République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Ecole Normale Supérieure de l'Eenseignement Technologique, Skikda

Département De Mathématiques

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme : Professeur d'Enseignement Moyen

Spécialité : Mathématique

Présenté par les étudiantes:

LEMMOUCHI Aya **HADI Samah**

Encadreur :

MEZIRI Imen

Thème

Sur Quelques inégalités intégrales fractionnaires

Comité de discussion :

GOUASMIA Okba	**Enset Skikda**	**Président**
MERABET Farida	**Enset Skikda**	**Examinatrice**
BOULARAS Saleh	**Enset Skikda**	**Examinateur**

Promotion 2024

REMERCIEMENT

Avant de commencer notre sujet de recherche, nous remercions Allah Tout-Puissant qui nous a gratifiés ; aidés et guidés, et nous a donné la patience et la force de traverser ces années. À lui revient le mérite avant et après.

Nous n'oublions pas le soutien de notre directrice de mémoire Dr MEZIRI IMEN pour ses efforts déployés avec nous, ses conseils et ses précieuses orientations.

Nous tenons également à remercier tout particulièrement le chef département de mathématiques Dr AZZOUZ FERRAG et le professeur Dr BOUSSENA DJALEL pour leur soutien, leur accompagnement, leurs conseils et surtout pour leur disponibilité constante.

Nous exprimons notre profonde gratitude à tous les enseignants qui ont pris soin de nous guider et superviser notre apprentissage, ainsi qu'aux membres de jury qui ont procédè à l'évaluation de cette recherche.

Nous remercions également Dr Boudjaadar Djemel et toute l'équipe pédagogique d'ENSET Skikda département de mathématique.

DÉDÉCACE

Je dédie ce travail

À ma mère chérie maman **WASSILA**, à qui je dois un immense merci d'après Dieu, pour toutes mes réussites, mon épanouissement et ma performance remarquable dans tous les aspects de ma vie, surtout dans mes études. Qu'elle soit récompensée au mieux pour son soutien indéfectible, sa patience infinie, ses encouragements sans faille, ses nuits blanches, ses conseils précieux et ses orientations bienveillantes. Peu importe les mots que je choisis pour décrire ses efforts, cela ne représente qu'une goutte dans l'océan par rapport aux sacrifices qu'elle a consentis pour moi.

À mon cher père **ABD EL WAHAB**, qui a étè la raison de mon existence, de ma réussite et de mon excellence. Il a pris mes responsabilités sur ses épaules et a tout sacrifié pour mon bonheur et mes ambitions.

À mon frère bien-aimé **WASSIM**, qui a toujours été mon soutien et mon bras droit dans ce voyage. Son soutien et ses encouragements ont été inestimables, et je vois la fierté dans ses yeux chaque fois que je réussis.

Á mon oncle aimé **LYAMIN**, qui a été comme un second pére pour moi, supportant mes fardeaux et m'aidant dans mon parcours. Mes prières de miséricorde et de pardon vont à lui.

À ma grand-mère **SALEHA**, que Dieu prolonge sa vie et la protège. Son influence a été immense dans ma vie, et des mots ne peuvent exprimer ma gratitude envers elle.

À ma chère amie et soeur de coeur **RABAB**, qui a toujours été fidèle et supportive depuis notre première rencontre.
À ma compagne de travail **AYA**, mon amie et confidente, que Dieu nous garde dans sa bonté et nous réunisse dans son paradis.
À habitants de Gaza, qui endurent avec patience les épreuves et les pertes. Vous êtes dans nos prières pour la victoire, le soulagement et la miséricorde pour vos martyrs.
À tous ceux qui m'ont aimé sincèrement et ont partagé avec moi la piété et la bienveillance, à mes chères amies : **ASMA**, **KHADIJA**, **OUMAIMA**, **DOUNIA**, **ANFEL**, **YASMIN**.
À qui j'aime.

SAMAH.

À ma chère mére, à celle qui m'a appris la signification de l'amour et du don, à la lumière de ma vie et au refuge de mon âme, à toi qui ne peut être suffisamment remerciée par les mots, je te dédie ce carnet et témoignage de ma profonde gratitude et de mon amour sincère. Sans ton soutien et ta tendresse, je ne serais pas là aujourd'hui. Merci pour chaque moment de dévouement et de sacrifice. Tu es le coeur battant de chaque succès que je réalise. Avec tout mon amour et ma gratitude **Maman**.

À mon cher père. à celui qui a toujours été mon soutien et mon inspiration, à celui qui m'a appris la force et le courage, je te dédie ce carnet en témoignage de ma profonde gratitude et de mon amour incommensurable. Merci pour tous les sacrifices et les conseils que tu m'as donnés, et pour ton soutien inlassable. Tu est le pilier solide sur lequel je m'appuie à chaque étape de ma vie. Avec tout mon amour et ma reconnaissance, **Mon papa**.

À ma chère grande soeur, à celle qui a toujours été mon modèle et mon soutien, à celle qui a partagé avec moi rires et secrets, je te dédie ce carnet en témoignage de mon amour profond et de ma gratitude éternelle. Merci pour chaque moment de conseils et de tendresse, et pour ton soutien inconditionnel qui n'a pas de prix. Tu es la lumiére qui éclaire mon chemin et l'amie irremplaçable. Avec tout mon amour et mon estime, **Sonia**.

À ma chère soeur, sans toi, le chemin n'aurait pas été le même. Tu es ma force et mon inspiration, et malgré le temps et la distance, je sais toujours qu'il y a quelqu'un qui me soutient et m'aime. Merci pour tout. Avec tout mon amour, **Tasnim**.

À ma chère tante, tu es la lumiére qui illumine ma vie avec ton amour chaleureux et la sollicitude profonde. Merci pour chaque moment de compréhension et de soutien, et pour tes paroles sages qui m'inspirent toujours. Tu signifies beaucoup pour moi, et je te souhaite d'être toujours heureuse. Avec tout mon amour et mon respect, **Ma tante**.

À ma chère amie, tu es l'étoile qui illumine ma vie avec ton sourire chaleureux et ton esprit merveilleux. Merci pour tous les beaux moments que nous avons passés ensemble et pour tout le soutien et l'amour que tu m'as toujours donné. Tu n'es pas seulement une amie, mais aussi une soeur et une compagne dans le voyage de la vie. Avec tout mon amour et ma gratitude, **Samah**.

Aya.

RÉSUMÉ

Ce mémoire vise à approfondir la compréhension des inégalités intégrales dans le contexte du calcul fractionnel. Il explore les inégalités intégrales les plus connues en une dimension et démontre l'existence d'inégalités intégrales plus généralisées de type **Gronwall-Bellman** au calcul fractionnaire.

Plus précisément, les inégalités intégrales fractionnaires au sens de **Riemann- Liouville** et **Hadamard**. Ces inégalités s'avèrent essentielles pour démontrer la théorie et analyser le comportement des solutions de certaines équations différentielles-intégrales fractionnelles.

Mots clés : Inégalité Intégrale de **Gronwall-Bellman**, Inégalité Intégrale de **Bihari**, Calcul fractionnaire, Intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville**, Intégrale fractionnelle de **Hadamard**, Inégalité intégrale fractionnaire.

ملخص

يتضمن هذا البحث المتراجحات التكاملية في إطار الحساب الكسري بغرض توسيع المفاهيم المرتبطة بها.

حيث يتم تقديم أشهر المتراجحات التكاملية على بعد واحد، والبرهنة على وجود متراجحات تكاملية أكثر تعميماً من نوع غرونوال-بلمان في الحساب الكسري. وتحديداً، المتراجحات التكاملية الكسرية بمفهوم ريمان-ليوفيل وهادامارد.

تعتبر هذه المتراجحات أساسية لإثبات النظريات وتحليل خصائص حلول بعض المعادلات التفاضلية-التكاملية الكسرية.

