الجمـــــهوريــــــــة الجزائريــــــــة الديمـــقراطيـــــــة الشعبيـــــــة

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieure

et de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي-سكيكدة-

Ecole Normale Supérieure d'Enseignement Technologique -Skikda-

Département de Mathématiques et informatiques

قسم الريــــــــــــاضيـــات والإعلام الآلي

مُذكّرة تخرّج لِنَيل شَهادَة أُستَاذ التَّعلِيم الثانوي

تتميم فضاء مقاس

من إعداد:

شبوكي أميرة

لجنة المناقشة:

بولعراس صالح	أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة	مشرفا
خذير كيبش	أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة	رئيسا
بن حيونة صالح	أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة	مناقشا
كناف أسماء	أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة	مناقشا

السنة الجامعية : 2024/2023

دفعة جوان 2024

شكر وَ تقديـر

الحمدلله رب العالمين، تبارك وتعالى له الكمال وحده والصلاة والسلام على سيدنا محمد نبيه ورسوله الأمين وعلى سائر الأنبياء والمرسلين.

أحمد الله تعالى الذي بارك لي في إتمام بحثي هذا، وأتقدم بجزيل الشكر وخالص الإمتنان إلى ذو السيرة العطرة أستاذي المؤطر الذي حمل أقدس رسالة في الحياة، والذي لم يبخل علي بمعلوماته "بولعراس صالح".

وأحسن بالذكر الأستاذ بوسنة جلال الذي كان لي داعما أيضا. كما أتقدم بالشكر إلى كل أساتذة المدرسة العليا وعلى رأسهم اللجنة التي تكرمت بمناقشة هذا البحث، وإلى كل من ساهم سواء من قريب او بعيد.

إهـدَاء

~ وآخر دعواهم أن الحمدلله رب العالمين ~

بعد توفيق رب العالمين، و بدعوة من أم وأب كانوا عيناي بكل زمان. كان ولازال دعائهم يحتويني في كل حال فلولاهم بعد الله ما بلغت الذي بلغت، فاللهم أعني على برهما وأرزقني رضاهما.

إلى سكان قلبي أبي الذي رسمني وأمي التي لونتني

إلى رجل الكفاح، إلى من أفنى زهرة شبابه في تربيتي، إلى الروح المتممة لروحي، وقوة ضلعي 'أبي'، شكرا لقد إفتخرت دائما لأنني إبنتك.

إلى ملاكي في الحياة، إلى من جعلتني أعانق الفرح كل يوم، إليك أيتها الإنسانة الرائعة التي لا حياة دونها، إلى من تحملت عنائنا وتحملت فوق طاقتها. أنا أقف أمام الحياة وقفة عز لأنكي 'أمي' يكفيني أني إبنة إمرأة تضج المجالس بطيب ذكرها.

إلى أبي الثاني، وسندي في هذه الدنيا، مصدر الأمان ومنبع الإطمئنان 'نضال'.

إلى أختي الغالية على قلبي، التي لم تخذلني في كل ضيق يا من تحملتني في تعبي وأتعس حالاتي، وقفت جانبي وساندتني بطيب كلمات و حسن مواساة. إلى من علمتني الصبر و الصمود بكبرياء أنا لا أنسى فضلك أبدا، لكي مني حبي وودي 'صنية'.

إلى من تسعد عيني برؤية وجوههم ويفرح فؤادي بسماع رنات ضحكاتهم، إلى من أمدوني القوة والتوجيه وآمنوا بي ودعموني في الأوقات الصعبة لأصل إلى ما أنا عليه 'إحسان'، 'فضيلة'.

إلى حبيبي، قطعة قلبي، وجزء من روحي وبطلي الصغير 'دودو' فاللهم أخي أينما حلت خطاه.

إلى التي لا يكتمل أنس البيت إلا بدونها، إلى آخر العنقود دبي العزيز 'هديل'.

