الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientfiique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي- سكيكدة
Ecole Normale Supérieure d'eneignement technologique, Skikda

قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

مُذكّرة تخرج لنيل شهادة أُستاذ التَّعلِيم المتوسط

المعادلات التكاملية الخطية و تطبيقاتها

من إعداد :

★ مواس انفال

★ موهوب ياسمين

تحت إشراف الأستاذ :

★ قواسمية عقبة

من طرف لجنة المناقشة :

♦ مرابط فريدة .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... رئيسا.

♦ مزياني محمد سيف الدين .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... مناقشا.

♦ قيدوشي وحيدة .... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة .... مناقشة.

السنة الجامعية : 2024/2023

دفعة جوان 2024

الفهرس

شكـر وَ تقديـر

قال رسول الله صلى الله عليه و سلم "من لم يشكر الناس لم يشكره الله " رواه الترميذي وأحمد.

الحمد لله على إحسانه والشكر له على توفيقه وامتنانه ونشهد أنّ لا إله إلا الله وحده لا شريك له تعظيماً لشأنه ونشهد أن سيدنا ونبينا محمد عبده ورسوله الداعي إلى رضوانه صلى الله عليه وعلى آله وأصحابه وأتباعه وسلم .

بعد شكر الله سبحانه وتعالى على توفيقه لنا لإتمام هذا البحث المتواضع نتقدم بجزيل الشكر إلى الوالدين العزيزين الذين أعانونا وشجعونا على الإستمرار في مسيرة العلم والنجاح ،

وإلى كل من صرنا بفضله نكتب و نقرأ....

إلى كل من علمنا علما به ينتفع و أدب به يرتفع

بداية من معلمي الإبتدائي وصولا إلى أساتذتنا الكرام في المدرسة العليا بعزابة

إلى من شرفنا بإشرافه على مذكرة بحثنا الأستاذ" قواسمية عقبة " .

وتحية طيبة إلى اللجنة التي تكرمت بمناقشة هذه المذكرة

كما لا ننسى أن نتقدم بالشكر الجزيل إلى رئيس قسم الرياضيات " الأستاذ عزوز فراق"

وفي الأخير نشكر كل من ساهم في مساعدتنا لإنجاز هذا العمل المتواضع من قريب أو من بعيد وخاصة الأستاذ الدكتور "خليلي فريد".

" اللهم اجعل هذا العمل صلاحا ، و أوسطه فلاحا ، و آخره نجاحا "

""رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي وأن أعمل صالحا ترضاه وأدخلني برحمتك في عبادك الصالحين " "

إهـدَاء

قال الله تعالى : " يرفع الله الذين آمنوا منكم والذين أوتوا العلم درجات والله بما تعملون خبير "

سورة المجادلة ـ 11 ـ

* الحمد لله الذي خلقنا ورزقنا وأكرمنا ووفقنا لما يحبه ويرضاه... إلهي لايطيب الليل إلا بشكرك ... ولا يطيب النهار إلا بطاعتك ... ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك ...ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك ... ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك .

* إلى دعوة إبراهيم الخليل ... وبشارة عيسى المسيح ... إلى سيدي وسندي ، وذخري وشفيعي ، ونور عيني .

يا حبيبي يا رسول الله .

* إلى أول من حملت لقبه ، إلى من أشعل أول شمعة في حياتي ... إلى عبق طفولتي ... إلى من بذل الجهد سخيا وصاغ من الأيام سلالم العلى لأرتقي بها في الحياة ... إلى من كلله الله بالهيبة والوقار ...إليك أبتي أهدي تخرجي .

أبي الغالي ـ عبد المالك ـ

* إلى التي أجمع لها اليوم عبارات الشكر والثناء والتقدير ، لأنها لن تفيها حقها ...إلى جزئي المضيء ... إلى من ساندتني في صلاتها بالدعاء ...إلى من سهرت الليالي من أجل راحتي ... إلى منبع الطيبة و الحنان ... إلى أجمل ابتسامة في حياتي .

أمي الحنونة .

إلى رياحين حياتي ... إليكما أمي وأبي .

* إلى القلوب التي تأبى أن تحمل في جعبتها سوى كل جميل ... إليكن أختاي

* إلى صاحبة القلب الشغوف ...القلب الحالم ... إلى ضعفي وقوتي .

*** إلى أختي لينة .**

* إلى القلب الباسم ... وضحكة المنزل ... إلى شعاع الأمل ، إلى آخر العنقود .

*** إلى أختي غفران**

* إلى عوضي ...هدية الله إلي ... إليك ياحبة القلب... ياصديقتي بكل حرف .

*** صديقتي ياسمين .**

* إلى صديقاتي ... من بقي منهم معي ...ومن فرقتنا الحياة ... إليكم ياصفاء أيامي .

* إلى أستاذي ومعلمي للقرآن الأمين ميسوم و أستاذتي في المسجد هدى .

* إلى كل أساتذتي ...وكل من ساهم في وصولي إلى هنا ...إلى كل من لم تحملهم أوراقي وحملهم قلبي ... ولم يذكرهم قلمي وذكرتهم ذاكرتي ...وإلى كل القلوب التي تشبعت بحب الخير .

أهديكم تخرجي .

أنفال

إهـدَاء

قال الله تعالى : " يرفع الله الذين آمنوا منكم والذين أوتوا العلم درجات والله بما تعملون خبير "

سورة المجادلة ـ 11 ـ

الحمد لله رب العالمين حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه يليق بجلال وجهه سبحانه وعظيم سلطانه

* إلى جنتي ... ملهمتي ... إلى بطلة تقاوم تعب الحياة لأجلي ، إلى من علمتني حب الحياة والتي أزالت عن طريقي الأشواك ، ومن تحملت كل لحظة ألم مررت بها وساندتني واستيقظت فجرا للدعاء لي ، شكرا لك على الحب اللامحدود والدعم الذي لا ينضب لولاك لما كنت اليوم في هذا المكان .

لأمي الغالية أهدي لك ثمرة غرسك .

* إلى من كلله الله بالهيبة والوقار إلى من زين إسمي بأجمل الألقاب ، ودعمني بلا حدود وأعطاني بلا مقابل ، إلى من علمني أن الدنيا كفاح وسلاحها العلم والمعرفة داعمي في مسيرتي وسندي وقوتي وملاذي فخري واعتزازي .

كيف استطعت أن تكون أبا مثاليا بحق وتؤثر في كل هذا التأثير

إليك أبي أهدي لك ثمرة غرسك .

*إلى من رعتني بعطفها وأعانتني بالدعوات والبركات

إلى الطيبة الحنون جدتي .

* إلى جدتي وجداي الذين فارقونا بأجسادهم ولكن روحهم لا زالت ترفرف في سماء حياتي ، رحمهم الله .

* إلى من تسري دماؤهم في عروقي ... إلى من قال فيهم رب الكون
"سنشد عضدك بأخيك " أخواتي الحبيبات
إلى القلب الطاهر الرقيق ... إلى صاحبة الابتسامة الجميلة ... أسماء
إلى زهرتاي الصغيرتان مهما كبرتا ... آية و أماني
إلى اللؤلؤة الجميلة... إسراء
إلى آخر العنقود أخي الغالي ... حسين .

إلى من عاهدتهم بجانبي إلى من ساندوني ودعموني بكل حب إلى ألطف ناصحون لي أخوالي
عبد الغني ، نذير ، عبد الناصر ، عبد العزيز .

إلى أوفى مستشارة وألطف ناصحة
خالتي سهام .

إلى كل العائلة الكريمة وكل روح شاركتني بدعائها .

إلى من رافقتني طوال هذا المشوار ، هي نهاية درب وفرحة عمر كانت معك إليك صديقتي ... حبة القلب ...
أنفال

إلى نعمة الله وصديقات كالبلسم إلى شريكات دربي .

إلى كل من علمني حرف إلى كل أساتذتي

إلى جميع من أمدوني بالقوة والتوجيه وإلى من آمن بي ودعمني في الأوقات الصعبة لأصل إلى ما أنا عليه الآن

إلى كل تلك الأرواح التي رماها القدر في طريقي وإلى كل من سيقرأ هذه الحروف علّه يجد شيئا منه .

أهديكم هذا العمل راجية من المولى عزوجل القبول والنجاح .

ياسمين

مقدمـــــة

تظهر المعادلات التكاملية طبيعيا في العديد من مجالات الميكانيك والفيزياء الرياضية . يمكن أيضا أن تنشأ كصيغ تمثيلية لحلول معادلات تفاضلية . فعلا ، إن المعادلة التفاضلية يمكن أن تستبدل بمعادلة تكاملية والتي ندمج معها شروطها الحدية . كما أن كل حل للمعادلة التكاملية يحقق تلقائياً هذه الشروط الحدية .
المعادلات التكاملية تشكل أيضا أحد أكثر الأدوات واسعة الإستعمال في العديد من فروع التحليل الدالي والعمليات العشوائية .
يمكن أيضا اعتبار المعادلات التكاملية بحيث تكون الدالة لا تتعلق بمتغير واحد فقط بل بالعديد من المتغيرات . مثلا ، في المعادلة

$$u(x) = f(x) + \int_{\Omega} k(x,t)u(t)dt \quad , x \in \Omega$$

بحيث x و t تمثل أشعة ذات بعد n و Ω منطقة من فضاء بعده n .
بالمثل ، يمكن أيضا اعتبار نظام من المعادلات التكاملية ذات العديد من الدوال المجهولة .
وقد تضمنت مذكرتنا أربع فصول

الفصل الأول.

قد تم فيه التذكير ببعض المفاهيم الأساسية التي ترتبط بالفصول الأخرى.

الفصل الثاني .

حيث تطرقنا في هذا الفصل إلى دراسة طرق حل المعادلات التكاملية لفريدهولم وفولتيرا تحليليا ومن بين الطرق المدروسة **طريقة التقريبات المتتابعة ، طريقة البدائل المتعاقبة ...**

الفصل الثالث.

سلطنا الضوء في هذا الفصل على دراسة الطرق التحليلية للمعادلات التكاملية ـ التفاضلية لفولتيرا وفريدهولم ، كما درسنا المعادلات الشاذة التي لها تطبيقات هائلة في المسائل التطبيقية

فقمنا بالتركيز في البحث عن **معادلة آبل** ، **معادلات آبل المعممة** وشرحها .

الفصل الرابع .

أدرجنا في هذا الفصل بعض التطبيقات للمعادلات التكاملية الخطية على المعادلات التفاضلية العادية .

✍الفصل الأول

مفاهيم أساسية

1.1 مفهوم المعادلات التكاملية

تعريف 1.1.1: المعادلة التكاملية هي المعادلة التي تظهر فيها الدالة المجهولة $u(x)$ والتي يتم تحديدها تحت علامة التكامل ، الشكل النموذجي للمعادلة التكاملية هو

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt. \tag{1.1}$$

حيث

- $k(x,t)$ هي نواة المعادلة التكاملية .
- $\alpha(x), \beta(x)$ هي حدود التكامل وتكون ثوابت و متغيرات معاً .
- λ ثابت .

تكون $k(x,t), f(x), \alpha(x), \beta(x)$ دوال معلومة (أي تعطى في منطوق السؤال).

مثال 1.1.1

لنعتبر مسألة القيم الإبتدائية التالية

$$u'(x) = 2xu(x),$$

بحيث

$$x \geq 0,$$

المزودة بالشرط الإبتدائي

$$u(0) = 1,$$

يمكن بسهولة حل المعادلة من خلال فصل المتحولات و استخدام الشرط الإبتدائي إلا أننا و بالمكاملة المباشرة لطرفي المعادلة بعد تبديل الرمز x بالرمز t على المجال $[0,x]$ نجد أن

$$\int_0^x u'(t)dt = \int_0^x 2t.u(t)dt,$$

وبتعويض الشرط الإبتدائي تصبح المعادلة السابقة بالشكل

$$u(x) = 1 + \int_0^x 2t.u(t)dt,$$

وهي معادلة مشابهة للمعادلة (1.2) حيث $\alpha(x) = 0$ ، $\beta(x) = x$ ، $f(x) = 1$ ، $k(x,t) = 2t$.

1.1.1 قاعدة ليبنيتز

لتكن $f(x,t)$ دالة مستمرة و $\frac{\partial f}{\partial x}$ مستمرة في منطقة تشمل المستطيل

$$a \leq x \leq b$$

$$t_0 \leq t \leq t_1$$

و ليكن

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)\, dt.$$

إذن $F'(x)$ موجودة و معرفة بـ

$$F'(x) = h'(x)\, f(x, h(x)) - g'(x) f(x, g(x)) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt.$$

2.1.1 تخفيض التكاملات

يمكننا إثبات أن التكامل المضاعف يمكن تخفيضه إلى تكامل بسيط، و ذلك باستعمال العلاقة التالية

$$\int_0^x \int_0^{x_1} F(t)\, dt\, dx_1 = \int_0^x (x-t) F(t)\, dt.$$

سنقوم بإثبات هذه العلاقة بطريقتين

الطريقة الأولى.

لنفرض أن

$$G(x) = \int_0^x (x-t)\, F(t)\, dt.$$

ومنه $G(0) = 0$، بالاشتقاق طرف إلى طرف نحصل على

$$G'(x) = \int_0^x F(t)\, dt.$$

ثم نكامل الطرفين نجد

$$G(x)=\int_0^x\int_0^{x_1}F(t)\,dt\,dx_1$$

الطريقة الثانية

بالنسبة للطريقة الثانية سنستعمل مصطلح التكامل بالتجزئة التالي، نذكر

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

لتكن $u(x_1)=\int_0^{x_1}F(t)\,dt$ ، إذن لدينا

$$\begin{aligned}\int_0^x\int_0^{x_1}F(t)\,dt\,dx_1&=\left[x_1\int_0^{x_1}F(t)\,dt\right]_0^x-\int_0^x x_1F(x_1)\,dx_1\\&=x\int_0^xF(t)\,dt-\int_0^x t\,F(t)\,dt\\&=\int_0^x(x-t)\,F(t)\,dt\end{aligned}$$

العلاقة العامة و التي تحول التكاملات المضاعفة إلى تكاملات بسيطة معطاة في النظرية التالية

مبرهنة 1.1.1: لدينا

$$\int_0^x\int_0^{x_1}\dots\int_0^{x_{n-1}}F(x_n)\,dx_ndx_{n-1}\dots dx_1=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}F(t)\,dt$$

خاصية 1.1.1:

$$\int_0^x\int_0^x\dots\int_0^x(x-t)\,F(t)\,dt\,dt\dots dt=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^nF(t)\,dt$$

التكامل على اليسار n مرة

3.1.1 سلسلة تايلور

في هذه الفقرة سنقدم فكرة موجزة عن سلسلة تايلور ، مع العلم أنها موجودة للدوال التحليلية فقط .