الكلمات المفتاحية: متراجحة تكاملية لغرونوال-بلمان، متراجحة تكاملية لبيهاري، حساب كسري، تكامل ريمان-ليوفيل الكسري، تكامل هادامارد الكسري،المتراجحات التكاملية الكسرية.

ABSTRACT

This work explores integral inequalities in the context of fractional calculus, aiming to enhance our understanding of related concepts. It examines well-known integral inequalities in one dimension and introduces more generalized **Gronwall-Bellman** type integral inequalities in fractional calculus.

Specifically, it focuses on fractional integral inequalities based on **Riemann-Liouville** and **Hadamard** definitions. These inequalities are essential for proving theories and analyzing the characteristics of solutions to certain fractional differential-integral equations.

Keywords : **Gronwall-Bellman** Integral Inequality, **Bihari** Integral Inequality, Fractional Calculus, **Riemann-Liouville** Fractional Integral, **Hadamard** Fractional Integral, Fractional integral inequality.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les inégalités constituent un élément fondamental et essentiel dans de nombreuses branches des mathématiques, telles que l'analyse réelle, la géométrie, le calcul différentiel et intégral, la théorie des probabilités et les statistiques. Plus particulièrement, les inégalités intégrales ont connu un développement significatif, apportant des contributions majeures à divers domaines mathématiques et scientifiques. Elles jouent un rôle crucial dans la résolution de nombreux problèmes en analyse numérique, en théorie de l'approximation.

L'importance des inégalités intégrales réside également dans l'étude des équations intégrales, en particulier dans le contexte des équations différentielles ordinaires en ce qui concerne l'existence de solutions, stabilité des points d'équilibre et unicité. Une des inégalités intégrales les plus célèbres est celle établie par **Gronwall** (1919).

Ce document examine la généralisation des inégalités intégrales dans le domaine du calcul fractionnaire, une discipline mathématique qui a connu une évolution notable récemment. Nous nous penchons plus particulièrement sur l'étude de l'extension d'une inégalité intégrale fractionnaire présentée par **Nisar** sous la forme suivante :

$$u(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} u(\rho) d\rho, \quad x \in [0, X),$$

avec $k,\ \lambda, M \in \mathbb{R}_+^*$ et u, h sont des fonctions positives, localement intégrable sur $[0, X)$ avec $X \leq +\infty$. $\phi(x)$ est une fonction positive, continue et croissante sur $[0, X)$, vérifiant $\phi(x) \leq M$.
Ces extensions et généralisations sont illustrés par des exemples.

Pour une meilleure compréhension de ce manuscrit, nous avons organisé ce travail selon la structure suivante :

$\star$ Le premier chapitre comprend quelques concepts de base nécessaires liés aux calcul fractionnaire et quelques résultats importants qui nous serons utile dans la suite.

$\star$ Dans le deuxiéme chapitre, nous incluons les inégalités intégrales célèbres en une dimension, parmi lesquelles la célèbre inégalité de **Gronwall**, de **Bellman**, de **Bihari**, et d'autres encore. De plus, nous avons généralisé les inégalités liées à la classe de **Gronwall** en donnant un exemple.

$\star$ Le troisième chapitre concerne les inégalités intégrales fractionnaires en une dimension, où nous avons étudié l'extension des inégalités intégrales du type Gronwall-Bellman au calcul fractionnaire munis par deux exemples . Ces résultats ont contribué à l'étude d'une nouvelle classe d'inégalités intégrales, qui ont été publiées dans [4].

L'index des notations

Dans un souci de praticité, nous avons jugé important de clarifier d'abord certaines des notations utilisées dans ce mémoire.

$\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$: L'ensemble des nombres complexe.

$\mathbb{N}$: L'ensemble des nombres naturels.

$\Gamma(.)$: La fonction Gamma d'Euler.

$B(.,.)$: La fonction Bêta.

$log(.)$: Le logharithme népérien.

I_a^α : L'intégrale de Rieman-Liouville d'ordre α.

D_a^α : La dérivée de Riman-Liouville d'ordre α.

${}_HI_a^\alpha$: L'intégrale de Hadamard d'ordre α.

${}_HD_a^\alpha$: La dérivée de Hadamard d'ordre α.

I_k^α : L'intégrale k-fractionnelle de Riemann-Liouville d'ordre α.

${}_HI_{1,x}^\alpha$: L'intégrale k-fractionnelle de Hadamard d'ordre α.

CHAPITRE

1

CONCEPTS FONDAMENTAUX

Nous aborderons dans ce chapitre, en premier lieu l'étude de certains concepts fondamentaux nécessaires dans notre mémoire sur le calcul fractionnaire. Parmi ces concepts, nous désignons : les fonctions spéciales telles que la fonction **Bêta** et la fonction **Gamma** , les dérivéés fractionnaires, les intégrales fractionnaires, etc..

Le calcul fractionnaire, bien que pas nouveau, étend la différentiation et l'intégrations aux ordres non entiers, remontant aux travaux pionniers de **Leibniz**, **Gauss** et **Newton**. Au 19 ème siècle, des mathématiciens comme **Rieman** (1847), **A.K. Grunwald** (1867 - 1872) et **A.V. Letnikov** (1808-1872) ont contribué à ce sujet. Récemment, il y a a eu une croissante significative dans l'étude des équations différentielles fractionnaires, avec de nombreuses applications dans des domaines tels que la viscoélasticité, la théorie du contrôle, la biologie et l'électromagnétisme.

En second lieu, nous rappellerons quelques lemmes importants qui nous seront utiles par la suite.
Toutes les informations fournies dans cette partie sont basées sur les reffèrences sui-

vantes : ([4], [5], [7], [12], [14], [19]).

1.1 Fonctions Spéciales

Nous allons rappeler certains concepts fondamentaux de la fonction **Gamma** et de la fonction **Bêta** qui jouent un rôle essentiel dans le calcul fractionnaire.

La fonction Gamma

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma d'Euler $\Gamma(.)$ est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0 \tag{1.1}$$

Exemple 1.1.1

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= [-e^{-t}]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exemple 1.1.2

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{2-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t\, e^{-t} dt \end{aligned}$$

Une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= [-te^{-t} - e^{-t}]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Quelques propriétés de la fonction Gamma

propriétés 1.1.1
1) Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(.)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0. \tag{1.2}$$

2) La fonction Gamma généralise la notation de factorielle, i.e.,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n! \tag{1.3}$$

Preuve :
1) $\forall \alpha > 0,$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt \\
&= \left[-t^{\alpha} e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha\, e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\
&= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\
&= \alpha\Gamma(\alpha).
\end{aligned}$$

2) Pour tout n entier naturel, et d'aprés 1.2, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
&= n(n-1)\Gamma(n-1) \\
&= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)........\Gamma(1) \\
&= n!
\end{aligned}$$

Exemple 1.1.3

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(5)}{2\Gamma(4)} &= \frac{4!}{2\times 3!} \\
&= \frac{4\times 3!}{2\times 3!} \\
&= 2
\end{aligned}$$

La fonction Bêta

Définition 1.1.2 *La fonction $B(.,.)$ est définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{1.4}$$

Exemple 1.1.4 *Si $x = 1$ et $y = 3$, nous avons*

$$\begin{aligned} B(1,3) &= \int_0^1 (1-t)^2 dt \\ &= \int_0^1 (1+t^2-2t)dt \\ &= \int_0^1 1dt + \int_0^1 t^2 dt - 2\int_0^1 tdt \\ &= [t]_0^1 + \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 - 2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 *La fonction $B(.,.)$ est symetique, c'est-à-dire*

$$B(x,y) = B(y,x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$$

La Relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{1.5}$$

Exemple 1.1.5

$$\begin{aligned} B(1,3) &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(3)}{\Gamma(1+3)} \\ &= \frac{1! \times 2!}{3!} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