إلى التي بيني وبينها أميال تباعدنا، والروح بالروح تتصل، لستي بقربي لكنك في أعماق قلبي 'إسمهان'.

إلى صديقة العمر، أحبك بقدر الأيام والضحكات التي جمعتني بك، أنا ممتنة للحظة، للوقت، للأيام. لكل شيء جعل منك صديقتي 'خولة'.

إلى التي سلكت معها الدرب لأيام وشهور وسنين، إلى صديقة الروح ’ملاك’.
لكل لوز منا هناك سكر بقريه دائما، صغيرتي وجميلتي ’أمينة’.
إلى صدفة الأيام الحلوة، واللحظات الجميلة لقلبي ’سلسبيل’.
إلى الإضافة الجميلة في حياتي، صغيرتي ’درصاف’.
إلى صديقاتي ... من علمني أن الحياة من دون ترابط وحب لا تساوي شيئا ’مينوشة، مروى، نسيبة، يسرى، شهيناز، ليلى’ دمتم.

المحتويات

مقدمة 1

1 طبولوجية $\overline{\mathbb{R}}$ 3

1.0.1 طوبولوجية $\overline{\mathbb{R}}$ 4

2.0.1 خصائص الفضاء المتري $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ 5

3.0.1 النهاية العليا والنهاية السفلى لمتتالية من $(\overline{\mathbb{R}})$ 8

4.0.1 العمليات في $\overline{\mathbb{R}}$ 12

2 العشيرة والتطبيقات القيوسة 13

1.2 مفاهيم أساسية 14

1.1.2 العشائر 14

2.1.2 التطبيقات (الدّوال) القيوسة 22

3.1.2 خصائص قابلية القياس لتطبيق (أو دالة) عند المرور إلى النهاية . . 27

4.1.2 الدوال البسيطة 28

3 القياس الموجب 34

1.3 مقدمة 35

2.3 قياس Borel-Lebsegue 43

3.3 تميم فضاء مقاس 44

4 القياس الخارجي 50

1.4 القياس الخارجي 51

2.4 إنشاء تكامل Lebesgue 57

1.2.4 تكامل دالة موجبة (التكامل في ξ_+) 57

2.2.4 تكامل دالة قيوسة موجبة 60

المحتويات

الخاتمة 66

المراجع العلمية I

مقدمـــة

القياس هو مفهوم أساسي في الرياضيات نستطيع من خلاله تعيين مدى كبر أو صغر مجموعة ما في فضاء مقاس معين كما يسمح لنا بتعميم مفهوم التكامل إلى أقصى حدوده. لا يخفى علينا بأن للتكامل دور مركزي في عدة ميادين من الرياضيات، فهو يعد من الركائز الأساسية التي بني عليها التحليل الرياضي. وهذا بفضل الكثير من العلماء الذين ساهموا في تطوير نظرية القياس والمكاملة نذكر من بينهم كوشي، ريمان، لوبيغ، بوريل، فيتالي، فاتو، ....، وغيرهم من اللاحقين.

في الواقع يعتبر تكامل ريمان (*Riemann*) الأكثر شيوعا بين الرياضياتيين، نكاد نجزم أنه التكامل الوحيد المستعمل في جل أعمالهم لبساطة تعريفه بالرغم من سلبياته[5]. نذكر أهمها هو أن مجموعة التوابع التي يمكن حساب تكاملها وفق ريمان ~ صغيرة ~ فمثلا لنتأمل التابع:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad \mathcal{A}_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1 & : x\in\mathbb{Q}\\ 0 & : x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

ولنتأمل، في حالة $n\in\mathbb{N}^*$، التقسيمتين المنقوطتين:

$$\sigma_n=\left((t_k)_{0\le k\le n};(\lambda_k)_{0\le k<n}\right)=\left(\left(\frac{k}{n}\right)_{0\le k\le n};\left(\frac{k}{n}\right)_{0\le k<n}\right)$$
$$\tilde{\sigma}_n=\left((t_k)_{0\le k\le n};\left(\tilde{\lambda}_k\right)_{0\le k<n}\right)=\left(\left(\frac{k}{n}\right)_{0\le k\le n};\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n\pi}\right)_{0\le k<n}\right)$$