لنفرض أن $f(x)$ دالة قابلة للإشتقاق مالا نهاية من المرات ، في المجال $[b,c]$ و a تنتمي إليه.
سلسلة تايلور لـ $f(x)$ عند النقطة $x=a$ ، تعطى كالتالي

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 +\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

تعطى متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ عند $x=0$ بالعلاقة

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3 +\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

في مايلي سنناقش مثالاً حول اشتقاق متسلسلة تايلور عند $x=0$.

مثال 2.1.1

أوجد متسلسلة تايلور للدالة

$$f(x)=\cos x.$$

عند $x=0$.

الحل

على النحو التالي

$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$f(x)=\cos x$	$f(0)=1,$
$f'(x)=-\sin x$	$f'(0)=0,$
$f''(x)=-\cos x$	$f''(0)=-1,$
$f'''(x)=\sin x$	$f'''(0)=0,$
$f^{(4)}(x)=\cos x$	$f^{(4)}(0)=1,$
$\vdots$	$\vdots$

هذا يعطينا متسلسلة تايلور لـ $\cos x$ بواسطة

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

ومنه

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

2.1 تصنيف المعادلات التكاملية

تنقسم المعادلات التكاملية الأكثر إستخداما بشكل أساسي ضمن فئتين أساسيتين هما **معادلات فريدهولم التكاملية(fredholm) و معادلات فولتيرا(volterra) التكاملية ،** وبطبيعة الحال علينا أن نقسمها على أنها خطية ، أو غير خطية . وأيضا متجانسة، أو غير متجانسة . وفي بعض المسائل نواجه معادلات شاذة أيضا.

1.2.1 أنواع المعادلات التكاملية

فيما يلي نميز أربع أنواع رئيسية من المعادلات التكاملية

- معادلات فولتيرا التكاملية
- معادلات فريدهولم التكاملية
- المعادلات التكاملية-التفاضلية
- المعادلات التكاملية الشاذة

سنقوم بتوضيح هذه المعادلات باستخدام التعريفات و الخصائص الأساسية لكل نوع .

1) معادلات فولتيرا التكاملية

الشكل الأكثر شيوعاً لمعادلات فولتيرا التكاملية هو

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt, \qquad (2.1)$$

حيث حدود التكامل : a ثابت ، x متغير والدالة المجهولة $u(x)$ تظهر خطياً .
نميز نوعان من معادلات فولتيرا

1- إذا كانت $\phi(x)=0$ عندئذ تأخذ المعادلة (2.1) الشكل التالي

$$f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt=0, \qquad (3.1)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول .

2- أما إذا كانت $\phi(x)=1$ فان المعادلة (2.1) تصبح

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt. \qquad (4.1)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني .

مثال 1.2.1

1- المعادلة

$$xe^{-x}=\int_0^x e^{t-x}u(t)dt,$$

هي معادلة فولتيرا من النوع الأول .

2- المعادلة

$$u(x)=x+\int_0^x (x-t)u(t)dt.$$

هي معادلة فولتيرا من النوع الثاني .

2) معادلات فريدهولم التكاملية

الصيغة الرئيسية لمعادلة فريدهولم التكاملية هي

$$\phi(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad (5.1)$$

حيث حدود التكامل a,b ثابتة .
نميز نوعان من معادلة فريدهولم

1- إذا كانت الدالة $\phi(x)=0$ فإن (5.1) تصبح

$$f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt=0, \tag{6.1}$$

والتي تسمى بمعادلة فريدهولم التكاملية من النوع الأول .

2- إذا كانت $\phi(x)=1$ فإن المعادلة (5.1) تصبح

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt. \tag{7.1}$$

وتسمى هذه المعادلة معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني .

ملاحظة (1)

الفرق بين معادلة فريدهولم وفولتيرا التكامليتين ،هوحدود التكامل وخاصة الحد الأعلى حيث يكون ثابت في معادلة فريدهولم .

3)المعادلات التكاملية الشاذة

يتم تعريف المعادلة التكاملية الشاذة على أنها تكامل ذو حدود لانهائية ،أو عندما تصبح نواة التكامل غير منتهية عند نقطة معينة أو أكثر من نقاط مجال التكامل .

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt. \tag{8.1}$$

تنقسم المعادلات التكاملية الشاذة بدورها إلى ثلاثة أنواع

- **المعادلة التكاملية ضعيفة الشذوذ**

  كل معادلة نواتها تكتب على الشكل التالي

$$k(x,t)=\frac{H(x,t)}{|x-t|^{\alpha}},$$

أو

$$k(x,t)=H(x,t)\ln|x-t|$$

حيث $H(x,t)$ محدودة (قابلة للمفاضلة عدة مرات) على $a\leq x\leq b$ ، $a\leq t\leq b$ مع $H(x,t)\neq 0$ و α ثابت يحقق $0\leq\alpha\leq 1$.

مثال 2.2.1

المعادلة

$$f(x)=\int_0^x\left(\frac{1}{|x-t|^{\alpha}}\right)u(t)dt,\quad ;0\leq\alpha\leq 1$$

هي معادلة تكاملية شاذة ذات نواة ضعيفة الشذوذ .

- **المعادلة التكاملية قوية الشذوذ**

إذا كانت النواة على الشكل

$$k(x,t)=\frac{H(x,t)}{(x-t)^2}.$$

حيث $H(x,t)$ دالة قابلة للمفاضلة بالنسبة لـ (x,t) مع $H(x,t)\neq 0$.

- **المعادلة التكاملية الشاذة**

نواتها من الشكل

$$k(x,t)=\frac{H(x,t)}{x-t}.$$

حيث $H(x,t)$ دالة قابلة للمفاضلة بالنسبة لـ (x,t) مع $H(x,t)\neq 0$.

4) المعادلات التكاملية-التفاضلية

تطور هذا النوع من المعادلات في عام 1900 م وذلك بعد أن قام فولتيرا بدراسة ظاهرة النمو السكاني.

تعريف 1.2.1: وهي المعادلات التي يظهر فيها مشتق الدالة المجهولة $u(x)$ في طرف من المعادلة ،والدالة المجهولة في الطرف الآخر تحت إشارة التكامل ،وتكون على الشكل

$$u^{(n)}(x)=f(x)+\lambda\int_{a(x)}^{b(x)}k(x,t)u(t)dt.$$

أمثلة 1.2.1

1- المثال التالي يوضح معادلة من الشكل معادلة تفاضلية ـ تكاملية

$$u'(x)=-1+\frac{1}{2}x^2-xe^x-\int_0^x tu(t)dt,$$

حيث $n=1$

2- كما تظهر هذه المعادلة في مسائل الهندسة الكهربائية ، وأشهر مثال على ذلك يمكن الحصول على التيار (I) الذي يسري في الدارة المغلقة على شكل المعادلة التفاضلية ـ التكاملية التالية

$$L\frac{\partial I}{\partial t}+RI+\frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)dt=f(t),\qquad I(0)=I_0$$

حيث

- L : الحث
- R : المقاومة
- C : السعة
- $f(t)$: الجهد المطبق

ملاحظة (2)

من بين الأنواع الرئيسية الأربعة للمعادلات التكاملية نميز نوعين هما

1- **معادلات فولتيرا ـ فريدهولم التكاملية**
الشكل النموذجي لهذه المعادلات هو

$$u(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)u(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)u(t)dt.$$

2- **معادلات فولتيرا ـ فريدهولم التكاملية ـ التفاضلية**
الشكل النموذجي لهذه المعادلات

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)u(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)u(t)dt.$$

2.2.1 خطية المعادلات التكاملية

تعريف 2.2.1: نقول عن المعادلات التكاملية أنها خطية ، إذا وفقط إذا ظهرت الدالة المجهولة $u(x)$ تحت إشارة التكامل بشكل خطي (أي درجة الدالة المجهولة $u(t)$ هي الدرجة الاولى) ويمكن كتابة النواة على الشكل التالي

$$k(x,t)u(t)=k(x,t,u(t)),$$

عندئذ تسمى المعادلة التكاملية خطية وتعطى على النحو التالي

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}k(x,t)u(t)dt.$$

أما إذا استبدلت الدالة المجهولة $u(x)$ بدوال من الشكل $e^u,\sin(u),u^2,\ldots$ فإننا نقول أن المعادلة غير خطية وتكتب على الشكل التالي

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}k(x,t,u(t))dt.$$

أمثلة 2.2.1

-1

$$u(x)=(1+x)+\int_0^1(x-t)u(t)dt,$$

-2

$$u(x)=x+\int_0^x(x+t)u(t)dt.$$

هي معادلات تكاملية خطية .

-3

$$u(x)=1+\int_0^1 xte^{u(t)}dt,$$

-4

$$u(x)=1+\int_{0}^{x}(1-x+t)(u(t))^4dt.$$

هي معادلات تكاملية غير خطية .

3.2.1 تجانس المعادلات التكاملية

تعريف 3.2.1: نقول عن معادلة تكاملية أنها متجانسة إذا كانت الدالة $f(x)$ في النوع الثاني من معادلتي فولتيرا و فريدهولم التكاملية تساوي الصفر ، عدا ذلك نقول أن المعادلة غير متجانسة .

أمثلة 3.2.1

-1

$$u(x)=\int_{0}^{1}(1+x-t)u^4(t)dt,$$

هي معادلة تكاملية متجانسة لأن : $f(x)=0$.

-2

$$u(x)=\cos(x)+\int_{0}^{x}xtu(t)dt,$$

هي معادلة تكاملية غير متجانسة لأن : $f(x)=\cos(x)$.

3.1 بعض أنواع المعادلات الشهيرة

1- معادلة رينوول

نسمي معادلة رينوول كل معادلة تكتب من الشكل

$$\varphi(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{x}k(x-t)u(t)dt.$$

2- **معادلة وينر- هوف**

وتكون من الشكل

$$\varphi(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{+\infty}k(x-t)u(t)dt.$$

3- **معادلة آبال**

وتكتب من الشكل

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{\alpha-1}g(\varphi(t))dt, 0\leq\alpha\leq 1.$$

حيث $g(x)\geq 0, g(0)=0, g:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$

4- **معادلة هامريشتين التكاملية**

والتي تكتب كمايلي

$$\mu u(x)=f(x)+\int_{D}k(x,t)F(t,u(t))dt,$$

$n\in\mathbb{N}*$,$D\in\mathbb{R}$

5- **معادلة كوشي الشاذة**

تكون هذه المعادلة على الشكل

$$a(x)\varphi(x)+b(x)\int_{r}\frac{\varphi(t)}{(t-x)}dt+\int_{r}F(x,t,\varphi(t))dt=f(x).$$

4.1 أنواع النواة

يمكن تصنيف المعادلات التكاملية حسب صيغة النواة $k(x,t)$

1- **النواة** $k(x,t)$ **مستمرة على المجال** $[a,b]$

إذا كانت $k(x,t)$ تحقق الشرط

$$|k(x,t)|\leq\mu,$$

حيث : μ ثابت .

2- **نواة كاريمان**

إذا كانت

$$k(x,t)=\frac{A(x,t)}{|x-t|^{\alpha}} \quad ; \quad 0\leq \alpha \leq 1 .$$

حيث $A(x,t)$ دالة مستمرة وقابلة للإشتقاق .

3- **النواة اللوغاريتمية**

تكتب على شكل

$$k(x,t)=A(x,t)\ln|x-t| .$$

4- **نواة كوشي**

تكتب كالتالي

$$k(x,t)=\frac{A(x,t)}{|x-t|} .$$

5- **نواة آبال**

وهي

$$k(x,t)=\frac{A(x,t)}{(x-t)^{\alpha}} \quad ; \ 0<\alpha<1 .$$

6- **النواة المتحللة (القابلة للفصل)**

النواة المتحللة لها الصيغة التالية

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(t) .$$

7- **نواة هيلبرت .**

تكتب من الشكل

$$k(x,t)=\cos\left(\frac{x-t}{2}\right) .$$

8- **النواة المتناظرة**

نقول عن النواة أنها متناظرة إذا كانت

$$k(x,t)=k(t,x) .$$

9- **نواة الإلتفاف**

وهي النواة الملتفة

$$k(x,t)=k(x-t) .$$

الفصل الثاني

المعادلات التكاملية لفريدهولم وفولتيرا .

1.2 الطرق التحليلية العامة لحل معادلات فولتيرا التكاملية

في الفصل السابق قمنا بتعريف المعادلات التكاملية بوضوح وأنواعها، من بينها معادلات فولتيرا التكاملية الخطية (غير الخطية)، المتجانسة (غير المتجانسة) من النوع الاول والثاني على سبيل المثال

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt, \tag{1.2}$$

$$f(x) = \int_0^x k(x,t)u(t)dt, \tag{2.2}$$

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)[u(t)]^2 dt. \tag{3.2}$$

كلها معادلات تكاملية لفولتيرا ، تُعرف المعادلة (1.2) بأنها معادلة فولتيرا التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني،والمعادلة (2.2) بأنها معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الأول ،أما المعادلة(3.2) هي معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع الثاني. في هذه الأمثلة $f(x), k(x,t)$ هي دوال معرفة .
لحل معادلة فولتيرا فان هناك عددا من الطرق التي تم تطبيقها لهذا الغرض وفيما يلي بعض الطرق التحليلية لحل معادلة فولتيرا التكاملية.