1.2 Qeulques intégrales et dérivées fractionnaires

Dans tout ce qui suit, nous considérons : $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tel que* $-\infty < a < b < \infty$

1.2.1 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Rieman-Liouvilles

Définition 1.2.1 *L'intégrale fractionnaire de f au sens de* ***Rieman-Liouville*** *d'ordre* $\alpha > 0$*, si elle existe, est définie par :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (x > a).$$

• *Dans le cas où* $\alpha = 0$*, nous avons*

$$(I_a^0 f)(x) = f(x).$$

Exemple 1.2.1 *Nous considérons la fonction f définie par :*

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)^\beta, \quad \text{où } \beta > -1 \\ (I_a^\alpha f)(x) &= I_a^\alpha (x-a)^\beta, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt, \end{aligned}$$

pour évaluer cette intégrale, nous posons le changement de variable :

$$t = a + (x-a)\tau,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} dt &= (x-a) d\tau, \\ t &= a \Rightarrow a + (x-a)\tau = a \Rightarrow \tau = 0, \\ t &= x \Rightarrow a + (x-a)\tau = x \Rightarrow \tau = 1, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{\alpha-1}((x-a)\tau)^{\beta}(x-a)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}(x-a)^{\beta}\tau^{\beta}(x-a)d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha,\beta+1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Définition 1.2.2 *La dérivée d'ordre $\alpha > 0$ au sens de* ***Rieman-Liouville*** *de la fonction f, si elle existe, est définie par :*

$$\begin{aligned} (D_a^{\alpha}f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha}f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt, \quad \forall x > a. \end{aligned} \tag{1.6}$$

tel que $n = [\alpha] + 1$, où $[\alpha]$ est la partie entière de α.

Cas particulier : *Si $\alpha = m \in \mathbb{N}$ alors :*

$$(D_a^m f)(x) = f^{(m)}(x).$$

Remarque 1.2.1

• *Si $0 < \alpha < 1$, alors n= 1, d'où*

$$(D_a^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt$$

Exemple 1.2.2 *Soit $f(x) = (x-a)^{\beta}$, $\beta > -1$*

$$D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n [I_a^{n-\alpha}(x-a)^{\beta}],$$

nous avons trouvé

$$I_a^{n-\alpha}(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}(x-a)^{n-\alpha+\beta},$$

alors

$$\begin{aligned}(D_a^\alpha f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta+n-\alpha}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

Donc

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.7}$$

Si on pose $\beta = 0$ dans l'identité 1.7 nous obtenons :

$$D_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \tag{1.8}$$

Ce qui montre que la dérivée de ***Rieman-Liouville*** *d'une constante n'est pas nulle.*

Lemme 1.2.1 *Supposons que $0 < \alpha < 1$, et que f est une fonction continue, alors*

$$D_t^\alpha(I^\alpha f(t)) = f(t). \tag{1.9}$$

1.2.2 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Hadamard

Définition 1.2.3 *Soit $\alpha > 0$, l'intégrale fractionnaire de type* ***Hadamard*** *pour une fonction f, si elle existe, est définie par :*

$$({}_H I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \quad (x > a > 0).$$

Définition 1.2.4 *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de* ***Hadamard*** *de f, si elle existe,* *est :*

$$({}_HD_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \left(log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \quad (x > a > 0), \tag{1.10}$$

où $n = [\alpha] + 1$.

Exemple 1.2.3 *Nous considére la fonction f définie par :*

$$f : x \longrightarrow \left(log\frac{x}{a}\right)^\beta, \quad avec \quad \beta > -1$$

nous avons alors

$$({}_HD_a^\alpha)\left(log\frac{x}{a}\right)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \left(log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1}\left(log\frac{t}{a}\right)^\beta \frac{dt}{t},$$

par le changement de variable $\mu = \dfrac{log\frac{t}{a}}{log\frac{x}{a}}$ *, nous obtenons*

$$\begin{aligned}({}_HD_a^\alpha)\left(log\frac{x}{a}\right)^\beta &= \frac{\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1 \mu^\beta(1-\mu)^{n-\alpha-1}d\mu,\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n\left(log\frac{x}{a}\right)^{n-\alpha+\beta},\end{aligned}$$

nous prenons $\beta = \dfrac{5}{2}$ *et* $\alpha = \dfrac{1}{2}$*, alors nous aurons*

$$({}_HD_a^{\frac{1}{2}})\left(log\frac{x}{a}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(4)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^1\left(log\frac{x}{a}\right)^3 = \frac{15\sqrt{\pi}}{16}\left(log\frac{x}{a}\right)^2.$$

Si nous prenons $\alpha = \dfrac{1}{2}$ *et* $\beta = 0$*, alors*

$$({}_HD_a^{\frac{1}{2}})\left(log\frac{x}{a}\right)^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^1\left(log\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(log\frac{x}{a}\right)^{\frac{-1}{2}}.$$

• ***Diaz*** *et* ***Pariguan*** *[13] ont introduit la fonction K-Gamma* $\Gamma_k(.)$ *définie par :*

$$\Gamma_k(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^k}{k}} t^{\alpha-1} dt \qquad (\alpha, k > 0) \tag{1.11}$$

qui satisfait les relations suivantes :

$$\Gamma_k(\alpha + k) = \alpha \Gamma_k(\alpha), \qquad \Gamma_k(k) = 1 \tag{1.12}$$

En utilisant la fonction k-Gamma Γ_k, ***Mubeen*** *et* ***Habibullah*** *ont introduit l'intégrale k-fractionnelle de* ***Riemann-Liouville*** *d'ordre* α *suivante :*

$$(I_k^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t) dt, \quad (\alpha, k > 0) \tag{1.13}$$

L'intégrale k-fractionnelle de ***Hadamard*** *d'ordre* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *est définie par :*

$$\left({}_H I_{1,x}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\mu)} \int_1^x \left(log \frac{x}{\tau}\right)^{\frac{\mu}{k}-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad (x > 1). \tag{1.14}$$

1.3 Quelques inégalités importantes

Lemme 1.3.1 *Supposons* $a \geq 0,\ p \geq q \geq 0$ *et* $p \neq 0$*, nous avons :*
pour tout $\varepsilon > 0$,

$$a^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{p} \varepsilon^{\frac{q-p}{p}} a + \frac{p-q}{p} \varepsilon^{\frac{q}{p}} \tag{1.15}$$

Lemme 1.3.2 *Soient* b *et* f *deux fonctions continues sur* $J = [\alpha, +\infty[$*. Soit* v *une fonction différentiable sur* J*, et on suppose que pour tout* $t \in J$,

$$v'(t) \leq b(t)v(t) + f(t), \tag{1.16}$$

alors pour tout $t \in J$*, nous avons*

$$v(t) \leq v(\alpha) \times exp\left(\int_{\alpha}^{t} b(s)ds\right) + \int_{\alpha}^{t} f(s) \times exp\left(\int_{s}^{t} b(u)du\right) ds. \tag{1.17}$$

Lemme 1.3.3 *Soient $\alpha > 0$, a, b, u des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}_+$.*
Alors, pour $t \geq 0$, l'inégalité

$$D_t^{\alpha} u(t) \leq a(t) + b(t)u(t), \tag{1.18}$$

implique

$$u(t) \leq u(0) \exp \left\{ \int_0^{\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}} b\left(s\Gamma(1+\alpha) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right) ds \right\} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} a(\tau)$$
$$\times \exp \left\{ - \int_{\frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}} b\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \right) ds \right\} d\tau.$$

CHAPITRE

2

INÉGALITÉS INTÉGRALES

*Dans ce chapitre, nous aborderons les inégalités intégrales (Integral Inequalities) dans le cas unidimensionnel. Nous commencerons par mentionner certaines célèbres inégalités intégrales unidimensionnelles qui ont été prouvées par plusieurs mathématiciens éminents tels que **Gronwall**, **Bellman**, **Bihari** et autres.*

