الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم المتوسط
قسم الرياضيات
تحت عنوان:

دراسة تحليلية لمعادلات تفاضلية غير خطية من الرتبة الرابعة بنقطتين و شرط تكاملي

من إعداد :

- بن عزوز شيماء
- سناني لينا

لجنة المناقشة

منصوري بوزيد	أستاذ	مشرف
كاف أسماء	أستاذة	مناقشة
رمضان سميرة	أستاذة	رئيسة
خشمان حسام الدين	أستاذ	مناقش

السنة الجامعية: 2024-2023

إهداء

من قال أنا لها "نالها" وأنا لها وإن أبت رغماً عنها أتيتُ بها. نلتها وعانقت اليوم مجداً عظيماً، فعلتها بعد ان كانت مستحيلة، كانت دروباً قاسية، وطرقاً خسرت بها الكثير ولكني "وصلت".

الحمد لله حباً وشكراً وإمتناناً، الحمد لله الذي بفضله أدركت اسمى الغايات انظر لنفسي ولنجاحي كالذي ينظر الى معجزته، تحقق بفضل الله وأصبح واقعاً افتخر به الحمد لله الذي وفقني لكتابة هذا العمل المتواضع الذي اهديه:

الى العزيز الذي حملت اسمه فخراً ، يُردد إسمي عالياً في عنان السماء حاملاً شرف لقبك وبكل إعتزاز انا لهذا الرجل إبنه الى من كلله الله بالهيبة والوقار الى الذي حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم الى والدي العزيز .

الى من كانت الداعمة الأولى والأبدية، ملاكي الطاهر، من كان وجودها يمدني بالسعي دون ملل، الى التي ظلت دعواتها تضم اسمي دائماً، معلمتي الأولى، أمي ومحبوبتي وملهمتي أهديك هذا الإنجاز الذي لولاك لم يكن، اهديك مراحلي وإنجازاتي كلها فالفضل والثناء للمولى ثم لكفاحك لأجلي ، وعطائك الذي يضمد تعبي. اكتفيت بك عن العالم أجمع يا خير عوض وأعظم سند، كُنتِ لي النور في دربي الشاق مضينا معاً طريقاً لم يكن محفوفاً بالسهولة، ممتنه لأن الله اصطفاك من البشر اماً لي .

الى خيرة أيامي وصفوتها، الى من يفتخرون بي وأمنوا بقدراتي، الى ضلعي الثابت وأمان أيامي الى من أرى التفاؤل بعينيهما والسعادة في ضحكتيهما اخواتي فريال وأسماء.

إلى من بهن أكبر وعليهن أعتمد .. إلى شموع متقدة تنير ظلمة حياتي.. إلى من بوجودهن أكتسب قوة ومحبة لا حدود لها.. إلى من عرفت معهن معنى الحياة الى جدتي، خالتي، مروة، صوفيا.

الى الأخوات اللواتي لم تلدهن أمي.. إلى من تحلو بالإخاء وتميزوا بالوفاء والعطاء إلى ينابيع الصدق الصافي إلى من معهم سعدت، وبرفقتهم في دروب الحياة الحلوة والحزينة سرت إلى من كانوا معي على طريق النجاح والخير إلى من عرفت كيف أجدهم وعلموني أن لا أضيعهم صديقاتي نهى ،خلود، عبير، جيهان، لينا.

الذين كانوا عونا لي في بحثي هذا ونورا يضيء الظلمة التي كانت تقف أحيانا في طريقي.

إلى من زرعوا التفاؤل في دربي وقدموا لي المساعدات والتسهيلات والأفكار والمعلومات، ربما دون أن يشعروا بدورهم فلهم مني كل الشكر، وأخص منهم محمد الناصر لعور.

الى الأستاذ عادل صياد الذي مد لي يد العون و المساعدة طيلة التربص شكرا لدعمك اللامتناهي .

أخيراً الشكر موصول لنفسي على الصبر والعزيمة والإصرار، والتي كانت اهلاً للمصاعب، ها أنا اختم كل ما مررت به بفخر ونجاح الحمد لله من قبل ومن بعد، راجية من الله تعالى أن ينفعني بما علمني وان يعلمني ما أجهل ويجعله حجة لي لا علي.

شيماء بن عزوز

إهداء

قال تعالى(قل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون)

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك...

ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك...

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار إلى من علمني العطاء بدون انتظار إلى من أحمل اسمه بكل افتخار إلى تاج نخر طالما حملته على رأسي، فلك كامل الشكر والعرفان والدي العزيز

إلى ملاكي في الحياة إلى معنى الحب وإلى معنى الحنان والتفاني إلى بسمة الحياة وسر الوجود إلى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي أمي العزيزة

إلى من كانو ومازالو سندي وسام عزتي وكبريائي إلى نعم الإخوة حسام، محمد إسلام

إلى الأقرباء اللذين وقفو جانبي، كما وقف أهلي أهدي هذا العمل ، فأمنياتهم اللطيفة لي و دعائهم بالنجاح ودعمهم وتشجيعهم، مكنني من اجتياز مرحلة من مراحل حياتي فلكم جزيل الشكر عمتي، عمي، خالاتي، جداتي

إلى من قضيت معهم أجمل ايام حياتي وعشت معهم أحلى الذكريات وكانو أسعد الناس بنجاحي إلى من هونو عليا الطريق إلى صديقات الطرق جميعًا الوعرة والسهلة، المظلمة والمشرقة، إلى من مدت أياديهم في أوقات الضعف، غير راضين باستكانتي أهدي هذا العمل إليكم يا صديقاتي الداعمين في أحنك الظروف أهدي لحظة فرحي نهى، عبير، شيماء، هند

إلى رفيق الدرب، وصديق الأيام بحلوها ومرها أكرم

إلى الأستاذ سلطاني زكرياء الذي دعمني وساهم في اعطائي كل ما في عالم التعليم جزاك الله خيرا.

سناني لينة

قائمة المحتويـــــــات

المقــدمة

يمكن صياغة العديد من المشاكل في مختلف المجالات مثل علوم الفيزياء الكلاسيكية والحديثة، والكيمياء، والهندسة، والاقتصاد، والحاسوب، وحتى في الطب بواسطة المعادلات التفاضلية غير الخطية ونخص بالذكر المعادلات التفاضلية غير الخطية من الدرجة الرابعة، حيث جذبت هذه الاخيرة انتباه علماء الرياضيات والفيزياء والمهندسين.

هناك العديد من الطرق التحليلية وهناك أيضا العديد من الطرق العددية المستخدمة لحل المعادلات التفاضلية من الدرجة الرابعة فقد قدم العديد من العلماء طرق عددية لحل المعادلات التفاضلية حيث أظهرت نتائج جيدة.

في عام 2016 درس بن عيشة وحدوشي المسألة التالي

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + f\left(t, u(t)\right) = 0,\ t \in (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = u''(0) = 0,\ u(0) = \int_0^1 a(s)\, u(s)\, ds, \end{cases}$$

حيث باستعمال نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسلسكي في القمع برهنا وجود حل موجب لهذه المسألة.

في هذه مذكرة، قام كل من منصوري، عرجوني وجودي باستخدام نظرية النقطة الثابتة لشودر وشرط ابتدائي تكاملي لضمان وجود ووحدانية الحل الموجب لمعادلة تفاضلية غير خطية من الدرجة الرابعة التالية

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + f\left(u^{[0]}(t), u^{[1]}(t), u^{[2]}(t), \ldots, u^{[N]}(t)\right) = 0,\ t \in (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = u''(0) = 0,\ u(0) = \int_0^1 a(s)\, u(s)\, ds, \end{cases}$$

حيث

$$u^{[0]}(t) = t, u^{[1]}(t) = u(t), u^{[2]}(t) = u(u(t)), \ldots, u^{[N]}(t) = u\left(u^{[N-1]}(t)\right),$$

$a \in C([0,1], [0,+\infty[)$، و $0 < \int_0^1 a(s)\, ds < 1$.

في نهاية الدراسة سيتم تقديم أمثلة لتوضيح النتائج التي تم الحصول عليها. و قد قسمت المذكرة كالتالي

في الفصل الاول قمنا بتقديم مفاهيم وتعاريف مهمة بالاضافة الى عرض أهم نظريات النقطة الثابتة المستخدمة في هته المذكرة.

أما في الفصل الثاني قمنا تقديم نظريات وبراهين التي تثبت وجود ووحدانية الحل الموجب وللتاكد من صحة هته النتائج اقمنا بتقديم مثالين لتوضيح صحة الدراسة.

الفصل 1

مفاهيم وتعاريف أساسية

اخترنا ان نفتتح مذكرتنا بتذكير حول أهم التعاريف والمفاهيم الأساسية التي سنستعين بها في الفصل الثاني.

1.1 المعادلات التفاضلية

1.1.1 تعريف المعادلة التفاضلية

المعادلة التفاضلية هي علاقة بين المتغير التابع ليكن y والمتغير (المتغيرات) المستقل(المستقلة) x تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات.

$$y, y^{'}, y^{''} .... y^{(n)}),$$

أي أنها على الصورة

$$F(x, y, y^{'}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

مثال 1.1.1 نقدم الآن أمثلة عن المعادلات التفاضلية في الفيزياء

1- نقدم في هذا المثال قانون نيوتن الذي ينص على أن معدل التغير الزمني لدرجة حرارة جسم يتناسب طردياً مع الفرق بين درجتي حرارة الجسم والوسط المحيط به، فإذا كانت T هي درجة حرارة الجسم و T_s هي درجة حراة الوسط المحيط فإن معدل التغير الزمن لدرجة حرارة الجسم هو $\frac{dT}{dt}$ ويمكن صياغة قانون نيوتن للتبريد كالآتي

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_s$$

-2 لدينا قانون كرشوف الذي ينص على أن المجموع الجبري للجهد حول دائرة بسيطة مغلقة يساوي صفر، الذي يتمثل في المعادلة التفاضلية التالية

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E.$$

-3 لدينا المعادلة التفاضلية التالية المستخدمة في مسائل الجسم الساقط في الفيزياء

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{M}v = g.$$

2.1.1 أقسام المعادلات التفاضلية

هنالك قسمان للمعادلات التفاضلية

• المعادلات التفاضلية العادية تسمى المعادلة التفاضلية عادية إذا كان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد وبالتالي لا تحتوي إلا على مشتقات عادية.

مثال 2.1.1 ليكن x المتغير المستقل و y المتغير التابع، فالعلاقات التالية تمثل معادلات تفاضلية عادية

$$\frac{dy}{dx} + y = 3x^2. \tag{1.1}$$

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + (2\sin x)\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = (3 - x^2)y. \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0. \tag{3.1}$$

$$(x - y)dx + (x + y)dy = 0. \tag{4.1}$$

• المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة تفاضلية فيها المتغير التابع دالة لأكثر من متغير مستقل أي تظهر فيها المشتقات الجزئية.