2.2 طرق حل معادلات فولتيرا التكاملية الخطية

1.2.2 معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثاني

لحل معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني فإن هناك العديد من الطرق لحلها والتي من بينها **طريقة التقريبات المتعاقبة ، طريقة تحويل لابلاس ، طريقة التحلل الادوميان ...** توفر هذه الطرق مخططا يمكن استخدامه لحل مشكلات ذات قيمة اولية ومعادلات تكاملية .

1) طريقة التقريبات المتعاقبة

لتكن معادلة فولتيرا من النوع الثاني التالية

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)u(t)\,dt, \qquad (4.2)$$

مبدأ هذه الطريقة

نستبدل الدالة المجهولة $u(x)$ تحت اشارة التكامل لمعادلة فولتيرا بأي دالة مستمرة ذات قيمة حقيقية $u_0(x)$ ويسمى التقريب الصفري ، سيعطينا هذا الاستبدال التقريب الاول $u_1(x)$ بواسطة

$$u_1(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)u_0(t)\,dt. \qquad (5.2)$$

من الواضح أن $u_1(x)$ مستمرة إذا كانت $f(x)$ ، $k(x,t)$ ، $u_o(x)$ مستمرة ، و يمكن الحصول على التقريب الثاني $u_2(x)$ ،بالمثل عن طريق استبدال$u_0(x)$ في المعادلة السابقة بـ $u_1(x)$ التي تم الحصول عليها سابقا فنجد

$$u_2(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)u_1(t)\,dt. \qquad (6.2)$$

بالاستمرار بهذه الطريقة نحصل على متتالية لانهائية من الدوال $u_0(x),u_1(x),...,u_n(x),...$ وهكذا التقريب من الرتبة (n) هو

$$u_n(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)u_{n-1}(t)\,dt. \qquad (7.2)$$

مع n=1,2,3... و $u_0(x)$ يعادل اي دالة ذات قيم حقيقية محددة .

الدوال الأكثر شيوعا لـ $u_0(x)$ هي 1،0 و x و بالتالي لما $n\to\infty$ يتم الحصول على الحل $u(x)$ للمعادلة (4.2) كالتالي

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x)$$

بحيث يكون الحل $u(x)$ مستقلا عن اختيار التقريب الصفري .

مثال 1.2.2

حل معادلة فولتيرا التالية باستخدام طريقة التقريبات المتعاقبة

-1

$$u(x)=1-\int_0^x (x-t)u(t)dt,$$

الحل

بأخذ $u_0(x)=1$ في المعادلة (1) نحصل على

$$\begin{aligned}
u_1(x)&=1-\int_0^x (x-t)u_0(t)dt=1-\frac{1}{2}x^2,\\
u_2(x)&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4,\\
u_3(x)&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6,\\
&\vdots\\
u_{n+1}(x)&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}.
\end{aligned}$$

ومنه

$$u(x)=\cos(x).$$

2) طريقة تحويل لابلاس

تطبق هذه الطريقةعلى معادلات فولتيرا التكاملية من نوع الالتفاف مثل

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x-t)u(t)dt. \tag{8.2}$$

حيث تكون النواة $k(x-t)$ من نوع الالتفاف يمكن حلها بسهولة باستخدام طريقة تحويل لابلاس .

لبدأ عملية الحل نحدد اولا تحويل لابلاس لـ $u(x)$

$$\mathscr{L}\{u(x)\}=\int_0^\infty e^{-sx}u(x)dx, \tag{9.2}$$

باستخدام تحويل لابلاس لتكامل الالتفاف نحصل على

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^x k(x-t)u(t)\,dt\right\} = \mathscr{L}\{k(x)\}\,\mathscr{L}\{u(x)\}. \tag{10.2}$$

وهكذا باخذ تحويل لابلاس للمعادلة (8.2) نحصل على

$$\mathscr{L}\{u(x)\} = \mathscr{L}\{f(x)\} + \lambda\mathscr{L}\{k(x)\}\,\mathscr{L}\{u(x)\}, \tag{11.2}$$

والحل يعطى بالعلاقة

$$\mathscr{L}\{u(x)\} = \frac{\mathscr{L}\{f(x)\}}{1-\lambda\mathscr{L}\{k(x)\}},$$

وبعكس هذا التحويل نحصل على

$$u(x) = \int_0^x \Psi(x-t)f(t)\,dt, \tag{12.2}$$

حيث يفترض ان

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1-\lambda\mathscr{L}\{k(x)\}}\right\} = \psi(x).$$

المقدار (12.2) هو حل لمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني لنوع الالتفاف.

مثال 2.2.2

حل معادلة فولتيرا التالية من نوع الالتفاف باستخدام طريقة لابلاس

-1

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt.$$

الحل

نلاحظ أن النواة $k(x-t)=1$ و $\lambda=1$ ، بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة من كلا الجانبين نحصل على

$$\mathscr{L}\{u(x)\}=\mathscr{L}\{1\}+\mathscr{L}\{1*u(x)\},$$

يعطي

$$U(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}U(s),$$

او بشكل مكافئ

$$U(s)=\frac{1}{s-1},$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي من كلا الجانبين يتم الحصول على الحل الدقيق بواسطة

$$\mathscr{L}^{-1}\{U(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\},$$

نجد الحل

$$u(x)=e^{x}.$$

3) طريقة تفكيك ادوميان

تعمل طريقة ادوميان على حل المعادلات التفاضلية و المعادلات التكاملية وكذلك المعادلات التفاضلية ـ التكاملية ،تم تقديم هذه الطريقة من قبل جورج ادوميان في عام 1990 في بعض كتبه.

الطريقة في الأساس تعمل على تحليل الدالة المجهولة $u(x)$ لأي معادلة إلى مجموع عدد لا نهائي من العناصر المحددة بواسطة سلسلة التحليل .

سنوضح الطريقة من خلال التعبير عن $u(x)$ في شكل سلسلة على النحو التالي

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x). \tag{13.2}$$

لدينا معادلة فولتيرا التكاملية التالية

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{0}^{x}k(x,t)u(t)\,dt. \tag{14.2}$$

بتعويض (13.2) في طرفي معادلة فولتيرا التكاملية (14.2) ينتج

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)dt. \qquad (15.2)$$

او بشكل مكافئ

$$u_0(x) + u_1(x) + ... = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u_0(t)\,dt + \lambda \int_0^x k(x,t)u_1(t)\,dt...$$

العنصر الابتدائي $u_0(x)$ يعرف على أنه كل مالم يتم تضمينه تحت علامة التكامل ، ومنه يمكن تحديد بقية العناصر من خلال علاقة تراجعية كما يلي

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= f(x), \\
u_1(x) &= \lambda \int_0^x k(x,t)u_0(t)\,dt, \\
u_2(x) &= \lambda \int_0^x k(x,t)u_1(t)\,dt, \\
\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n(x) &= \lambda \int_0^x k(x,t)u_{n-1}(t)\,dt.
\end{aligned} \qquad (16.2)$$

يمكن كتابة مجموعة المعادلات (16.2) على النحو التالي

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= f(x), \\
u_{n+1} &= \lambda \int_0^x k(x,t)u_n(t)\,dt \quad ; n \geq 0
\end{aligned}$$

وبالتالي يمكن الحصول بسهولة على الحل $u(x)$ لمعادلة فولتيرا التكاملية (14.2) في شكل سلسلة وذلك باستخدام الفرض (13.2) .

من الواضح أن طريقة التحليل حولت المعادلة التكاملية إلى مجموعة عناصر قابلة للحساب.

إن كان للمسألة حل دقيق فإن السلسلة التي تم الحصول عليها تتقارب بسرعة نحو هذا الحل الدقيق، كما انه كلما استخدمنا المزيد من الحدود تحصلنا على دقة أعلى.

مثال 3،2،2

حل معادلة فولتيرا التكاملية التالية باستخدام طريقة تفكيك أدوميان

$$u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)\,dt,$$

الحل

لدينا

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

بالتعويض في طرفي المعادلة نحصل على

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x, \\ u_1(x) &= \int_0^x (t-x)u_0(t)\,dt \\ &= \int_0^x (t-x)t\,dt \\ &= -\frac{x^3}{3!}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int_0^x (t-x)u_1(t)\,dt \\ &= \int_0^x (t-x)\frac{t^3}{3!}\,dt \\ &= \frac{x^5}{5!}. \end{aligned}$$

ومنه

$$u(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

الصيغة المغلقة للحل هي

$$u(x) = \sin(x).$$

4) طريقة التبديلات المتعاقبة

لدينا معادلة فولتيرا التكاملية التالية

$$u(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)\,dt, \tag{17،2}$$

لنقم باستبدال $u(t)$ في المعادلة (17.2) بقيمتها المعطاة في المعادلة (17.2) كما يلي

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)\left[f(t)+\lambda\int_a^t k(t,t_1)u(t_1)dt_1\right]dt, \tag{18.2}$$

بنفس الطريقة نحصل على

$$\begin{aligned}u(x)&=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^x k(x,t)\int_a^t k(t,t_1)f(t_1)dt_1dt\\&+...+\lambda^n\int_a^x k(x,t)\int_a^t k(t,t_1)...\int_a^{t_{n-2}} k(t_{n-2},t_{n-1})f(t_{n-1})dt_{n-1}...dt_1dt\\&+R_{n+1}(x).\end{aligned} \tag{19.2}$$

بحيث

$$R_{n+1}(x)=\lambda^{n+1}\int_0^x k(x,t)\int_a^t k(t,t_1)...\int_a^{t_{n-1}} k(t_{n-1},t_n)u(t_n)dt_n...dt_1dt.$$

نعتبر السلسلة

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^x k(x,t)\int_a^t k(t,t_1)f(t_1)dt_1... \tag{20.2}$$

الحد العام لهذه السلسلة وليكن $V_n(x)$ يمكن أن يكتب على الشكل

$$V_n(x)=\lambda^n\int_a^x k(x,t)\int_a^t k(t,t_1)...\int_a^{t_{n-2}} k(t_{n-2},t_{n-1})f(t_{n-1})dt_{n-1}...dt_1dt.$$

بما أن $|k(x,t)|\leq M$ في R و $|f(t)|\leq N$ في I فإن

$$|V_n(x)|\leq|\lambda|^nNM^n\frac{(x-a)^n}{n!}\leq|\lambda^n|N\frac{[M(b-a)]^n}{n!}\qquad ,a\leq x\leq b.$$

السلسلة بحيث

$$|\lambda^n|N\frac{[M(b-a)]^n}{n!}.$$

هو حدها العام تكون متقاربة من أجل كل قيم λ,N,M و $(b-a)$.

إذن المسألة (20.2) متقاربة مطلقا و بإنتظام .

إذا كانت للمعادلة (17.2) حلا مستمرا ، فيجب أن يتم التعبير عنه بواسطة (20.2) إذا كانت $u(x)$ مستمرة في I ، قيمتها المطلقة تملك قيمة عظمى U ، إذن

$$|R_{n+1}(x)|\leq|\lambda^{n+1}|UM^{n+1}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\qquad ,\ a\leq x\leq b.$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0.$$

و هكذا نلاحظ أن $u(x)$ و التي تحقق (19.2) تمثل دالة مستمرة معرفة بـ (20.2) يمكننا أيضا التحقق أن $u(x)$ المعطاة بـ (20.2) تحقق المعادلة ومنه لدينا النظرية التالية

نظرية 1.2.2: إذا كان

-1

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)\,dt,$$

a ثابت

-2 $k(x,t)$ حقيقية و مستمرة في المربع $R=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}, a\leq x\leq b, a\leq t\leq b\right\}$ بحيث $|k(x,t)|\leq M$ في R و $k(x,t)\neq 0$.

-3 $f(x)\neq 0$ حقيقية و مستمرة في $I=[a,b]$.

-4 λ ثابت .

فإن المعادلة (17.2) تقبل حلا وحيدا مستمرا $u(x)$ في I ، هذا الحل معطى بالسلسلة المتقاربة مطلقا بإنتظام (19.2)

نفس الشي بالنسبة للمعادلة $u(x)=f(x)+\int_a^x k(x,t)u(t)\,dt$ يكفي أن نضع $\lambda=1$.

2.2.2 معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الاول

تعطى معادلة فولتيرا من النوع الاول بالعلاقة

$$f(x)=\int_0^x k(x,t)u(t)\,dt. \tag{21.2}$$

سنناقش في هذا الجزء طريقتان رئيسيتان تستخدم عادة في معادلات تكامل فولتيرا من النوع الاول .

1) طريقة حل السلاسل

نعتبر أن الحل $u(x)$ تحليليا وله مشتقات من أي رتبة وله مفكوك سلسلة تايلور عند $x=0$ في الصيغة التالية

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{22.2}$$

حيث يتم تحديد المعاملات a_n بالتكرار بتعويض (22.2) في المعادلة(21.2) نحصل على

$$T(f(t))=\int_0^x k(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt \tag{23.2}$$

حيث $T(f(x))$ هي سلسلة تايلور لـ $f(x)$.

مثال 4.2.2

أوجد حل معادلة فولتيرا التالية بإستخدام طريقة السلاسل

$$x^2+\frac{1}{6}x^3=\int_0^x(2+x-t)u(t)\,dt.$$

الحل

بتعويض المتسلسلة(22.2) في الجانب الايمن وحساب التكامل الناتج نجد

$$x^2+\frac{1}{6}x^3=2a_0x+\left(\frac{1}{2}a_0+a_1\right)x^2+\left(\frac{1}{3!}a_1+\frac{2}{3}a_2\right)x^3+...$$

بمعادلة معاملات الحدود المتشابهة من كلا الطرفين نجد

$$a_0=0,a_1=1,a_2=a_3=a_4=...=0,$$

ومنه الحل الدقيق هو

$$u(x)=x.$$

2) التحويل من معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الاول إلى معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني

في هذا العنصر، نقدم طريقة لتحويل معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الأول إلى معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ، ومن ثم حلّها باستخدام الطرق السابقة لمعادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثاني .

