الجمــهوريـــة الجزائريـــة الديمـقراطيـــة الشعبيـــة

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieure

et de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي-سكيكدة-

Ecole Normale Supérieure d'Enseignement Technologique -Skikda-

قسم الريــاضيات والإعلام الآلي

Département de Mathématiques et informatiques

مُذكّرة تَخرّج لِنَيل شَهادَة أَستَاذ التَّعلِيم

دراسة متراجحات تكاملية كسرية جديدة من نوع سامبسون للدوال التي تكون مشتقاتها الأولى s- محدبة.

مـــــن إعداد:

فصيح ألفة

مقيطع عبير

جــنـة المنـــاقـــشـــة:

غمراني سارة	أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة	مشرفا
موس إلهام	أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة	رئيسا
بن تيمامة وئام	أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة	مناقشا
بن سعد مريم	أستاذة بجامعة 08 ماي 1945 قالمة	مناقشا

السنة الجامعية : 2024/2023

دفعة جوان 2024

❖ شكــر وعرفـــان

قال رسول الله صل الله عليه و سلم " من لم يشكر الناس لم يشكر الله ".

الحمد لله على إحسانه والشكر له على توفيقه لنا لإتمام هذا العمل .

وقبل أن نمضي نتقدم ببالغ شكرنا وعظيم إمتناننا للأستاذة "غمراني سارة" التي لن تكفي الحروف لإيفائها حقها لمجهوداتها ونصائحها التي لم تبخلنا بها و إرشاداتها نرجو من الله عز و جل أن يوفقها إلى ما تصبو إليه و يجعلها من عباده الصالحين .

ونخص بجزيل الشكر والعرفان إلى كل من أشعل شمعة في دروب عملنا و إلى كل من وقف على المنابر وأعطى من حصيلة فكره لنا .

كما نشكر أعضاء لجنة المناقشة التي شرفتنا بقبولها مناقشة مذكرتنا، كل من الأستاذة "موس إلهام" و الأستاذة "بن تيمامة وئام" و الأستاذة " بن سعد مريم" .

و في الأخير نشكر كل من قدم لنا يد العون و المساعدة من قريب أو بعيد و لو بكلمة طيبة أو بتوجيه أو حتى بدعوة في ظهر الغيب لهم جزيل الشكر و العرفان.

و لكم منا فائق التقدير و الإحترام.

﴿ربي أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي و على والدي و أن أعمل صالحا ترضاه وأدخلني برحمتك في عبادك الصالحين﴾

❖ إهــداء

اللهم لك الحمد حتى ترضى و لك الحمد إذا رضيت و لك الحمد بعد الرضا نحمد الله عزوجل أنه وفقنا إلى إنجاز هذا العمل المتواضع.

إلى قرة عيني، إلى رفيقتي، سندي و ملهمتي، إلى من شاركتني فرحتي بالبدايات فوهبت شبابها و صحتها حتى مضينا في الدرب..إلى من دثرتنا بدعواتها و صبرت لتبلغ مرآنا على مشارف التخرج..إلى منبع الحنان و العطاء..

أمي الحبيبة حفظها الله و أطال في عمرها.

إلى من يزيدني إنتسابي له و ذكره فخرا و اعتزازا، إلى من سهر الليالي من أجل تربيتي و تعليمي..

أبي الغالي حفظه الله و أطال في عمره.

إلى كتفي الثابت الذي لا يميل..إلى حظي الجميل في الدنيا..إلى من تتعافى معهم روحي..إلى من تعالت معهم الضحكات..إلى إخوتي

شهيناز، ريان، منار، صفوان

إلى الذين غمروني بالحب و التوجيه و امدوني بالقوة كانوا موضع الاتكاء و الذين رزقني الله بهم لأعرف من خلالهم طعم الحياة صديقاتي

ذكرى شاهناز روميساء شروق أسيل

إلى كل من علم فاتقى الله فيمن علّم.. علّم فأبدع.. علّم فزرع في قلوبنا دور كلّ منّا في بناء هذه الأمة..

"فاللّهم اجعلنا ممّن تعلّم و عمِل فعلّم، و استفاد فأفاد و غيثا أينما حلّ نفع."

مقيطع عبير

❖ إهــداء

الحمد لله الذي ما سلكنـا البدايات إلا بتيسيره و ما بلغنا الغايات إلا بتوفيقه وفضله الذي سهل لي طريقا أبغي فيه علما ووفقنا لإنهاء هذا العمل المتواضع و الصلاة والسلام على خير نبي أرسل للعالمين سيدنا محمد عليه أزكى الصلاة وأفضل التسليم .

إلى التي بالأماني حملتني ، و بالتهاني إستقبلتني ، وبالحنان رعتني ،إلى من لم يعرف دعائها حدودا ولا عطاؤها قيودا ،إلى بسمة الحياة وسر الوجود ،إلى التي كانت دعواها لي بالتوفيق تتبعني خطوة خطوة ،إلى ينبوع الصبر و التفاؤل و الأمل

"أمي العزيزة و الغالية " حفظها الله و أطال في عمرها.

إلى الذي وهبني كل ما يملك ، إلى من كان يدفعني للأمام لنيل المبتغى ،إلى الذي علمني حروف الحياة و مهد كل شيء جميل ، إلى رمز التفاؤل و القناعة ،إلى صاحب القلب الكبير الذي أحمل إسمه بكل فخر و أعتز به في كل مكان .

" أبي الحبيب " حفظه الله و أطال في عمره.

إلى من شاركتهم حياتي ،إلى من عشت معهم أجمل الذكريات إخوتي

" روفياء و لميس "

إلى من إكتملت به شجرة العائلة ،إلى مصدر البسمة و الفرح في عائلتنا ،إلى الذي يأنس به قلبي

"أخي وسيم "

إلى أحسن من عرفني بهم القدر كل الأصدقاء الأوفياء و الزملاء الأعزاء التي جمعتني بهم الحياة .

فصيح ألفة

الفَهـرَس

الفصل 2

متراجحات تكاملية كسرية جديدة من نوع سيمبسون Simpson:

مقدمة عامة

تتميز نظرية التحدب بمجموعة من الخصائص الفريدة التي تميز الدوال المحدبة حيث تعتبر محورا أساسيا في مختلف مجالات البحث العلمي في الرياضيات و أثبتت أنها وسيلة فعالة لحل مجموعة واسعة من المشكلات و المسائل الكبيرة التي تواجهنا في عدة ميادين، شهدت هذه النظرية تطورا و انتشارا ملحوظا حيث بدأت تأخذ أبعادا جديدة، و من بين التطورات البارزة التي شهدتها نظرية التحدب يبرز دورالمتراجحات التكاملية في العديد من المجالات الرياضيتية من بينها متراجحة سيمبسون التي تعود إلى الرياضي البريطاني " توماس سيمبسون " الذي قدم هذه المتراجحة كبديل بسيط و فعال لحساب التكاملات المعقدة في حالة تقسيم المجال $[a, b]$ إلى $2n$ جزء كالتالي:

$a = x_0, x_1, \dots, x_{2n} = b$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{2i+2} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3} h[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})].$$

مع خطأ تقريبي يعطى بالشكل:

$$E_s = -\frac{(b-a)}{12} f''(\eta)h^2. \ \ \eta \in]a, b[$$

في الفترة الأخيرة قام الباحث شوانغ " Shuang " وآخرون[26] ، بمناقشة متراجحة جديدة تشبه متراجحة سيمبسون، و توصل إلى نتائج مثيرة إلى الإهتمام بالنسبة للدوال المحدبة، واحدة من هذه النتائج تتعلق بتقدير التكاملات حيث وجدوا ما يلي:

$$\left| \frac{1}{8}(f(a) + 6f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right|$$
$$\leq \frac{b-a}{768} (19|f'(a)| + 82|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)| + 19|f'(b)|)$$

و

$$\left| \frac{1}{8}(f(a) + 6f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right|$$
$$\leq \frac{b-a}{16} \left(\frac{1+3^{p+1}}{4(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(\frac{a+b}{2})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \right),$$

كذلك

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq\frac{5(b-a)}{64}\left(\left(\frac{19|f'(a)|^q+41|f'(\frac{a+b}{2})|^q}{60}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{41|f'(\frac{a+b}{2})|^q+19|f'(b)|^q}{60}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

بالنسبة للدوال التي تحقق الشرط الليبشيزي:

$$\forall x,y\in[a,b],|f'(x)-f'(y)|\leq L|x-y|$$

وجدوا:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{41(b-a)^2L}{768}+\frac{b-a}{16}(f'(a)+f'(b)).$$

أخيرا، قدم كيرماسي " Kirmaci " [15] متراجحات جديدة مشتقاتها الأولى محدبة و s−محدبة:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)(3^{p+1}+1)^{\frac{1}{p}}}{8\times 16^{\frac{1}{P}}}\left(\frac{1}{2^{\frac{s+1}{q}}}+(1-\frac{1}{2^{s+1}})^{\frac{1}{q}}\right)(|f'(a)|+|f'(b)|),$$

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)(3^{p+1}+1)^{\frac{1}{p}}}{16\times 8^{\frac{1}{P}}}(|f'(a)|+2|f'(\frac{a+b}{2})|+|f'(b)|).$$

في هذه المذكرة سنهتم بدراسة متراجحات تكاملية كسرية جديدة من نوع سيمبسون للدوال التي تكون مشتقاتها الأولى s−محدبة باستخدام التكاملات الكسرية لريمان ليوفيل.