مثال 3.1.1 ليكن U المتغير التابع و x, y, z المتغيرات المستقلة، فالعلاقات التالية هي معادلات تفاضلية جزئية

$$\frac{\partial U}{\partial x} + 3\frac{\partial U}{\partial y} = 0. \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \qquad (6.1)$$

$$x^2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+3y\frac{\partial U}{\partial x}+(x-y^2)U=0. \qquad (7.1)$$

3.1.1 رتبة معادلة تفاضلية

إذا كانت المشتقة النونية $y^{(n)}$ هي أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية العادية قيل أن هذه المعادلة التفاضلية من الرتبة n (تحدد رتبة المعادلة التفاضلية بأعلى مشتقة داخلة فيها).

مثال 4.1.1 -المعادلة (1.1) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى.
-المعادلة التفاضلية (2.1) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثالثة.
-المعادلة التفاضلية (3.1) هي من الرتبة الثانية.
-المعادلة التفاضلية (4.1) هي من الرتبة الأولى لإحتوائها على dx, dy.

4.1.1 درجة معادلة تفاضلية

هي الأس المرفوع إليها أعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية، وقبل تحديد درجة المعادلة يجب وضعها على صورة قياسية وصحيحة من حيث المشتقات.

مثال 5.1.1 - المعادلة التفاضلية (1.1) هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.
- المعادلة (2.1) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثالثة ومن الدرجة الأولى.
- المعادلة

$$(\frac{d^2y}{dx^2})^3+x(\frac{dy}{dx})+x^2y^3=e^x\sin x,$$

هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الثالثة.

2.1 مفاهيم وتعاريف أساسية

1.2.1 الفضاء النظيمي

تعريف 1.2.1 الفضاء النظيمي هو كل فضاء شعاعي E مزود بنظيم $\|\cdot\|$،حيث $\|\cdot\|$ دالة من E إلى $\mathbb{R}$ تحقق الشروط التالية:

-1 $\|x\| \geq 0$ لكل $x \in E$ و$\|x\| = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$.

-2 $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ لكل $\alpha \in \mathbb{R}$ و$x \in E$.

-3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ لكل $x, y \in E$.

نسمي الفضاء $(E, \|\cdot\|)$ فضاءً نظيمياً.

2.2.1 النظم المتكافئة

تعريف 2.2.1 ليكن $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ نظيمين معرفين على نفس الفضاء الشعاعي E. نقول أن النظيمين متكافئين إذا وجد ثابتين موجبين تماما α_1 و α_2 بحيث

$$\alpha_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \alpha_2 \|x\|_1 \, , \; \forall x \in E.$$

النظم الأساسية في $\mathbb{R}^n$ متكافئة, حيث

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \; \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \, ,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \; \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \, .$$

3.2.1 فضاء بناخ

تعريف 3.2.1 نسمي فضاء بناخ كل فضاء شعاعي نظيمي تام.

ملاحظة 1.2.1 كل فضاء نظيمي ذو بعد منته هو فضاء بناخ.

مثال 1.2.1 I مجال من $\mathbb{R}$ فإن $C(I)$ مجموعة الدوال المستمرة والمعرفة على I مزود بـ

$$\|f\| = \sup_{x\in I} \|f(x)\|\,,$$

هو فضاء بناخ.

4.2.1 الإستمرارية على الفضاءات النظيمية

تعريف 4.2.1 ليكن $(E,\|\cdot\|_E)$ و $(E',\|\cdot\|'_E)$ فضائين نظيميين و $f:E\to E'$ تطبيق . f مستمر عند $x_0\in E$ إذا وفقط إذا كان

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in E:\|x-x_0\|<\delta\Rightarrow\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon.$$

هذا يعني

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

f مستمر على E إذا كان مستمر عند كل نقطة من نقاط E.

5.2.1 الإستمرار بإنتظام

تعريف 5.2.1 نقول أن f مستمر بانتظام على E إذا كان

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\in E:|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

نظرية 1.2.1 ليكن $(E,\|\cdot\|)$ و $(F,\|\cdot\|)$ فضائين شعاعيين نظيميين على الحقل $\mathbb{K}$. نقول أن التطبيق الخطي $f: E\longrightarrow F$ مستمر إذا وجد ثابت $c>0$ يحقق

$$\forall x\in E:\|f(x)\|_F\le c\,\|x\|_E\,. \tag{8.1}$$

قضية 1.2.1 أصغر ثابت يحقق العلاقة (8.1) يسمى نظيم التطبيق الخطي f ونرمز له ب $\|f\|$ والمعرف كمايلي

$$\|f\|=\sup_{x\neq0}\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}=\sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|_F\,.$$

نرمز لفضاء التوابع الخطية النظيمية والمستمرة $L(E,F)$.

6.2.1 التراص النسبي

تعريف 6.2.1 ليكن A جزء غير خال من (E, τ_A) نقول عن A أنه متراص نسبيا إذا وجد مغلق متراص B حيث $A \subset B$.

خاصية 1.1.2 A متراص نسبيا إذا و فقط إذا كان $\overline{A}$ متراصا.

3.1 الفضاء الطبولوجي

1.3.1 المفتوحات والمغلقات

تعريف 1.3.1 لتكن E مجموعة كيفية غير خالية، و $P(E)$ مجموعة أجزاء E. نقول عن τ من $P(E)$ أنها طبولوجيا من E إذا حققت الشروط التالية

1- E و ϕ عنصران من τ،

2- τ مستقرة بالاتحاد الكيفي، أي

$$\forall (A_i)_{i\in I} \in \tau : \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau,$$

حيث I مجموعة جزئية كيفية من $\mathbb{R}$.

3- τ مستقرة بالتقاطع المنتهي، أي

$$\forall (A_j)_{j\in J} \in \tau : \bigcap_{j\in J} A_j \in \tau,$$

حيث J مجموعة منتهية من $\mathbb{N}$.

يسمى الزوج (E, τ) فضاء طبولوجي ويطلق على عناصر المجموعة τ اسم الأجزاء المفتوحة أو المفتوحات.

مثال 1.3.1 -1 $A =]-1, 1[\cup]3, 5[$ مفتوح في $\mathbb{R}$.

-2 $B = \{5\}$ ليس مفتوحا. وبصفة عامة ،كل منته من $\mathbb{R}$ ليس مفتوحا لعدم تمكنه من احتواء اي مجال مفتوح.

-3 $\mathbb{Q}$ و $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ ليسا مفتوحين لاستحالة إيجاد اي مفتوح فيهما.

تعريف 2.3.1 ليكن F جزءًا من فضاء طبولوجي (E, τ). نقول عن F أنه مغلق اذا كانت متممته مفتوحة.

مثال 2.3.1 1- كل مجموعة وحيدة العنصر من $\mathbb{R}$ تشكل مجموعة مغلقة ،إذ لدينا

$$\forall a \in \mathbb{R}, C_{\mathbb{R}} \{a\} =]-\infty, a[\cup [a, +\infty[.$$

وهو جزء مفتوح.

2- كل مجال مغلق متممه هو جزء مفتوح، بالفعل ،إذا كان a و b عنصرين من $\mathbb{R}$ كانت الاجزاء

$$C_{\mathbb{R}} [a, b] =]-\infty, a] \cup]a, b[\cup]b, +\infty[.$$

$$C_{\mathbb{R}}]-\infty, a] =]a, +\infty[.$$

$$C_{\mathbb{R}} [a, +\infty] =]-\infty, a[.$$

مفتوحة

3- مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومجموعة الاعدد الصحيحة $\mathbb{Z}$ مغلقتان ذلك لان

$$C_{\mathbb{R}}\mathbb{N} =]-\infty, 0[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[.$$

و

$$C_{\mathbb{R}}\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[.$$

4- $\mathbb{R}$ و $\emptyset$ مغلقتان ،إذ ان كل واحدة منهما متممة للاخرى.

خاصية 1.1.3 1- E و $\emptyset$ جزءان مغلقان.

2- اتحاد عدد منته من أجزاء مغلقة هو مغلق.

3- تقاطع عدد منته أوغير منته من أجزاء مغلقة مغلق.

2.3.1 الجوارات

تعريف 3.3.1 ليكن (E, τ) فضاء طبولوجي و A جزءًا غير خال منه ،نسمي جوار نقطة x من E كل جزء نرمز له ب V_x من E، يحوي مفتوحًا Ω_x يحتوي هو أيضا x وبعبارة أدق

$$V \text{جوار لـ} x \Leftrightarrow \exists\Omega_x \in \tau / x \in \Omega_x \subset V_x.$$

مثال 3.3.1 نقدم مثال عن جوار نقطة

$$v =]0,1],$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \in]0,1[\subset [0,1],$$

ومنه v جوارل $\frac{1}{2}$.

تعريف 4.3.1 نسمي جوار A كل جزء V من E يحوي مفتوحا Ω يحوي بدوره A. وبعبارة أخرى نكتب

$$V \text{جوار ل} A \Leftrightarrow \exists \Omega \in \tau / A \subset \Omega \subset V.$$

مثال 4.3.1 نقدم مثال عن جوار مجموعة لدينا $v = [1,4]$ و $A =]1,3[$ نقول أن v جوار لـ A لأن

$$A \subset]1,3[\subset [1,4].$$

3.3.1 النقاط الملاصقة

تعريف 5.3.1 ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي و A جزءًا منه. نقول عن نقطة a من E أنها ملاصقة لـ A اذا كان كل جوار لها يقطع A. نرمز لمجموعة النقاط الملاصقة ل A ب $\overline{A}$ ونكتب بعبارة أدق

$$(a \in \overline{A}) \Leftrightarrow (\forall V \in v(a), V \cap A \neq \emptyset).$$

ينجم عن هذا التعريف أن $A \subset \overline{A}$ أي أن كل نقطة من A ملاصقة ل A. وعليه، يأتي أن $\overline{A}$ غير خالية كلما كانت كذلك A.

مثال 5.3.1 1- في الفضاء الإعتيادي $\mathbb{R}$ لدينا

أ/

$$A = \{a\} \Rightarrow \overline{A} = \{a\} = A,$$

وبصفة عامة ملاصقة كل جزء منته من $\mathbb{R}$ تعادل الجزء ذاته.

ب/

$$\overline{[a,b]} = \overline{]a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = [a,b].$$

ج/

$$\overline{[a,+\infty[} = \overline{]a,+\infty[} = \overline{[a,+\infty[}.$$

د/

$$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N},\ \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}.$$

2- لنضع $E = \{a,b,c,d\}$ و $\tau = \{E,\emptyset,\{b,c\},\{b,c,d\}\}$ يأتي عندئذ

$$\overline{\{a\}} = \{a\},\ \overline{\{b\}} = \overline{\{c\}} = E,\ \overline{\{d\}} = \{a,d\}.$$

4.3.1 نقاط التراكم

تعريف 6.3.1 نقول عن نقطة x من E أنها نقطة تراكم لـ A اذا كان كل جوار لها يقطع A، على الأقل عند نقطة تختلف عن x. تكتب بعبارة أخرى

$$\forall V \in v(x), V \cap (A/\{x\}) \neq \emptyset.$$

يرمز لمجموعة نقاط التراكم ب A'.

5.3.1 داخلية مجموعة

تعريف 7.3.1 ليكن (E,τ) فضاء طبولوجي، $A \subset E$. نقول عن النقطة x من E أنها داخلية من A إذا وجد مفتوح U من τ بحيث $x \in U$ و $U \subset A$، ونكتب $x \in A^\circ$. نرمز إلى مجموعة النقاط الداخلية لـ A بـ A°.