*Ensuite, nous examinerons deux généralisations de type **Gronwall**. L'accent sera mis en particulier sur le Théorème 2.2.1 qui fournit des généralisations importantes de certaines inégalités intégrales classiques, et nous montrerons comment l'appliquer pour obtenir des bornes explicites sur les solutions de certaines équations différentielles intégrales.*

2.1 Célèbres inégalités intégrales unidimensionnelles

Dans cette section, nous allons citer quelques célèbres inégalités sans démonstrations. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à ([1], [2], [3], [8], [9], [10], [15], [16]).
*Dans la théorie qualitative des équations différentielles, les inégalités de type **Gronwall** à une variable pour les fonctions réelles jouent un role très important.*

• *En 1919, **Gronwall** a établi une remarquable inégalité dont l'énoncé est :*

Théorème 2.1.1 *[9] Soit u une fonction continue définie sur l'intervalle $J = [\alpha, \alpha + h]$, a et b sont des constantes positives. Si l'inégalité*

$$0 \leq u(t) \leq \int_{\alpha}^{t} [b\, u(s) + a] ds, \qquad t \in J, \tag{2.1}$$

est vérifiée, alors

$$0 \leq u(t) \leq a\, h \exp(bh), \qquad t \in J. \tag{2.2}$$

• *En 1943, **Bellman** a prouvé l'inégalité intégrale suivante :*

Théorème 2.1.2 *[1] Soient u et f deux fonctions continues et positives pour $t \geq \alpha$ et c une constante positive, alors l'inégalité*

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} f(s) u(s) ds, \quad t \geq \alpha, \tag{2.3}$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq c \exp\Big(\int_{\alpha}^{t} f(s) ds\Big), \quad t \geq \alpha. \tag{2.4}$$

*L'inégalité donnée dans ce théorème porte le nom d'inégalité de type **Gronwall-Bellman**.*

• *En 1956, le théorème suivant a été développé par **Bihari**.*

Théorème 2.1.3 *[3] Soient u, f deux fonctions continues et positives, définies sur $\mathbb{R}_+$, w une fonction croissante et continue définie sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant $w(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et k une constante positive,*

$$u(t) \leq k + \int_0^t f(s)w(u(s))ds, \quad 0 < t < t_0 \tag{2.5}$$

est satisfaite pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, alors

$$u(t) \leq G^{-1}\Big(G(k) + \int_0^t f(s)ds\Big), \quad 0 \leq t \leq t_1 \tag{2.6}$$

où G est solution de l'équation intégrale suivante

$$G(r) = \int_{r_0}^r \frac{1}{w(s)}ds, \quad r_0 > 0,\ r > 0 \tag{2.7}$$

et G^{-1} est la fonction inverse de G et $t_1 \in \mathbb{R}_+$ est choisi de telle sorte que

$$\Big\{G(k) + \int_0^t f(s)ds\Big\} \in DomG^{-1}. \tag{2.8}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ inclus dans l'intervalle $0 \leq t \leq t_1$.

• *En 1957,* ***Ou-Iang*** *a montré une variante du Théorème 2.1.2 dans un cadre non linéaire.*

Théorème 2.1.4 *[15] Soient u et g deux fonctions continues et strictement positives sur $\mathbb{R}_+$. Soit u_0 une constante strictement positive.*
Si l'inégalité suivante est satisfaite,

$$[u(t)]^2 \leq u_0^2 + 2\int_0^t g(s)u(s)ds, \tag{2.9}$$

alors

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^t g(s)ds. \tag{2.10}$$

• *En 1958,* ***Bellman*** *a proposé une autre version du Théorème 2.1.2 de la manière suivante :*

Théorème 2.1.5 *[2] Soient u et g deux fonctions continues et positives sur $I = [\alpha, \beta]$ et soit $n(t)$ une fonction continue, positive et croissante définie sur I. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq n(t) + \int_{\alpha}^{t} g(s)u(s)ds, \quad t \in I, \tag{2.11}$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq n(t) \exp\left(\int_{\alpha}^{t} g(s)ds\right), \quad t \in I.$$

• *En 1969,* **Gollwitzer** *a généralisé le résultat de* **Bellman** *(Théorème 2.1.5) de la manière suivante :*

Théorème 2.1.6 *[8] Soient u, f, g et h des fonctions continues et positives sur $I = [\alpha, \beta]$. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_{\alpha}^{t} h(s)u(s)ds,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_{\alpha}^{t} h(s)f(s)exp(\int_{s}^{t} h(\sigma)g(\sigma)d\sigma)ds, t \in I.$$

• *En 1971,* **Gyori, I** *a proposé une version alternative du Théorème 2.1.6.*

Théorème 2.1.7 *[10] Soient u et β deux fonctions continues et positives sur $I = [t_0, \infty)$, et soient f, g et α des fonctions différentiables avec f positive, g positive et croissante et α positive et décroissante. Supposons que*

$$u(t) \leq f(t) + \alpha(t) \int_{t_0}^{t} \beta(s)g(u(s))ds.$$

Si

$$f'(t) \left\{\frac{1}{g(\eta(t))} - 1\right\} \leq 0, \quad sur I,$$

pour toute fonction continue et positive $\eta(t)$, alors

$$u(t) \leq G^{-1} \left\{G(f(t_0)) + \int_{t_0}^{t} [\alpha(s)\beta(s) + f'(s)]ds\right\},$$

où G est solution de l'équation intégrale suivante :

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{g(s)} ds, \quad t > t_0 > 0,$$

G^{-1} est la fonction inverse de G.

$$\left\{ G(f(t_0)) + \int_{t_0}^{t} [\alpha(s)\beta(s) + f'(s)] ds \right\} \in DomG^{-1}.$$

2.2 Généralisation de type Gronwall

Théorème 2.2.1 *[16] Soient u, a, b, f et h des fonctions continues positives définies dans $\mathbb{R}_+$ et $p > 1$ une constante.*
(a_1) Si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t [f(s)u^p(s) + h(s)u(s)] ds, \tag{2.12}$$

alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$u(t) \leq \left\{ a(t) + b(t) \int_0^t \left[f(s)a(s) + h(s) \left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p} \right) \right] \times e^{\int_s^t b(\tau)\left(f(\tau) + \frac{h(\tau)}{p}\right) d\tau} ds \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{2.13}$$

(a_2) Soient $k(t,s)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial t} k(t,s)$ des fonctions continues positives à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour tout $0 \leq s \leq t < \infty$. Si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t k(t,s)[f(s)u^p(s) + h(s)u(s)] ds, \tag{2.14}$$

alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$u(t) \leq \left\{ a(t) + b(t) \int_0^t B(s)\, exp\left(\int_s^t A(\tau) d\tau \right) ds \right\}^{\frac{1}{p}},$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$A(t) = k(t,t)b(t) \left(f(t) + \frac{h(t)}{p} \right) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t,s) b(s) \left(f(s) + \frac{h(s)}{p} \right) ds,$$

$$B(t) = k(t,t)(f(t)a(t) + h(t)) \left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p} \right) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t,s) \left[f(s)a(s) + h(s) \left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p} \right) \right] ds,$$

Preuve : *Nous démontrons au préalable l'inégalité célèbre suivante :*

$$\forall\, a, b > 0, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{2.15}$$

avec : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, que nous utiliserons par la suite.

Nous avons : la fonction $x \mapsto exp(x)$ est convexe. C'est-à dire, pour tout $x,\ y \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in [0,1]$,

$$exp(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\, exp(x) + (1-\alpha)\, exp(y),$$

en choisissant, $\alpha = \frac{1}{p}$, $x = log\ a^p$ et $y = log\ b^q$, nous trouvons exactement le résultat 2.15.