في الفصل الأول: نذكر ببعض تعاريف التحدب الكلاسيكي بالإضافة إلى بعض المفاهيم و الخواص التي سنستعملها لاحقا.

في الفصل الثاني: سيخصص بالكامل حول نظريات لمتراجحات تكاملية كسرية جديدة من نوع سيمبسون كما تطرقنا فيه إلى نتائج مشابهة لهذا النوع من المتراجحات و في الأخير قدمنا أمثلة تطبيقية عن استخدام هذه المتراجحات.

نبذة تاريخية حول بعض العلماء في الرياضيات

توماس سيمبسون Thomas Simpson

هو عالم رياضيات بريطاني ولد عام 1710م، عرف بأعماله في التحليل الرياضي و الجبر و كان إهتمامه الأساسي بنظرية الإحتمالات و نشر كتابين حول حساب التفاضل و التكامل، كما عمل على تحليل الدوال و تطوير أساليب لتقدير الجدور و حساب الأعداد المعقدة و اشتهر أيضا بوضعه لطريقة سيمبسون لتقدير التكاملات، توفي عام 1761م.

بيرنارد ريمان Bernhard Riemann

هو عالم رياضيات ألماني ولد سنة 1826م في ياملن بالقرب من دانبارغ ساهم ريمان في العديد من الأعمال في التحليل الرياضي و نظرية الأعداد و الهندسة التفاضلية و يعتبر اليوم تكامل ريمان و فرضية ريمان من أشهر أعماله على الإطلاق كما أسس نظرية الدوال و الهندسة الريمانية التي مهدت الطريق لأينشتاين ليضع النظرية النسبية، كما تعتبر دراساته حول الأعداد الأولية من أهم إنجازاته، توفي سنة 1866م.

أوتو هولدر Otto Hölder

هو عالم رياضيات ألماني ولد سنة 1859م يعتبر واحدا من الرياضيين البارزين في القرن التاسع عشر و القرن العشرين، قام هولدر بالعديد من الأبحاث في التحليل الرياضي و قدم العديد من المساهمات في تطوير نظرية الإنتساب و التكامل، أحد أعمال هولدر البارزة هو وضعه لما يعرف اليوم بمتراجحة هولدر التي لها تطبيقات واسعة في مختلف فروع الرياضيات و الهندسة، توفي سنة 1937م.

جوزيف ليوفيل Joseph Liouville

جوزيف ليوفيل كان رياضياتيًا فرنسيًا بارزًا، وُلد سنة 1809م، له إسهامات مهمة في عدة مجالات من الرياضيات، بما في ذلك التحليل العقدي، نظرية الأعداد، والهندسة التفاضلية.و من إنجازاته البارزة في مسيرته العلمية: نظرية ليوفيل في الأعداد العقدية، الميكانيكا التحليلية، كما قدم عدة بحوث في التحليل الجبري، توفي سنة 1882م.

الفصل 1

مفاهيم أساسية :

1.1 التحدب

1.1.1 المجموعة المحدبة

تعريف 1. 1.1. [18]
نقول عن مجموعة $I \subset \mathbb{R}^n$ أنها محدبة إذا كان:

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0,1] \;\; tx + (1-t)y \in I$$

بحيث المجموعة $[x,y] = \{tx + (1-t)y; t \in [0,1]\}$ تسمى بالقطعة المستقيمة.

1.1.2 الدوال المحدبة

تعريف 1. 1.2. [23]
لتكن الدالة f المعرفة بـ :

$$f : I \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

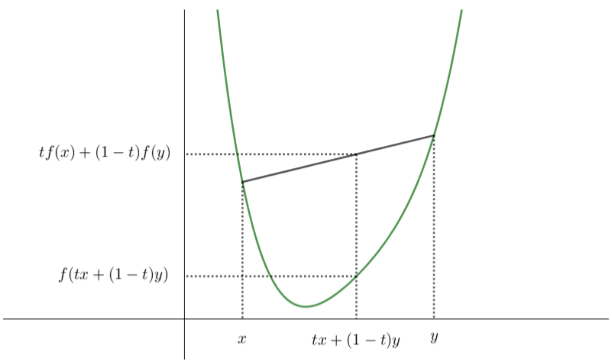
ولتكن I مجموعة محدبة، نقول عن f أنها دالة محدبة إذا كان:

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0,1], \;\; f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

و نقول أنها محدبة تماما إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x, y \in I, x \neq y, \forall t \in]0,1[, \;\; f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

التفسير الهندسي للتحدب:



شكل 1.1: الدالة المحدبة

نلاحظ أن القطعة المستقيمة الواصلة بين x و y تقع فوق بيان الدالة f الواصل بين هاتين النقطتين.

خاصية 1.1.1. [23]
لتكن f دالة قابلة للإشتقاق بحيث:

$$f : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

فإن القضايا التالية متكافئة:
1- f دالة محدبة.
2-المشتقة الأولى متزايدة.
3- المشتقة الثانية موجبة.

مثال 1.1.1. الدالة $f(x) = e^x$ محدبة تماما لأن: $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = e^x > 0$

مثال 1.1.2. لدينا: $f(x) = x^3$ محدبة على المجال $[0, \infty[$ لأن: $\forall x \in [0, \infty[, f''(x) = 6x > 0$

تعريف 1. 1.3.. [4]
لتكن $f : I \subset [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ نقول أن الدالة f، $s-$محدبة عند بعض النقاط الثابتة $s \in [0, 1]$ إذا كان:

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y).$$

1.2 الدوال المقعرة

تعريف 1. 2.1.. [19]
نقول عن f أنها دالة مقعرة على I إذا كانت $(-f)$ دالة محدبة و تحقق:

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], \quad f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

و نقول أنها مقعرة تماما إذا تحقق:

$$\forall x, y \in I, x \neq y, \forall t \in]0, 1[, \quad f(tx + (1 - t)y) > tf(x) + (1 - t)f(y).$$

1.3 الفضاء L^p

تعريف 1. 1.3.1. [22]
لتكن X مجموعة غير خالية و B عشيرة في X و ليكن μ تطبيق قيوس على B،
إذا كان: $p \geq 1$
فإن الفضاء $L^P(X,B,\mu)$ هو مجموعة كل الدوال القيوسة f المعرفة على X، بحيث $\|f\|_p < \infty$ والمعرف كما يلي: $\|f\|_p = (\int_X |f(x)|^p d\mu(x))^{\frac{1}{p}}$.
إذا كان: $p = \infty$
فإن الفضاء $L^\infty(X,B,\mu)$ هو مجموعة الدوال القيوسة التي يكون نظيمها الأعلى $\|f\|_\infty$ منته، أي: $\|f\|_\infty = Sup_{x\in X}|f(x)|$.

1.4 متراجحة كوشي شوارتز

خاصية 1.4.1. [18]
ليكن $x, y \in \mathbb{R}^n$ و φ جداء سلمي حيث $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ فإنه:

$$|\varphi(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$$

برهان 1.4.1.
لدينا: $\varphi(x,x) = \langle x,x\rangle = \|x\|^2$
بالإعتماد على الخاصية السابقة و خواص الجداء السلمي:
نجد:

$$0 \leq \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y)$$

$$\begin{aligned}\varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) &= \varphi(x,x) + \lambda\varphi(y,x) + \lambda\varphi(x,y) + \lambda^2\varphi(y,y)\\ &= \varphi(x,x) + 2\lambda\varphi(x,y) + \lambda^2\varphi(y,y)\end{aligned}$$

إذا كان: $y = 0$ فهي محققة دوما أي $\varphi(x,x) = \varphi(x,x)$

إذا كان: $y \neq 0$ فإن عبارة كثير الحدود من الدرجة الثانية للمتغير λ تكون موجبة أو معدومة من أجل المميز المختصر سالب لأن معامل λ^2 هو $\varphi(y,y) > 0$.

$$[\varphi(x,y)]^2 - \varphi(x,x)\varphi(y,y) \leq 0$$

$$[\varphi(x,y)]^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

$$[\varphi(x,y)]^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

$$|\varphi(x,y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

1.5 متراجحة هولدر *Hölder*

مبرهنة 1.5.1. [21]

ليكن $p, q > 0$ بحيث:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

إذا كانت f و g دالتين من $\mathbb{R}$ معرفتين على $[a,b]$ و $|f|^p,\ |g|^q$ قابلتين للمكاملة على $[a,b]$ عندئذ:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}$$

برهان 1.5.1.