قضية 1.3.1 إذا كان (E,τ) فضاء طبولوجي و $A \subset E$ فإن

1- $A^\circ \subset A$.

2- A° هي مفتوح من E وهي أكبر مفتوح من E محتوى في A.

6.3.1 الفضاء المنفصل

تعريف 8.3.1 نقول عن فضاء طبولوجي (E,τ) أنه منفصل، اذا تحقق الشرط

$$\forall x,y \in E : x \neq y, \exists v \in v(x) \wedge \exists w \in v(y) : v \cap w = \emptyset,$$

حيث $v(x)$ و $v(y)$ هي مجموعة جوارات x، y على الترتيب.

4.1 التراص

تعريف 1.4.1 نسمي تغطية لمجموعة A من فضاء طبولوجي E، كل عائلة $(\Omega_i)_{i\in I}$ حيث $A \subseteq \bigcup_{i\in I}(\Omega_i)_{i\in I}$ أي

$$\forall x \in A, \exists i \in I : x \in (\Omega_i)_{i\in I}$$

ملاحظة 1.4.1 إذا كانت $(\Omega_i)_{i\in I}$ مفتوحة من أجل كل i من I نقول أن التغطية مفتوحة و إذا كانت $(\Omega_i)_{i\in I}$ منتهية من أجل كل i من I نقول أن التغطية منتهية.

1.4.1 الفضاء المتراص

تعريف 2.4.1 ليكن (E, τ) فضاء طبولوجي.نقول عن E أنه متراص إذا كان منفصلا و من كل تغطية من المفتوحات ل E يمكن إستخراج تغطية منتهية.

2.4.1 الجزء المتراص

تعريف 3.4.1 نقول عن جزء A غير خال من فضاء طبولوجي (E, τ) أنه متراص إذا كان الفضاء الجزئي (E, τ_A) متراصا.

ملاحظة 2.4.1 كل مجموعة مغلقة ومحدودة من فضاء نظيمي ذو بعد منته هي متراص.

3.4.1 التطبيق المتراص

تعريف 4.4.1 ليكن E و F فضائي بناخ، تطبيق خطي مستمر T من $L(E,\ F)$ هو متراص إذا كانت $T(\overline{B_E})$ هي مجموعة متراصة نسبيا من F.

5.1 التحدب

تعريف 1.5.1 نقول أن المجموعة الجزئية غير الخالية C من E أنها مجموعة محدبة إذا تحقق

$$\forall \lambda \in [0,1], \forall (a,b) \in C^2 : \lambda a + (1-\lambda) b \in C.$$

تعريف 2.5.1 ليكن f تابع معرف على فضاء شعاعي E ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}$.

- نقول عن f أنه محدب إذا تحقق مايلي

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0,1]; f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

- نقول عن f أنه مقعر إذا كان $(-f)$ محدب.

تعريف 3.5.1 ليكن (E, d_E) و (F, d_F) فضائين متريين و ليكن $A \subset C(E,F)$. A متساوي الإستمرار إذا كان

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall f \in A, \forall x, y \in E; d_E(x,y) < \eta \Longrightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

تعريف 4.5.1 ليكن $(E, \|\cdot\|)$ فضاء بناخ، $f : E \to E$ تطبيق. نقول أن f مستمر تماما إذا كان f متراص ومستمر.

نظرية 1.5.1 الفضاء $C([a,b])$ تام.

توطئة 1.5.1 ليكن $I \subset \mathbb{R}$ و $(f)_n : I \to \mathbb{R}$ حيث $n \in \mathbb{N}$. اذا كانت متتالية دوال $(f)_n$ تتقارب بانتظام على I نحو دالة f واذا كانت $(f)_n$ مستمرة على I فإن f مستمرة على I.

1.5.1 التابع الليبشيتزي

تعريف 5.5.1 ليكن $(E, \|\cdot\|)$ فضاء بناخ، وليكن التطبيق $f : E \to E$. نقول عن f أنه ليبشيتزي من أجل $k \geq 0$ إذا كان

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|,$$

ويسمي k الثابت الليبشيتزي.

إذا كان $0 < k < 1$ نقول أن f مقلص (أو تقليص على E).

ملاحظة 1.5.1 تطبيق ليبشيتزي هو بالضرورة تطبيق مستمر.

6.1 بعض نظريات النقطة الثابتة

1.6.1 النقطة الثابتة

تعريف 1.6.1 ليكن $(E, \|\cdot\|)$ فضاء بناخ $f : E \to E$ تطبيق. نسمي نقطة ثابتة كل نقطة $x \in E$ بحيث $f(x) = x$.

2.6.1 نظرية النقطة الثابتة لشودر

نظرية 1.6.1 ([6]) ليكن E فضاء بناخ غير خال. A مجموعة جزئية غير خالية مغلقة محدودة و محدبة من E وليكن $f : A \longrightarrow A$ تطبيق متراص إذن f يملك نقطة ثابتة .

برهان. $A : \Omega \longrightarrow \Omega$ مستمر، $\varepsilon > 0$، نريد إنشاء تابع $g : \Omega \to \Omega$ بحيث كل نقاط Ω تقريبا تكون صامدة بـ A.
بماأن Ω متراص ، فإنه توجد تغطية منتهية من الكرات المفتوحة $B(a_i, \varepsilon)$ لـ Ω، من أجل كل $i \in \{1, ..., n\}$،
نعرف إذن التابع التالي

$$m_i(z) = \begin{cases} \varepsilon - |z - a_i| & , |z - a_i| < \varepsilon, \\ 0 & , |z - a_i| \geqslant \varepsilon, \end{cases}$$

نلاحظ أنه من أجل كل z من Ω، فانه يوجد i بحيث $m_i(z) \neq 0$.
وبالتالي يمكننا تعريف g من Ω نحو Ω

$$\begin{aligned} z \in \Omega &\Rightarrow \exists B_i \, , z \in B_i, \\ &\Rightarrow |z - a_i| < \varepsilon, \\ &\Rightarrow \varepsilon - |z - a_i| \neq 0, \end{aligned}$$

من أجل z من Ω لدينا

$$
\begin{aligned}
|g(z)-z| &= \left|\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(z)(z-a_i)}{\sum_{i=1}^{n} m_i(z)}\right|,\\
&\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} |m_i(z)|\,|(z-a_i)|}{|\sum_{i=1}^{n} m_i(z)|},\\
&\leqslant \frac{\varepsilon\sum_{i=1}^{n} |m_i(z)|}{\sum_{i=1}^{n} |m_i(z)|},\\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}
$$

ليكن $\Omega_n = \overline{conv}\,\{a_1, ..., a_n\}$ (الغلاف المغلق المحدب لمجموعة النقاط $a_1, ..., a_n$) ونعتبر

$$g \circ A : \Omega_n \to \Omega_n,$$

$\Omega_n \subset \mathbb{R}^n,$ و $\mathbb{R}^n$ فضاء بناخ، Ω_n مغلق ومحدود فهو متراص، حسب بروار فإن $g \circ A$ يملك نقطة ثابتة في Ω_n، أي

$$g \circ A(z_n) = z_n,$$

$$
\begin{aligned}
|z_n - A(z_n)| &\leqslant |z_n - g\circ A(z_n)| + |g\circ A(z_n) - A(z_n)|,\\
&\leqslant |g\circ A(z_n) - A(z_n)|,\\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}
$$

العنصر (z_n) من Ω_n (متراص)، ومنه يمكن إستخراج متتالية جزئية (z_{n_k}) متقاربة نحو z من (Ω_n)، وبما أن A مستمر فإن

$$\lim_{n\to+\infty} A(z_{n_k}) = A(z)$$

إذن

$$
\begin{aligned}
|z - A(z)| &= |z - z_{n_k} + z_{n_k} - A(z_{n_k}) + A(z_{n_k}) - A(z)|,\\
&\leqslant |z - z_{n_k}| + |z_{n_k} - A(z_{n_k})| + |A(z_{n_k}) - A(z)|,
\end{aligned}
$$

ومنه

$$A(z) = z.$$

■

3.6.1 نظرية النقطة الثابتة لبناخ

نظرية 2.6.1 ([6]) ليكن $(X, \|\cdot\|)$ فضاء نظيمي تام و $f : X \longrightarrow X$ تقليص مع k ثابت ليبشيتزي. إذا f يقبل نقطة ثابتة وحيدة $u \in X$، بالإضافة

$$\forall x \in X, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = u,$$

و

$$d(f_n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)),$$

برهان. **الوحدانية:** نفرض أنه يوجد $x, y \in X$ حيث $x = f(x)$ و $y = f(y)$ ومنه

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y),$$

نستنتج أن

$$d(x, y) = 0,$$

وبالتالي $x = y$.

الوجود: ليكن $x \in X$، سوف نثبت أن $(f_n(x))$ هي متتالية كوشي. من أجل $n \in \mathbb{N}$، لدينا

$$d(f_n(x), f_{n+1}(x)) \leq kd(f_{n-1}(x), f_n(x)) \leq \cdots \leq k^n d(x, f(x))$$

وهكذا من أجل $n < m$ حيث $n \geq 0$، لدينا

$$\begin{aligned}
&d(f_n(x), f_m(x)) \\
&\leq d(f_n(x), f_{n+1}(x)) + d(f_{n+1}(x), f_{n+2}(x)) + \cdots + d(f_{m-1}(x), f_m(x)) \\
&\leq k^n d(x, f(x)) + \cdots + k^{m-1} d(x, f(x)) \\
&\leq k^n d(x, f(x))(1 + k + k^2 + \ldots + k^{m-n-1}) \\
&= \frac{k^n - k^m}{1-k} d(x, f(x)),
\end{aligned}$$

وبالتالي من أجل $n < m$ و $n \geq 0$

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)) \tag{9.1}$$

وهذا يظهر أن $(f_n(x))$ هي متتالية كوشي. وبما أن X هو فضاء تام، إذن

$$\exists u \in X / \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = u$$

إضافة إلى ذلك، إستمرارية f تؤدي إلى أن

$$u = \lim_{n\to+\infty} f_{n+1}(x) = \lim_{n\to+\infty} f(f_n(x)) = f(u)$$

نستنتج أن u هي نقطة ثابتة لـ f. وبالتالي إذا كان $m \longrightarrow \infty$ في (4.1) فإن

$$d(f_n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)).$$

■

الفصل 2

دراسة تحليلية لوجود ووحدانية حلول نوع من المعادلات التفاضلية من الرتبة الرابعة باستخدام نظريات النقطة الثابتة

في هذا الفصل سنقوم بدراسة وجود ووحدانية الحل للمسألة التالية

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + f\left(u^{[0]}(t), u^{[1]}(t), u^{[2]}(t), \ldots, u^{[N]}(t)\right) = 0,\ t \in (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = u''(0) = 0,\ u(0) = \int_0^1 a(s)\, u(s)\, ds, \end{cases} \tag{1.2}$$

حيث

$$u^{[0]}(t) = t, u^{[1]}(t) = u(t), u^{[2]}(t) = u(u(t)), \ldots, u^{[N]}(t) = u\left(u^{[N-1]}(t)\right),$$

و $a \in C([0,1], [0,+\infty[)$، $0 < \int_0^1 a(s)\, ds < 1$.