عندئذ نلاحظ أن خطوة كل من σ_n و $\tilde{\sigma}_n$ تساوي $\frac{1}{n}$ ، وهي من ثمَّ تؤول إلى 0 عندما تؤول n إلى $+\infty$ ، ومع هذا فإن مجموعي ريمان الموافقين يحققان:

$$\forall n\ge 1,\qquad S\left(\mathcal{A}_{\mathbb{Q}},\sigma_n\right)=1,\quad S\left(\mathcal{A}_{\mathbb{Q}},\tilde{\sigma}_n\right)=0$$

وعليه لا تتقارب مجاميع ريمان $S\left(\mathcal{A}_{\mathbb{Q}},\sigma\right)$ من عدد حقيقي عندما تؤول خطوة التقسيمة المنقوطة σ إلى الصفر. إذن لا يمكن حساب التكامل $\int_0^1 \mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ وفق ريمان.

هذا مثال أولي على قصور تكامل ريمان، وهناك أمثلة كثيرة لن نطيل في ذكرها، ولكن حان الوقت لنتلقى مفهوما جديدا للتكامل هو تكامل لوبيغ *Lebesgue*.

في نهاية القرن التاسع عشر إشتهر لوبيغ بمساهمته في نظرية القياس والمكاملة في أطروحته لنيل درجة الدكتوراء عام 1902، إستندت هذه الأخيرة على مفهوم قياس ~ أو طول ~ المجموعات

الذي سبقه في دراستها بوريل *Borel* [4]. حيث إعتمد في تعريفه للتكامل على القياس حتى أصبحت نظرية القياس جزءا لا يتجزأ من نظرية المكاملة. ثم تم تعميم مفهوم القياس إلى مجموعات كيفية ومجردة وذلك بالإعتماد على مفهوم القياس الخارجي، ونجده واضحا في نظرية *Carathodory*، ومع بداية القرن العشرين، فتحت النظرية الباب أمام مجالات بحثية جديدة كالتحليل الدالي، والإحتمالات لـ *Kolmogorov*.

بالنسبة لهذه المذكرة سنقدم فيها موضوع يتناول نظرية القياس الذي يعتبر مدخلا لمكاملة التوابع القيوسة وسنهتم بتتميم فضاء مقاس، وندعم كل دراسة بأمثلة وبراهين ونظريات، وقد تم تقسيم هذا العمل إلى أربعة فصول :

الفصل الأول قدمنا فيه طوبولوجية $\overline{\mathbb{R}}$، حيث تطرقنا فيه إلى التوابع (التطبيقات) المستمرة، و أشرنا فيه إلى حقل الأعداد الحقيقية المكتمل، أي إلى المجموعة المحصل عليها بإضافة العنصرين $\pm\infty$ إلى $\mathbb{R}$. حيث لدينا $\forall x \in \mathbb{R}; -\infty < x < +\infty$ ،ثم تطرقنا إلى خصائص الفضاء المتري لأنه أكثر الفضاءات ألفة، مرورا بالنهايات العليا والسفلى وبعض العمليات في $\overline{\mathbb{R}}$.

أما الفصل الثاني تناولنا فيه أهم المفاهيم الأساسية والمبرهنات المتعلقة بنظرية القياس وتشمل على تعريف العشائر بأنواعها، المبنية على أساس الـ σ - جبر التي تعني خاصية الإستقرار فيما يتعلق العمليات العدودة أو القابلة للعد. إضافة إلى التطبيقات القيوسة وخصائص قابلية القياس عند المرور إلى النهاية، وكل ما يخص الدوال البسيطة.

الفصل الثالث يضم الجزء الرئيسي من العمل سنرى فيه مفهوم القياس الموجب وأهم خصائصه، ثم تتميم فضاء مقاس الذي خصصنا فيه المجموعات المهملة بالنسبة للقياس.