نفرض أن: a, b أعداد حقيقية لدينا حسب مبرهنة يونغ:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

نفرض أن:

$$a = \frac{|f(x)|}{(\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}} \quad , \quad b = \frac{|g(x)|}{(\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}}$$

بالتعويض في مبرهنة يونغ نجد:

$$\frac{|f(x)|}{(\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(x)|}{(\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{|g(x)|^q}{q\int_a^b |g(x)|^q dx}$$

$$\frac{\int_a^b |f(x)||g(x)|dx}{(\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{p\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{\int_a^b |g(x)|^q dx}{q\int_a^b |g(x)|^q dx}$$

بالإختزال نجد:

$$\frac{\int_a^b |f(x)||g(x)|dx}{(\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\frac{\int_a^b |f(x)||g(x)|dx}{(\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

$$\int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}$$

لدينا: $|f(x)g(x)| \leq |f(x)||g(x)|$ و بالتالي:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}.$$

1.6 الدالة *r-L-Hölder*

تعريف 1.6.1.1. [21]

نقول أن $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ هي دالة *r-L-Hölder* إذا وجد ثابت $L > 0$ بحيث من أجل كل $x, y \in \mathbb{R}^n$ لدينا: $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|^r$.

1.7 التطبيق الليبشيزي

نظرية 1.7.1. [28]

لتكن $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ نقول أن الدالة f ليبشيزية إذا كان من أجل كل $x, y \in [a, b]$ فإن: $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ بحيث $k > 0$.

1.8 الدوال المحدودة

تعريف 1.8.1.1. [9]

لتكن $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ دالة مستمرة، نقول أن الدالة f محدودة على $[a, b]$ إذا وجد $-\infty < m < M < +\infty$ حيث أن من أجل كل $x \in [a, b]$ فإن: $m \leq f(x) \leq M$.

1.9 الإشتقاق

تعريف 1. 1.9.. [1]

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح $I \subset \mathbb{R}$ و x_0 نقطة من I نقول عن الدالة f أنها قابلة للإشتقاق عند النقطة x_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي l بحيث:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l.$$

يسمى l بالعدد المشتق للدالة f عند النقطة x_0 و نضع $f'(x_0) = l$.

1.10 التفاضل

تعريف 1. 1.10.. [27]

نعتبر U مفتوح غير خالي من $\mathbb{R}^n$ و E فضاء نظيمي و $f : U \longmapsto F$ حيث F فضاء نظيمي آخر، نقول عن f أنها قابلة للمفاضلة عند النقطة $x_0 \in U$ إذا وجد $l \in L(E; F)$ بحيث :

$$\lim_{h \to 0_E} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

بعبارة أخرى نقول عن f أنها قابلة للمفاضلة عند النقطة x إذاوجد تطبيق خطي مستمر $l \in L(E; F)$ بحيث :

$$\|f(x_0 + h) - f(x) - l(h)\|_F = \varepsilon(h)\|h\|_E.$$

1.11 بعض الدوال الخاصة

1.11.1 الدالة قاما

تعريف 1. 1.11.. [7]

نعرف من أجل كل عدد مركب z بحيث $Re(z) > 0$ الدالة $\Gamma(z)$ بـ:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

مثال 1.11.1. $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x}dx = \Gamma(5)$

خاصية 1.11.1.

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2. $\Gamma(z+1) = z! \quad ; \quad z \in \mathbb{N}^\star$

برهان 1.11.1.

1. بما أن $\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt$ باستعمال التكامل بالتجزئة لدينا:

$$u(z) = t^z \Rightarrow u'(z) = zt^{z-1}$$

$$v'(z) = e^{-t} \Rightarrow v(z) = -e^{-t}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= [-t^z e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} zt^{z-1}e^{-t}dt \\
&= z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

2. لدينا :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\
&= z[(z-1)\Gamma(z-1)] \\
&= z(z-1)[(z-2)\Gamma(z-2)] \\
&= z(z-1)(z-2)... \times 3 \times 2 \times 1\Gamma(1) \\
&= z!.
\end{aligned}$$

ملاحظة 1. 11.1..

$$\Gamma(1) = 0!$$

1.11.2 الدالة بيتا

تعريف 1. 11.2.. [24]

نعرف من أجل كل عددين مركبين x و y بحيث: $Re(x) > 0$ و $Re(y) > 0$، الدالة $B(x,y)$ بـ:

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

مثال 1.11.2.

$$\beta(1,1) = \int_0^1 t^{1-1}dt \quad = \int_0^1 dt = t|_0^1 = 1$$

خاصية 1.11.2.

1. $\beta(x,y)=\beta(y,x)$
2. $\beta(x+1,y)=\dfrac{x}{x+y}\beta(x,y)$
3. $\beta(x,y+1)=\dfrac{y}{x+y}\beta(x,y)$

برهان 1.11.2.

1. لدينا: $\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$، نقوم بتغيير المتغير:

نضع:

$$t=1-k \Rightarrow k=1-t$$

$$dt=-dk$$

لما:

$$t=0 \Rightarrow k=1$$

$$t=1 \Rightarrow k=0$$

بالتعويض في التكامل السابق نجد:

$$\begin{aligned}\beta(x,y)&=\int_1^0(1-k)^{x-1}(k)^{y-1}(-dk)\\&=-\int_1^0(1-k)^{x-1}(k)^{y-1}(dk)\\&=\int_0^1(k)^{y-1}(1-k)^{x-1}dk\\&=\beta(y,x).\end{aligned}$$

1.12 العلاقة بين الدالة قاما و بيتا

خاصية 1.12.1. [14]

تعطى بـ:

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

1.13 الدالة *HyperGeometric*

تعريف 1. 13.1.. [14]
نعرف هذه الدالة من أجل $Re(c) > 0$, $Re(b) > 0$ و $|z| < 1$ كما يلي:

$$ {}_2F_1(a,b,c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt, $$

حيث $c > b > 0$ و $|z| < 1$ و $B(.,.)$ هي الدالة بيتا .

1.14 الحساب الكسري

1.14.1 التكامل الكسري لريمان ليوفيل

تعريف 1. 14.1.. [5]
لتكن $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ دالة مستمرة، نسمي تكامل ريمان ليوفيل للدالة f التكامل المعرف بالعلاقة التالية:

$$ (I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt $$

بحيث α عدد حقيقي أو مركب مع $(Re(\alpha) > 0)$

خاصية 1.14.1. [5]
1.من أجل $\alpha = 0$ لدينا: $I_a^0 f(x) = f(x)$
2.من أجل α, β عددين مركبين بحيث $Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$ لدينا:

$$ I_a^\alpha \ I_a^\beta f(x) = I_a^\beta \ I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x). $$

تعريف 1. 14.2.. [20]
لتكن $f \in L^1[a,b]$، تكاملات ريمان ليوفيل الكسرية $I_{a+}^\alpha f$ و $I_{b-}^\alpha f$ من الرتبة $\alpha > 0$ تعرف كالتالي:

$$ I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a $$

$$ I_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad b > x. $$

1.14.2 الإشتقاق الكسري لريمان ليوفيل

تعريف 1. 14.3.. [5]
لتكن $m-1<\alpha<m$ مع $m\in\mathbb{N}/\{0\}$ نعرف الإشتقاق الكسري من الرتبة α لريمان ليوفيل بـ :

$$({}^{RL}D_a^{\alpha}f)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^m[(I^{m-\alpha}f)(x)].$$

الفصل 2

متراجحات تكاملية كسرية جديدة من نوع سيمبسون *Simpson*:

2.1 مقدمة

إن نظرية التحدب تلعب دورا أساسيا في العديد من مجالات البحث، حيث تعتبر وسيلة قوية لحل مختلف المشكلات و المسائل الكبيرة.
ففي السنوات الأخيرة تطور و عمم موضوع التحدب و أخذ العديد من الإتجاهات من بين هذه التعميمات الدوال s–محدبة التي وصفها العالم الرياضي بروكنر " *Bruckner* "، كما تم إكتشاف علاقة وطيدة للتحدب بتطور المتراجحات و مزيجهما جذب الكثير من الباحثين في الرياضيات بسبب طبيعتهم وخصائصهم ومن بين أهم المتراجحات في التحليل الكلاسيكي المتراجحة التكاملية من نوع سيمبسون و التي تعطى بالعبارة :

$$|\frac{1}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du| \leq \frac{(b-a)^4}{2880}\|f^{(4)}\|_\infty \quad , \tag{1.1}$$

حيث $f \in C^4([a,b])$ و $f^{(4)}$ محدودة أي: $\|f^{(4)}\|_\infty = sup_{x\in(a,b)}|f^{(4)}(x)|$

2.2 متراجحات مشابهة لمتراجحة سيمبسون *Simpson*

في الآونة الأخيرة، العالم "شوانغ" "*Shuang*" و آخرون [26] ناقشوا متراجحة مشابهة لمتراجحة سيمبسون و من النتائج التي حصلوا عليها للدوال المحدبة هي:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\\ \leq&\frac{b-a}{768}(19|f'(a)|+82|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|+19|f'(b)|)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\\ \leq&\frac{b-a}{16}\left(\frac{1+3^{p+1}}{4(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(\frac{a+b}{2})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right),\end{aligned}$$