نستعمل الترميز $C([0,1], \mathbb{R})$ للإشارة الى مجموعة الدوال الحقيقية المعرفة و المستمرة على من المجال $[0,1]$ الى $\mathbb{R}$.

$C([0,1], \mathbb{R})$ هو فضاء بناخ المزود بالنظيم

$$\|u\| = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|.$$

من اجل $0 \leq P \leq 1$، $L \geq 0$، نعرف المجموعة

$$\mathcal{CB}(P,L) = \{u \in C([0,1], \mathbb{R}) : 0 \leq u \leq P,\ |u(t_2) - u(t_1)| \leq L|t_2 - t_1|,\ \forall t_1, t_2 \in [0,1]\},$$

بما أن $f(t, u_1, u_2, \ldots, u_N)$ هي دالة ليبشيتزية مستمرة على $t, u_1, u_2, \ldots,\ u_N$ فإن

$$|f(t, u_1, u_2, \ldots, u_N)| = |f(t, u_1, u_2, \ldots, u_N) - f(0,0,\ldots,0) + f(0,0,\ldots,0)|$$

$$\leq |f(t,u_1,u_2,\ldots,u_N) - f(0,0,\ldots,0)| + |f(0,0,\ldots,0)|$$
$$\leq k_0|t| + \beta + \sum_{j=1}^{N} k_j \|u_j\|,$$

و

$$\beta = |f(0,0,\ldots,0)|.$$

إذن

$$|f(t,u_1,u_2,\ldots,u_N) - f(s,v_1,v_2,\ldots,v_N)| \leq k_0|t-s| + \sum_{j=1}^{N} k_j \|u_j - v_j\|. \quad (2.2)$$

نعتبر مسألة القيمة الحدية بنقطتين وشرط تكاملي التالية

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + \phi(t) = 0,\ t \in (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = u''(0) = 0,\ u(0) = \int_0^1 a(s)\,u(s)\,ds. \end{cases} \quad (3.2)$$

قضية 1.0.2 ([3]) من أجل كل $\phi \in C([0,1],\mathbb{R})$ فان المعادلة (3.2) تقبل حلا وحيد هو

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{6}\int_0^t \left[t^3(1-s)^2 - (t-s)^3\right]\phi(s)\,ds + \frac{1}{6}\int_t^1 t^3(1-s)^2\phi(s)\,ds \\ &+ \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 \left(\frac{1}{6}\int_0^\tau a(\tau)\left[\tau^3(1-s)^2 - (\tau-s)^3\right]\phi(s)\,ds \right. \\ &\left. + \frac{1}{6}\int_\tau^1 a(\tau)\,\tau^3(1-s)^2\phi(s)\,ds\right)d\tau, \end{aligned}$$

حيث

$$\alpha = \int_0^1 a(t)\,dt.$$

برهان. لدينا

$$u^{(4)}(t) + \phi(t) = 0,\ t \in (0,1)$$
$$\Rightarrow u^{(4)}(t) = -\phi(t),\ t \in (0,1)$$

نكامل على المجال $[0,t]$، من أجل $t \in [0,1]$

$$\int_0^t u^{(4)}(t) = -\int_0^t \phi(t)dt,$$

نجد أن

$$u^{(3)}(t) = -\int_0^t \phi(s)ds + c_1,$$

نكامل مرة أخرى

$$u^{(2)}(t) = -\int_0^t (t-s)\phi(s)ds + c_1 t + c_2,$$

وهكذا

$$u'(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2\phi(s)ds + \frac{1}{2}c_1 t^2 + c_2 t + c_3,$$

$$u(t) = -\frac{1}{6}\int_0^t (t-s)^3\phi(s)ds + \frac{1}{6}c_1 t^3 + \frac{1}{2}c_2 t^2 + c_3 t + c_4, \qquad (4.2)$$

من شروط المسألة (3.2) لدينا

$$u'(t) = 0 \Rightarrow c_3 = 0,$$

$$u''(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$

من $u'(1) = 0$ نجد

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ 0 = -\frac{1}{2}\int_0^t (1-s)^2\phi(s)ds + \frac{1}{2}c_1, \\ &\Rightarrow\ \frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2}\int_0^t (1-s)^2\phi(s)ds, \\ &\Rightarrow\ c_1 = \int_0^t (1-s)^2\phi(s)ds, \end{aligned}$$

لدينا $u(0) = c_4$ وكذلك لدينا $u(0) = \int_0^1 a(s)u(s)ds$، ومنه

$$\begin{aligned} c_4 &= \int_0^1 a(\tau)u(\tau)d\tau, \\ &= \int_0^1 a(\tau)\left(-\frac{1}{6}\int_0^\tau (\tau-s)^3\phi(s)ds + \frac{1}{6}c_1\tau^3 + \frac{1}{2}c_2\tau^2 + c_3\tau + c_4\right)d\tau, \\ &= \int_0^1 a(\tau)\left(-\frac{1}{6}\int_0^\tau (\tau-s)^3\phi(s)ds + \frac{1}{6}\tau^3\int_0^1 (1-s)^2\phi(s)ds + \frac{1}{2}c_2\tau^2 + c_3\tau + c_4\right)d\tau, \end{aligned}$$

ومنه

$$c_4 = c_4\int_0^1 a(\tau)d\tau - \frac{1}{6}\int_0^1 a(\tau)\left(\int_0^\tau (\tau-s)^3\phi(s)ds\right)d\tau$$

$$+\frac{1}{6}\int_0^1 a(\tau)\tau^3\left(\int_0^1 (1-s)^2\phi(s)ds\right)d\tau,$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ c_4-c_4\int_0^1 a(\tau)d\tau &= -\frac{1}{6}\int_0^1 a(\tau)\left(\int_0^\tau (\tau-s)^3\phi(s)ds\right)d\tau\\ &\quad+\frac{1}{6}\int_0^1 a(\tau)\tau^3\left(\int_0^1 (1-s)^2\phi(s)ds\right)d\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ c_4\left(1-\int_0^1 a(\tau)d\tau\right) &= -\frac{1}{6}\int_0^1 a(\tau)\left(\int_0^\tau (\tau-s)^3\phi(s)ds\right)d\tau\\ &\quad+\frac{1}{6}\int_0^1 a(\tau)\tau^3\left(\int_0^1 (1-s)^2\phi(s)ds\right)d\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ c_4 =&\frac{1}{6(1-\int_0^1 a(\tau)d\tau)}\left(\int_0^1 a(\tau)\tau^3\left(\int_0^1 (1-s)^2\phi(s)ds\right)d\tau\right.\\ &\left.-\int_0^1 a(\tau)\left(\int_0^\tau (\tau-s)^3\phi(s)ds\right)d\tau\right),\end{aligned}$$

ومنه

$$c_4=\frac{1}{6(1-\alpha)}\left(\int_0^1 a(\tau)\tau^3\left(\int_0^1 (1-s)^2\phi(s)ds\right)d\tau-\int_0^1 a(\tau)\left(\int_0^\tau (\tau-s)^3\phi(d)ds\right)d\tau\right),$$

حيث

$$\alpha=(1-\int_0^1 a(\tau)d\tau),$$

نعوض ب c_1، c_2، c_3، c_4 في العبارة (4.2) فنجد

$$\begin{aligned}u(t) &= -\frac{1}{6}\int_0^t (t-s)^3\phi(s)ds+\frac{1}{6}c_1t^3+\frac{1}{2}c_2t^2+c_3t+c_4,\\ &= -\frac{1}{6}\int_0^t (t-s)^3\phi(s)ds+\frac{1}{6}t^3\int_0^1 (1-s)^2\phi(s)ds\\ &\quad+\frac{1}{6(1-\alpha)}\left(\int_0^1 a(\tau)\tau^3(\int_0^1 (1-s)^2\phi(s)ds)d\tau-\int_0^1 a(\tau)(\int_0^\tau (\tau-s)^3\phi(d)ds)d\tau\right),\\ &= -\frac{1}{6}\int_0^t (t-s)^3\phi(s)ds+\frac{1}{6}t^3\int_0^t (1-s)^2\phi(s)ds+\frac{1}{6}t^3\int_t^1 (1-s)^2\phi(s)ds\\ &\quad+\frac{1}{6(1-\alpha)}\left(\int_0^1 a(\tau)\tau^3(\int_0^1 (1-s)^2\phi(s)ds)d\tau-\int_0^1 a(\tau)(\int_0^\tau (\tau-s)^3\phi(d)ds)d\tau\right),\end{aligned}$$

بأخذ التكامل $\int_0^t \phi(s)ds$ كعامل مشترك نجد

$$\begin{aligned}u(t) =&\frac{1}{6}\int_0^t [t^3(1-s)^2-(t-s)^3]\phi(s)ds+\frac{1}{6}t^3\int_t^1(1-s)^2\phi(s)ds\\ &+\frac{1}{6(1-\alpha)}\left(\int_0^1 a(\tau)\tau^3\left(\int_0^1(1-s)^2\phi(s)ds\right)d\tau-\int_0^1 a(\tau)\left(\int_0^\tau(\tau-s)^3\phi(d)ds\right)d\tau\right),\end{aligned}$$

الآن نأخذ $(\int_0^1 a(\tau)d\tau)$، وكذلك $(\int_0^\tau \phi(s)ds)$ كعامل مشترك حيث

$$\int_0^1(1-s)^2\phi(s)ds=\int_0^\tau(1-s)^2\phi(s)ds+\int_\tau^1(1-s)^2\phi(s)ds,$$

نجد

$$\begin{aligned}u(t) =& \frac{1}{6}\int_0^t [t^3(1-s)^2-(t-s)^3]\phi(s)ds+\frac{1}{6}t^3\int_t^1(1-s)^2\phi(s)ds\\ &+\frac{1}{6(1-\alpha)}\left[\int_0^1 a(\tau)\left(\int_0^\tau(\tau^3(1-s)^2-(\tau-s)^3)\phi(s)ds+\int_\tau^1\tau^3(1-s)^2\phi(s)ds\right)d\tau\right],\\ =&\frac{1}{6}\int_0^t [t^3(1-s)^2-(t-s)^3]\phi(s)ds+\frac{1}{6}t^3\int_t^1(1-s)^2\phi(s)ds\\ &+\frac{1}{(1-\alpha)}\int_0^1\left[\frac{1}{6}\int_0^\tau a(\tau)(\tau^3(1-s)^2-(\tau-s)^3)\phi(s)ds+\frac{1}{6}\int_\tau^1\tau^3(1-s)^2\phi(s)ds\right]d\tau,\end{aligned}$$

الآن نعلم أن دالة غرين معرفة كالتالي

$$G(t,s):[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$$

حيث

$$G(t,s)=\frac{1}{6}\begin{cases} t^3(1-s)^2-(t-s)^3 : 0\le s\le t\le 1,\\ t^3(1-s)^2 : 0\le t\le s\le 1,\end{cases} \tag{5.2}$$

تصبح الدالة $u(t)$ على الشكل

$$u(t)=\int_0^1 G(\tau,s)\phi(s)ds+\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1\left(\int_0^1 a(\tau)G(\tau,s)\phi(s)ds\right)d\tau,$$

بأخذ $(\int_0^1 \phi(s)ds)$ كعامل مشترك نجد

$$u(t)=\int_0^1\left(G(\tau,s)+\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 a(\tau)G(\tau,s)d\tau\right)\phi(s)ds.$$

وهو المطلوب. ■

قضية 2.0.2 ([3]) لتكن $\phi \in C([0,1],[0,+\infty[)$. إن الحل الوحيد للمعادلة (3.2) يحققذ $u(t) \geq 0$ من أجل $t \in [0,1]$.