مبدأ هذه الطريقة

هو اشتقاق الطرفين من معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الاول ومن ثم استخدام قاعدة ليبنيتز نحصل على

$$\frac{df(x)}{dx}=k(x,x)u(x)+\int_0^x k_x(x,t)u(t)\,dt, \qquad (24.2)$$

إذا تم حلها في $u(x)$ شرط أن تكون $k(x,x)\neq 0$ نحصل على معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني المعطاة كما يلي

$$u(x)=\frac{f'(x)}{k(x,x)}-\frac{1}{k(x,x)}\int_0^x k_x(x,t)u(t)\,dt, \qquad (25.2)$$

نلاحظ أن الحد الغير متجانس و النواة قد تغيرا حيث

$$g(x)=\frac{f'(x)}{k(x,x)},$$

$$G(x)=\frac{1}{k(x,x)}k_x(x,t),$$

على التوالي وبهذا يمكننا استخدام الطريقة المشار إليها اعلاه .

أمثلة 1.2.2

حوّل معادلتي فولتيرا التكاملية التالية إلى معادلتين تكامليتين من النوع الثاني ثم حل المعادلتين الناتجتين

-1

$$x^2+\frac{1}{6}x^3=\int_0^x (2+x-t)u(t)\,dt,$$

-2

$$\sinh(x) = \int_0^x e^{x-t} u(t)dt\,.$$

الحل

1- بإشتقاق الطرفين و إستخدام قاعدة ليبنيتز نحصل على

$$2x + \frac{1}{2}x^2 = 2u(x) + \int_0^x u(t)dt,$$

بشكل مكافئ

$$u(x) = x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\int_0^x u(t)dt,$$

نختار طريقة التقريبات المتتابعة لحل هذه المعادلة
بأخذ

$$u_0(x) = x$$

بالتعويض نجد

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\int_0^x t\,dt \\ &= x, \end{aligned}$$

وفقا لذلك ، المقادير الاخرى

$$u_n(x) = x, \quad n \geq 2$$

الحل الدقيق هو

$$u(x) = x.$$

2- بإشتقاق الطرفين و إستخدام قاعدة ليبنيتز نحصل على

$$\cosh(x) = u(x) + \int_0^x e^{x-t} u(t)dt\,,$$

بشكل مكافئ

$$u(x) = \cosh(x) - \int_0^x e^{x-t} u(t) dt\,,$$

لحل هذه المعادلة نستخدم طريقة تحويل لابلاس

$$\begin{aligned} U(s) &= \mathscr{L}\{u(x)\} \\ &= \mathscr{L}\left\{\cosh(x) - \int_0^x e^{x-t} u(t) dt\right\} \\ &= \frac{s}{s^2-1} - \frac{s}{s-1} U(s). \end{aligned}$$

مما يؤدي إلى

$$U(s) = \frac{1}{s+1}.$$

بأخذ التحويل العكسي نحصل على

$$u(x) = e^{-x}.$$

3.2 الطرق التحليلية العامة لحل معادلات فريدهولم التكاملية

سنتناول في هذا القسم معادلات فريدهولم التكاملية وطرق حلها.
في الفصل السابق قمنا بتعريف معادلات فريدهولم التكاملية فوجدنا معادلة فريدهولم التكاملية الخطية (غير الخطية)، المتجانسة (غير المتجانسة) من النوع الأول والنوع الثاني. على سبيل المثال

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t) u(t) dt \quad ; a \le x \le b, \tag{26.2}$$

$$f(x) = \int_a^b k(x,t) u(t) dt \quad ; a \le x \le b, \tag{27.2}$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t) [u(t)]^2 dt \quad ; a \le x \le b. \tag{28.2}$$

كلها معادلات تكاملية لفريدهولم ، تُعرف المعادلة (26.2) بأنها معادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني ، والمعادلة (27.2) بأنها معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الأول ، أماالمعادلة (28.2) هي معادلة فريدهولم التكاملية غير الخطية من النوع الثاني. في هذه الأمثلة $k(x,t)$ ، $f(x)$ هي دوال معرفة.

4.2 طرق حل معادلات فريدهولم التكاملية الخطية

1.4.2 معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني

لحل معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني فإن هناك عددا من الطرق التي تطبق لهذا الغرض .
نذكر بعض الطرق التحليلية لحلها :**طريقة التقريبات المتتابعة ، طريقة التحلل لأدوميان ، طريقة الحساب المباشر، طريقة النواة المنحلة ، طريقة التحليل المعدلة...**
توفر هذه الطرق مخططاً يمكن استخدامه لحل مشكلات ذات قيمة أولية ومعادلات تكاملية.

1) طريقة التقريبات المتتابعة -سلسلة نيومان

إنّ طريقة التقريب المتتابعة التي تمّ تطبيقها بنجاح على معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ،يمكن تطبيقها بسهولة أكبر على معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad ;a\leq x\leq b, \tag{29.2}$$

حيث $k(x,t)$ ، $f(x)$ حقيقيتين مستمرتين و λ ثابت.
مبدأ هذه الطريقة
نقوم بتعيين التقريب الصفري وليكن $u_0(x)=f(x)$ نلاحظ أن التقريب الصفري يمكن أن يكون أي دالة ذات قيمة حقيقية محددة حيث $a\leq x\leq b$ وبتعويض هذا التقريب في معادلة فريدهولم (29.2) نحصل على التقريب الأول $u_1(x)$

$$u_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u_0(t)dt \quad ;a\leq x\leq b, \tag{30.2}$$

ويمكن الحصول على التقريب الثاني $u_2(x)$ ،وذلك باستبدال $u_0(x)$ في المعادلة (30.2) بـ

$u_1(x)$ الذي تمّ الحصول عليه سابقاً فنجد

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_1(t)dt \quad ;a \leq x \leq b, \tag{31.2}$$

وهكذا حتى نحصل على التقريب من الرتبة $(n+1)$

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_n(t)dt \quad ;n \geq 1. \tag{32.2}$$

على الرّغم من أنه يمكننا إختيار أي دالة ذات قيمة حقيقية للتقريب الصفري، إلاّ أنّ الدّوال الأكثر شيوعاً المحددة لـ $u_0(x)$ هي $0,1$ أو x ،لاحظنا مع اختيار $u_0(x)=0$ فإن التقريب الأول يصبح $u_1(x) = f(x)$.
الحل النهائي لـ $u(x)$ هو

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x).$$

يتم الحصول على سلسلة نيومان إذا قمنا بإعداد $u_0(x) = f(x)$ على هذا النحو

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_0(t)dt$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt,$$

$$u_1(x) = f(x) + \lambda\psi_1(x), \tag{33.2}$$

حيث

$$\psi_1(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)dt. \tag{34.2}$$

يمكن الحصول على التقريب الثاني

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_1(t)dt$$
$$= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)[f(t) + \lambda\psi_1(t)]dt,$$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda\psi_1(x) + \lambda^2\psi_2(x), \tag{35.2}$$

حيث

$$\psi_2(x) = \int_a^b k(x,t)\psi_1(t)dt. \tag{36.2}$$

وبهذه الطريقة يمكن الحصول على الحل النهائي $u(x)$

$$u(x) = f(x) + \lambda\psi_1(x) + \lambda^2\psi_2(x) + \ldots + \lambda^n\psi_n(x) + \ldots$$

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\psi_n(x), \tag{37.2}$$

حيث

$$\psi_n(x) = \int_b^a k(x,t)\psi_{n-1}(t)dt \qquad ; \; n \geq 1.$$

تعرف المتسلسلة (37.2) بمتسلسلة نيومان .

ملاحظة (1)

يمكن أن نرى لاحقا أن متسلسلة نيومان متطابقة مع طريقة التحلل الآدومية لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية ، والتقريب المتتابع مطابق لطريقة بيكارد. نذكر أدناه

طريقة بيكارد

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x).$$

طريقة متسلسلة نيومان

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\psi_n(x).$$

أمثلة 1.4.2

حل معادلات فريدهولم التكاملية باستخدام طريقة التقريبات المتتابعة

-1

$$u(x) = 1 + \int_0^1 xu(t)dt.$$

-2

$$u(x)=e^x+e^{-1}\int_0^1 u(t)dt.$$

الحل

-1

$$u(x)=1+\int_0^1 xu(t)dt,$$

نضع

$$\begin{aligned}
u_0(x)&=1,\\
u_1(x)&=1+\int_0^1 xu_0(t)dt\\
&=1+\int_0^1 xdt,\\
u_1(x)&=1+x.\\
u_2(x)&=1+\int_0^1 xu_1(t)dt\\
&=1+\int_0^1 x(1+t)dt,\\
u_2(x)&=1+x\left(1+\frac{1}{2}\right).\\
u_3(x)&=1+\int_0^1 xu_2(t)dt\\
&=1+\int_0^1 x(1+\frac{3}{2}t)dt,\\
u_3(x)&=1+x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

وهكذا حتى نحصل على

$$u_n(x)=1+x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}
u(x)&=\lim_{n\to\infty}u_n(x)\\
&=1+\sum_{n=0}^{\infty}x\frac{1}{2^n}=1+\lim_{n\to\infty}x\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\\
&=1+x(1-\frac{1}{2})^{-1}.
\end{aligned}$$

$$u(x)=1+2x.$$

-2

$$u(x)=e^{x}+e^{-1}\int_{0}^{1}u(t)dt,$$

نضع

$$\begin{aligned}
u_0(x)&=0,\\
u_1(x)&=e^{x}+e^{-1}\int_{0}^{1}u_0(t)dt,\\
u_1(x)&=e^{x}.\\
u_2(x)&=e^{x}+e^{-1}\int_{0}^{1}u_1(t)dt\\
&=e^{x}+e^{-1}\int_{0}^{1}e^{t}dt,\\
u_2(x)&=e^{x}-e^{-1}+1.\\
u_3(x)&=e^{x}+e^{-1}\int_{0}^{1}u_2(t)dt\\
&=e^{x}+e^{-1}\int_{0}^{1}(e^{t}-e^{-1}+1)dt,\\
u_3(x)&=e^{x}-e^{-2}+1.
\end{aligned}$$

نحصل على

$$u_n(x)=e^{x}-e^{-(n-1)}+1 \qquad ; \quad n\geq 0,$$

$$\begin{aligned}
u(x)&=\lim_{n\to\infty}u_n(x)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(e^{x}-e^{-(n-1)}+1\right),\\
u(x)&=e^{x}+1.
\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

2) طريقة البدائل المتعاقبة

تشبه هذه الطريقة تقريباً طريقة التقريبات المتتابعة ، إلا أنها تتعلق بحل المعادلة التكاملية في صورة متسلسلة من خلال حساب التكاملات الفردية و المتعددة . الحل بالطريقة العددية هنا ضخم مقارنة بالتقنيات الأخرى .

مبدأ الطريقة

لنفرض أن

1-

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad (38.2)$$

بحيث a ، b ثابتين .

2- $k(x,t) \neq 0$ دالة حقيقية ومستمرة في المربع $R = \{(x,t) \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b \,,\, a \leq t \leq b\}$.

3- $f(x) \neq 0$ دالة حقيقية ومستمرة في المجال $I = [a,b]$.

4- λ ثابت .

نستبدل في المعادلة (38.2) $u(t)$ بقيمتها المعطاة بالمعادلة نفسها كما يلي

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\left[f(t) + \lambda \int_a^b k(t,t_1)u(t_1)dt_1 \right] dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1)u(t_1)dt_1 dt. \end{aligned}$$

من جديد هنا نستبدل $u(t_1)$ بقيمتها المعطاة بالمعادلة (38.2) نجد

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt \\ &+ \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1)\left[f(t_1) + \lambda \int_a^b k(t_1,t_2)u(t_2)dt_2 \right] dt_1 dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1)f(t_1)dt_1 dt \\ &+ \lambda^3 \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1) \int_a^b k(t_1,t_2)u(t_2)dt_2 dt_1 dt\,. \end{aligned}$$

نواصل على هذا المنوال نتحصل على

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1)f(t_1)dt_1 dt \\ &+ .... + \lambda^n \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1) .... \int_a^b k(t_{n-2},t_{n-1})f(t_{n-1})dt_{n-1} .... dt_1 dt \\ &+ R_{n+1}(x)\,, \end{aligned} \qquad (39.2)$$

بحيث

$$R_{n+1}(x) = \lambda^{n+1} \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,t_1) .... \int_a^b k(t_{n-1},t_n)u(t_n)dt_n .... dt_1 dt\,.$$

هذا يقودنا إلى إعتبار السلسلة التالية

$$f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^b k(x,t)\int_a^b k(t,t_1)f(t_1)dt_1dt+\ldots \tag{40.2}$$

باستعمال الشرطين (2) , (3) فإن كل حد لهذه السلسلة يكون مستمر في I .
إذن هذه السلسلة تمثل دالة مستمرة في I شريطة أن تكون متقاربة بإنتظام في I .

- بما أن $k(x,t)$ و $f(t)$ مستمرين في R و I على التوالي ، فإن $|k(x,t)|$ لديها قيمة عظمى M في R ، و$|f(x)|$ تملك قيمة عظمى N في I . أي أن $|k(x,t)|\leq M$ في R و $|f(x)|\leq N$ في I .

نضع

$$S_n(x)=\lambda^n\int_a^b k(x,t)\int_a^b k(t,t_1)\ldots\int_a^b k(t_{n-2},t_{n-1})f(t_{n-1})dt_{n-1}\ldots dt_1dt,$$

إذن

$$0\leq|S_n(x)|\leq|\lambda^n|NM^n(b-a)^n.$$

السلسلة التي يكون هذا هو حدها العام تتقارب فقط لمّا يكون

$$|\lambda|M(b-a)<1,$$

وهكذا نلاحظ أن السلسلة (40.2) تتقارب مطلقا وبانتظام فقط إذا كان :

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}.$$

إذا كانت المعادلة (38.2) تملك حلاً مستمراً فحتما يكون معطى بـ(39.2).
إذا كانت $u(x)$ مستمرة في I ، فإن قيمتها المطلقة لديها قيمة عظمى U .
إذن

$$|R_{n+1}(x)|<\left|\lambda^{n+1}\right|UM^{n+1}(b-a)^{n+1}$$

إذا كان $|\lambda|M(b-a)<1$ فإن $\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$ وهكذا فإن الدالة $u(x)$ والتي تحقق (39.2) هي دالة مستمرة معرفة بـ (40.2) .