كذلك:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq\frac{5(b-a)}{64}\left(\left(\frac{19|f'(a)|^q+41|f'(\frac{a+b}{2})|^q}{60}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{41|f'(\frac{a+b}{2})|^q+19|f'(b)|^q}{60}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

قدم "ليو" "*Luo*" و آخرون [16] النسخة المشابهة المزودة بالوزن للنتيجة التي أعطيت سابقا، حيث ناقشوا أيضا الحالات التي تكون فيها المشتقات الأولى محدودة و ليبشيزية و التي نستنتج منها نتيجتين :

بالنسبة للدوال التي تكون مشتقاتها الأولى محدودة أي:

$$\forall x\in[a,b], m\leq f(x)\leq M$$

لدينا:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{9(b-a)(M-m)}{64}.$$

و بالنسبة للدوال التي مشتقاتها الأولى تحقق الشرط الليبشيزي أي:

$$\forall x,y\in[a,b], |f'(x)-f'(y)|\leq L|x-y|$$

لدينا:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{41(b-a)^2L}{768}+\frac{b-a}{16}(f'(a)+f'(b)).$$

مؤخرا، قدم العالم "كيرماسي" "Kirmaci" [15] المتراجحات التالية للمشتقات الأولى المحدبة و الـs-محدبة:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)(3^{p+1}+1)^{\frac{1}{p}}}{8\times 16^{\frac{1}{P}}}\left(\frac{1}{2^{\frac{s+1}{q}}}+(1-\frac{1}{2^{s+1}})^{\frac{1}{q}}\right)(|f'(a)|+|f'(b)|),$$

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)(3^{p+1}+1)^{\frac{1}{p}}}{16\times 8^{\frac{1}{P}}}(|f'(a)|+2|f'(\frac{a+b}{2})|+|f'(b)|).$$

في هذا الفصل، سنتطرق لنظريات و بعض الأمثلة التطبيقية حول متراجحات كسرية جديدة من نوع سيمبسون التي عرضت في المقال [12]

2.3 نظريات حول متراجحات تكاملية كسرية جديدة من نوع سيمبسون Simpson

من أجل إثبات النتائج الرئيسية التي عرضت في [12]، نحتاج إلى التوطئة التالية:

توطئة 2.3.1.
لتكن $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للمفاضلة على I حيث $a,b\in I$ مع $a<b$، و $f'\in L^1[a,b]$ لدينا:

$$\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)$$
$$=\frac{b-a}{4}\left(\int_0^1(t^{\alpha}-\frac{1}{4})f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})dt-\int_0^1((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)dt\right).$$

برهان 2.3.1.
نضع:

$$I_1=\int_0^1(t^{\alpha}-\frac{1}{4})f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})dt$$

$$I_2=\int_0^1(\frac{1}{4}-(1-t)^\alpha)f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)dt.$$

باستخدام التكامل بالتجزئة، نجد:

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{2}{b-a}(t^\alpha-\frac{1}{4})f((1-t)a+t\frac{a+b}{2})\Big|_{t=0}^{t=1}-\frac{2\alpha}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)a+t\frac{a+b}{2})dt\\&=\frac{3}{2(b-a)}f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2(b-a)}f(a)-\frac{2\alpha}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)a+t\frac{a+b}{2})dt\\&=\frac{3}{2(b-a)}f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2(b-a)}f(a)-\alpha\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\alpha+1}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(u-a)^{\alpha-1}f(u)du\\&=\frac{3}{2(b-a)}f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2(b-a)}f(a)-\frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a).\end{aligned}\tag{2.1}$$

بنفس الطريقة، نحصل على:

$$\begin{aligned}I_2&=\frac{2}{b-a}((1-t)^\alpha-\frac{1}{4})f((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)\Big|_{t=0}^{t=1}+\frac{2\alpha}{b-a}\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}f((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)dt\\&=-\frac{1}{2(b-a)}f(b)-\frac{3}{2(b-a)}f(\frac{a+b}{2})+\frac{2\alpha}{b-a}\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}f((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)dt\\&=-\frac{1}{2(b-a)}f(b)-\frac{3}{2(b-a)}f(\frac{a+b}{2})+\alpha\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\alpha+1}\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-u)^{\alpha-1}f(u)du\\&=-\frac{1}{2(b-a)}f(b)-\frac{3}{2(b-a)}f(\frac{a+b}{2})+\frac{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b).\end{aligned}\tag{2.2}$$

بطرح (2.1) من (2.2) و بضرب الناتج في $\frac{b-a}{4}$، نحصل على النتيجة المطلوبة. ■

نظرية 2.3.1.

لتكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة قابلة للمفاضلة على $[a,b]$ بحيث $f'\in L^1[a,b]$ مع $0\le a<b$.
إذا كانت $|f'|$ دالة $s-$محدبة من أجل بعض النقاط الثابتة $s\in[0,1]$ ، لدينا:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^{-}}f(a)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^{+}}f(b)\right)\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}(\ominus_{s,\alpha}|f'(a)|$$
$$+\left(\frac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}\left(\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}\right)^{s+1}+\frac{3s+3-\alpha}{2(s+1)(\alpha+s+1)}\right)|f'(\frac{a+b}{2})|+\ominus_{s,\alpha}|f'(b)|),$$

حيث:

$$\ominus_{s,\alpha}=\frac{1}{4(s+1)}\left(1-2\left(1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}\right)^{s+1}\right)+B_{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(s+1,\alpha+1)-B_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\alpha+1,s+1). \tag{2.3}$$

برهان 2.3.2.
من التوطئة 2.3.1، و بتطبيق خواص القيمة المطلقة، و الدالة $|f'|$ $s-$محدبة ، نجد:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^{-}}f(a)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^{+}}f(b)\right)\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\int_0^1|(t^{\alpha}-\frac{1}{4})||f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})|dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4}||f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)|dt\right)$$
$$=\frac{b-a}{4}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^{\alpha})|f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})|dt\right.$$
$$+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1(t^{\alpha}-\frac{1}{4})|f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})|dt$$
$$+\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})|f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)|dt$$
$$\left.+\int_{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1(\frac{1}{4}-(1-t)^{\alpha})|f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)|dt\right)$$
$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^{\alpha})((1-t)^s|f'(a)|+t^s|f'(\frac{a+b}{2})|)dt\right.$$

$$+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^{1}(t^{\alpha}-\frac{1}{4})((1-t)^{s}|f'(a)|+t^{s}|f'(\frac{a+b}{2})|)dt$$
$$+\int_{0}^{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})((1-t)^{s}|f'(\frac{a+b}{2})|+t^{s}|f'(b)|)dt$$
$$+\left.\int_{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^{1}(\frac{1}{4}-(1-t)^{\alpha})((1-t)^{s}|f'(\frac{a+b}{2})|+t^{s}|f'(b)|)dt\right)$$
$$=\frac{b-a}{4}\left(|f'(a)|(\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^{\alpha})(1-t)^{s}dt+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^{1}(t^{\alpha}-\frac{1}{4})(1-t)^{s}dt)\right.$$
$$+|f'(\frac{a+b}{2})|(\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^{\alpha})t^{s}dt+\int_{0}^{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})(1-t)^{s}dt$$
$$+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^{1}(t^{\alpha}-\frac{1}{4})t^{s}dt+\int_{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^{1}(\frac{1}{4}-(1-t)^{\alpha})(1-t)^{s}dt)$$
$$+\left.|f'(b)|(\int_{0}^{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})t^{s}dt+\int_{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^{1}(\frac{1}{4}-(1-t)^{\alpha})t^{s}dt)\right)$$
$$=\frac{b-a}{4}\left(\ominus_{s,\alpha}|f'(a)|\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}\left(\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}\right)^{s+1}+\frac{3s+3-\alpha}{2(s+1)(\alpha+s+1)}\right)|f'(\frac{a+b}{2})|+\ominus_{s,\alpha}|f'(b)|\right),$$

حيث إستخدمنا:

$$\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^{\alpha})(1-t)^{s}dt=\int_{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^{1}(\frac{1}{4}-(1-t)^{\alpha})t^{s}dt \tag{2.4}$$
$$=\frac{1}{4(s+1)}(1-(1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}})^{s+1})-B_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\alpha+1,s+1)$$

و

$$\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^{1}(t^{\alpha}-\frac{1}{4})(1-t)^{s}dt=\int_{0}^{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})t^{s}dt \tag{2.5}$$

$$= B_{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(s+1,\alpha+1) - \frac{1}{4(s+1)}(1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}})^{s+1}$$

و

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^\alpha)t^s dt = \int_{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^{1}(\frac{1}{4}-(1-t)^\alpha)(1-t)^s dt \tag{2.6}$$

$$= \frac{\alpha}{4(s+1)(\alpha+s+1)}(\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}})^{s+1}$$

و

$$\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^{1}(t^\alpha-\frac{1}{4})t^s dt = \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}((1-t)^\alpha-\frac{1}{4})(1-t)^s dt \tag{2.7}$$

$$= \frac{\alpha}{4(s+1)(\alpha+s+1)}(\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}})^{s+1} + \frac{3s+3-\alpha}{4(s+1)(\alpha+s+1)}.$$

حيث تم تعريف $\ominus_{s,\alpha}$ في (2.3) . ■

نتيجة 2. 3،1..