برهان. أولا نضع $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$ ثابت. لنثبت أن

$$G(t,s) \geq 0, \ t,s \in [0,1], \tag{6.2}$$

وأن

$$\frac{1}{6}\theta^3 s(1-s)^2 \leq G(t,s) \leq \frac{1}{6}s(1-s)^2, \ (t,s) \in [\theta, 1-\theta] \times [0,1]. \tag{7.2}$$

- اثبات (6.2)

نبين أن $G(t,s) \geq 0$، لكل $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$. بما أن الأمر واضح من أجل $s \leq t$ لأن $t^3(1-s)^3 \geq 0$. نحتاج فقط الى إثبات الحالة $t \leq s$. الآن نفرض أن $s \leq t$، نجد

$$\begin{aligned}
G(t,s) &= \frac{1}{6}\left[t^3(1-s)^2 - (t-s)^3\right], \\
&= \frac{1}{6}\left[t^3(1+s^2-2s) - (t-s)^3\right], \\
&= \frac{1}{6}\left[t(t^2+t^2s^2-2t^2s) - (t-s)^3\right], \\
&= \frac{1}{6}\left[t(t-ts)^2 - (t-s)^3\right],
\end{aligned}$$

لدينا

$$(t-ts)^2 \geq (t-s)^2,$$

ومنه

$$\frac{1}{6}\left[t(t-ts)^2 - (t-s)^3\right] \geq \frac{1}{6}\left[t(t-s)^2 - (t-s)^3\right],$$

نأخذ $(t-s)^2$ كعامل مشترك

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\left[t(t-ts)^2 - (t-s)^3\right] &\geq \frac{1}{6}(t-s)^2\left[t-(t-s)\right], \\
&\geq \frac{1}{6}(t-s)^2(s),
\end{aligned}$$

لدينا $t \leq s$ ومنه

$$s\frac{1}{6}(t-s)^2 \geq 0,$$
$$\Rightarrow G(t,s) \geq 0.$$

• <u>اثبات (7.2)</u>

من أجل $t \leq s$ من (5.2) نجد

$$G(t,s) = \frac{1}{6}\left[t^3(1-s)^2 - (t-s)^3\right],$$

لدينا

$$s \leq 1 \;\Rightarrow\; (1-s) < 1,$$

ومنه

$$\frac{1}{6}\left[t^3(1-s)^2 - (t-s)^3\right] \geq \frac{1}{6}\left[t^3(1-s)^3 - (t-s)^3\right],$$

لدينا المتطابقة الشهيرة

$$(a-b)^3 = (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3),$$

بنشر وتبسيط $t^3(1-s)^3$ تصبح من الشكل

$$\begin{aligned} t^3(1-s)^3 =& t^3(1-s^3+3s^2-3s), \\ =& t^3 - t^3s^3 + 3t^3s^2 - 3t^3s = (t-ts)^3, \end{aligned}$$

ومنه

$$\frac{1}{6}\left[t^3(1-s)^3 - (t-s)^3\right] = \frac{1}{6}\left[(t-ts)^3 - (t-s)^3\right],$$

ولدينا المتطابقة الشهيرة التالية

$$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2),$$

نضع

$$a^3 = (t-ts)^3,\; b^3 = (t-s)^3,$$

مما سبق نصل إلى أن

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}[(t-ts)-(t-s)]\left[(t-ts)^2+(t-ts)(t-s)+(t-s)^2\right],\\
&=\frac{1}{6}(t-ts-t+s)\left[t^2(1-s)^2+t(1-s)(t-s)+(t-s)^2\right],\\
&=\frac{1}{6}(s-ts)\left[t^2(1-s)^2+t(1-s)(t-s)+(t-s)^2\right],\\
&=\frac{1}{6}s(1-t)\left[t^2(1-s)^2+t(1-s)(t-s)+(t-s)^2\right],\\
&\geq\frac{1}{6}(1-t)t^2s(1-s)^2. \qquad (8.2)
\end{aligned}$$

من جهة أخرى

$$\begin{aligned}
&G(t,s)-\frac{1}{6}s(1-s)^2,\\
&=\frac{1}{6}t^3(1-s)^2-\frac{1}{6}(t-s)^3-\frac{1}{6}s(1-s)^2,\\
&=\frac{1}{6}\left[t^3(1-s)^2-(t-s)^3-s(1-s)^2\right],\\
&=\frac{1}{6}\left[t^3(1+s^2-2s)-(t^3-s^3+3ts^2-3t^2s)-s(1+s^2-2s)\right],\\
&=\frac{1}{6}\left[t^3+t^3s^2-2t^3s-t^3+s^3-3ts^2+3t^2s-s-s^3+2s^2\right],\\
&=\frac{1}{6}s\left[-2t^3+t^3s-3ts+3t^2+2s-1\right],\\
&=\frac{1}{6}s\left[-2t^3+t^3s+ts-4ts+4t^2-t^2+2s-1+2t-2t+2t^2s-2t^2s\right],\\
&=\frac{1}{6}s\left[(-2t^3+t^3s+ts-2t-2t^2s+4t^2)+(2st^2+2s-4st-t^2-1+2t)\right]. \qquad (9.2)
\end{aligned}$$

بقسمة المعادلتين التاليتين

$$-2t^3+t^3s+ts-2t-2t^2s+4t^2,\ 2st^2+2s-4st-t^2-1+2t,$$

على $(t-1)^2$ نجد

$$\begin{aligned}
-2t^3+t^3s+ts-2t-2t^2s+4t^2 &=(t-1)^2(ts-2t),\\
2st^2+2s-4st-t^2-1+2t &=(t-1)^2(2s-1),
\end{aligned}$$

بالتعويض في (9.2)

$$\begin{aligned}G(t,s)-\frac{1}{6}s(1-s)^2 =&\frac{1}{6}s\left[(t-1)^2(ts-2t)+(t-1)^2(2s-1)\right],\\ =&\frac{1}{6}s(t-1)^2\left[(ts-2t)+(2s-1)\right],\\ =&\frac{1}{6}s(t-1)^2\left[t(s-2)+2s-1\right],\end{aligned}$$

ولدينا $t \leq s$ فنجد

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}s(t-1)^2\bigg((s-2)t+2s-1\bigg),\\ &\leq \frac{1}{6}s(t-1)^2\bigg(t(s-2)+2t-1\bigg),\\ &= \frac{1}{6}s(t-1)^2(st-2t+2t-1),\\ &= \frac{1}{6}s(t-1)^2(st-1),\end{aligned}$$

ولدينا $s \in [0,1]$ و

$$t \leq 1 \ \Rightarrow (t-1) \leq 0 \ \Rightarrow (t-1)^2 \geq 0,$$

و

$$\begin{aligned}st \leq 1 \Rightarrow (st-1) &\leq 1\\ &\Rightarrow \frac{1}{6}s(t-1)^2(st-1) \leq 0,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(t,s) \leq \frac{1}{6}s(1-s)^2. \qquad (10.2)$$

من أجل $t \leq s$

$$G(t,s)=\frac{1}{6}t^3(1-s)^2,$$

بالضرب في s وبما أن $s \leq 1$ فنجد

$$\frac{1}{6}t^3(1-s)^2 \geq \frac{1}{6}t^3s(1-s)^2, \qquad (11.2)$$

من جهة أخرى

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}t^3(1-s)^2 &\leq \frac{1}{6}s^3(1-s)^2,\\ &\leq \frac{1}{6}s(1-s)^2,\end{aligned} \tag{12.2}$$

نضع

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{1}{6}\min\left\{t^3, t^2(1-t)\right\},\\ &= \frac{1}{6}\begin{cases} t^3,\ t\leq \frac{1}{2},\\ (1-t)t^2,\ t\geq \frac{1}{2},\end{cases}\end{aligned}$$

وضعنا $\frac{1}{2}$ لأن الدالتين t^3 و $t^2(3-1)$ يلتقيان عند النقطة $\frac{1}{2}$ ومنه من (9.2)، (10.2)، (11.2) و (12.2) نصل الى أن

$$\rho(t)s(1-s)^2 \leq G(t,s) \leq \frac{1}{6}s(1-s)^2,\ (t,s)\in[0,1]\times[0,1],$$

من أجل $\theta \in]0,\frac{1}{2}[$ نجد أن

$$\frac{1}{6}\theta^3 s(1-s)^2 \leq G(t,s) \leq \frac{1}{6}s(1-s)^2,\ (t,s)\in[\theta,1-\theta]\times[0,1].$$

وهو المطلوب. ■

قضية 3.0.2 ([5]) من أجل كل $\phi,\psi\in\mathcal{CB}(P,L)$ لدينا

$$\left\|\varphi^{[n]}-\psi^{[n]}\right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} L^i\left\|\varphi-\psi\right\|, n=1;2,.....,N. \tag{13.2}$$

برهان. نستعمل البرهان بالتراجع. من أجل $n=1$، يجب أن نصل إلى أن

$$\left\|\varphi^{[1]}-\psi^{[1]}\right\| \leq \sum_{i=0}^{0} L^i\left\|\varphi-\psi\right\|.$$

يبسط إلى

$$\left\|\varphi^{[1]}-\psi^{[1]}\right\| \leq \sum_{i=1}^{0} L^i\left\|\varphi-\psi\right\| = L^0\left\|\varphi-\psi\right\| = \left\|\varphi-\psi\right\|.$$

من البديهي أن

$$\|\varphi-\psi\| \leq \|\varphi-\psi\| .$$

ومنه القضية (13.2) محققة من أجل $n=1$،
الآن نفرض أن القضية محققة من أجل $n=k$، أي

$$\left\|\varphi^{[k]}-\psi^{[k]}\right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} L^i \|\varphi-\psi\| .$$

ونثبت صحتها من أجل $n=k+1$

$$\left\|\varphi^{[k+1]}-\psi^{[k+1]}\right\| \leq \sum_{i=0}^{k} L^i \|\varphi-\psi\| .$$

من خلال الفرضية لدينا

$$\left\|\varphi^{[k]}-\psi^{[k]}\right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} L^i \|\varphi-\psi\| ,$$

ومنه

$$\left\|\varphi^{[k+1]}-\psi^{[k+1]}\right\| \leq L\left(\sum_{i=0}^{k-1} L^i \|\varphi-\psi\|\right),$$

بتبسيط الجانب الأيمن، وإدخال المعامل L إلى المجموع

$$L\left(\sum_{i=0}^{k-1} L^i \|\varphi-\psi\|\right)=\sum_{i=0}^{k-1} L^{i+1} \|\varphi-\psi\| ,$$

باعادة صياغة حدود المجموع، عن طريق تغيير i بـ $j=i+1$ نجد

$$\sum_{i=0}^{k-1} L^{i+1} \|\varphi-\psi\|=\sum_{j=1}^{k} L^{j} \|\varphi-\psi\| ,$$