Remarquons que l'inégalité 2.15 est équivalente à :

$$\forall,\ a,\ b > 0, \quad a^{\frac{1}{p}} \times b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{2.16}$$

Nous allons maintenant démontrer de Théorème 2.2.1.
(a_1) Nous considérons la fonction définie par :

$$z(t) = \int_0^t [f(s)u^p(s) + h(s)u(s)]ds.$$

Alors $z(0) = 0$ *et l'inégalité 2.12 implique :*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)z(t),$$

ainsi,

$$u(t) \leq [a(t) + b(t)z(t)]^{\frac{1}{p}} \times (1)^{1/\frac{p}{p-1}}.$$

L'inégalité 2.16 résulte que

$$u(t) \leq \frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p} + \frac{b(t)}{p}z(t).$$

D'où

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(t)u^p(t) + h(t)u(t) \\ &\leq f(t)\{a(t) + b(t)z(t)\} + h(t)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p} + \frac{b(t)}{p}z(t)\right) \\ &\leq b(t)\left(f(t) + \frac{h(t)}{p}\right)z(t) + \left[f(t)a(t) + h(t)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p}\right)\right]. \end{aligned}$$

Le Lemme 1.3.2 résulte que

$$z(t) \leq \int_0^t \left[f(s)a(s) + h(s)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p}\right)\right] \times exp\left(\int_0^t b(\tau)\left(p(\tau) + \frac{h(\tau)}{p}\right)d\tau\right)ds.$$

Dès lors,

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)z(t),$$

nous obtenons l'inégalité souhaitée.

(a_2) *Nous considérons la fonction définie par*

$$z(t) = \int_0^t k(t,s)[f(s)u^p(s) + h(s)u(s)]ds,$$

alors $z(0) = 0$ *et*

$$
\begin{aligned}
z'(t) &= k(t,t)[f(t)u^p(t) + h(t)u(t)] + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t,s)[f(s)u^p(s) + h(s)u(s)]ds \\
&\leq k(t,t)\left[f(t)\left\{a(t) + b(t)z(t)\right\} + h(t)\left\{\frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p} + \frac{b(t)}{p}z(t)\right\}\right] \\
&+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t,s)\left[f(s)\left\{a(s) + b(s)z(s)\right\} + h(s)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p} + \frac{b(s)}{p}z(s)\right)\right] ds \\
&\leq \left[k(t,t)b(t)\left(f(t) + \frac{h(t)}{p}\right) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t,s)b(s)\left(f(s) + \frac{h(s)}{p}\right) ds\right] z(t) \\
&+ k(t,t)\left(f(t)a(t) + h(t)\left[\frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p}\right]\right) \\
&+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t,s)\left\{f(s)a(s) + h(s)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p}\right)\right\} ds \\
&= A(t)z(t) + B(t).
\end{aligned}
$$

En appliquant le Lemme 1.3.2, nous obtenons :

$$z(t) \leq \int_0^t B(s)\, exp\left(\int_s^t A(\tau)d\tau\right) ds,$$

ainsi,

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)z(t).$$

Le résultat est clair.

Exemple 2.2.1 *Nous allons appliquer le Théorème 2.2.1 (partie 1) pour obtenir une borne explicite sur la solution d'une certaine equation différentielle.*

$$u^{p-1}(t)u'(t) + F(t, u(t)) = r(t), \quad u(0) = u_0 \tag{2.17}$$

où $p > 1$ *est un nombre réel fixe,* u_0 *est une constante réelle, et* $u, r : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$*,*
$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont des fonctions continues. Il est facile de vérifier que le problème 2.17 est équivalent à l'équation intégrale*

$$\frac{u^p(t)}{p} - \frac{u_0^p}{p} + \int_0^t F(s, u(s))ds = \int_0^t r(s)ds. \tag{2.18}$$

On suppose que F satisfait la condition

$$|F(t,u)| \leq h(t)|u|,$$

où $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est une fonction continue. Il s'ensuit de 2.18 que*

$$|u(t)|^p \leq \bar{a}(t) + p\int_0^t h(s)|u(s)|ds,$$

avec $\bar{a}(t) = |u_0|^p + p\displaystyle\int_0^t |r(s)|ds$*, en appliquant le Théorème 2.2.1 qui tient avec* $f(t) = 0$ *pour tout* $t \geq 0$*, nous obtenons une limite de la solution de 2.17 qui est :*

$$|u(t)| \leq \left[\bar{a}(t) + p\int_0^t h(s)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{\bar{a}(s)}{p}\right) exp\left(\int_s^t h(\tau)d\tau\right) ds\right]^{\frac{1}{p}}.$$

CHAPITRE

3

INÉGALITÉS INTÉGRALES FRACTIONNAIRES EN DIMENSION UNE

Dans ce chapitre, nous offrons un aperçu des extensions des inégalités intégrales de type ***Gronwall-Bellman*** *et* ***Bihari*** *dans le contexte du calcul fractionnaire, développées par* ***Nisar, Kottakkaran Sooppy, Ye Haiping, Jianming Gao, Zheng Bin****, et d'autres.*

Ensuite, nous nous intéressons aux généralisations et extensions des résultats obtenus par ***Nisar, Kottakkaran Sooppy*** *et leurs collaborateurs. Nous allons énoncer et prouver quelques inégalités intégrales fractionnaires en dimension une, de type* ***Gronwall-Bellman*** *et* ***Bihari****.*

Enfin, la dernière section de ce chapitre est dédiée à l'illustration de ces résultats principaux par la présentation de quelques exemples. Ces exemples visent à étudier et explorer certaines propriétés des solutions des équations différentielles fractionnaires.

3.1 Extension des inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman et de type Bihari au calcul fractionnaire

Nous allons énoncer les résultats élaborées par ***Nisar, Kottakkaran Sooppy****,* ***Ye, Haiping, Jianming Gao*** *et* ***Zheng, Bin,*** *sans démonstrations. Pour plus de détails, la lecteur peut se référer aux travaux ([14], [20], [21]).*

Ye, Haiping, Jianming Gao *et* ***al*** *ont présenté une nouvelle inégalité de type* ***Gronwal-Bellman*** *pour l'intégrale fractionnaire de* ***Rieman-Liouville*** *dans le théorème suivant :*

Théorème 3.1.1 *[20] Supposons que u, a sont des fonctions positives et localement intégrables sur $[0, T)$ (avec $T \leq +\infty$) et $g(t)$ une fonction positive, croissante et continue sur $[0, T)$ avec $g(t) \leq M$ (M est une constante). Si l'inégalité*

$$u(t) \leq a(t) + g(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s) ds, \tag{3.1}$$

est satisfaite, où β est une constante telle que $\beta > 0$. Alors

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(g(t)\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} (t-s)^{n\beta-1} a(s) \right] ds, \quad 0 \leq t < T.$$

Zheng, Bin, Feng, Q.H *ont étendu une inégalité intégrale de type* ***Bihari*** *au calcul fractionnaire pour l'intégrale de* ***Rieman-Liouville****.*

Théorème 3.1.2 *[21] Soient u, a, b, g des fonctions positives continue telles que a et b sont des fonctions croissantes et $\alpha > 0$ est constante. Soit ω une fonction continue, croissante et positive, vérifiant $\omega(r) > 0$ pour r > 0. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq a(t) + \frac{b(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) \omega(u(s)) ds, \quad t \geq 0, \tag{3.2}$$

est satisfaite pour tout $t \geq 0$, alors

$$u(t) \leq G^{-1}\left[G(a(t)) + \frac{b(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau)d\tau\right], \quad t \geq 0, \tag{3.3}$$

où G est solution de l'équation intégrale suivante

$$G(v) = \int_0^v \left(\frac{1}{\omega(r)}\right) dr, \quad G(v) < \infty.$$

***Nisar, Kottakkaran Sooppy** et **al** ont proposé des inégalités intégrales de type **Gronwall**, pour l'intégrale k-fractionnaire de **Rieman-Liouville** et l'intégrale k-fractionnaire de **Hadamard** comme citées dans les théorèmes suivants :*