من النظرية 2،3،1، إذا أخذنا $s=1$، نحصل على :

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b)) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^\alpha}\left(I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\ominus_{1,\alpha}|f'(a)| + \left(\frac{\alpha}{2(\alpha+2)}\left(\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}\right)^2 + \frac{6-\alpha}{4(\alpha+2)}\right)|f'(\frac{a+b}{2})| + \ominus_{1,\alpha}|f'(b)|\right),$$

حيث:

$$\ominus_{1,\alpha} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)+8}{8(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}\right)^2 + 2\left(\frac{\alpha+1-(\alpha+2)\sqrt[\alpha]{4}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}\right)^{\alpha+2}. \tag{2.8}$$

نتيجة 2. 3،2..

من النظرية 2،3،1، إذا أخذنا $\alpha=1$، نجد:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b)) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left(\left(\frac{s-2}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)^{s+2}\right)|f'(a)| + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{s+1}+\frac{3s+2}{2}\right)|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|\right.$$

$$\left.+\left(\frac{s-2}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)^{s+2}\right)|f'(b)|\right).$$

نظرية 2.3.2.
لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للمفاضلة على $[a,b]$ بحيث $f'\in L^1[a,b]$ مع $0\leq a<b$.
إذا كانت $|f'|^q$ دالة $s-$محدبة من أجل بعض النقاط الثابتة $s\in[0,1]$ حيث $q>1$ مع $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$، لدينا:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{4^{p+\frac{1}{\alpha}}\alpha}B(\frac{1}{\alpha},p+1)+\frac{3^{p+1}}{4^{p+1}\alpha(p+1)}\cdot{}_2F_1(1-\frac{1}{\alpha},1,p+2;\frac{3}{4})\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(\frac{a+b}{2})|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right),$$

برهان 2.3.3.
من التوطئة 2.3.1 و متراجحة هولدر و الدالة $|f'|^q$ $s-$محدبة، لدينا:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{4}\left((\int_0^1|t^{\alpha}-\frac{1}{4}|^pdt)^{\frac{1}{p}}(\int_0^1|f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})|^qdt)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+(\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4}|^pdt)^{\frac{1}{p}}(\int_0^1|f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)|^qdt)^{\frac{1}{q}}\right)$$
$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^{\alpha})^pdt+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1(t^{\alpha}-\frac{1}{4})^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$
$$\times\left(\int_0^1|f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})|^qdt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})^pdt+\int_{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1(\frac{1}{4}-(1-t)^{\alpha})^pdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\left(\int_0^1 |f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^\alpha)^p dt+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1 (t^\alpha-\frac{1}{4})^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left((\int_0^1((1-t)^s|f'(a)|^q+t^s|f'(\frac{a+b}{2})|^q)dt)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+(\int_0^1((1-t)^s|f'(\frac{a+b}{2})|^q+t^s|f'(b)|^q)dt)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$=\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{4^{p+\frac{1}{\alpha}}\alpha}B(\frac{1}{\alpha},p+1)+\frac{3^{p+1}}{4^{p+1}\alpha(p+1)}\cdot{}_2F_1(1-\frac{1}{\alpha},1,p+2;\frac{3}{4})\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(\frac{a+b}{2})|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}},$$

حيث قمنا باستخدام التكاملات التالية:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^\alpha)^p dt=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{1}{4}}(\frac{1}{4}-w)^p w^{\frac{1}{\alpha}-1}dw=\frac{1}{4^p\alpha}\int_0^{\frac{1}{4}}(1-4w)^p w^{\frac{1}{\alpha}-1}dw$$

$$=\frac{1}{4^{p+\frac{1}{\alpha}}\alpha}\int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-u)^p du=\frac{1}{4^{p+\frac{1}{\alpha}}\alpha}B(\frac{1}{\alpha},p+1).$$

و

$$\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1(t^\alpha-\frac{1}{4})^p dt=\frac{1}{\alpha}\int_{\frac{1}{4}}^1(w-\frac{1}{4})^p w^{\frac{1}{\alpha}-1}dw=(\frac{3}{4})^p\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{3}{4}}(1-\frac{4}{3}u)^p(1-u)^{\frac{1}{\alpha}-1}du$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{p+1}\frac{1}{\alpha}\int_0^1(1-z)^p(1-\frac{3}{4}z)^{\frac{1}{\alpha}-1}dz$$

$$=\frac{3^{p+1}}{4^{p+1}\alpha(p+1)}\cdot{}_2F_1(1-\frac{1}{\alpha},1,p+2;\frac{3}{4}).\blacksquare$$

نتيجة 2. 3.3.
من النظرية 2.3.2، إذا أخذنا $s=1$، نجد:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{4^{p+\frac{1}{\alpha}}\alpha}B(\frac{1}{\alpha},p+1)+\frac{3^{p+1}}{4^{p+1}\alpha(p+1)}\cdot{}_2F_1(1-\frac{1}{\alpha},1,p+2;\frac{3}{4})\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(\frac{a+b}{2})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

نتيجة 2. 3.4.
من النظرية 2.3.2، إذا أخذنا $\alpha=1$، نجد:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{16}\left(\frac{1+3^{p+1}}{4(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(\frac{a+b}{2})|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

نظرية 2.3.3.
لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للمفاضلة على $[a,b]$ بحيث $f'\in L^1[a,b]$ مع $0\leq a<b$، إذا كانت $|f'|^q$ دالة $s-$محدبة من أجل بعض النقاط الثابتة $s\in[0,1]$ حيث $q\geq 1$، فإن:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\frac{(2-\sqrt[\alpha]{4})\alpha+3\sqrt[\alpha]{4}}{4(\alpha+1)\sqrt[\alpha]{4}}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\left(\ominus_{s,\alpha}|f'(a)|^q+\frac{(2-(\sqrt[\alpha]{4})^{s+1})\alpha+(3s+3)(\sqrt[\alpha]{4})^{s+1}}{4(\sqrt[\alpha]{4})^{s+1}(s+1)(\alpha+s+1)}|f'(\frac{a+b}{2})|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{(2-(\sqrt[\alpha]{4})^{s+1})\alpha+(3s+3)(\sqrt[\alpha]{4})^{s+1}}{4(\sqrt[\alpha]{4})^{s+1}(s+1)(\alpha+s+1)}|f'(\frac{a+b}{2})|^q+\ominus_{s,\alpha}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right),$$

حيث $\ominus_{s,\alpha}$ معرفة سابقا في (2.3).

برهان 2.3.4.
من التوطئة 2.3.1، و بتطبيق خواص القيمة المطلقة، و متراجحة هولدر، و الدالة $|f'|^q$ $s-$محدبة، نجد:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\left(\int_0^1|t^{\alpha}-\frac{1}{4}|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1|t^{\alpha}-\frac{1}{4}||f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4}|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\times\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}|f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^{\alpha})dt+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1(t^{\alpha}-\frac{1}{4})dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$
$$\times\left(\int_0^1|t^{\alpha}-\frac{1}{4}|f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})dt+\int_{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1(\frac{1}{4}-(1-t)^{\alpha})dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\left.\times\left(\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4}||f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$
$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^{\alpha})dt+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1(t^{\alpha}-\frac{1}{4})dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\left(\int_0^1|t^{\alpha}-\frac{1}{4}|((1-t)^s|f'(a)|^q+t^s|f'(\frac{a+b}{2})|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_0^1 |(1-t)^\alpha-\frac{1}{4}|((1-t)^s|f'(\frac{a+b}{2})|^q+t^s|f'(b)|^q)dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$=\frac{b-a}{4}\left(\frac{(2-\sqrt[\alpha]{4})\alpha+3\sqrt[\alpha]{4}}{4(\alpha+1)\sqrt[\alpha]{4}}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\left(|f'(a)|^q\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^\alpha)(1-t)^sdt+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1(t^\alpha-\frac{1}{4})(1-t)^sdt\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+|f'(\frac{a+b}{2})|^q\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}(\frac{1}{4}-t^\alpha)t^sdt+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1(t^\alpha-\frac{1}{4})t^sdt\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\left(\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}((1-t)^\alpha-\frac{1}{4}(1-t)^sdt+\int_{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1(\frac{1}{4}-(1-t)^\alpha)(1-t)^sdt)\right)|f'(\frac{a+b}{2})|^q\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}((1-t)^\alpha-\frac{1}{4})t^sdt+\int_{1-\frac{1}{\sqrt[\alpha]{4}}}^1(\frac{1}{4}-(1-t)^\alpha)t^sdt\right)|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$=\frac{b-a}{4}\left(\frac{(2-\sqrt[\alpha]{4})\alpha+3\sqrt[\alpha]{4}}{4(\alpha+1)\sqrt[\alpha]{4}}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\left(\ominus_{s,\alpha}|f'(a)|^q+\frac{(2-(\sqrt[\alpha]{4})^{s+1})\alpha+(3s+3)(\sqrt[\alpha]{4})^{s+1}}{4(\sqrt[\alpha]{4})^{s+1}(s+1)(\alpha+s+1)}|f'(\frac{a+b}{2})|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{(2-(\sqrt[\alpha]{4})^{s+1})\alpha+(3s+3)(\sqrt[\alpha]{4})^{s+1}}{4(\sqrt[\alpha]{4})^{s+1}(s+1)(\alpha+s+1)}|f'(\frac{a+b}{2})|^q+\ominus_{s,\alpha}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right),$$

حيث إستعملنا (2،3)-(2،7) في البرهان . ■

نتيجة 2، 3،5،.