نظريـة 1.4.2: إذا كانت

-1
$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt,$$
بحيث a , b ثابتين .

-2 $k(x,t)$ دالة مستمرة في المربع $R = \{(x,t) \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ و $k(x,t) \neq 0$ ، $|k(x,t)| \leq M$ في R

-3 $f(x) \neq 0$ دالة مستمرة في $I = [a,b]$.

-4 λ ثابت بحيث : . $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ إذن المعادلة (1) تملك حلاً وحيداً مستمراً في I وهذا الحل معطى بالسلسلة المتقاربة مطلقا وبانتظام (40.2)

ملاحظة (2)

المعادلة

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad (41.2)$$

المعادلتين (38.2) و (41.2) يمكن أن تملكا حلين مستمرين حتى وإن لم يكن الشرط الرابع من النظرية موجود .
المثال التالي يبرهن ذلك

مثال 1.4.2

$$u(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{3} + \int_0^1 (x+t)u(t)dt$$

والتي تملك الحل المستمر

$$u(x) = x$$

بالرغم من أن

$$|\lambda|M(b-a)=2$$

المثال التالي يوضح طريقة البدائل المتعاقبة

مثال 2.4.2

باستخدام البدائل المتعاقبة، قم بحل معادلة فريدهولم التكاملية التالية

$$u(x)=\cos(x)+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)u(t)dt.$$

الحل

نضع

$$k(x,t)=\sin(x) \quad , \quad f(x)=\cos(x) \quad , \quad \lambda=\frac{1}{2}.$$

نعوض هذه القيم في المعادلة (39.2)

$$u(x)=\cos(x)+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)cos(t)dt+\frac{1}{2^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)cos(t_1)dt_1dt$$
$$+\frac{1}{2^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t_1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)cos(t_2)dt_2dt_1dt+....$$

$$u(x)=\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{2^2}\sin(x)+\frac{1}{2^3}\sin(x)+....$$
$$u(x)=\cos(x)+\sin(x).$$

3) طريقة تفكيك أدوميان .

قام جورج أدوميان بتقديم وتطوير ما يسمى بطريقة تفكيك أدوميان والتي تمثل في كتابة الدالة المجهولة $u(x)$ على شكل سلسلة

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x). \qquad (42.2)$$

مبدأ الطريقة

نستبدل معادلة التحلل (42.2) في طرفي معادلة فريدهولم (29.2) فنحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right] dt.$$

يتم تحديد $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots$ للدالة المجهولة $u(x)$ بطريقة متكررة إذا قمنا بوضع

$$\begin{aligned}
&u_0(x) = f(x).\\
&u_1(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u_0(t)dt.\\
&u_2(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u_1(t)dt.\\
&\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_n(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u_{n-1}(t)dt.
\end{aligned}$$

ومن ثم نحصل على علاقة التكرار التالية

$$\begin{aligned}
&u_0(x) = f(x),\\
&u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u_n(t)dt \quad ; \; n \geq 1.
\end{aligned} \tag{43.2}$$

ملاحظة (3)

يمكننا تحليل الحد $f(x)$ إلى $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ بحيث

$$\begin{aligned}
&u_0(x) = f_1(x),\\
&u_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_0(t)dt,\\
&u_2(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u_1(t)dt,\\
&\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

تسمى هذه الطريقة بطريقة التحليل المعدلة .

2.4.2 أمثلة

باستعمال طريقة التحلل،حل معادلات فريدهولم التالية

-1

$$u(x)=e^{x}-1+\int_{0}^{1} tu(t)dt,$$

-2

$$u(x)=3x+e^{4x}-\frac{1}{16}\left(17+3e^{4}\right)+\int_{0}^{1} tu(t)dt.$$

الحل

-1

$$u(x)=e^{x}-1+\int_{0}^{1} tu(t)dt.$$

نضع

$$\begin{aligned}
u_0(x)&=f(x)=e^{x}-1.\\
u_1(x)&=\int_{0}^{1} tu_0(t)dt\\
&=\int_{0}^{1} t\left(e^{t}-1\right)dt,\\
u_1(x)&=\frac{1}{2}.\\
u_2(x)&=\int_{0}^{1} tu_1(t)dt\\
&=\int_{0}^{1} \frac{t}{2}dt,\\
u_2(x)&=\frac{1}{4}.\\
u_3(x)&=\int_{0}^{1} tu_2(t)dt\\
&=\int_{0}^{1} \frac{t}{4}dt,\\
u_3(x)&=\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

وما إلى ذلك، ومن ثم نجد

$$u(x) = e^x - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots.$$
$$u(x) = e^x.$$

-2

$$u(x) = 3x + e^{4x} - \frac{1}{16}\left(17 + 3e^4\right) + \int_0^1 tu(t)dt.$$

لدينا

$$f(x) = 3x + e^{4x} - \frac{1}{16}\left(17 + 3e^4\right) = f_1(x) + f_2(x)\,,$$

نضع

$$f_1(x) = 3x + e^{4x},$$
$$f_2(x) = -\frac{1}{16}\left(17 + 3e^4\right).$$

ومنه

$$u_0(x) = f_1(x) = 3x + e^{4x},$$
$$u_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_0(t)dt$$
$$= -\frac{1}{16}\left(17 + 3e^4\right) + \int_0^1 t(3t + e^{4t})dt = 0.$$

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_0^1 tu_n(t)dt = 0 \qquad \forall n \geq 1.$$

إذن الحل هو

$$u(x) = 3x + e^{4x}.$$

4) طريقة الحساب المباشرة

تعرف هذه الطريقة عادة بالطريقة الحسابية المباشرة ،وفي هذه الطريقة يجب أن تكون النواة $k(x,t)$ قابلة للفصل ،حيث يمكن كتابتها على الشكل التالي $k(x,t) = g(x)h(t)$ ، وبناءاً على ذلك يمكن التعبير عن معادلة فريدهولم على النحو التالي

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \\ &= f(x) + \lambda\, g(x) \int_a^b h(t)u(t)dt. \end{aligned} \qquad (44.2)$$

نضع

$$\alpha = \int_a^b h(t)u(t)dt,$$

حيث α ثابت غير معرّف يتم تحديده، ويترتب على ذلك أنه يمكن كتابة المعادلة (44.2) على النحو التالي

$$u(x) = f(x) + \lambda \alpha g(x). \qquad (45.2)$$

ملاحظة (4)

تجدر بنا الإشارة إلى أنّ الطريقة الحسابية تحدد الحل الدقيق في صورة مغلقة وليس في صورة متسلسلة ،بشرط يتم تحديد الثابت α . وقد تنشأ هذه الطريقة صعوبة في المعادلات التكاملية غير خطية.

مثال 3.4.2

حل معادلة فريدهولم التكاملية الخطية بطريقة الحساب المباشر

$$u(x) = e^x - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 u(t)dt.$$

الحل

نضع

$$\alpha = \int_0^1 u(t)dt,$$

ولدينا

$$u(x) = e^x - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

نستبدل قيمة $u(x)$ في ناتج التكامل α

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^1 (e^t - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2})dt \\ &= (e-1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{2}\right) + \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}.$$

الحل هو $u(x)=e^{x}$ ويمكن التحقق من ذلك بسهولة .

2.4.2 معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الأول

في معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الأول ، تظهر الدالة المجهولة $u(x)$ فقط داخل علامة التكامل ، وتكتب المعادلات بالشكل التالي

$$f(x)=\int_{a}^{b} k(x,t)u(t)dt. \tag{46.2}$$

حيث $x\in D$ لا يتطابق بالضرورة مع $[a,b]$.

تظهر معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الأول في العديد من النماذج الفيزيائية **مثل التصوير الشعاعي والإشعاع الكوني ومعالجة الصور و المطيافية وفي نظرية معالجة الإشارات...**

هناك العديد من الطرق التي استخدمت لدراسة معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الأول تحليليا وعدديا . سنستخدم في هذا الجزء **طريقة التنظيم** .

1) طريقة التنظيم

تمّ تأسيس هذه الطريقة من قبل فيليبس وتيخونوف

مبدأ هذه الطريقة

تمثل طريقة التنظيم في إعادة كتابة المعادلة (46.2) إلى معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني في الشكل

$$f(x)-\int_{a}^{b} k(x,t)u_{\varepsilon}(t)dt=\varepsilon u_{\varepsilon}(x), \tag{47.2}$$

المكافئ لـ

$$u_{\varepsilon}(x)=\frac{1}{\varepsilon}f(x)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{a}^{b} k(x,t)u_{\varepsilon}(t)dt, \tag{48.2}$$

حيث ε قيمة صغيرة معلومة موجبة .

من الواضح أن الحل $u_{\varepsilon}(x)$ للمعادلة (48.2) يتقارب مع الحل $u(x)$ في المعادلة (46.2)

لما $\varepsilon \to 0$.
ومن ثم حلّها بإحدى الطرق المدروسة سابقاً . و الحل هو

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x)$$

وفيما يلي سنقدم مثالاً توضيحياً ، يتم فيه تحويل المعادلة من النوع الأول إلى معادلة من النوع الثاني باستخدام طريقة التنظيم .

مثال 4.4.2

باستخدام طريقة التنظيم والحساب المباشر حل معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الأول التالية

$$\frac{1}{2}e^{2x} = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x-2t}u(t)dt\,. \tag{49.2}$$

الحل

باستخدام طريقة التنظيم تصبح المعادلة (49.2) مكافئة لـ

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}e^{2x} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x-2t}u_\varepsilon(t)dt\,. \tag{50.2}$$

باستخدام طريقة الحساب المباشر، تصبح المعادلة (50.2) مكافئة لـ

$$u_\varepsilon(x) = (\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{\alpha}{\varepsilon})e^{2x}\,. \tag{51.2}$$

حيث

$$\alpha = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2t}u_\varepsilon(t)dt\,. \tag{52.2}$$

لتحديد α ، نعوض (51.2) في (52.2) ، ثم نحسب التكامل نجد

$$\alpha = \frac{1}{2+4\varepsilon}\,. \tag{53.2}$$

وهذا بدوره يعطي

$$u_\varepsilon(x) = \frac{e^{2x}}{1+2\varepsilon}\,.$$

ويكون الحل الدقيق هو

$$u(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_{\varepsilon}(x)=e^{2x}.$$

الفصل الثالث

المعادلات التكاملية ـ التفاضلية و المعادلات التكاملية الشاذة.

1.3 طرق التحليلية العامة لحل المعادلات التكاملية ـ التفاضلية

قام العلماء والباحثون بدراسة موضوع المعادلات التفاضلية ـ التكاملية من خلال عملهم في تطبيقات علمية مثل انتقال الحرارة ، عملية الانتشار بشكل عام وانتشار النيوترونات، والأنواع البيولوجية التي تتعايش مع معدلات توليد متزايدة ومتناقصة . يمكن العثور على مزيد من التفاصيل حول المصادر التي تنشأ منها هذه المعادلات في تطبيقات الفيزياء والأحياء والهندسة . ويكون شكل المعادلات التفاضلية ـ التكاملية كمايلي

$$u^{(n)}(x)=f(x)+\lambda\int_{a(x)}^{b(x)}k(x,t)u(t)dt.$$

ويتضح من المعادلة أعلاه أن الدالة المجهولة $u(x)$ تظهر تحت علامة التكامل ، كما تظهر مشتقاتها الأخرى خارج علامة التكامل . لذلك ، فإن المعادلة المذكورة أعلاه تتضمن المشتقات وعوامل التكامل في نفس المعادلة ، وبالتالي تم استخدام مصطلح المعادلات التفاضلية ـ التكاملية ، علاوة على ذلك ، نظراً لأن هذه المعادلات تتضمن معاملا تفاضليا، فمن الضروري وصف الشروط الأولية .
ولتحديد حل المعادلات التفاضلية ـ التكاملية ، يجب إعطاء الشروط الاولية كما ذكرنا سابقاً. سنبدأ بتقديم الطرق التحليلية لحل معادلات فولتيرا التكاملية ـ ا لتفاضلية ، ثم طرق حل معادلات فريدهولم التكاملية ـ ا لتفاضلية .

1.1.3 المعادلات التكاملية ـ التفاضلية لفولتيرا

سنقدم في هذا الجزء بعض الطرق الرياضية المتطورة للحصول على حل معادلات فولتيرا التكاملية ـ ا لتفاضلية ، سنركز اهتمامنا على دراسة المعادلات التي تتضمن نواة قابلة للفصل من الشكل

$$k(x,t)=\sum_{k=1}^{n}g_k(x)h_k(t).$$

سندرس اولا الحالة عندما تتكون النواة من نوع واحد للدالتين $g(x)h(t)$ بحيث تكون

$$k(x,t)=g(x)h(t).$$

فقط في الحالات الاخرى يمكن تعميمها بنفس الطريقة .