***Théorème 3.1.3** [14] Soient u, h des fonctions positives, localement intégrable sur $[0, X)$ avec $X \leq +\infty$. Soit ϕ une fonction positive, continue et croissante sur $[0, X)$, vérifiant $\phi(x) \leq M$. Si l'inégalité*

$$u(x) \leq h(x) + k\phi(x)\int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} u(\rho)d\rho, \quad (x \in [0, X)), \tag{3.4}$$

est satisfaite, où $k, \lambda, M \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$u(x) \leq h(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{k\phi(x)\Gamma_k(\lambda)\}^n}{\Gamma_k(n\lambda)} \int_0^x (x-\rho)^{n\frac{\lambda}{k}-1} h(\rho)d\rho, \quad (x \in [0, X)). \tag{3.5}$$

***Théorème 3.1.4** [14] Soit u, h des fonctions positives, localement intégrable sur $[1, X)$ avec $X \leq +\infty$. Soit ϕ une fonction positive, continue et croissante sur $[0, X)$, vérifiant $\phi(x) \leq M$ pour tout $x \in [1, X)$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$. Si l'inégalité*

$$u(x) \leq h(x) + k\phi(x)\int_1^x \left(log\frac{x}{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{k}-1} u(\rho)\frac{d\rho}{\rho}, \quad (x \in [1, X)). \tag{3.6}$$

est satisfaite, où $k, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$u(x) \leq h(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{k\phi(x)\Gamma_k(\lambda)\}^n}{\Gamma_k(n\lambda)} \int_1^x \left(log\frac{x}{\rho}\right)^{n\frac{\lambda}{k}-1} h(\rho)\frac{d\rho}{\rho}, \quad (x \in [1, X)). \tag{3.7}$$

3.2 Récentes généralisations

*Cette partie est didiée principalement aux généralisations des résultats obtenus par **Nisar, Kottakkaran Sooppy** et **al**. Cette partie est extraite du travail [4].*

*Nous allons énoncer et prouver quelques récentes inégalités intégrales fractionnaires en dimension une de type de **Gronwall-Bellman** et de type **Bihari** [4].*

Théorème 3.2.1 *Supposons que $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, h et u sont des fonctions positives et localement intégrables définie sur $[0, X)$ avec $X \leq +\infty$, ϕ une fonction continue, positive et croissante sur $[0, X)$, vérifiant $\phi(x) \leq M$ avec $M \in \mathbb{R}_+^*$. Si l'inégalité*

$$u^p(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} u^q(\rho) d\rho, \quad (x \in [0, X)), \tag{3.8}$$

est satisfaite, où $p \neq 0$, $p \geq q \geq 0$. Alors

$$u(x) \leq \left\{ \tilde{h}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{k\tilde{\phi}(x)\Gamma_k(\lambda)\}^n}{\Gamma_k(n\lambda)} \int_0^x (x-\rho)^{n\frac{\lambda}{k}-1} \tilde{h}(\rho) d\rho \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (x \in [0, X)), \tag{3.9}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x) &= h(x) + \frac{k^2}{\lambda} \frac{p-q}{p} \varepsilon^{\frac{q}{p}} x^{\frac{\lambda}{k}} \phi(x), \\ \tilde{\phi}(x) &= \frac{q}{p} \varepsilon^{\frac{q-p}{p}} \phi(x), \end{aligned} \tag{3.10}$$

avec $\varepsilon > 0$ est une constante.

Preuve : *Désignons la fonction z(x) par :*

$$z(x) = h(x) + k\phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} u^q(\rho) d\rho,$$

alors, nous avons

$$u(x) \leq z^{\frac{1}{p}}(x), \quad (x \in [0, X)) \tag{3.11}$$

il s'ensuit que

$$z(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} z^{\frac{q}{p}}(\rho) d\rho, \quad (x \in [0, X)), \tag{3.12}$$

nous utilisons le lemme 1.3.1 pour tout $\varepsilon > 0$, *nous obtenons facilement :*

$$z(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} \left(\frac{q}{p} \varepsilon^{\frac{q-p}{p}} z(\rho) + \frac{p-q}{p} \varepsilon^{\frac{q}{p}} \right) d\rho, \quad (x \in [0, X)). \tag{3.13}$$

La précédente inégalité 3.13 peut être réécrite de la manière suivante :

$$z(x) \leq \tilde{h}(x) + k\tilde{\phi}(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} z(\rho) d\rho, \tag{3.14}$$

où $\tilde{h}$, $\tilde{\phi}$ *sont données par 3.10.*
Appliquons le Théoréme 3.1.3 à cette derniére, nous déduisons l'inégalité souhaitée 3.9.

Remarque 3.2.1 *Si nous prenons* $p = q = 1$, *le Théoréme 3.2.1 sera semblable au Théoréme 3.1.3*

Théorème 3.2.2 *Soient* k, λ, p, q *définis comme dans le Théorème 3.2.1 . De plus, soient* h *et* u *des fonctions positives et localement intégrables définies sur* $[1, X)$ *avec* $X \leq +\infty$. *Soit* $\phi(x)$ *une fonction positive, croissante et continue sur* $[0, X)$ *qui est bornée sur* $[1, X)$, *c'est-à-dire,* $\phi(x) \leq M$ *pour tout* $x \in [1, X)$ *et pour un certain* $M \in \mathbb{R}_+^*$. *Supposons que les fonctions* h, u *et* ϕ *satisfaissent l'inégalité suivante :*

$$u^p(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_1^x \left(log \frac{x}{\rho} \right)^{\frac{\lambda}{k}-1} u^q(\rho) \frac{d\rho}{\rho}, \quad (x \in [1, X)), \tag{3.15}$$

est satisfaite, où $p \neq 0$, $p \geq q \geq 0$. *Alors*

$$u(x) \leq \left\{ \tilde{h}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k \left\{ \tilde{\phi}(x) \Gamma_k(\lambda) \right\}^n}{\Gamma_k(n\lambda)} \int_1^x \left(log \frac{x}{\rho} \right)^{n\frac{\lambda}{k}-1} \tilde{h}(\rho) \frac{d\rho}{\rho} \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (x \in [1, X)), \tag{3.16}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x) &= h(x) + \frac{p-q}{p} \varepsilon^{\frac{q}{p}} k\phi(x) \int_1^x \left(log \frac{x}{\rho} \right)^{\frac{\lambda}{k}-1} \frac{d\rho}{\rho}. \\ \hat{\phi}(x) &= \frac{q}{p} \varepsilon^{\frac{q-p}{p}} \phi(x). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Preuve : *Définissons la fonction z(x) par*

$$u^p(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_1^x \left(log\frac{x}{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{k}-1} u^q(\rho)\frac{d\rho}{\rho}, \quad (x \in [1, X)).$$

Alors, nous avons

$$u(x) \leq z^{\frac{1}{p}}(x), \quad (x \in [1, X)),$$

il en résulte que

$$z(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_1^x \left(log\frac{x}{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{k}-1} z^{\frac{q}{p}}(\rho)\frac{d\rho}{\rho}, \quad (x \in [1, X)),$$

nous utilisons lemme 1.3.1, pour tout $\varepsilon > 0$, *nous pouvons aisément parvenir à*

$$z(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_1^x \left(log\frac{x}{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{k}-1} \left(\frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}} z(\rho) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right)\frac{d\rho}{\rho}, \quad (x \in [1, X)).$$

Cette dernière, peut etre réecrite de la manière suivante

$$z(x) \leq \tilde{h}(x) + k\tilde{\phi}(x) \int_1^x \left(log\frac{x}{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{k}-1} z(\rho)\frac{d\rho}{\rho},$$

où $\tilde{h}$ *et* $\tilde{\phi}$ *donnée par 3.17.*
En appliquant le Théorème 3.1.4 à l'inégalité ci-dessus, nous pouvons obtenir l'inégalité souhaitée 3.16.