من النظرية 2،3،3، إذا أخذنا $s=1$، نجد:

$$\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^\alpha}\left(I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\frac{(2-\sqrt[\alpha]{4})\alpha+3\sqrt[\alpha]{4}}{4(\alpha+1)\sqrt[\alpha]{4}}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\left(\ominus_{1,\alpha}|f'(a)|^q+\frac{(2-(\sqrt[\alpha]{4})^2)\alpha+6(\sqrt[\alpha]{4})^2}{8(\sqrt[\alpha]{4})^2(\alpha+2)}|f'(\frac{a+b}{2})|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{(2-(\sqrt[\alpha]{4})^2)\alpha+6(\sqrt[\alpha]{4})^2}{8(\sqrt[\alpha]{4})^2(\alpha+2)}|f'(\frac{a+b}{2})|^q+\ominus_{1,\alpha}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right),$$

نتيجة 2. 3.6..

من النظرية 2.3.3، إذا أخذنا $\alpha=1$، نجد:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{4[(s+1)(s+2)]^{\frac{1}{q}}}(\frac{5}{16})^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\left((\frac{s-2}{4}+2(\frac{3}{4})^{s+2})|f'(a)|^q+\frac{2+(3s+2)4^{s+1}}{4^{s+2}}|f'(\frac{a+b}{2})|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2+(3s+2)4^{s+1}}{4^{s+2}}|f'(\frac{a+b}{2})|^q+(\frac{s-2}{4}+2(\frac{3}{4})^{s+2})|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

نظرية 2.3.4.

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للمفاضلة على $[a,b]$ بحيث $f'\in L^1[a,b]$ مع $0\leq a<b.$ إذا وجد ثابتين $-\infty<m<M<+\infty$ بحيث $m\leq f'(x)\leq M$ من أجل كل $x\in[a,b]$، إذن:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^\alpha}\left(I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)(M-m)}{4(\alpha+1)}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt[\alpha]{4}}+\frac{3-\alpha}{4}\right).$$

برهان 2.3.5.

من التوطئة 2.3.1، نجد:

$$\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^\alpha}\left(I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)$$
$$=\frac{b-a}{4}\left(\int_0^1(t^\alpha-\frac{1}{4})f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})dt\right.$$
$$\left.-\int_0^1((1-t)^\alpha-\frac{1}{4})f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)dt\right)$$

$$= \frac{b-a}{4}\Big(\int_0^1 (t^\alpha - \frac{1}{4})(f'((1-t)a + t\frac{a+b}{2}) - \frac{m+M}{2} + \frac{m+M}{2})dt$$

$$- \int_0^1 ((1-t)^\alpha - \frac{1}{4})(f'((1-t)\frac{a+b}{2} + tb) - \frac{m+M}{2} + \frac{m+M}{2})dt\Big)$$

$$= \frac{b-a}{4}\Big(\int_0^1 (t^\alpha - \frac{1}{4})(f'((1-t)a + t\frac{a+b}{2}) - \frac{m+M}{2})dt$$

$$- \int_0^1 ((1-t)^\alpha - \frac{1}{4})(f'((1-t)\frac{a+b}{2} + tb) - \frac{m+M}{2})dt$$

$$+ \frac{m+M}{2}\Big(\int_0^1 (t^\alpha - \frac{1}{4})dt - \int_0^1 ((1-t)^\alpha - \frac{1}{4})dt\Big)\Big)$$

$$= \frac{b-a}{4}\Big(\int_0^1 (t^\alpha - \frac{1}{4})(f'((1-t)a + t\frac{a+b}{2}) - \frac{m+M}{2})dt$$

$$- \int_0^1 ((1-t)^\alpha - \frac{1}{4})(f'((1-t)\frac{a+b}{2} + tb) - \frac{m+M}{2})dt\Big), \qquad (3.1)$$

حيث أخذنا بعين الإعتبار أن:

$$\int_0^1 (t^\alpha - \frac{1}{4})dt - \int_0^1 ((1-t)^\alpha - \frac{1}{4})dt = (\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{4}) = 0.$$

و بتطبيق القيمة المطلقة على طرفي (3،1)، نحصل على:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a) + 6f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^\alpha}\left(I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^-} f(a) + I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^+} f(b)\right)\right|$$

$$= \frac{b-a}{4}\Big(\int_0^1 |t^\alpha - \frac{1}{4}||f'((1-t)a + t\frac{a+b}{2}) - \frac{m+M}{2}|dt$$

$$+ \int_0^1 |(1-t)^\alpha - \frac{1}{4}||f'((1-t)\frac{a+b}{2} + tb) - \frac{m+M}{2}|dt\Big), \qquad (3.2)$$

بما أن $m \leq f'(x) \leq M$ فإنه من أجل كل $x \in [a,b]$، لدينا:

$$|f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})-\frac{m+M}{2}|\leq\frac{M-m}{2} \tag{3.3}$$
$$|f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)-\frac{m+M}{2}|\leq\frac{M-m}{2}. \tag{3.4}$$

بتعويض (3.3)-(3.4) في (3.2)، نحصل على:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)\right|$$
$$=\frac{(b-a)(M-m)}{8}\left(\int\limits_0^1|t^{\alpha}-\frac{1}{4}|dt+\int\limits_0^1|(1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4}|dt\right)$$
$$=\frac{(b-a)(M-m)}{4}\left(\int\limits_0^1|t^{\alpha}-\frac{1}{4}|dt\right)$$
$$=\frac{(b-a)(M-m)}{4(\alpha+1)}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt[\alpha]{4}}+\frac{3-\alpha}{4}\right).\blacksquare$$

نتيجة 2، 3.7.،

من النظرية 2.3.4، إذا أخذنا $\alpha=1$، نحصل على:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{5(b-a)(M-m)}{64}.$$

نظرية 2.3.5.

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للمفاضلة على $[a,b]$ بحيث $f'\in L^1[a,b]$ مع $0\leq a<b$.
إذا كانت f' دالة *r-L-Hölder* على $[a,b]$ (إذا وجد $L>0$ و $0<r\leq 1$ بحيث $|f'(x)-f'(y)|\leq L|x-y|^r$)، فإنه لدينا:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)\right|$$
$$\leq\frac{L(b-a)^{r+1}}{2^{r+2}}\left(\frac{-\alpha^2+(6-r)\alpha+3r+7}{4(\alpha+1)(\alpha+r+1)}+\frac{\alpha}{2(r+1)(\alpha+r+1)}\left(\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}\right)^{r+1}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2(r+1)}\left(1-\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}\right)^{r+1}+B_{1-\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}}(r+1,\alpha+1)-B_{\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}}(\alpha+1,r+1)\right),$$

برهان 2.3.6.
من التوطئة 2.3.1، لدينا:

$$\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^{-}}f(a)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^{+}}f(b)\right)$$
$$=\frac{b-a}{4}(\int_0^1(t^{\alpha}-\frac{1}{4})f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})dt-\int_0^1((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)dt)$$
$$=\frac{b-a}{4}(\int_0^1(t^{\alpha}-\frac{1}{4})(f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})-f'(a)+f'(a))dt$$
$$-\int_0^1((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})(f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)-f'(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2}))dt)$$
$$=\frac{b-a}{4}(\int_0^1(t^{\alpha}-\frac{1}{4})(f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})-f'(a))dt$$
$$-\int_0^1((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})(f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)-f'(\frac{a+b}{2}))dt$$
$$+f'(a)\int_0^1(t^{\alpha}-\frac{1}{4})dt-f'(\frac{a+b}{2})\int_0^1((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})dt)$$
$$=\frac{b-a}{4}(\int_0^1(t^{\alpha}-\frac{1}{4})(f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})-f'(a))dt$$
$$-\int_0^1((1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4})(f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)-f'(\frac{a+b}{2}))dt$$
$$+\frac{3-\alpha}{4(\alpha+1)}(f'(a)-f'(\frac{a+b}{2}))). \qquad (3.4)$$