فيما يخص الفصل الرابع سنعرض فيه تعريف القياس الخارجي وكيفية إنشاء تكامل *Lebesgue* الذي تلعب فيه الدوال القيوسة والنهايات دورا أساسيا بكيفية عملية غاية في الدقة.

ونرجو أن يكون هذا العمل نافعا لمن يأتون بعدنا، وأن يسهل عليهم الطريق للتعرف على جوانب جديدة بمجال القياس.

الفصل 1

طبولوجية $\overline{\mathbb{R}}$

1.0.1 طوبولوجية $\mathbb{R}$

مبرهنة 1.1.0 :

إنّ التطبيق "$\tan$" هو عبارة عن هوميومورفيزم متزايد تماما من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ إلى $\mathbb{R}$.

برهان :

نضع: $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و $\forall x\in I: f(x)=\tan x$ إذن: $\forall x\in I: f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ لدينا الدالة $\sin$ مستمرة بإنتظام على $\mathbb{R}$ (ينتج ذلك من المتراجحة: $\forall x\in\mathbb{R}: |\sin x|\leq|x|$) فهي مستمرة على I.

وبما أنّه: $\forall x\in I: \cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$ وكون الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}_+$ بـ: $\forall x\in\mathbb{R}_+: g(x)=\sqrt{x}$ مستمرة بإنتظام على $\mathbb{R}_+$ إذن $\cos$ مستمرة على I وبما أنّ: $\forall x\in I: \cos x\neq 0$ إذن f مستمر على I.

بما أنّ I مجال من $\mathbb{R}$ و f مستمرة على I إذن $f(I)$ هوّ مجال جزئي غير خال من $\mathbb{R}$

أي: $f(I)\subseteq\mathbb{R}\ldots(1)$

عكسيا: ليكن $a\in\mathbb{R}$.

بما أنّ: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-\frac{\pi}{2}} f(x)=+\infty$ إذن: $\exists\delta_a>0,\ \forall x\in I,\ \frac{\pi}{2}-\delta_a<x<\frac{\pi}{2}\Longrightarrow f(x)>a$

بما أنّ: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{\pi}{2}} f(x)=-\infty$ إذن: $\exists\delta'_a>0,\ \forall x\in I,\ -\frac{\pi}{2}<x<\delta'_a-\frac{\pi}{2}\Longrightarrow f(x)<a$

ليكن الأن $x,y\in I$ بحيث: $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\delta'_a-\frac{\pi}{2}\right)\wedge\left(\frac{\pi}{2}-\delta_a<y<\frac{\pi}{2}\right)$

إذن: $a\in\left]f(x),f(y)\right[\subseteq\left[f(x),f(y)\right]\subseteq f(I)$، وبما أنّ a كيفي من $\mathbb{R}$ فإنّ: $\mathbb{R}\subseteq f(I)\ldots(2)$

من (1) و (2) نستنتج أنّ $f(I)=\mathbb{R}$، أي أنّ f هوّ غامر على $\mathbb{R}$

لدينا: $\forall x\in I: f'(x)=1+(f(x))^2$ إذن: $\forall x\in I: f'(x)>0$ ومنه f متزايد تماما على I فهو متباين على I، إذن f هوّ تقابل، مستمر ومتزايد تماما من I نحو $\mathbb{R}$، بقي لنا أن نثبت أنّ التطبيق العكسي f^{-1} مستمر من $\mathbb{R}$ نحو I.

ليكن $x,y\in\mathbb{R}$ بحيث $x\neq y$، نضع: $f^{-1}(x)=x'\in I$ و $f^{-1}(y)=y'\in I$

وبما أنّ f قابل للإشتقاق على I إذن حسب نظرية التزايدات المنتهية :

$$\exists c\in\left]\min(x',y'),\max(x',y')\right[: f(x')-f(y')=f'(c)(x'-y')\Longrightarrow\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|<|x-y|$$

ومنه: $\forall x,y\in\mathbb{R}: |f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|\leq|x-y|$ إذن: f^{-1} Lipshitziènne $(k=1)$ على $\mathbb{R}$ فهو مستمر عليها.