Théorème 3.2.3 *Soit* u, ϕ, $h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *telles que* h, ϕ *sont des fonctions croissantes. Soit* $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction différentiable croissante sur* $]0, +\infty[$ *telle que sa dérivée première est continue et décroissante sur* $]0, +\infty[$. *Si l'inégalité*

$$u^p(x) \leq h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} g(u^q(\rho))d\rho, \quad (x \in [0, X)), \tag{3.18}$$

est satisfaite, où $p \geq q \geq 0$ *et* $p \neq 0$, $0 < \alpha < 1$. *Alors*

$$u(x) \leq \left\{h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}\hat{h}(\rho) \times exp\left(-\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} \hat{\phi}\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right) ds\right) d\rho\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{3.19}$$

où

$$\begin{aligned} \hat{h}(x) &= g\left(\frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}h(x) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right), \\ \hat{\phi}(x) &= \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}\phi(x)g'\left(\frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}h(x) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Preuve : *Définissons la fonction $v(x)$ par*

$$v(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} g(u^q(\rho))d\rho, \tag{3.21}$$

ainsi, nous avons

$$u(x) \leq (h(x) + \phi(x)v(x))^{\frac{1}{p}}, \quad (x \in [0, X)). \tag{3.22}$$

Appliquons le Lemme 1.3.1 à cette dernière, nous obtenons pour tout $\varepsilon > 0$

$$u^q(x) \leq \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}(h(x) + \phi(x)v(x)) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}, \tag{3.23}$$

appliquons le Lemme 1.2.1 à 3.21 et en utilisant 3.23, nous avons

$$D_x^\alpha v(x) \leq g\left((h(x) + \phi(x)v(x))^{\frac{q}{p}}\right), \tag{3.24}$$

et

$$D_x^\alpha v(x) \leq g\left(\frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}(h(x) + \phi(x)v(x)) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right).$$

Par une simple application du théorème de la valeur moyenne à la fonction g, nous aurons pour tout $x_1 \geq y_1 > 0$, il existe $c \in]y_1, x_1[$ tel que

$$g(x_1) - g(y_1) = g'(c)(x_1 - y_1) \leq g'(y_1)(x_1 - y_1),$$

ensuite

$$D_x^\alpha v(x) \leq g\left(\frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}h(x) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right) + \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}g'\left(\frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}h(x) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right)\phi(x)v(x),$$

la derniére inégalité peut être reformulée

$$D_x^\alpha v(x) \leq \hat{h}(x) + \hat{\phi}(x)v(x), \tag{3.25}$$

où $\hat{h}$ et $\hat{\phi}$ sont données par 3.20.

Faisons appel au Lemme 1.3.3, l'inégalité ci-dessus donne

$$v(x) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} \hat{h}(\rho) \times exp \left\{ -\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} \hat{\phi}\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \right) ds \right\} d\rho. \quad (3.26)$$

Le résultat souhaité découle des deux inégalités 3.26 et 3.22.

Corollaire 3.2.1 *Supposons que toutes les conditions du Théorème 3.2.3 sont vérifiées. Si l'inégalité*

$$u^p(x) \leq h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} arctan\ (u^q(\rho)) d\rho, \quad (x \in [0, X)),$$

est satisfaite, où $p \geq q \geq 0$ et $p \neq 0$. Alors

$$u(x) \leq \left\{ h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} \hat{h}(\rho) \times exp \left(-\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} \hat{\phi}\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \right) ds \right) d\rho \right\}^{\frac{1}{p}},$$

où

$$\begin{aligned} \hat{h}(x) &= arctan \left(\frac{q}{p} \varepsilon^{\frac{q-p}{p}} h(x) + \frac{p-q}{p} \varepsilon^{\frac{q}{p}} \right), \\ \hat{\phi}(x) &= \frac{\frac{q}{p} \varepsilon^{\frac{q-p}{p}} \phi(x)}{1 + \left(\frac{q}{p} \varepsilon^{\frac{q-p}{p}} h(x) + \frac{p-q}{p} \varepsilon^{\frac{q}{p}} \right)^2}. \end{aligned}$$

Corollaire 3.2.2 *Supposons que les hypothèses du Théorème 3.2.3 sont vérifiées. Si l'inégalité*

$$u^p(x) \leq h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} log(1 + u^q(\rho)) d\rho, \quad (x \in [0, X)),$$

est satisfaite, alors

$$u(x) \leq \left\{ h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} \hat{h}(\rho) \times exp \left(-\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} \hat{\phi}\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \right) ds \right) d\rho \right\}^{\frac{1}{p}},$$

où

$$\hat{h}(x) = log\left(1+\frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}h(x)+\frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right),$$

$$\hat{\phi}(x) = \frac{\frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}\phi(x)}{1+\left(\frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}h(x)+\frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right)}.$$

Théorème 3.2.4 *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème 3.2.3 sont vérifiées. Soit $S \in C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+)$ une fonction continue satisfaisant*

$$0 \leq S(t,x_1) - S(t,y_1) \leq L(t,y_1)(x_1-y_1), \quad x_1 \geq y_1 \geq 0, \tag{3.27}$$

pour $t \in [0, X)$ et $0 < \alpha < 1$, où $L : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue. Si l'inégalité

$$u^p(x) \leq h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x)\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}S(\rho, u^q(\rho))d\rho, \tag{3.28}$$

est satisfaite, alors

$$u(x) \leq \left\{h(x)+\phi(x)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}h_1(\rho)\times exp\left\{-\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}\phi_1\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right)ds\right\}d\rho\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{3.29}$$

où

$$\begin{aligned} h_1(x) &= S\left(x, \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}h(x)+\frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right), \\ \phi_1(x) &= \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}L\left(x, \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}h(x)+\frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right)\phi(x). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Preuve : *Définissons une fonction z(x) par*

$$z(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}S(\rho, u^q(\rho))d\rho, \quad x \in [0, X), \tag{3.31}$$

alors, nous avons

$$z(0) = 0,$$

$$u(x) \leq (h(x)+\phi(x)z(x))^{\frac{1}{p}}. \tag{3.32}$$

En appliquant le Lemme 1.3.1, pour tout $\varepsilon > 0$

$$u^q(x) \leq \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}(h(x)+\phi(x)z(x)) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}, \tag{3.33}$$

par le Lemme 1.2.1 nous aurons

$$D_x^\alpha z(x) = S(x, u^q(x)). \tag{3.34}$$

En utilisant 3.27 et 3.33, nous obtenons pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} S(x,u^q(x)) &\leq S(x,(h(x)+\phi(x)z(x))^{\frac{q}{p}}) \leq S\left(x, \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}(h(x)+\phi(x)z(x)) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right) \\ &\leq \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}} L\left(x, \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}h(x) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right)\phi(x)z(x) + S\left(x, \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}h(x) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right), \end{aligned} \tag{3.35}$$

en se servant des inégalités 3.34 et 3.35, nous obtenons

$$\begin{aligned} D_x^\alpha z(x) &\leq \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}} L\left(x, \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}h(x) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right)\phi(x)z(x) + S\left(x, \frac{q}{p}\varepsilon^{\frac{q-p}{p}}h(x) + \frac{p-q}{p}\varepsilon^{\frac{q}{p}}\right) \\ &= h_1(x) + \phi_1(x)z(x), \end{aligned} \tag{3.36}$$

où $h_1(x)$ *et* $\phi_1(x)$ *sont données par 3.30.*
Faisons appel au Lemme 1.3.3, nous obtenons

$$z(x) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} h_1(\rho) \exp\left\{ -\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} \phi_1\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right) ds \right\} d\rho. \tag{3.37}$$

En combinant 3.37 et 3.32, nous obtenons 3.29.

