعلوم الحاسوب-قسم الرياضيات

8/ مطبوعة دروس حمداوي عبد النور : السلاسل و التكاملات العامة دورات و تمارين تطبيقية -الجزائر-2016, جامعة محمد بوضياف كلية العلوم و التكنولوجيا -وهران- قسم الرياضيات .

9/ مطبوعة دروس فتوش هواري : التحليل 3 (السلاسل) دورات و تمارين تطبيقية , جامعة عبد الحميد بن باديس -مستغانم- كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلي -قسم الرياضيات و الإعلام الآلي -مستغانم- 2019

10/ مطبوعة دروس ياسين أحمد بنيا : دعم دورة التحليل 3 مع تمارين مصححة,جامعة الجزائر 1 كلية العلوم-قسم الرياضيات وعلوم الحاسوب-الجزائر العاصمة،سبتمبر 2019

ملخص :

بهدف التعرف على خواص و قواعد التقارب , قمنا بإنجاز مذكرتنا تحتوي على ثلاث فصول , حيث تضمن الفصل الأول بعض المفاهيم الأساسية حول متاليات و السلاسل العددية تعريف متتالية كوشي , لنشير بعدها إلى ثلاث أنواع من السلاسل العددية و المتمثلة في سلاسل ذات حدود موجبة (معيار كوشي , دلمبار , ريمان و مقاييس أخرى) و سلاسل ذات حدود كيفية (أبال , سلاسل متناوبة)و سلاسل متقاربة مطلقا , أضف إلى ذلك شرط التقارب و المقارنة بين السلاسل و بعض المقاييس كالتكامل , دالمبار و مقياس كوشي .... إلخ .

ختمنا مذكرتنا بفصل عالجنا فيه سلاسل التوابع و أنواع التقاربات المنتظم و الناضمي و أنهيناه بخواص مجاميع التوابع مثل الإستمرار , المكاملة و الإشتقاق . وقد جعلنا في مذكرتنا مثال أو برهان تدعيما لكل عنصر سلف ذكره. و في الأخير نتمنى أن فكرتنا قد وصلت , وأن يكون هذا العمل التطبيقي ثمرة الأربعة سنوات من الدراسة النظرية و ألأهم هو أن يفيد الطالب و لو بالقدر اليسير , و نشكر الله عزوجل لإيصالنا إلى هذه المرحلة و إتمامها فهو الموفق و الهادي إلى سواء السبيل .