بإضافة $\|\varphi-\psi\|$ إلى كلا الطرفين، نعلم أن

$$\|\varphi-\psi\|=L^0 \|\varphi-\psi\|$$

اذا بإضافتها إلى الطرف الأيمن من المجموع

$$\|\varphi-\psi\|+\sum_{j=1}^{k} L^{j}\|\varphi-\psi\|,$$

بدمج المجموعين نجد

$$\|\varphi-\psi\|+\sum_{j=1}^{K} L^{j}\|\varphi-\psi\|=\sum_{i=0}^{k} L^{i}\|\varphi-\psi\|,$$

نتحصل أخيرا على

$$\left\|\varphi^{[k+1]}-\psi^{[k+1]}\right\| \leq \sum_{i=0}^{k} L^{i}\|\varphi-\psi\|.$$

منه القضية (13.2) محققة من أجل $k+1$ ، فهي محققة من أجل $k \in \mathbb{N}$ ، وهو المطلوب. ■

1.2 الوجود

لتطبيق النظرية (1.6.1) نعتبر المؤثر A. المعرف كالتالي $A : \mathcal{CB}(P, L) \rightarrow C([0,1], \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}(A \varphi)(t)= & \frac{1}{6} \int_{0}^{t}\left[t^{3}(1-s)^{2}-(t-s)^{3}\right] f\left(\varphi^{[0]}(s), \varphi^{[1]}(s), \varphi^{[2]}(s), \ldots, \varphi^{[N]}(s)\right) d s \\ & +\frac{1}{6} \int_{t}^{1} t^{3}(1-s)^{2} f\left(\varphi^{[0]}(s), \varphi^{[1]}(s), \varphi^{[2]}(s), \ldots, \varphi^{[N]}(s)\right) d s+\frac{1}{6(1-\alpha)} \\ & \times \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{\tau} a(\tau)\left[\tau^{3}(1-s)^{2}-(\tau-s)^{3}\right] f\left(\varphi^{[0]}(s), \varphi^{[1]}(s), \varphi^{[2]}(s), \ldots, \varphi^{[N]}(s)\right) d s\right. \\ & \left.+\int_{\tau}^{1} a(\tau) \tau^{3}(1-s)^{2} f\left(\varphi^{[0]}(s), \varphi^{[1]}(s), \varphi^{[2]}(s), \ldots, \varphi^{[N]}(s)\right) d s\right) d \tau, \qquad (14.2)\end{aligned}$$

بما أن $\mathcal{CB}(P, L)$ هي مجموعة متراصة ومحدودة كليا، مستمرة ومغلقة من الفضاء $C([0,1], \mathbb{R})$. لإثبات أن المؤثر A يملك نقطة ثابتة وحيدة على اللأقل يجب أن نبين أن المؤثر A مستمر و $A(\mathcal{CB}(P, L)) \subset \mathcal{CB}(P, L)$ أي

$$(A \varphi)(t) \in \mathcal{CB}(P, L), \ \forall \varphi \in \mathcal{CB}(P, L).$$

قضية 1.1.2 ([4]) نفرض أن (2.2) محققة. عندئذ المؤثر $A : \mathcal{CB}(P, L) \rightarrow C([0,1], \mathbb{R})$ والمعطى بالعبارة (14.2) مستمر.

برهان. من أجل كل $\varphi,\psi\in\mathcal{CB}\left(P,L\right)$ و $t\in\mathbb{R}$.
لدينا

$$
\begin{aligned}
&\left|(A\varphi)(t)-(A\psi)(t)\right|\\
&\leq \frac{1}{6}\int_0^t\left[t^3\left(1-s\right)^2-\left(t-s\right)^3\right]\Big|f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)\\
&-f\left(\psi^{[0]}(s),\psi^{[1]}(s),\psi^{[2]}(s),\ldots,\psi^{[N]}(s)\right)\Big|\,ds\\
&+\frac{1}{6}\int_t^1 t^3\left(1-s\right)^2\Big|f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)\\
&-f\left(\psi^{[0]}(s),\psi^{[1]}(s),\psi^{[2]}(s),\ldots,\psi^{[N]}(s)\right)\Big|\,ds+\frac{1}{6\left(1-\alpha\right)}\\
&\times\int_0^1\left(\int_0^\tau a\left(\tau\right)\left[\tau^3\left(1-s\right)^2-\left(\tau-s\right)^3\right]\Big|f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)\right.\\
&-f\left(\psi^{[0]}(s),\psi^{[1]}(s),\psi^{[2]}(s),\ldots,\psi^{[N]}(s)\right)\Big|\,ds\\
&+\int_\tau^1 a\left(\tau\right)\tau^3\left(1-s\right)^2\Big|f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)\\
&\left.-\ f\left(\psi^{[0]}(s),\psi^{[1]}(s),\psi^{[2]}(s),\ldots,\psi^{[N]}(s)\right)\Big|\,ds\right)d\tau.
\end{aligned}
$$

من (2.2) نجد

$$
\begin{aligned}
&\left|(A\varphi)(t)-(A\psi)(t)\right|\\
&\leq \frac{1}{6}\left(\int_0^t\left[t^3\left(1-s\right)^2-\left(t-s\right)^3\right]ds\right)\left(\sum_{j=1}^N k_j\left\|\varphi^{[j]}-\psi^{[j]}\right\|\right)\\
&+\frac{1}{6}\left(\int_t^1 t^3\left(1-s\right)^2ds\right)\left(\sum_{j=1}^N k_j\left\|\varphi^{[j]}-\psi^{[j]}\right\|\right)\\
&+\frac{1}{6\left(1-\alpha\right)}\int_0^1\left[\left(\int_0^\tau a\left(\tau\right)\left[\tau^3\left(1-s\right)^2-\left(\tau-s\right)^3\right]ds\right)\left(\sum_{j=1}^N k_j\left\|\varphi^{[j]}-\psi^{[j]}\right\|\right)\right.\\
&\left.+\left(\int_\tau^1 a\left(\tau\right)\tau^3\left(1-s\right)^2ds\right)\left(\sum_{j=1}^N k_j\left\|\varphi^{[j]}-\psi^{[j]}\right\|\right)\right]d\tau\\
&\leq\frac{7}{72}\left(\sum_{j=1}^N k_j\left\|\varphi^{[j]}-\psi^{[j]}\right\|\right)+\frac{7\alpha}{72\left(1-\alpha\right)}\left(\sum_{j=1}^N k_j\left\|\varphi^{[j]}-\psi^{[j]}\right\|\right),
\end{aligned}
$$

وهذا يعني

$$|(A\varphi)(t)-(A\psi)(t)|\leq \frac{7}{72\left(1-\alpha\right)}\left(\sum_{j=1}^{N}k_{j}\left\Vert \varphi^{[j]}-\psi^{[j]}\right\Vert \right).$$

من القضية (3.0.2)

$$|(A\varphi)(t)-(A\psi)(t)|\leq \left(\frac{7}{72\left(1-\alpha\right)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}k_{j}L^{i}\right)\left\Vert \varphi-\psi\right\Vert .$$

نجد

$$\left\Vert A\varphi-A\psi\right\Vert \leq \left(\frac{7}{72\left(1-\alpha\right)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}k_{j}L^{i}\right)\left\Vert \varphi-\psi\right\Vert , \qquad (15.2)$$

هذا يثبت أن التطبيق A مستمر. ■

قضية 2.1.2 ([4]) نفرض أن (2.2) محققة. اذا كان

$$\frac{7}{72\left(1-\alpha\right)}\left(k_{0}+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}k_{j}L^{i}P\right)\leq P, \qquad (16.2)$$

و

$$\frac{5}{6}\left(k_{0}+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}k_{j}L^{i}P\right)\leq L. \qquad (17.2)$$

فإن $A\left(\mathcal{CB}\left(P,L\right)\right)\subset \mathcal{CB}\left(P,L\right)$.

برهان. من أجل $\varphi\in \mathcal{CB}\left(P,L\right)$، لدينا

$$\begin{aligned}
&|\left(A\varphi\right)\left(t\right)|\\
&=\frac{1}{6}\int_{0}^{t}\left[t^{3}\left(1-s\right)^{2}-\left(t-s\right)^{3}\right]\left|f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)\right|ds\\
&+\frac{1}{6}\int_{t}^{1}t^{3}\left(1-s\right)^{2}\left|f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)\right|ds+\frac{1}{6\left(1-\alpha\right)}\\
&\times\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{\tau}a\left(\tau\right)\left[\tau^{3}\left(1-s\right)^{2}-\left(\tau-s\right)^{3}\right]\left|f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)\right|ds\right.\\
&\left.+\int_{\tau}^{1}a\left(\tau\right)\tau^{3}\left(1-s\right)^{2}\left|f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)\right|ds\right)d\tau,
\end{aligned}$$

لكن

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)\right|\\
&=\left|f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)-f\left(0,0,\ldots,0\right)+f\left(0,0,\ldots,0\right)\right|\\
&\leq\left|f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)-f\left(0,0,\ldots,0\right)\right|+\left|f\left(0,0,\ldots,0\right)\right|\\
&\leq k_0\left|s\right|+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}k_jL^i\left\|\varphi\right\|.
\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}
&\left|\left(A\varphi\right)(t)\right|\\
&=\left[\frac{1}{6}\int_0^t\left[t^3\left(1-s\right)^2-\left(t-s\right)^3\right]ds+\frac{1}{6}\int_t^1t^3\left(1-s\right)^2ds+\frac{1}{6\left(1-\alpha\right)}\right.\\
&\left.+\int_0^1\left(\int_0^\tau a\left(\tau\right)\left[\tau^3\left(1-s\right)^2-\left(\tau-s\right)^3\right]ds+\int_\tau^1a\left(\tau\right)\tau^3\left(1-s\right)^2ds\right)d\tau\right]\\
&\times\left(k_0\left|s\right|+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}k_jL^i\left\|\varphi\right\|\right),\\
&\leq\frac{7}{72\left(1-\alpha\right)}\left(k_0+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}k_jL^iP\right).
\end{aligned}$$

من القضية (2.0.2) ومن (16.2) نجد

$$0\leq A\varphi\leq\left\|A\varphi\right\|\leq P.$$

لتكن $t_1,t_2\in[0,1]$، مع $t_1<t_2$، ومنه

$$\begin{aligned}
&|(A\varphi)(t_2)-(A\varphi)(t_1)|\\
&\leq\left|\frac{1}{6}\int_0^{t_1}\left[t_2^3\left(1-s\right)^2-\left(t_2-s\right)^3\right]f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)ds\right.\\
&+\frac{1}{6}\int_{t_1}^{t_2}\left[t_2^3\left(1-s\right)^2-\left(t_2-s\right)^3\right]f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)ds\\
&\left.-\frac{1}{6}\int_0^{t_1}\left[t_1^3\left(1-s\right)^2-\left(t_1-s\right)^3\right]f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right)ds\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left|\frac{1}{6}\int_{t_2}^{1} t_2^3 (1-s)^2 f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right) ds\right.\\
&-\frac{1}{6}\int_{t_1}^{t_2} t_1^3 (1-s)^2 f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right) ds\\
&\left.-\frac{1}{6}\int_{t_2}^{1} t_1^3 (1-s)^2 f\left(\varphi^{[0]}(s),\varphi^{[1]}(s),\varphi^{[2]}(s),\ldots,\varphi^{[N]}(s)\right) ds\right|\\
&\leq \frac{1}{2}\left(k_0+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} k_j L^i P\right)|t_2-t_1| + \frac{1}{3}\left(k_0+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} k_j L^i P\right)|t_2-t_1|\\
&\leq \frac{5}{6}\left(k_0+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} k_j L^i P\right)|t_2-t_1|.
\end{aligned}
$$

باستعمال (17.2) نجد

$$|(A\varphi)(t_2)-(A\varphi)(t_1)| \leq L\,|t_2-t_1|.$$

بما أن $(A\varphi)\in C([0,1],\mathbb{R})$ من أجل كل $\varphi\in\mathcal{CB}(P,L)$، نستنتج أن $A(\mathcal{CB}(P,L))\subset\mathcal{CB}(P,L)$. ■

نظرية 1.1.2 ([4]) نفرض أن (2.2)، (16.2) و (17.2) محققة. فان المسألة (1.2) تملك على الأقل حلا موجبا واحدًا $x\in\mathcal{CB}(P,L)$.