◄ نمدد f^{-1} إلى $\overline{\mathbb{R}}$ ونسمي هذا التمديد بـ h بالطريقة التالية:

$$\forall x\in\overline{\mathbb{R}}: h(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & si \quad x=-\infty,\\ f^{-1}(x) & si \quad x\in\mathbb{R},\\ \frac{\pi}{2} & si \quad x=+\infty.\end{cases}$$

مبرهنة 2.1.0 :
إنّ h هوّ تقابل من $\overline{\mathbb{R}}$ نحو $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

برهان :
واضح أنّ h غامر على $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$، ليكن $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ بحيث $x \neq y$ نفرض أنّ $x < y$

1- إذا كان $y = +\infty$ نميز حالتين:
- إذا كان: $x \in \mathbb{R}$ فإنّ: $h(x) = f^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$
- إذا كان $x = -\infty$ فإنّ: $h(x) = -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$

2- إذا كان $y \neq +\infty$ فإنّ: $y \in \mathbb{R}$ (لأنه: $\exists x \in \overline{\mathbb{R}} : x < y$) وعندئذ نميز حالتين:
- إذا كان $x \in \mathbb{R}$ فإنّ: $h(x) = f^{-1}(x) < f^{-1}(y) = h(y)$.
- إذا كان $x = -\infty$ فإنّ: $h(x) = -\frac{\pi}{2} < h(y)$.

بما أنّ x وy كيفيان من $\overline{\mathbb{R}}$ بحيث $x \neq y$ ، إذن: $\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}} \ : \ x < y \Longrightarrow h(x) < h(y)$
ومنه h متزايد تماما على $\overline{\mathbb{R}}$ فهو متباين ومنه فهو تقابل من $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ نحو $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

مبرهنة 3.1.0 :
نعرّف على $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ تطبيق d بوضع: $\forall (x, y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} : d(x, y) = |h(x) - h(y)|$ إنّ d يعرّف مسافة على $\overline{\mathbb{R}}$ وعندئذ التطبيق h هو تقايس من $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ نحو $([\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], |.|)$.

2.0.1 خصائص الفضاء المتري $(\overline{\mathbb{R}}, d)$

1- إنّ $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ هوّ فضاء متري متراص.

2- إنّ $\mathbb{R}$ هي مفتوح في $\overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{R} = B(0, \frac{\pi}{2}))$ وبالتالي ينتج من ذلك أن كل مفتوح لـ $\mathbb{R}$ هوّ مفتوح لـ $\overline{\mathbb{R}}$.

3- لكل عدد حقيقي a فإنّ $([-\infty, a[)$ و $(]a, +\infty])$ هما مفتوحان لـ $\overline{\mathbb{R}}$.
$$\left( ]a, +\infty] = B\left(+\infty, \frac{\pi}{2} - h(a)\right) \quad , \quad]-\infty, a[= B\left(-\infty, \frac{\pi}{2} + h(a)\right) \right)$$

4- الأسرتان $(]a, +\infty])_{a \in \mathbb{R}}$ $([-\infty, a[)_{a \in \mathbb{R}}$ هما جملتان أساسيتان من الجوارات للنقطتين $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب.

برهان :

1- لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط $\overline{\mathbb{R}}$، نضع: $\forall n\in\mathbb{N}; y_n = h(x_n)$ ومنه توجد متتالية $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ مستخرجة من $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة في $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$، نضع: $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} y_{n_k} = y$ بما أن h^{-1} مستمر عند النقطة y إذن: $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} x_{n_k} = h^{-1}(y)$ نضع: $h^{-1}(y) = x$، بما أن المتتالية $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ مستخرجة من $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ومتقاربة نحو x إذن x هي قيمة ملاصقة لـ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2- أ) لدينا التطبيق h مستمر من $(\overline{\mathbb{R}},d)$ نحو $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ وبما أن المجال $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ مفتوح لـ $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ إذن $h^{-1}\left([\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right)$ هو مفتوح لـ $\overline{\mathbb{R}}$، لكن: $h^{-1}\left([\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right)=\mathbb{R}$ إذن $\mathbb{R}$ هو مفتوح لـ $\overline{\mathbb{R}}$.