بتطبيق القيمة المطلقة على طرفي (3.4)، و كون الدالة f' هي دالة *r-L-Hölder* على $[a,b]$، نحصل على:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b))-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^{-}}f(a)+I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^{+}}f(b)\right)\right|\\
&\leq\frac{b-a}{4}\left(\int_0^1|t^{\alpha}-\frac{1}{4}||f'((1-t)a+t\frac{a+b}{2})-f'(a)|dt\right.\\
&+\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4}||f'((1-t)\frac{a+b}{2}+tb)-f'(\frac{a+b}{2})|dt\\
&\left.+\frac{3-\alpha}{4(\alpha+1)}(|f'(a)-f'(\frac{a+b}{2})|)\right)\\
&\leq\frac{b-a}{4}L\left(\int_0^1|t^{\alpha}-\frac{1}{4}||(1-t)a+t\frac{a+b}{2}-a|^{r}dt\right.\\
&\left.+\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4}||(1-t)\frac{a+b}{2}+tb-\frac{a+b}{2}|^{r}dt+\frac{3-\alpha}{4(\alpha+1)}(|a-\frac{a+b}{2}|^{r})\right)\\
&=\frac{L}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{r+1}\left(\int_0^1|t^{\alpha}-\frac{1}{4}|t^{r}dt+\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4}|t^{r}dt+\frac{3-\alpha}{4(\alpha+1)}\right)\\
&=\frac{L(b-a)^{r+1}}{2^{r+2}}\left(\frac{-\alpha^2+(6-r)\alpha+3r+7}{4(\alpha+1)(\alpha+r+1)}+\frac{\alpha}{2(r+1)(\alpha+r+1)}\left(\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}\right)^{r+1}\right.\\
&\left.-\frac{1}{2(r+1)}\left(1-\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}\right)^{r+1}B_{1-\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}}(r+1,\alpha+1)-B_{\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}}(\alpha+1,r+1)\right),
\end{aligned}$$

حيث إستخدمنا:

$$\begin{aligned}
\int_0^1|t^{\alpha}-\frac{1}{4}|t^{r}dt=&\frac{\alpha}{2(r+1)(\alpha+r+1)}\left(\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}\right)^{r+1}+\frac{3r+3-\alpha}{4(r+1)(\alpha+r+1)},\\
\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-\frac{1}{4}|t^{r}dt=&B_{1-\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}}(r+1,\alpha+1)-B_{\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}}(\alpha+1,r+1)\\
&+\frac{1}{4(r+1)}-\frac{1}{2(r+1)}\left(1-\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}\right)^{r+1}.\blacksquare
\end{aligned}$$

ملاحظة 2. 3.1..
عن طريق عملية حسابية بسيطة للتكاملات المعرفة، لدينا:

$$1 : B_{1-\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}}(2,\alpha+1) = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{4(\alpha+1)}\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4(\alpha+2)}\left(\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}\right)^2.$$

$$2 : B_{\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}}(\alpha+1,2) = \frac{1}{4(\alpha+1)}\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4(\alpha+2)}\left(\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}\right)^2.$$

$$3 : B_{\frac{3}{4}}(r+1,2) = \frac{r+5}{4(r+1)(r+2)}\left(\frac{3}{4}\right)^{r+1}.$$

$$4 : B_{\frac{1}{4}}(2,r+1) = \frac{1}{(r+1)(r+2)} - \frac{r+5}{4(r+1)(r+2)}\left(\frac{3}{4}\right)^{r+1}.$$

$$5 : B_{\frac{3}{4}}(2,2) = \frac{9}{64}.$$

$$6 : B_{\frac{1}{4}}(2,2) = \frac{5}{192}.$$

نتيجة 2. 3.8..
باستخدام النظرية 2.3.5، إذا كانت f' دالة ليبشيزية، فإنه لدينا:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b)) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}(b-a)^\alpha}\left(I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a) + I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right)\right|$$
$$\leq \frac{L(b-a)^2}{8}\left(\frac{6+\alpha-\alpha^2}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}\sqrt[\alpha]{\frac{1}{4}}\right).$$

نتيجة 2. 3.9..
من النظرية 2.3.5، إذا أخذنا $\alpha = 1$، نحصل على:

$$\left|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b)) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{L(b-a)^{r+1}}{2^{r+2}}\left(\frac{r^2+7r+2}{4(r+1)(r+2)} + \frac{2(1+3^{r+2})}{4^{r+2}(r+1)(r+2)}\right).$$

نتيجة 2. 3.10..
من النتيجة 2. 3.9.، إذا أخذنا $r = 1$، نحصل على:

$$|\frac{1}{8}(f(a)+6f(\frac{a+b}{2})+f(b)) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt| \leq \frac{9L(b-a)^2}{128}.$$

2.4 أمثلة عن تطبيقات متراجحات Simpson

ليكن Υ تقسيم للمجال $[a,b]$ حيث: $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ و نأخذ بعين الإعتبار صيغة التكامل:

$$\int_a^b f(u)du=\lambda(f,\Upsilon)+R(f,\Upsilon),$$

حيث:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{8}\left(f(x_i)+6f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})+f(x_{i+1})\right)-\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(t)dt\right|\\&\leq\frac{x_{i+1}-x_i}{4(s+1)(s+2)}\left((\frac{s-2}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)^{s+2})|f'(x_i)|+\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{s+1}+\frac{3s+2}{2}\right)\left|f'(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})\right|\right.\\&\left.+(\frac{s-2}{4}+2\left(\frac{3}{4}\right)^{s+2})|f'(x_{i+1})|\right),\end{aligned}$$

$$\lambda(f,\Upsilon)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{8}\left(f(x_i)+6f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})+f(x_{i+1})\right),$$

و تعبر $R(f,\Upsilon)$ عن الخطأ التقريبي المرتبط به.

خاصية 2.4.1.

لتكن $n\in\mathbb{N}$ و $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للمفاضلة على $[a,b]$ مع $0\leq a<b$ و $f'\in L^1[a,b]$.
إذا كانت $|f'|$ دالة $s-$محدبة من أجل بعض النقاط الثابتة $s\in[0,1]$، فإنه لدينا:

$$\begin{aligned}|R(f,\Upsilon)|\leq\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4(s+1)(s+2)}&\left(\left(\frac{s-2}{4}+2(\frac{3}{4})^{s+2}\right)|f'(x_i)|\right.\\&\left.+\left((\frac{1}{4})^{s+1}+\frac{3s+2}{2}\right)\left|f'(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})\right|+\left(\frac{s-2}{4}+2(\frac{3}{4})^{s+2}\right)|f'(x_{i+1})|\right).\end{aligned}$$

برهان 2.4.1.

باستخدام النظرية 2.3.2، على المجال $[x_i,x_{i+1}](i=0,1,...,n-1)$ للتقسيم Υ، نجد:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{8}\left(f(x_i)+6f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})+f(x_{i+1})\right)-\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(t)dt\right|\\&\leq\frac{x_{i+1}-x_i}{4(s+1)(s+2)}\left((\frac{s-2}{4}+2(\frac{3}{4})^{s+2})|f'(x_i)|+((\frac{1}{4})^{s+1}+\frac{3s+2}{2})\left|f'(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})\right|\right.\\&\left.+(\frac{s-2}{4}+2(\frac{3}{4})^{s+2})|f'(x_{i+1})|\right).\qquad(4.1)\end{aligned}$$

بضرب طرفي (4.1) في $(x_{i+1}-x_i)$، ثم بجمع المتراجحات الناتجة لكل $i=\{0,1,...,n-1\}$ و باستخدام المتراجحة المثلثية، نحصل على النتيجة المطلوبة. ■

خاصية 2.4.2.
ليكن $a,b\in\mathbb{R}$ مع $0<a<b,$ لدينا:

$$|A(a^2,b^2)+3A^2(a,b)-4L_2^2(a,b)|\leq\frac{5(b-a)^2}{8}.$$

حيث:
المتوسط الحسابي: $A(a,b)=\dfrac{a+b}{2}$

المتوسط الهندسي: $G(a,b)=\sqrt{ab}, a,b>0$

المتوسط p−اللوغارتمي: $L_p(a,b)=\left(\dfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}}, a,b>0, a\neq b, p\in\mathbb{R}/\{0,-1\}$

برهان 2.4.2.
يأتي التأكيد من النظرية 2.3.4، المطبقة على الدالة $f(x)=x^2$ ■

قائـمة المصطلحـات		
اللغة العربية	اللغة الفرنسية	اللغة الإنجليزية
متراجحة تكاملية	*Inégalité integrale*	*Integral inequality*
التحدب	*Convexité*	*Convexity*
التقعر	*Concavité*	*Concavity*
الإشتقاق	*Dérivée*	*Derivative*
التفاضل	*Dffiérentiation*	*Dffierentiation*
الفضاء L^p	*Espace* L^p	L^p *Space*
عشيرة	*Tribu*	*Tribe*
تطبيق قيوس	*Fonction mesurable*	*Measurable function*
متراجحة هولدر	*Inégalité de Hölder*	*Hölder's Inequality*
التطبيق الليبشيزي	*Fonction lipschizienne*	*Lipschitzian function*
فضاء نظيمي	*Espace normé*	*Normed space*
تطبيق خطي	*Application linéaire*	*Linear application*
النقاط الثابتة	*Points fixes*	*Fixed points*
المتراجحة المثلثية	*Inégalité triangulaire*	*Triangular inequality*
التكامل الكسري	*Intégration fractionnaire*	*Fracional integration*
المتوسط الحسابي	*Moyenne arithmétique*	*Arithmetic mean*
المتوسط الهندسي	*Moyenne géométrique*	*Geometric mean*

قائـمة المصطلحـات		
اللغة العربية	اللغة الفرنسية	اللغة الإنجليزية
المتوسط p- اللوغارتمي	*Moyenne p-logarithmique*	*p-Logarithmic mean*
دالة محدودة	*Fonction bornée*	*Bounded function*
الحساب الكسري	*Calcul fractionnaire*	*Fractional calculus*
الإشتقاق الكسري	*Dérivée fractionnaire*	*Fracional derivation*

خاتمة

الحمد لله الذي هدانا لهذا فما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله، نأمل أننا من خلال هذه الدراسة قد وفقنا في تقديم متراجحة تكاملية كسرية جديدة من نوع سيمبسون للدوال التي تكون مشتقاتها الأولى s-محدبة، باستخدام التكاملات الكسرية لريمان ليوفيل .