برهان. من القضية (1.0.2)، لدينا المعادلة (1.2) تملك حلا $x\in\mathcal{CB}(P,L)$ اذا وفقط اذا كان التطبيق A المعرف بواسطة (5.2) يملك نقطة ثابتة. من القضايا (1.1.2) و (2.1.2) فإن جميع شروط نظرية النقطة الثابتة لشودر محققة. بالتالي من نظرية النقطة الثابتة لشودر والقضية (2.0.2)، A يملك على الاقل نقطة ثابتة وحيدة على $\mathcal{CB}(P,L)$ وهو الحل الموجب للمسألة (1.2). ■

2.2 الوحدانية

في هذا الجزء نثبت وحدانية الحل الموجب للمسألة (1.2).

نظرية 1.2.2 ([4]) بالإضافة إلى شروط النظرية (1.1.2)، اذا فرضنا أن

$$\Gamma=\frac{7}{72(1-\alpha)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} k_j L^i<1, \tag{18.2}$$

فإن المسألة (1.2) تملك حلا واحدا في $\mathcal{CB}(P,L)$.

برهان. نعلم من برهان القضية (2.1.2)، أن $A:\mathcal{CB}(P,L)\to\mathcal{CB}(P,L)$. بالإضافة إلى ذلك من (15.2) نجد

$$\left|(A\varphi)(t)-(A\psi)(t)\right|\leq\Gamma\left\|\varphi-\psi\right\|,\ \varphi,\psi\in\mathcal{CB}(P,L).$$

وبما أن $\Gamma<1$، فإن النقطة الثابتة يجب أن تكون وحيدة حسب نظرية النقطة الثابتة لبناخ. ■

3.2 الإرتباط بالاستمرار

في هذا الجزء، نوضح أن الحل الذي تم الحصول عليه في ما سبق مرتبط بالاستمرار بالدالة f

نظرية 1.3.2 ([4]) نفرض أن شروط النظرية (1.1.2) محققة. الحل الوحيد الموجب للمسألة (1.2) مرتبط بشكل مستمر بالدالة f.

برهان. من أجل $f_1,f_2:[0,1]^{N+1}\to[0,+\infty)$ دالتين مستمرتين. من النظرية (1.2.2)، يترتب على ذلك وجود دالتين وحيدتين x_1 و x_2 في $\mathcal{CB}(P,L)$ مثل

$$\begin{aligned}
x_1(t)&=\frac{1}{6}\int_0^t\left[t^3(1-s)^2-(t-s)^3\right]f_1\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\ldots,x_1^{[N]}(s)\right)ds\\
&+\frac{1}{6}\int_t^1 t^3(1-s)^2 f_1\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\ldots,x_1^{[N]}(s)\right)ds+\frac{1}{6(1-\alpha)}\\
&\times\int_0^1\left(\int_0^\tau a(\tau)\left[\tau^3(1-s)^2-(\tau-s)^3\right]f_1\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\ldots,x_1^{[N]}(s)\right)ds\right.\\
&\left.+\int_\tau^1 a(\tau)\tau^3(1-s)^2 f_1\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\ldots,x_1^{[N]}(s)\right)ds\right)d\tau,
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
x_2(t)&=\frac{1}{6}\int_0^t\left[t^3(1-s)^2-(t-s)^3\right]f_2\left(x_2^{[0]}(s),x_2^{[1]}(s),x_2^{[2]}(s),\ldots,x_2^{[N]}(s)\right)ds\\
&+\frac{1}{6}\int_t^1 t^3(1-s)^2 f_2\left(x_2^{[0]}(s),x_2^{[1]}(s),x_2^{[2]}(s),\ldots,x_2^{[N]}(s)\right)ds+\frac{1}{6(1-\alpha)}\\
&\times\int_0^1\left(\int_0^\tau a(\tau)\left[\tau^3(1-s)^2-(\tau-s)^3\right]f_2\left(x_2^{[0]}(s),x_2^{[1]}(s),x_2^{[2]}(s),\ldots,x_2^{[N]}(s)\right)ds\right.\\
&\left.+\int_\tau^1 a(\tau)\tau^3(1-s)^2 f_2\left(x_2^{[0]}(s),x_2^{[1]}(s),x_2^{[2]}(s),\ldots,x_2^{[N]}(s)\right)ds\right)d\tau.
\end{aligned}$$

لدينا

$$
\begin{aligned}
&|x_2(t)-x_1(t)| \\
&=\frac{1}{6}\int_0^t \left[t^3(1-s)^2-(t-s)^3\right]\Big|f_2\left(x_2^{[0]}(s),x_2^{[1]}(s),x_2^{[2]}(s),\dots,x_2^{[N]}(s)\right) \\
&-\ f_1\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\dots,x_1^{[N]}(s)\right)\Big|\,ds \\
&+\frac{1}{6}\int_t^1 t^3(1-s)^2\Big|f_2\left(x_2^{[0]}(s),x_2^{[1]}(s),x_2^{[2]}(s),\dots,x_2^{[N]}(s)\right) \\
&-\ f_1\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\dots,x_1^{[N]}(s)\right)\Big|\,ds+\frac{1}{6(1-\alpha)} \\
&\times\int_0^1\left(\int_0^\tau a(\tau)\left[\tau^3(1-s)^2-(\tau-s)^3\right]\Big|f_2\left(x_2^{[0]}(s),x_2^{[1]}(s),x_2^{[2]}(s),\dots,x_2^{[N]}(s)\right)\right. \\
&-\ f_1\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\dots,x_1^{[N]}(s)\right)\Big|\,ds \\
&+\int_\tau^1 a(\tau)\tau^3(1-s)^2 f_2\left(x_2^{[0]}(s),x_2^{[1]}(s),x_2^{[2]}(s),\dots,x_2^{[N]}(s)\right) \\
&\left.-\ f_1\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\dots,x_1^{[N]}(s)\right)\Big|\,ds\right)d\tau,
\end{aligned}
$$

لكن

$$
\begin{aligned}
&\Big|f_2\left(x_2^{[0]}(s),x_2^{[1]}(s),x_2^{[2]}(s),\dots,x_2^{[N]}(s)\right)-f_1\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\dots,x_1^{[N]}(s)\right)\Big| \\
&=\Big|f_2\left(x_2^{[0]}(s),x_2^{[1]}(s),x_2^{[2]}(s),\dots,x_2^{[N]}(s)\right)-f_2\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\dots,x_1^{[N]}(s)\right) \\
&+\ f_2\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\dots,x_1^{[N]}(s)\right)-f_1\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\dots,x_1^{[N]}(s)\right)\Big|
\end{aligned}
$$

باستخدام (2.2) والقضية (8.2) نحصل على

$$
\begin{aligned}
&\Big|f\left(x_2^{[0]}(s),x_2^{[1]}(s),x_2^{[2]}(s),\dots,x_2^{[N]}(s)\right)-f\left(x_1^{[0]}(s),x_1^{[1]}(s),x_1^{[2]}(s),\dots,x_1^{[N]}(s)\right)\Big| \\
&\le\|f_2-f_1\|+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}k_jL^i\|x_2-x_1\|.
\end{aligned}
$$

بذلك

$$
\|x_2-x_1\|\le\left(\frac{7}{72(1-\alpha)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}k_jL^i\right)\|f_2-f_1\|
$$

$$+\left(\frac{7}{72\left(1-\alpha\right)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}k_jL^i\right)\left\|x_2-x_1\right\|.$$

وعليه

$$\left\|x_2-x_1\right\|\leq\frac{\frac{7}{72(1-\alpha)}\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=0}^{j-1}k_jL^i}{1-\frac{7}{72(1-\alpha)}\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=0}^{j-1}k_jL^i}\left\|f_2-f_1\right\|.$$

وهو المطلوب. ■

4.2 الأمثلة

سنتطرق في هذا الجزء إلى مثالين يثبتان ما تطرقنا إليه فيما سبق من نظريات.

مثال 1.4.2 ([4]) نقدم المثال التالي الذي يوضح نتائج دراستنا. نعتبر المسألة التالية

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+\frac{1}{120}\cos\left(12t\right)\sin\left(12t\right) \\ +\frac{1}{10^2}\sin\left(u(t)\right)+\frac{1}{10^3}\sin\left(u^{[2]}(t)\right)+\frac{1}{10^4}\sin\left(u^{[3]}(t)\right)=0,\ 0<t<1, \\ u'\left(0\right)=u'\left(1\right)=u''\left(0\right)=0,\ u\left(0\right)=\int_0^1 su\left(s\right)ds, \end{cases} \tag{19.2}$$

حيث

$$\left|f\left(t,u(t),u^{[2]}(t),u^{[3]}(t)\right)\right|$$
$$=\left|\frac{1}{120}\cos\left(12t\right)\sin\left(12t\right)+\frac{1}{10^2}\sin\left(u(t)\right)+\frac{1}{10^3}\sin\left(u^{[2]}(t)\right)+\frac{1}{10^4}\sin\left(u^{[3]}(t)\right)\right|,$$

مع

$$a\left(t\right)=t\geq 0,$$
$$0<\int_0^1 t\ dt=\frac{1}{2}<1,$$

وبالتالي فان $\alpha=\frac{1}{2}$. الآن لدينا

$$\left|f\left(t,u(t),u^{[2]}(t),u^{[3]}(t)\right)\right|$$

$$= \left| \frac{1}{120} \cos(12t) \sin(12t) + \frac{1}{10^2} \sin(u(t)) + \frac{1}{10^3} \sin\left(u^{[2]}(t)\right) + \frac{1}{10^4} \sin\left(u^{[3]}(t)\right) \right|,$$