طريقة حل السلسلة

الشكل القياسي لمعادلة فولتيرا التكاملية ـ التفاضلية هو

$$\begin{aligned} u^{(n)}(x) &= f(x) + \int_0^x g(x)h(t)u(t)\,dt, \\ u^{(n)}(x) &= b_k \qquad ;0 \le k \le (n-1), \end{aligned} \tag{1.3}$$

سنتبع طريقة موازية لطريقة حل المتسلسلة التي تستخدم عادة في حل المعادلات التفاضلية العادية حول نقطة عادية . و لتحقيق هذا الهدف ، نفترض أولا أن الحل $u(x)$ لـ (1.3) هو دالة تحليلية ومن ثم يمكن تمثيله بتوسعة متسلسلة حول النقطة العادية $x = 0$ معطى بواسطة

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{2.3}$$

حيث المعاملات a_k هي ثوابت سيتم تحديدها .
تجدر بنا الإشارة إلى أنه يمكن تحديد المعاملات القليلة الاولى بإستخدام الشروط الإبتدائية بحيث

$$\begin{aligned} a_0 &= u(0), \\ a_1 &= u'(0), \\ a_2 &= \frac{1}{2!}u''(0). \end{aligned} \tag{3.3}$$

وهكذا اعتمادا على عدد الشروط الإبتدائية المعطاة .
في حين سيتم تحديد المعاملات المتبقية بتطبيق التقنية التي سنناقشها لاحقا، بتعويض (2.3) في كلا طرفي (1.3) نحصل على

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^{(n)} = f(x) + g(x)\int_0^x h(t)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right)dt \tag{4.3}$$

في ضوء المعادلة (4.3) سيتم اختزال المعادلة (1.3) إلى تكاملات قابلة للحساب في الجانب الأيمن للمعادلة (4.3) والتي يمكن تقييمها بسهولة حيث يتعين علينا دمج حدود الصيغة t^n حيث $n \ge 0$ ثم يتعين علينا كتابة توسعة تايلور لـ $f(x)$ وتقييم التكاملات الناتجة أي المعادلة (4.3) ثم مساواة معاملات القوى المتشابهة لـ x في طرفي المعادلة و التحديد الكامل للمعاملات $a_0, a_1, a_2, \ldots$ للمتسلسلة في المعادلة (2.3) وبالتالي استبدال المعاملات التي تم

الحصول عليها a_k حيث $k \geq 0$ في المعادلة (2.3) ينتج الحل في صورة سلسلة وهذا قد يعطي الحل في الشكل المغلق ، إذا كان التمدد الذي تم الحصول عليه هو إمتداد تايلور إلى دالة أولية معروفة أو نستخدم حل النموذج المتسلسل إذا كان الشكل المغلق غير قابل للتحقيق.

مثال 1.1.3

حل معادلة فولتيرا التكاملية ـ التفاضلية التالية

-1

$$u''(x) = x\cosh x - \int_0^x tu(t)dt,$$
$$u(0) = 0, u'(0) = 1.$$

الحل

نعوض $u(x)$ بالسلسلة (2.3) في كلا طرفي المعادلة وبإستخدام توسيع تايلور لـ coshx نحصل على

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = x\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) - \int_0^x t\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt,$$

بإستخدام الشروط الأولية لدينا $a_0 = 0, a_1 = 1$ بتقييم التكاملات التي تتضمن حدود النموذج t^n حيث $n \geq 0$ وإستخدام حدود قليلة من كلا الطرفين نحصل على

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + ... = x\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...\right) - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}x^4 + ...\right)$$

بمعادلة معاملات القوى المتشابهة لـ x في كلا الطرفين نجد

$$a_2 = 0,$$
$$a_3 = \frac{1}{3!},$$
$$a_4 = 0,$$

وبشكل عام

$$a_{2n} = 0 \qquad ; n \geq 0$$
$$a_{2_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)!} \qquad ; n \geq 0$$

وبالتالي باستخدام قيم هذه المعاملات يمكن كتابة حل $u(x)$ من المعادلة (2.3) على شكل سلسلة

$$u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

وفي شكل مغلق

$$u(x) = \sinh(x).$$

طريقة تفكيك أدوميان

نفرض شكلا قياسيا لمعادلة فولتيرا التفاضلية ـ التكاملية المحددة بواسطة النموذج القياسي

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)\,dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \qquad 0 \le k \le (n-1), \qquad (5.3)$$

حيث $u^{(n)}(x)$ هو المشتق من الرتبة n لـ $u(x)$ بالنسبة لـ x و b_k هي ثوابث تحدد الشروط الأولية ،ومن الطبيعي البحث عن تعبير لـ $u(x)$ يمكن إيجاده من المعادلة (5.3) وذلك عن طريق مكاملة طرفي المعادلة (5.3) من 0 إلى x عدة مرات حسب ترتيب المشتق المعني نحصل على

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u(t)\,dt \right), \qquad (6.3)$$

حيث يتم الحصول على

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k. \qquad (7.3)$$

بإستخدام الشروط الاولية و L^{-1} هو مؤثر تكامل n مرة ، الآن يمكننا تطبيق طريقة التحلل من خلال تعريف الحل $u(x)$ لـ (6.3) في سلسلة تحليل معطاة

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \qquad (8.3)$$

بالتعويض بـ (8.3) في كلا حدي (6.3) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) dt \right). \qquad (9.3)$$

يمكن كتابة هذه المعادلة على الشكل

$$
\begin{aligned}
u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_k x^k + L^{-1}(f(x)) \\
+L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_0(t)\,dt\right) \\
+L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_1(t)\,dt\right) \\
+L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_2(t)\,dt\right) \\
+\ldots
\end{aligned}
$$

نحدد مركبات $u_i(x)$ بحيث $i\geq 0$ للدالة المجهولة $u(x)$ بطريقة تكرارية من خلال الموازنة بين الطرفين نجد

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_0(t)\,dt\right), \\
u_2(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_1(t)\,dt\right), \\
u_3(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_2(t)\,dt\right), \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

وهكذا يمكن كتابة المعادلة المذكورة أعلاه بطريقة تكرارية على الصورة

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_k x^k + L^{-1}(f(x)), \\
u_{n+1}(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x k(x,t)u_n(t)\,dt\right) \qquad ;n\geq 0
\end{aligned}
\tag{10.3}
$$

بالنظر إلى المعادلتين (10.3) يتم تحديد المركبات $u_0(x), u_1(x), \ldots$ بمجرد تحديد هذه المركبات يمكن الحصول على الحل $u(x)$ من المعادلة (5.3) في صورة متسلسلة بإستخدام المعادلة (8.3) يمكن تحويل حل المتسلسلة إلى حل مغلق دقيق . سيوضح المثال التالي كيف يمكننا إستخدام طريقة التفكيك.

مثال 2.1.3

حل معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية التالية

-1

$$
\begin{aligned}
u''(x) &= 1+\int_0^x (x-t)u(t)\,dt, \\
u(0) &= 1, u'(0)=0,
\end{aligned}
$$

الحل

نكامل طرفي المعادلة من 0إلى x ،وبإستخدام الشروط الإبتدائية المعطاة نحصل على

$$u(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u(t)\,dt\right),$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)),\\
u_0(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!},\\
u_1(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_0(t)\,dt\right)\\
&= \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!},\\
u_2(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_1(t)\,dt\right)\\
&= \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!},
\end{aligned}$$

ومنه الحل يكتب على الصورة التالية :

$$u(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

وهذا يعطينا الحل الدقيق

$$u(x) = \cosh x.$$

2.1.3 التحويل إلى معادلة فولتيرا التكاملية

يمكننا بسهولة تحوبل معادلة فولتيرا التكاملية ـ التفاضلية إلى معادلة فولتيرا التكاملية المكافئة شريطة أن تكون النواة نواة فرق معرفة بـ $k(x,t) = x - t$ ، وذلك بمكاملة طرفي المعادلة و إستخدام الشروط الإبتدائية.

لإجراء التحويل إلى معادلة فولتيرا التكاملية يجب أن نستخدم الصيغة التي تحول التكاملات المتعددة إلى تكامل واحد، سنوضح ثلاث تكاملات لصيغ محددة

$$\int_0^x\int_0^x u(t)\,dt = \int_0^x (x-t)u(t),$$
$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x u(t)\,dt = \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2 u(t)\,dt,$$
$$\int_0^x \ldots \int_0^x u(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} u(t)dt.$$

بعد إجراء التحويل إلى معادلة فولتيرا التكاملية يمكننا متابعة الحل بإستحدام أي من الطرق البديلة التي نوقشت من قبل في الفصل الثاني ، لإعطاء نظرة عامة على هذه الطريقة نوضح المثال التالي

مثال 3،1،3

حول معادلة فولتيرا التكاملية التفاضلية التالية إلى معادلة فولتيرا التكاملية

-1

$$u'(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\int_0^x u(t)dt,$$
$$u(0) = 0,$$

الحل

نكامل كلا الطرفين من 0إلى x و باستخدام الشرط الإبتدائي و أيضا بتغطية التكامل المزدوج إلى تكامل أحادي نحصل على

$$u(x) = 2x - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}\int_0^x\int_0^x u(t)dt$$
$$= 2x - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}\int_0^x (x-t)u(t)\,dt.$$

3،1،3 معادلات فريدهولم التكاملية ـ التفاضلية

في هذا الجزء، سنناقش الطرق المستخدمة لحل معادلات فريدهولم التكاملية ـ التفاضلية من النوع الثاني

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad ; \quad u^{(k)}(0) = b_k \quad ,0 \le k \le (n-1) \qquad (11،3)$$

لأن المعادلة (11.3) تجمع بين العوامل التفاضلية و العامل التكاملي ، فمن الضروري تحديد الشروط الأولية وهي $u(0), u'(0), ..., u^{(n-1)}(0)$ و b_k هي ثوا بت تحدد تلك الشروط الأولية ، من أجل تحديد الحل $u(x)$ الخاص بمعادلة فريدهولم التكاملية ـ التفاضلية (11.3). تتميز أي معادلة تكاملية ـ تفاضلية لفريدهولم بوجود مشتقات أكثر $u'(x), u''(x), ...$ ، باستثناء تكامل وحيد .

نلاحظ هنا أنّنا سنركز اهتمامنا على المعادلات التي تتضمن نواة قابلة للفصل حيث يمكن التعبير عن النواة $k(x,t)$ كمجموع منته

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t) \qquad (12.3)$$

وبصفة خاصة ، سنقوم باجراء تحليلنا على نواة ذات صنف واحد من الشكل $k(x,t) = g(x)h(t)$ ، ويمكن تعميم ذلك على حالات أخرى ، يمكن إختزال النواة غير القابلة للفصل باستخدام توسعة تايلور للنواة المعممة .

نشير إلى أنّ الطرق التي تم مناقشتها قد تمّ تقديمها في الفصل السابق ، لكننا سنركز على كيفية تنفيذ هذه الطرق في هذا النوع من المعادلات ، سنبدأ بالطريقة الأكثر عملية .

1) طريقة الحساب المباشر

يمكن إستخدام هذه الطريقة لحل معادلة فريدهولم التكاملية ـ التفاضلية من النوع الثاني مباشرة بدلا من حلها على شكل متسلسلة .

مبدأ هذه الطريقة

لتطبيق هذه الطريقة، نعتبر النواة $k(x,t)$ قابلة للفصل ، حيث $k(x,t) = g(x)h(t)$ ، ثمّ نقوم بتعويضها في المعادلة (11.3) فينتج عنه

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x)\int_a^b h(t)u(t)dt \quad u^{(k)}(0) = b_k,\, 0 \le k \le (n-1) \qquad (13.3)$$

بما أنّ التكامل في المعادلة (13.3) هو تكامل محدود ويعتمد على متغير واحد فقط t ، فيمكننا تعيين هذا التكامل بواسطة ثابت α ، نضع

$$\alpha = \int_a^b h(t)u(t)dt. \qquad (14.3)$$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (13.3) بالشكل

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \alpha g(x). \qquad (15.3)$$

نكامل طرفي المعادلة (15.3) n مرة من 0 إلى x ، وباستخدام الشروط الأولية أيضاً ، يمكننا إيجاد صيغة لـ $u(x)$ تعتمد على x و α وهذا يعني يمكننا أن نكتب

$$u(x) = u(x, \alpha) . \tag{16.3}$$

نعوض (16.3) وهي النتيجة المشتقة من تكامل (15.3) في الجانب الأيمن لـ (14.3) ونحسب التكامل . ودمج وحل المعادلة الناتجة أيضاً، عندما نحدد α نحصل على الحل الدقيق لـ $u(x)$ بعد إستبدال α في المعادلة (16.3) .