و نأمل أن ينال هذا العمل القبول و الاستحسان، و أن يكون مرجعا مفيدا لغيرنا من الطلبة في مجال المتراجحات التكاملية الكسرية، وبالأخص تلك التي تتعلق بنوع سيمبسون، و أن يفتح الطريق لمزيد من البحث والتطبيق في المجالات ذات الصلة، و نرجو التوفيق من الله عز وجل .

﴿ و الله من وراء القصد و هو يهدي السبيل ﴾

قائمة المراجع

[1] بابا حامد بن حبيب، التحليل، ديوان المطبوعات الجامعية 2010.

[2] ***M.U.Awan, M.Z.javed, M.Th.Rassias, M.A.Noor and K.I.Noor***, **Simpson type inequalities and applications**, *J.Anal.29(2021), No.4,1403-1419.*

[3] ***N.Azzouza and B.Meftah***, **Some weighted integral inequalities for differentiable beta-convex functions**, *J.Interdiscip.Math.24(2021), No.5, 1-22.*

[4] ***W.W.Breckner***, **W.W.Breckner, Stetigkeitsaussagen fur eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen lineaen Raumen**, *(German)Publ.Inst.Math.(Beograd)(N.s.) 23 (37)(1978), 13-20.*

[5] ***J.Chen and X.huang***, **Some new inqualities of Simpson's type for s-convex functions via fracional integrals**, *filomat 31(2017), No.15, 4989-4997.*

[6] ***T.chiheb ,N.Boumaza and B.Meftah***, **Some new Simpson-like type inequalities via preqausiinvexity**, *Transylv.J.Math.Mech.12 (2020), No.1, 1-10.*

[7] ***P.J.Davis, Leonhard***, **Euler's integral:A historical profile of the gamma function**, *Amer.Math.Monthly 66 1959 849-869.*

[8] ***R.Diaz and E.Pariguan***, **On Hypergéomitric Functions and Pauchhammer k-symbol**, *Divulgaciones Matemticas, 15 179-192, (2007).*

[9] ***S.S.DRAGOMIR***, **Improvments of Ostrowski and generalised trapezoid inquality in terms of the upper and lower bounds of the first derivated**, *Tamkang J.Math.34(2003), No.3, 213-222.*

[10] ***F.Hezenci, H.Budak and H.kara***, **New version of fractional Sipmson-like type inqualities for twice differentiable functions**, *Adv Difference Equ.(2021), Paper No.460, 10 pp.*

[11] ***I.Iscan***, **Hermite-Hadamard and Simpson like type inqualities for differenciable harmonically convex functions**, *J.Math (2014), Art.ID 346305, 10 pp.*

[12] ***N.Kamouche, S.Ghomrani, B.Meftah***, **Fractional simpson like type inqualities for differentiable s-convex functions**, *J.Applied mathematics, statistics and informatics, Vol 18 (2022), No.1, 73-91.*

[13] ***A.Kashauri, B.Meftah and P.O.Mohammed***, **Some waited Simpson type inequalities for differentiable s-convex functions and their applications**, *J.Frac.Calc.and Nonlinear Sys.1(2021)No.1, 75-94.*

[14] ***A.A.kilbas, H.M.Srivastava and J.J.Trujillo***, **Theory and applications of fractional differntial equations**, *North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier.V.Amesterdam, (2006).*

[15] ***U.S.Kirmaci***, **Refinements of Hermite-Hadamard type inqualties for s-convex functions with applications to special mean**, *Univ.J.Math.App, 4(2021), No.3, 114-124.*

[16] ***W.Liu***, **Some Simpson type inqualities for h-convex and (α, m)-convex functions** , *J.Comput Anal Appl.16(2014), No.5, 1005-1012.*

[17] ***C.Y.Luo, T.S Du, M.Kunt and Y.Zhang***, **Certain new bounds considering the wheigted Simpson-like type inquality and applications**, *J.Inequal.Appl.2018, Paper No.332, 20 pp.*

[18] ***O.L.Mangasarian***, **Nonlinear programming.McGraw-Hill Book Co**, *New York-London-sydney(1969).*

[19] ***Michel Bierlaire***, **optimization: Priciples and Algorithms**, *Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL).*

[20] ***S.K.Miller and B.Ross***, **An introduction to the fracional calculs and fractional differential equations**, *A Wiley-Interscience Publication.John Wiley& Sons, Inc, New York, 1993.*

[21] ***D.S.Mitrinovic***, **Analytic inequalities. In cooperation with P.M Vasic. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften**, *Band 165 Springer-Verlag, New YorkBerlin (1970).*

[22] ***Paul Krée, Charles-Michel Marle, Philippe Pilibossian***, **Intégration et théorie de la mesure**, *ellipses/ édition marketing S.A, 1997.32 rue Bargue, Paris(15e).*

[23] ***J.E.Pecaric, F.Proschan and Y.L.Tong***, **Convex functions, partial orderings and statistical applications. mathematics in science and Engineering**, *187.Academic Press, Inc, Boston, MA, (1992).*

[24] ***E.D.Rainville***, **Special functions**, *Reprint of 1962 first edition.Chelsea Publishing Co, Bronx, N.Y, 1971 Mech (PMM) 30 (1966), p.1042-1049.*

[25] ***M.Z.Sarikaya, E.Set and E.Özdemir***, **On new inqualities of Simpson's type for convex functions**, *RGEMIA Research Report Collection, 13(2010), No.2, article 2.Mech (PMM) 30 (1966), p.1042-1049.*

[26] ***Y.Shuang, Y.wang and F.Qi***, **Integral inqualities of Simpson's type for** $(\alpha, m) - convex functions, J.Nonlinear Sci.Appl.9(2016), No.12, 6364 - 6370.$

[27] ***Sylvie Benzoni-Gavage,*** **Calcul différential et équations Différentielles,** ***Dunod, Paris, (2010) ISBN 978-2-10-054826-2.***

[28] ***K.-L.Tseng, S.-R.Huang and K.-C.Hsu,*** **Hadamard-type and Bullen-type inqualities for lipschitzian functions and their applications,** ***Conput.Math.Appl.64(2012), No.4, 651 660.***

الملخص:

في هذه المذكرة سنهتم بدراسة متراجحات تكاملية كسرية جديدة من نوع سيمبسون للدوال التي تكون مشتقاتها الأولى s-محدبة باستخدام التكاملات الكسرية لريمان ليوفيل.

في الفصل الأول: نذكر ببعض تعاريف التحدب الكلاسيكي بالإضافة إلى بعض المفاهيم و الخواص التي سنستعملها لاحقا.

في الفصل الثاني: سيخصص بالكامل حول نظريات لمتراجحات تكاملية كسرية جديدة من نوع سيمبسون كما تطرقنا فيه إلى نتائج مشابهة لهذا النوع من المتراجحات و في الأخير قدمنا أمثلة تطبيقية عن إستخدام هذه المتراجحات.

الكلمات المفتاحية:

التحدب، الدوال المحدبة، متراجحات تكاملية كسرية، تكاملات كسرية لريمان ليوفيل، متراجحة هولدر.

Abstract :

In this dissertation, we will focus on studying new integral fractional inequalities of the Simpson type for functions whose first derivatives are s-convex using the fractional integrals of Riemann-Liouville.

In the first chapter: We will mention some definitions of classical convexity in addition to some concepts and properties that we will use later.

In the second chapter: It will be entirely dedicated to theorems of new fractional inequalities of the Simpson type, as well as presenting similar results for this type of inequalities. Finally, we will present practical examples of using these inequalities.

Keywords:

Convexity, Convex Functions, Fractional Integral Inequalities, Riemann-Liouville Fractional Integrals, Hölder Inequality.