نعلم أن

$$|\cos(12t)| \leq 1,$$
$$|\sin(u(t))| \leq |u(t)|,$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{120} |\sin(12t)| + \frac{1}{10^2} |\sin(u(t))| + \frac{1}{10^3} \left|\sin\left(u^{[2]}(t)\right)\right| + \frac{1}{10^4} \left|\sin\left(u^{[3]}(t)\right)\right| \\
&\leq \frac{12}{120} |t| + \frac{1}{10^2} |u(t)| + \frac{1}{10^3} \left|u^{[2]}(t)\right| + \frac{1}{10^4} \left|u^{[3]}(t)\right| \\
&\leq \frac{1}{10} |t| + \frac{1}{10^2} |u(t)| + \frac{1}{10^3} \left|u^{[2]}(t)\right| + \frac{1}{10^4} \left|u^{[3]}(t)\right|.
\end{aligned}$$

إذن

$$\beta = 0,\ k_0 = \frac{1}{10},\ k_1 = \frac{1}{10^2},\ k_2 = \frac{1}{10^3},\ k_3 = \frac{1}{10^4},$$

وبالاضافة الى ذلك، بأخذ $P = \frac{1}{2}$ و $L = 4$ حسب تعريف $\mathcal{CB}(P, L)$، عندئذ

$$\begin{aligned}
&\frac{7}{72(1-\alpha)} \left(k_0 + \beta + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} k_j L^i P \right), \\
&= \frac{7}{72\left(1-\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{10} + 0 + \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=0}^{j-1} k_j L^i P \right), \\
&= \frac{7}{72\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{10} + k_1 L^0 P + k_2 \left(L^0 + L^1\right) P + k_3 \left(L^0 + L^1 + L^3\right) P \right), \\
&= \frac{7}{36} \left(\frac{1}{10} + \left(k_1 L^0 + k_2 \left(L^0 + L^1\right) + k_3 \left(L^0 + L^1 + L^3\right)\right) p \right), \\
&= \frac{7}{36} \left(\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}(1+4) + \frac{1}{10^4}(1+4+16) \right) \frac{1}{2} \right), \\
&= \frac{7}{36}(0.10855) \\
&\simeq 0.0211 \leq P = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\frac{5}{6} \left(k_0 + \beta + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} k_j L^i P \right),$$

$$= \frac{5}{6}\left(\frac{1}{10}+0+\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=0}^{j-1}k_jL^iP\right),$$
$$= \frac{5}{6}\left(\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}(1+4)+\frac{1}{10^4}(1+4+16)\right)\frac{1}{2}\right),$$
$$= \frac{5}{6}(0.10855),$$
$$\simeq 0.0905 \le L = 4.$$

و

$$\Gamma = \frac{7}{72(1-\alpha)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}k_jL^i$$
$$= \frac{7}{72\left(\frac{1}{2}\right)}\left(k_1L^0+k_2\left(L^0+L^1\right)+k_3\left(L^0+L^1+L^3\right)\right),$$
$$= \frac{7}{36}\left(k_1L^0+k_2\left(L^0+L^1\right)+k_3\left(L^0+L^1+L^3\right)\right),$$
$$= \frac{7}{36}\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}(1+4)+\frac{1}{10^4}(1+4+16)\right),$$
$$= \frac{7}{36}(0.0171),$$
$$\simeq 0.0033 < 1.$$

ومنه النظريات (1.1.2) و (1.2.2) محققة، ومنه (19.2) تقبل حلا وحيدا في $\mathcal{CB}\left(\frac{1}{2},4\right)$.

مثال 2.4.2 نقدم المثال الثاني لتأكيد نتائج دراستنا. نعتبر المسألة التالية

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+\frac{1}{130}\ln(13t) \\ +\frac{1}{10^2}\ln(u(t))+\frac{1}{10^3}\ln\left(u^{[2]}(t)\right)+\frac{1}{10^4}\ln\left(u^{[3]}(t)\right)=0,\ 0<t<1,, \\ u'(0)=u'(1)=u''(0)=0,\ u(0)=\int_0^1 su(s)\,ds, \end{cases} \quad (20.2)$$

حيث

$$f\left(t,u(t),u^{[2]}(t),u^{[3]}(t)\right)$$
$$= \frac{1}{130}\ln(13t)+\frac{1}{10^2}\ln(u(t))+\frac{1}{10^3}\ln\left(u^{[2]}(t)\right)+\frac{1}{10^4}\ln\left(u^{[3]}(t)\right),$$

مع

$$a\left(t\right)=t\geq 0,$$
$$0<\int_{0}^{1}t\ dt=\frac{1}{2}<1,$$

وبالتالي فان $\alpha=\frac{1}{2}$، الآن لدينا

$$\begin{aligned}&\left|f\left(t,u(t),u^{[2]}(t),u^{[3]}(t)\right)\right|\\&=\left|\frac{1}{130}\ln\left(13t\right)+\frac{1}{10^{2}}\ln\left(u(t)\right)+\frac{1}{10^{3}}\ln\left(u^{[2]}(t)\right)+\frac{1}{10^{4}}\ln\left(u^{[3]}(t)\right)\right|\\&\leq\frac{1}{130}\left|\ln(13t)\right|+\frac{1}{10^{2}}\left|\ln\left(u(t)\right)\right|+\frac{1}{10^{3}}\left|\ln\left(u^{[2]}(t)\right)\right|+\frac{1}{10^{4}}\left|\ln\left(u^{[3]}(t)\right)\right|,\end{aligned}$$

نعلم أن

$$\begin{aligned}&\left|\ln t\right|\leq\ \left|t\right|,\\&\left|\ln u(t)\right|\leq\ \left|u(t)\right|,\\&\left|\ln\left(u^{[2]}(t)\right)\right|\leq\ \left|u^{[2]}(t)\right|,\\&\left|\ln\left(u^{[3]}(t)\right)\right|\leq\ \left|u^{[3]}(t)\right|,\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}&\left|f\left(t,u(t),u^{[2]}(t),u^{[3]}(t)\right)\right|\\&\leq\frac{1}{10}\left|t\right|+\frac{1}{10^{2}}\left|u(t)\right|+\frac{1}{10^{3}}\left|u^{[2]}(t)\right|+\frac{1}{10^{4}}\left|u^{[3]}(t)\right|,\end{aligned}$$

عندئذ

$$\beta=0,\ k_{0}=\frac{1}{10},\ k_{1}=\frac{1}{10^{2}},\ k_{2}=\frac{1}{10^{3}},\ k_{3}=\frac{1}{10^{4}},$$

الآن يأخذ، $P=\frac{1}{3}$ و $L=2$ حسب تعريف $\mathcal{CB}\left(P,L\right)$، عندئذ

$$\begin{aligned}&\frac{7}{72\left(1-\alpha\right)}\left(k_{0}+\beta+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}k_{j}L^{i}P\right),\\&=\frac{7}{72\left(1-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{10}+0+\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=0}^{j-1}k_{j}L^{i}P\right),\end{aligned}$$

$$= \frac{7}{72\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{10} + k_1 L^0 P + k_2\left(L^0 + L^1\right)P + k_3\left(L^0 + L^1 + L^3\right)P\right),$$
$$= \frac{7}{36}\left(\frac{1}{10} + \left(k_1 L^0 + k_2\left(L^0 + L^1\right) + k_3\left(L^0 + L^1 + L^3\right)\right)P\right),$$
$$= \frac{7}{36}\left(\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}(1+2) + \frac{1}{10^4}(1+2+4)\right)\frac{1}{3}\right),$$
$$= \frac{7}{36}(0.10456),$$
$$\simeq 0.02033 \leq P = \frac{1}{3}.$$

و

$$\frac{5}{6}\left(k_0 + \beta + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} k_j L^i P\right),$$
$$= \frac{5}{6}\left(\frac{1}{10} + 0 + \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=0}^{j-1} k_j L^i P\right),$$
$$= \frac{5}{6}\left(\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}(1+2) + \frac{1}{10^4}(1+2+4)\right)\frac{1}{3}\right),$$
$$= \frac{5}{6}(0.10456),$$
$$\simeq 0.08713 \leq L = 2.$$

و

$$\Gamma = \frac{7}{72(1-\alpha)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} k_j L^i,$$
$$= \frac{7}{72\left(\frac{1}{2}\right)}\left(k_1 L^0 + k_2\left(L^0 + L^1\right) + k_3\left(L^0 + L^1 + L^3\right)\right),$$
$$= \frac{7}{36}\left(k_1 L^0 + k_2\left(L^0 + L^1\right) + k_3\left(L^0 + L^1 + L^3\right)\right),$$
$$= \frac{7}{36}\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}(1+2) + \frac{1}{10^4}(1+2+4)\right),$$
$$= \frac{7}{36}(0.0137),$$
$$\simeq 0.00266 < 1.$$

ومنه النظريات (1.1.2) و (1.2.2) محققة، ومنه (20.2) تقبل حلا وحيدا في $\mathcal{CB}\left(\frac{1}{3}, 2\right)$.

الخاتمة

نظرا لأهمية المعادلات التفاضلية في الرياضيات ارتأينا أن يكون موضوعنا دراسة تحليلية لمعادلات تفاضلية من الدرجة الرابعة بنقطتين وشرط تكاملي، استندنا في ذلك على نظرية النقطة الثابتة لشودر، فنظرية النقطة الثابتة ذات أهمية قصوى في دراسة وجود حلول المعادلات غير الخطية والمعادلات التفاضلية التي هي في الواقع ترجمة رياضية لظواهر فيزيائية.

يوجد العديد من النظريات الاخرى التي يمكن تطبيقها على هذا النوع من المعادلات. نأمل ان تكون مواضيع لمذكرات السنوات القادمة نظرا لأهميتها العظمى في مختلف مجالات البحث.

كما نتمنى أننا قد حققنا الحد الأدنى من الهدف المقصود من خلال هذا البحث المتواضع.

المراجع العلمية

[1] إسماعيل بوقفة، عايش الهنادوة، المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات، الجمهورية اليمنية جامعة العلوم والتكنولوجيا، 2010.

[2] محمد حازي، المختصر في الطبولوجيا، دروس الوجيزة الوافية في دروس الطبولوجيا، الجزائر ديوان المطبوعات الجامعية، 1994

[3] Benaicha S., Haddouchi F., Positive solutions of a nonlinear fourth-order integral boundary value problem, Analele Universităţii de Vest, Timişoara Seria Matematică-Informatică LIV, 1 (2016), 73–86.

[4] Mansouri B., Ardjouni A., and Djoudi A., Positive solutions of nonlinear fourth order iterative differential equations with two-point and integral boundary conditions, Nonauton. Dyn. Syst. (2021); 8: 297–306.

[5] Si JG, Wang XP. Smooth solutions of a nonhomogeneous iterative functional differential equation with variable coefficients. Journal of Mathematical Analysis and Applications (1998); 226: 377–392.

[6] Smart D. R., Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.

الملخص

لقد درسنا في هذا البحث المتواضع نوع من المعادلات التفاضلية الذي تمحور موضوعه حول "دراسة تحليلية لمعادلات تفاضلية من الدرجة الرابعة بنقطتين وشرط تكاملي"

قدمنا في الفصل الاول مفاهيم أساسية ونظريات، وقدمنا في الفصل الثاني براهين وشروحات تمكننا من الوصول إلى وجود ووحدانية الحل الموجب.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية من الدرجة الرابعة، المعادلات التفاضلية التكرارية، نظرية النقطة الثابتة لشودر،ء فضاء بناخ.