مثال 4.1.3

حل معادلة فريدهولم التكاملية ـ التفاضلية التالية

-1

$$u'(x) = 12x + \int_0^1 u(t)dt \ ,$$

مع

$$u(0) = 0$$

الحل

نضع

$$\alpha = \int_0^1 u(t)dt \tag{17.3}$$

ومنه

$$u'(x) = 12x + \alpha \quad ; \ u(0) = 0,$$

نكامل طرفي المعادلة المتحصل عليها من 0 إلى x ، وباستخدام الشرط الأولي نحصل على

$$u(x) = 6x^2 + \alpha x,$$

وبتعويضها في (17.3) نحصل على

$$\alpha = \int_0^1 u(t)dt = \int_0^1 (6t^2 + \alpha t)dt,$$

$$\alpha = 2 + \frac{1}{2}\alpha,$$

ومنه

$$\alpha = 4,$$

إذن الحل الدقيق هو

$$u(x) = 6x^2 + 4x.$$

طريقة تفكيك أدوميان

في الفصل السابق ، تمّ تقديم طريقة التحلل الآدومية على نطاق واسع لحل معادلات فريدهولم التكاملية ، في هذا الجزء سندرس كيف يمكن تنفيذ هذه الطريقة القوية لتحديد حل متسلسل لمعادلات فريدهولم التكاملية ـ التفاضلية .
سنفترض نموذجاً قياسياً لمعادلة فريدهولم التكاملية ـ التفاضلية كما هو موضح أدناه

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,t)u(t)dt \quad ,u^{(k)} = b_k(0) \quad ; \ 0 \leq k \leq (n-1) \qquad (18.3)$$

نستبدل $k(x,t) = g(x)h(x)$ في المعادلة (18.3) ينتج عنه

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x)\int_0^1 h(t)u(t)dt, \qquad (19.3)$$

يمكن كتابة المعادلة (19.3) بصيغة المؤثر التفاضلي كما يلي

$$Lu(x) = f(x) + g(x)\int_0^1 h(t)u(t)dt, \qquad (20.3)$$

حيث يتم إعطاء المؤثر التفاضلي بواسطة $L = \frac{d^n}{dx^n}$ ومن الواضح أن L هو مؤثر قابل للعكس.
وبالتالي فإن العامل المتكامل L^{-1} هو مؤثر تكامل n مرة .
يؤدي تطبيق L^{-1} على طرفي المعادلة (20.3) إلى الحصول على

$$\begin{aligned} u(x) = b_0 + b_1 x + \frac{1}{2!}b_2 x^2 + ... + \frac{1}{(n-1)!}b_{n-1}x^{n-1} \\ + L^{-1}(f(x)) + \left(\int_0^1 h(t)u(t)dt\right) L^{-1}(g(x)) \end{aligned} \qquad (21.3)$$

بمعنى آخر، نكامل المعادلة (19.3) n مرة من 0 إلى x ونستخدم الشروط الأولية في كل خطوة من خطوات التكامل . ومن المهم ملاحظة أن المعادلة التي تم الحصول عليها في المعادلة (21.3) هي معادلة فريدهولم التكاملية القياسية . في طريقة التحلل ، نحدد عادة الحل $u(x)$ للمعادلة (18.3) في شكل متسلسلة تعطى بواسطة

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x) \tag{22.3}$$

استبدال المعادلة (22.3) في طرفي المعادلة (21.3) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k+L^{-1}(f(x))+\left(\int_0^1 h(t)u(t)dt\right)L^{-1}(g(x)) \tag{23.3}$$

ويمكن كتابة ذلك بشكل مبسط على النحو التالي

$$\begin{aligned}u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+.......=&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k+L^{-1}(f(x))\\&+\left(\int_0^1 h(t)u_0(t)dt\right)L^{-1}(g(x))\\&+\left(\int_0^1 h(t)u_1(t)dt\right)L^{-1}(g(x))\\&+\left(\int_0^1 h(t)u_2(t)dt\right)L^{-1}(g(x))\\&+........\end{aligned} \tag{24.3}$$

يتم تحديد المركبات $u_0(x),u_1(x),u_2(x),......$ للدالة المجهولة $u(x)$ بطريقة التكرار إذا حددنا

$$\begin{aligned}u_0(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k+L^{-1}(f(x))\\u_1(x)&=\left(\int_0^1 h(t)u_0(t)dt\right)L^{-1}(g(x))\\u_2(x)&=\left(\int_0^1 h(t)u_1(t)dt\right)L^{-1}(g(x))\\.........&=.....................................\end{aligned}$$

يمكن كتابة المخطط أعلاه على النحو التالي

$$u_0(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}b_kx^k+L^{-1}(f(x))$$

$$u_{n+1}(x)=\left(\int_0^1 h(t)u_n(t)dt\right)L^{-1}(g(x)) \quad ,n\geq 0$$

مثال 5.1.3

باستخدام طريقة التفكيك، حل معادلة فريدهولم التكاملية ـ التفاضلية

-1

$$u'(x)=\cos x+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xt\,u(t)dt, \qquad u(0)=0.$$

الحل

بمكاملة طرفي المعادلة من 0 إلى x نحصل على

$$u(x)-u(0)=\sin x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}x^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,u(t)dt, \qquad u(0)=0.$$

الذي يعطي عند استخدام الشرط الأولي

$$u(x)=\sin x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}x^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,u(t)dt,$$

لدينا

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x).$$

بالتعويض في طرفي المعادلة تصبح كمايلي

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\sin x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}x^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)dt,$$

باستخدام علاقة التكرار نجد

$$\begin{aligned}
u_0(x)&=\sin x+\frac{1}{8}x^2,\\
u_1(x)&=-\frac{1}{8}x^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,u_0(t)dt\right)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{\pi^4}{16^3}x^2,\\
u_2(x)&=-\frac{1}{8}x^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,u_1(t)dt\right)=\frac{\pi^4}{16^3}x^2+\frac{\pi^8}{2\times 16^5}x^2,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

ومن ثم ، نحصل على الحل الدقيق

$$u(x) = \sin x$$

2.3 المعادلات التكاملية الشاذة

يهتم هذا القسم من هذا الفصل بالمعادلة التكاملية المفردة (الشاذة)التي لها تطبيقات هائلة في المسائل التطبيقية بما في ذلك ميكانيكا الموائع والحيوية و النظرية الكهرومغناطيسية .
تسمى المعادلة التكاملية بالمعادلة التكاملية المفردة أو الشاذة إذا أصبح أحد حدي التكامل أو كليهما لانهائيا، أو إذا أصبحت نواة المعادلة $k(x,t)$ لا نهائية عند نقطة واحدة أو أكثر في فترة التكامل، بمعنى آخر المعادلة التكاملية من النوع الأول

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt, \tag{25.3}$$

و المعادلة التكاملية من النوع الثاني

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt, \tag{26.3}$$

تسمى مفردة أو شاذة إذا كان الحد الأدنى $\alpha(x)$ أو الحد الأعلى $\beta(x)$ أو كلا حدي التكامل لا نهائيين و تسمى المعادلات المذكورة أعلاه أيضا معادلات تكاملية مفردة إذا أصبحت النواة $k(x,t)$ لا نهائية عند نقطة واحدة أو أكثر في مجال التكامل .
فيما يلي أمثلة من النوع الثاني من المعادلات التكاملية الشاذة

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt, \tag{27.3}$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}} u(t)dt, \tag{28.3}$$

$$u(t) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt, \tag{29.3}$$

في هذه الأمثلة النواة غير منتهية لما $x \to \infty$

ملاحظة (1)

من المهم الإشارة إلى أن المعادلتين التكامليتين (27،3) و (28،3) تسميان بمعادلة (مشكلة) آبل ومعادلات آبل االتكاملية المعممة على التوالي ، وتسمى المعادلة المفردة (29،3) عادة بمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ضعيفة المفرد .

في هذا الجزء من الفصل سنركز في البحث وشرح الانواع التالية

- معادلة (مشكلة) آبل .
- معادلات آبل التكاملية المعممة .

1،2،3 معادلة (مشكلة) آبل .

المعادلة التكاملية لمشكلة آبل تكتب من الشكل

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt. \tag{30،3}$$

يعطى حل هذه المعادلة بإستخدام تحويل لابلاس ، بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة أعلاه نحصل على

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt\right\} = \mathscr{L}\{f(x)\}. \tag{31،3}$$

بإستخدام نظرية الإلتفاف وبعد إجراء بعض الإختزال ، يمكن كتابة المعادلة المحولة في صورة بسيطة

$$\mathscr{L}\{u(x)\} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \mathscr{L}\{f(x)\}. \tag{32،3}$$

إستخدمنا هنا نتيجة $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. لا يمكن عكس التحويل أعلاه بصيغته الحالية ، لذا نعيد كتابة المعادلة على النحو التالي

$$\mathscr{L}\{u(x)\} = \frac{s}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \mathscr{L}\{f(x)\}\right]. \tag{33،3}$$

بإستخدام نظرية الإلتفاف يمكن عكسها للحصول على

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathscr{L}^{-1}\left\{s\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\mathscr{L}\{f(x)\}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x-t}}f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt \end{aligned} \tag{34.3}$$

نلاحظ أنه لا يمكن إستخدام قاعدة لبنيتز للإشتقاق في التكامل أعلاه ، لذا نقوم بإيجاد تكامل التكامل أولا ثم نأخذ المشتق بالنسبة لـ x ، هذا يعطينا

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left\{-2\left(\sqrt{x-t}\right)f(t)\big|_0^x + 2\int_0^x \sqrt{x-t}f'(t)\,dt\right\} \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{f(0)}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}}dt\right\}. \end{aligned} \tag{35.3}$$

هذا هو الحل المطلوب لمشكلة آبل .

مثال 1.2.3

لنعتبر المعادلة التكاملية لآبل التالية

$$3x^2 = \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}}dt$$

يمكننا كتابة المعادلة السابقة باستعمال جداء اللّف كما يلي

$$3x^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) * u(x)$$

ثم باستعمال تحويل لابلاس نتحصل على

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{3x^2\} &= \mathscr{L}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) * u(x)\right\} \\ \frac{6}{s^3} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\mathscr{L}\{u(x)\} \end{aligned}$$

ومنه

$$\mathscr{L}\{u(x)\} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}s^{\frac{-5}{2}}$$

نستعمل تحويل لابلاس العكسي على طرفي المعادلة نجد

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{6}{\sqrt{\pi}}\mathscr{L}\left\{s^{\frac{-5}{2}}\right\} \\ u(x) &= \frac{8}{\pi}x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

وهو الحل المطلوب للمعادلة .

2.2.3 معادلة تكامل آبل المعممة من النوع الأول

تعطى المعادلة التكاملية بالصيغة التالية

$$\int_0^x \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} = f(x) \quad ,0<\alpha<1 \tag{36.3}$$

بأخذ تحويل لابلاس لكلا الطرفين بمساعدة نظرية الإلتفاف نحصل على

$$\mathscr{L}\left\{x^{-\alpha}\right\}\mathscr{L}\{u(x)\} = \mathscr{L}\{f(x)\} \tag{37.3}$$

أو

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}\mathscr{L}\{u(x)\} = \mathscr{L}\{f(x)\} \tag{38.3}$$

ومن ثم بإعادة ترتيب الحدود نحصل على

$$\mathscr{L}\{u(x)\} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} s\left\{\frac{1}{s^\alpha}\mathscr{L}\{f(x)\}\right\} \tag{39.3}$$

بإستخدام نظرية الإلتفاف لتحويل لابلاس يمكن الحصول على المعادلة (39.3) على الصورة

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left\{\int_0^x (x-t)^\alpha f(t)\,dt\right\} \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\frac{d}{dx}\left\{\frac{(x-t)^\alpha}{-\alpha} f(t)\Big|_0^x + \frac{1}{\alpha}\int_0^x (x-t)^\alpha f'(t)\,dt\right\} \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\frac{d}{dx}\left\{\frac{(x)^\alpha}{\alpha} f(0) + \frac{1}{\alpha}\int_0^x (x-t)^\alpha f'(t)\,dt\right\} \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left\{\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(t)\,dt}{(x-1)^{1-\alpha}}\right\} \end{aligned} \tag{40.3}$$

هذا هو الحل المطلوب للمعادلة التكاملية ، هنا يجب أن يكون

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\sin(x\alpha)}{\pi}$$

تعريف دالة قاما هو

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx$$

3.2.3 معادلة تكامل آبل المعممة من النوع الثاني

تكتب معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني لمشكلة آبل التكاملية كما يلي

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)\,dt \\ &= f(x) + \int_0^x \frac{u(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}. \end{aligned} \tag{41.3}$$

وينسب حل هذه المعادلة التكاملية إلى نظرية الإلتفاف لتحويل لابلاس .
بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة نحصل على

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{u(x)\} &= \mathscr{L}\{f(x)\} + \mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}\mathscr{L}\{u(x)\} \\ &= \mathscr{L}\{f(x)\} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{s}}\mathscr{L}\{u(x)\}. \end{aligned} \tag{42.3}$$

وبعد الإختزال يمكن التعبير عن ذلك على الصورة

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{u(x)\} &= \left\{\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\}\mathscr{L}\{f(x)\} \\ &= \mathscr{L}\{f(x)\} + \left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\}\mathscr{L}\{f(x)\}. \end{aligned} \tag{43.3}$$

ويعطى إنعكاس المعادلة (43.3) بالعلاقة

$$u(x) = f(x) + \int_0^x g(t)f(x-t)\,dt. \tag{44.3}$$

حيث

$$g(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\}$$

معكوس لابلاس لـ $\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\}$ هو

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s-a}-b}\right\} = e^{ax}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + be^{b^2x}erfc\left(-b\sqrt{x}\right)\right\}.$$

في هذه المسألة a=0 و $b=\sqrt{\pi}$ و بالتالي

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\} = \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{\pi}e^{\pi x}erfc\left(-\sqrt{\pi x}\right)\right\}.$$

نلاحظ هنا أن $erfc=\left(-\sqrt{\pi x}\right)=erfc\left(\sqrt{\pi x}\right)$ ومن ثم

$$\begin{aligned} g(x) &= \left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\} \\ &= \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{\pi}e^{\pi x}erfc\left(\sqrt{\pi x}\right)\right\}. \end{aligned}$$

الفصل الرابع

تطبيقات على المعادلات التفاضلية العادية .

تعتبر المعادلات التفاضلية العادية مصدر مثمر بالنسبة للمعادلات التكاملية ، في هذا الفصل سنقوم سنقوم بانشاء معادلة تكاملية انطلاقا من المعادلات التفاضلية العادية .

1.4 مسائل القيم الابتدائية .

لنعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة n التالية

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+p_2(x)y^{(n-2)}(x)+\cdots+p_n(x)y(x)=\phi(x), \qquad (1.4)$$

مع الشروط الإبتدائية التالية

$$y(0)=q_0 \quad , \ y'(0)=q_1,\ldots,\ y^{(n-1)}(0)=q_{n-1}. \qquad (2.4)$$

بحيث

$$y^{(n)}(x)=\frac{d^n y(x)}{dx^n}.$$

الدوال $p_n(x)$,... ,$p_2(x)$,$p_1(x)$ و$\phi(x)$ هي دوال مستمرة بوضع الدالة المجهولة $u(x)$ الدالة

$$y^{(n)}(x)=\frac{d^n y(x)}{dx^n}=u(x),$$

ثم نكامل من 0 إلى x نتحصل على

$$\left[y^{(n-1)}(x)\right]_0^x=\int_0^x u(t)\,dt,$$

ومنه

$$y^{(n-1)}(x)=q_{n-1}+\int_0^x u(t)\,dt.$$

نكامل للمرة الثانية من 0 إلى x نجد

$$\begin{aligned} y^{(n-2)}(x)&=q_{n-2}+x\,q_{n-1}+\int_0^x\int_0^x u(t)\,dt\,dt\\ &=q_{n-2}+x\,q_{n-1}+\int_0^x (x-t)u(t)\,dt. \end{aligned}$$

باستعمال نفس الطريقة وبالمكاملة n مرة ينتج لنا

$$y(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}q_{n-1}+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}q_{n-2}+\cdots+x\,q_1+q_0+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)\,dt.$$

بالتعويض بقيم كل من $y^{(n)}$ ، $y^{(n-1)}$ ، ...، y في المعادلة (6.4) نحصل على المعادلة التالية

$$\begin{aligned} u(x) = \phi(x) - q_{n-1}p_1(x) - [x\,q_{n-1} + q_{n-2}]\,p_2(x) \\ - \cdots - \left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}q_{n-1} + \cdots + x\,q_1 + q_0\right]p_n(x) \\ - \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\right)u(t)\,dt \end{aligned} \tag{3.4}$$

والتي تأخذ الشكل العام التالي

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)\,dt\,.$$

وهي معادلة تكاملية لفولتيرا من النوع الثاني ، وبالتالي كل حل للمعادلة (3.4) هو أيضا حلاً لمسألة القيم الإبتدائية (6.4) و(2.4) .