3.3 Exemples

Cette dernière partie est consacrée à illustrer ces principaux résultats par la présentation de quelques exemples dont l'objectif principal est d'étudier et explorer certaines propriétés de solutions des équations différentielles fractionnaire.

Exemple 3.3.1 *Considérons l'équation suivante :*

$$u^p(x) = h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}(F(\rho, u(\rho))d\rho, \tag{3.38}$$

où $F \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfait la condition suivante :

$$|F(x,u)| \leq \phi(x) g\left(|u|\right), \tag{3.39}$$

et $0 < \alpha < 1$, $p \geq 1$ u, $\bar{\phi} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que h, $\bar{\phi}$ sont des fonctions croissantes et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable croissante sur $]0, +\infty[$ telle que sa dérivée première est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.

Appliquons la valeur absolue sur l'équation 3.38, nous obtenons

$$|u^p(x)| \leq |h(x)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} |F(\rho, u(\rho))| d\rho, \tag{3.40}$$

$$\leq |h(x)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} \phi(\rho) g(|u(\rho)|) d\rho,$$

comme ϕ est une fonction croissante, nous obtenons

$$|u^p(x)| \leq |h(x)| + \frac{\phi(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} g(|u(\rho)|) d\rho.$$

Appliquons le Théorème 3.2.3 (pour $q = 1$) à la derniére inégalité nous obtenons

$$|u(x)| \leq \left\{ |h(x)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} \hat{h}(\rho) \times exp\left(-\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} \hat{\phi}\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \right) ds \right) d\rho \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{3.41}$$

où

$$\begin{aligned} \hat{h}(x) &= g\Big(\frac{1}{p}\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}|h(x)| + \frac{p-1}{p}\varepsilon^{\frac{1}{p}}\Big), \\ \hat{\phi}(x) &= \frac{1}{p}\varepsilon^{\frac{1-p}{p}} g'\left(\frac{1}{p}\varepsilon^{\frac{1-p}{p}}|h(x)| + \frac{p-1}{p}\varepsilon^{\frac{1}{p}}\right). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Exemple 3.3.2 *Nous allons montrer l'unicité de la solution u de l'équation*

$$u(x) = h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} F(\rho, u(\rho)) d\rho, \tag{3.43}$$

sachant que

$$|F(x,u) - F(x,v)| \leq \phi(x)g(|u-v|), \tag{3.44}$$

avec $0 < \alpha < 1$, u, v, ϕ, $h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *et* $F \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telle que* h, ϕ *sont des fonctions croissante et soit* $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction différentiable croissante sur* $]0, +\infty[$ *telle que sa dérivée première est continue et décroissante sur* $]0, +\infty[$, *vérifiant* $g(0) = 0$.

Admettons que $u(x) et \bar{u}(x)$ *saient deux solutions de 3.43 alors, nous avons :*

$$\begin{aligned}
u(x) \qquad &= h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} F(u(\rho)) d\rho, \\
\bar{u}(x) \qquad &= h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} F(\rho, \bar{u}(\rho)) d\rho, \\
u(x) - \bar{u}(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} \left[F(\rho, u(\rho)) - F(\rho, \bar{u}(\rho)) \right] d\rho,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Ainsi

$$|u(x) - \bar{u}(x)| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} \left[F(\rho, u(\rho)) - F(\rho, \bar{u}(\rho)) \right] d\rho \right|. \tag{3.46}$$

utilisons 3.44, nous aurons :

$$|u(x) - \bar{u}(x)| \leq \frac{\phi(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} g(|u(\rho) - \bar{u}(\rho)|) d\rho. \tag{3.47}$$

En appliquant convenablement le Théorème 3.2.3 à l'inégalité 3.47 (avec $p = q = 1$ *), nous obtenons que* $|u(x) - \bar{u}(x)| \leq 0$, *ce qui implique* $u(x) = \bar{u}(x)$, *d'où l'unicité.*

CONCLUSION

*Ce travail a exploré les extensions des inégalités intégrales classiques dans le contexte du calcul fractionnaire, notamment celle de **Gronwall-Bellman** et **Bihari**.*

Ces généralisations montrent leur utilité dans l'analyse des solutions des équations différentielles fractionnaires.

Les résultats obtenus ouvrent de nouvelles perspectives de recherche, en particulier pour l'étude de la stabilité et de l'unicité des solutions. En conclusion, ce mémoire met en évidence l'importance des inégalités intégrales fractionnaires et leur potentiel pour résoudre des problèmes mathématiques complexes.

3.3 Bibliographie

[1] *Baĭnov, Dimitŭr, and Pavel S. Simeonov. "Integral inequalities and applications." (No Title) (1992).*

[2] *Bellman, Richard. Asymptotic series for the solutions of linear differential-difference equations. Rand Corporation, 1958.*

[3] *Bihari, Imre. "A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations." Acta Mathematica Hungarica 7.1 (1956) : 81-94.*

[4] *Boukerrioua, K., D. Diabi, and B. Kilani. "Some new Gronwall-bihari type inequalities and its application in the analysis for solutions to fractional differential equations." International Journal of Mathematical and Computational*

[5] *Das, Shantanu. Functional fractional calculus. Vol. 1. Berlin : Springer, 2011.*

[6] *Dhongade, U. D., and S. G. Deo. "Some generalizations of Bellman-Bihari integral inequalities." Journal of Mathematical Analysis and Applications 44.1 (1973) : 218-226.*

[7] *Gavage, S.B, calcul différentiel et équations différentielle, P[150,151], Dunod, Paris,*

[8] *Gollwitzer, H. E. "A note on a functional inequality." Proceedings of the American Mathematical Society 23.3 (1969) : 642-647.*

[9] *Gronwall, Thomas Hakon. "Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations." Annals of Mathematics (1919) : 292-296.*

[10] *Gyori, I. "A Generalization of Bellman's inequality for stieltjes integrals and a uniqueness theorem." Studia Sci. Math. Hungar 6 (1971) : 137-145.*

[11] *Jiang, Fangcui, and Fanwei Meng. "Explicit bounds on some new nonlinear integral inequalities with delay." Journal of Computational and Applied Mathematics 205.1 (2007) : 479-486.*

[12] *Kilbas, Anatoliĭ Aleksandrovich, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. Vol. 204. elsevier, 2006.*

[13] *R.D'iaz and E.Pariguan, On hypergeometric functions and K-Pochhammer symbol,Divulg.Mat.15(2) (2007), 179-192*

[14] *Nisar, Kottakkaran Sooppy, et al. "Certain Gronwall type ineqlities associated with Riemann-Liouville k-and Hadamard k-fractional derivatives and their applications." East Asian mathematical journal 34.3 (2018) : 249-263.*

[15] *Pachpatte, Baburao G. Inequalities for differential and integral equations. No. 17868. Academic press, 1998.*

[16] *Pachpatte, B. G. "On some new inequalities related to a certain inequality arising in the theory of differential equations." Journal of Mathematical Analysis and Applications 251.2 (2000) : 736-751.*

[17] *Pachpatte, B. G. "A note on certain integral inequality." Tamkang Journal of Mathematics 33.4 (2002) : 353-358.*

[18] *Pachpatte, Baburao G. Integral and finite difference inequalities and applications. Elsevier, 2006.*

[19] *Podlubny, Fractional differential equations, Academic Press, San Diego, 1999.*

[20] *Ye, Haiping, Jianming Gao, and Yongsheng Ding. "A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation." Journal of Mathematical Analysis and Applications 328.2 (2007) : 1075-1081.*

[21] *Zheng, Bin, and Qinghua Feng. "New Gronwall-Bellman type inequalities and applications in the analysis for solutions to fractional differential equations." Abstract and Applied Analysis. Vol. 2013. Hindawi, 2013.*