من أجل $n=2$ تكون لدينا مسألة القيم الإبتدائية التالية

$$\begin{cases} y''(x) + p_1(x)\,y'(x) + p_2(x)\,y(x) = \phi(x) \\ y(0) = q_0 \quad , \; y'(0) = q_1\,, \end{cases}$$

والتي تكافئ لنا المعادلة التكاملية

$$\begin{aligned} u(x) = \phi(x) - q_1p_1(x) - [x\,q_1 + q_0]\,p_2(x) \\ - \int_0^x [p_1(x) + p_2(x)(x-t)]u(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

مثال 1.1.4

لنعتبر مسألة القيم الابتدائية التالية

$$\begin{aligned} & y''(x) - (\sin x)\,y(x) + e^x\,y(x) = x \\ & y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

بوضع $y''(x) = u(x)$ ثم نكامل بالنسبة لـ x من 0 إلى x نجد

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(t)\,dt$$

باستعمال الشرط $y(0)=1$ يصبح لدينا

$$y'(x)=-1+\int_0^x u(t)\,dt$$

نقوم بالمكاملة للمرة الثانية بنفس الطريقة نجد

$$y(x)-y(0)=-x+\int_0^x\int_0^x u(t)\,dt\,dt$$

أي أن

$$y(x)=1-x+\int_0^x (x-t)\,u(t)\,dt$$

نقوم باستبدال قيم كل من $y''(x)$ ، $y'(x)$ و $y(x)$ في المعادلة (4.4) ينتج لنا المعادلة

$$u(x)=x-\sin x-e^x(1-x)+\int_0^x [\sin x-e^x(x-t)]u(t)\,dt \tag{5.4}$$

التي تمثل معادلة تكاملية خطية غير متجانسة من النوع الثاني لفولتيرا

2.4 مسائل القيم الحدية

في حين أن مسائل القيم الابتدائية لمعادلات تفاضلية عادية تقودنا إلى معادلات تكاملية لفولتيرا، فإن مسائل القيم الحدية لمعادلات تفاضلية عادية تقودنا إلى معادلات تكاملية لفريدهولم.

سنقوم بشرح هذا التكافؤ بواسطة المسألة التالية

$$y''(x)+A(x)y'(x)+B(x)y(x)=F(x) \tag{6.4}$$

$$y(a)=y_0,\ y(b)=y_1 \tag{7.4}$$

بمكاملة المعادلة (6.4) من a إلى x ثم باستعمال الشرط $y(a)=y_0$ نحصل على العلاقة التالية

$$\begin{aligned} y'(x)=C+\int_a^x F(t)\,dt-A(x)y(x)+A(a)y_0 \\ +\int_a^x [A'(t)-B(t)]\,y(t)\,dt \end{aligned} \tag{8.4}$$

بحيث C يمثل ثابت التكامل.
بالمكاملة للمرة الثانية بنفس الطريقة نجد

$$\begin{aligned} y(x)-y_0 &= [C+A(a)\,y_0](x-a)+\int_a^x (x-t)\,F(t)\,dt \\ &-\int_a^x A(t)\,y(t)\,dt+\int_a^x (x-t)[A'(t)-B(t)]\,y(t)\,dt \end{aligned} \tag{9.4}$$

يمكننا الحصول على الثابت C بوضع $x=b$ في (9.4) ثم باستعمال الشرط $y(b)=y_1$ نحصل على

$$\begin{aligned} y_1-y_0 &= [C+A(a)\,y_0](b-a)+\int_a^b (b-t)F(t)\,dt \\ &-\int_a^b \{A(t)-(b-t)[A'(t)-B(t)]\}\,y(t)\,dt \end{aligned} \tag{10.4}$$

أو بعبارة مكافئة

$$\begin{aligned} C+A(a)\,y_0 &= \frac{1}{b-a}\Big\{y_1-y_0-\int_a^b (b-t)F(t)\,dt \\ &+\int_a^b \{A(t)-(b-t)[A'(t)-B(t)]\}\,y(t)\,dt\Big\} \end{aligned} \tag{11.4}$$

من (9.4) و (11.4) نحصل على

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0+\int_a^x (x-t)\,F(t)\,dt+\frac{x-a}{b-a}\Big[(y_1-y_0)-\int_a^b (b-t)\,F(t)\,dt\Big] \\ &-\int_a^x \{A(t)-(x-t)[A'(t)-B(t)]\}\,y(t)\,dt \\ &+\int_a^b \frac{x-a}{b-a}\{A(t)-(b-t)[A'(t)-B(t)]\}\,y(t)\,dt \end{aligned} \tag{12.4}$$

المعادلة (12.4) يمكن كتابتها كمعادلة تكاملية لفريدهولم

$$y(x)=f(x)+\int_a^b k(x,t)\,u(t)\,dt \tag{13.4}$$

بحيث

$$\begin{aligned} f(x) &= y_0+\int_a^x (x-t)\,F(t)\,dt \\ &+\frac{x-a}{b-a}\Big[(y_1-y_0)-\int_a^b (b-t)\,F(t)\,dt\Big] \end{aligned} \tag{14.4}$$

و

$$k(x,t)=\begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}\{A(t)-(b-t)[A'(t)-B(t)]\}, & x<t \\ A(t)\Big\{\dfrac{x-a}{b-a}-1\Big\}-[A'(t)-B(t)]\dfrac{(t-a)(b-x)}{b-a}, & x>t \end{cases} \tag{15.4}$$

من أجل الحالة الخاصة لما A و B ثابتين، $a=0$ ، $b=1$ و $y(0)=y(1)=0$ فإن النواة (15.4) تبسط إلى

$$k(x,t)=\begin{cases} Bx(1-t)+Ax, & x<t \\ Bt(1-x)+Ax-A, & x>t \end{cases} \tag{16.4}$$

نلاحظ أن هذه النواة تناظرية و غير مستمرة عند $t=x$ إلا إذا كان $A\equiv 0$.

مثال 1.2.4

لنعتبر مسألة القيم الحدية التالية

$$y''(x)+\lambda p(x)y(x)=q(x) \tag{17.4}$$

$$y(a)=0,\quad y(b)=0 \tag{18.4}$$

من أجل تحويل هذه المسألة إلى معادلة تكاملية لفريدهولم، نقوم فقط بمقارنة كل من (17.4) و (18.4) بالمعادلتين (6.4) و (7.4) ، نجد $A=0$، $B=\lambda p(x)$، $F(x)=q(x)$ و $y_0=y_1=0$ ثم بالتعويض بهذه القيم في العلاقتين (14.4) و (15.4) نحصل على

$$f(x)=\int_a^x (x-t)q(t)dt-\frac{x-a}{b-a}\int_a^b (b-t)q(t)dt \tag{19.4}$$

و

$$k(x,t)=\begin{cases}\lambda p(t)\dfrac{(x-a)(b-t)}{b-a}, & x<t\\ \lambda p(t)\dfrac{(t-a)(b-x)}{b-a}, & x>t\end{cases} \tag{20.4}$$

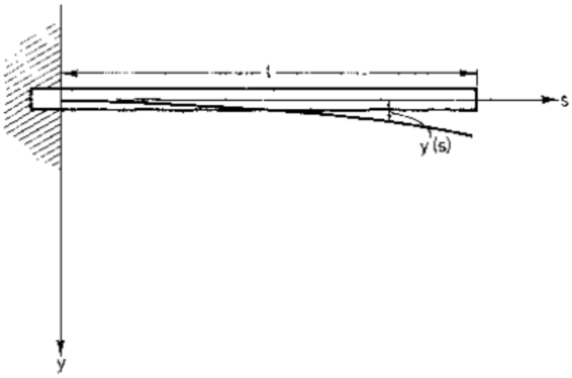
التذبذبات العرضية لشريط مرن

نعتبر شريط مطاطي متجانس مع كثافة كتلة خطية d محور ها ينطبق مع القطعة (o,l) من المحور (ox) عندما يكون الشريط في حالة سكون .
ثم تثبيته عند النهاية $x=0$ وحر (غير مثبت) عند النهاية $x=l$ ويتم تحفيزه لإنشاء تذبذبات توافقية بسيطة دورية ودورها $\frac{2\pi}{\omega}$.
المسألة الموضحة في الشكل 4.1 هي إيجاد الإنحراف $y(x)$ الموازي للمحور z والذي يحقق

جملة المعادلات التالية

$$\begin{aligned} &\frac{d^4y}{dx^4} - k^4 y = 0 \ \ , \ k^4 = \frac{\omega^2 d}{El}, \\ &y(0) = y'(0) = 0, \\ &y''(l) = y'''(l) = 0. \end{aligned} \tag{21.4}$$

أين El يمثل صلابة الإنحناء للشريط .



شكل 4.1

هذه المعادلة التفاضلية (21.4) مع الشروط الحدية ، يمكن تخفيضها إلى حل معادلة تكاملية لفولتيرا ، إذا اشترطنا أن

$$y''(0) = c_2 \ \ , \ \ y'''(0) = c_3 \ , \tag{22.4}$$

ثم نحدد الثابتين c_2 و c_3 باستعمال المعادلة (21.4) .

في الواقع ، عندما نقارن مشكلة القيمة الإبتدائية المتجسدة في (21.4)، (22.4) مع النظام (6.4) و(3.4) نحصل على المعادلة التكاملية المطلوبة

$$g(x) = k^4\left(\frac{x^2}{2!}c_2 + \frac{x^3}{3!}c_3\right) + k^4\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} g(t)\, dt,$$

حيث

$$g(x) = \frac{d^4y}{dx^4}.$$

من أجل حل هذه المعادلة التكاملية نستعمل طريقة تحويل لابلاس ، و الحل معطى بالعلاقة التالية

$$y(x) = \frac{1}{2}c_2 k^2\left[\cosh kx - \cos kx\right] + \frac{1}{2}c_3 k\left[\sinh kx - \sin kx\right]$$

.

الخاتمة

من أدق ما درس في الرياضيات التكامل حيث أنه يدخل في جميع تخصصات الرياضيات النظرية والتطبيقية، وكذا في تخصصات الفيزياء و الكيمياء.
وقد حاولنا في هذه المذكرة دراسة بعض المعادلات التكاملية الخطية وتطبيقاتها ، حيث قدمنا في البداية بعض المفاهيم الأساسية ، ثم تطرقنا إلى الطرق التحليلية لحل أنواع المعادلات التكاملية الخطية ، وفي الأخير درسنا بعض التطبيقات الخاصة بها . وفي الأخير نتمنى أن نكون قد ساهمنا ولو بالقليل في إثراء هذا الموضوع ، ونرجو أن يكون عملنا المتواضع هذا مرجعا لطلبة المستقبل وإفادة لمكتبة المدرسة العليا.
فالحمد لله وحده لاشريك له على توفيقه لنا في إنجاز عملنا هذا ، ونسأله عزوجل أن يعود علينا جميعا بالخير ، وأن يوفقنا لما يحبه ويرضى ، فإن أخطأنا فمن أنفسنا ، وإن أصبنا فمن الله عزوجل .

المراجع العلمية

[1] Bocher,M.IntegralEquations,CambridgeUniversityPress,London,(1974).

[2] C.D. Green, Integral Equations Methods, Barnes and Noble, New York, (1969).

[3] Lovitt,W.V.Linear Integral Equations, Dover Publications Inc. : New York,1950.

[4] M. Rahman, Integral equations and their applications, Dalhousie University, Canada 2007.

[5] N. TikhonovA, On the solution of incorrectly posed problem and the method of regularization, Soviet Math, 4 (1963) 1035-1038.

[6] R. Kanwal, Linear integral equation theory and technique, New York 1971.

[7] R. Kanwal, Linear Integral Equations, Birkhauser, Boston, (1997).

[8] R. Kress, Linear Integral Equations,Springer, Berlin, (1999).

[9] Wazwaz, A.M., A First Course in Integral Equations, World Scientific: Singapore, 1997.

ملخص

تعتبرالمعادلات التكاملية من المواضيع الأساسية في الرياضيات ومساهمةً في تقديم نظرة عن هذاالموضوع ارتأينا أن نقدم بحثنا هذا تحت عنوان"المعادلات التكاملية الخطية وتطبيقاتها"، وقد تضمنت مذكرتنا أربع فصول . **الفصل الأول** قد تم فيه التذكير ببعض المفاهيم الأساسية التي ترتبط بالفصول الأخرى. ثم تطرقنا في **الفصل الثاني** إلى دراسة طرق حل المعادلات التكاملية لفريدهولم وفولتيرا تحليليا و **الفصل الثالث** سلطنا الضوء على دراسة الطرق التحليلية للمعادلات التكاملية - التفاضلية لفولتيرا وفريدهولم ، كما درسنا المعادلات الشاذة التي لها تطبيقات هائلة في المسائل التطبيقية فقمنا بالتركيز في البحث عن **معادلة آبل** ، **معادلات آبل المعممة** وشرحها . وأدرجنا في **الفصل الرابع** بعض التطبيقات للمعادلات التكاملية الخطية .