ب) ليكن $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث $a<b$ إذن: $h(a)<h(b)$، نضع:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(h(b)-h(a)) = r, r>0\\ \frac{1}{2}(h(a)+h(b)) = y_0 \in \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], h^{-1}(y_0)=x_0\end{cases}$$

عندئذ نجد:

$$\begin{aligned}B(x_0,r) &= \{x\in\overline{\mathbb{R}}; |h(x)-y_0|<r\}\\ &= \{x\in\overline{\mathbb{R}}; y_0-r<h(x)<y_0+r\}\\ &=]a,b[\end{aligned}$$

وبما أن كل مفتوح لـ $\mathbb{R}$ يكتب على شكل إتحاد لمجالات من الشكل $]a,b[$ حيث $a,b\in\mathbb{R}$ و$(a\leq b)$ إذن كل مفتوح لـ $\mathbb{R}$ هو مفتوح لـ $\overline{\mathbb{R}}$.

3- ليكن $a\in\mathbb{R}$، إذن: $h(a)+\frac{\pi}{2}>0$، نضع: $r=h(a)+\frac{\pi}{2}$ عندئذ نجد:

$$\begin{aligned}B(-\infty,r) &= \left\{x\in\overline{\mathbb{R}}; \left|h(x)-\tfrac{-\pi}{2}<r\right|\right\}\\ &= \left\{x\in\overline{\mathbb{R}}; 0\leq h(x)+\tfrac{\pi}{2}<r\right\}\\ &= \left\{x\in\overline{\mathbb{R}}; -\infty\leq x<a\right\}\\ &= [-\infty,a[\end{aligned}$$

وبما أن: $h(a)<\frac{\pi}{2}$ فإننا حينما نضع: $r=\frac{\pi}{2}-h(a)$ نجد:

$$\begin{aligned}B(+\infty,r) &= \left\{x\in\overline{\mathbb{R}}; \left|h(x)-\tfrac{\pi}{2}<r\right|\right\}\\ &= \left\{x\in\overline{\mathbb{R}}; h(a)<h(x)+\tfrac{\pi}{2}\leq\tfrac{\pi}{2}\right\}\\ &= \left\{x\in\overline{\mathbb{R}}; a<x\leq+\infty a\right\}\\ &=]a,+\infty]\end{aligned}$$

3- ليكن $v\in V(-\infty)$ إذا كان: $v=\overline{\mathbb{R}}$ فإن: $[-\infty,a[\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ وبالتالي يكفي أخذ: $a=0$.

نفرض أن $v\neq\overline{\mathbb{R}}$، نعلم أنه: $\exists r>0, B(-\infty,r)\subseteq v$ بما أن: $v\neq\overline{\mathbb{R}}$، إذن: $r\leq\pi$

• إذا كان $r=\pi$ عندئذ يكون: $B(-\infty,\pi)=[-\infty,+\infty[$ وفي هذه الحالة يكفي ملاحظة أن: $[-\infty,0[\subseteq[-\infty,+\infty[\subseteq v$ وبالتالي يكفي أخذ: $a=0$ أما إذا كان $r<\pi$ فإن: $-\frac{\pi}{2}<r-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$ وعندئذ يكون لدينا: $h^{-1}(r-\frac{\pi}{2})\in\mathbb{R}$ ومنه بوضع: $h^{-1}(r-\frac{\pi}{2})=a$ نستنتج أن:

$r=\frac{\pi}{2}+h(a)\Longrightarrow B(-\infty,r)=[-\infty,a[$ أي أنه: $\exists a=h^{-1}(r-\frac{\pi}{2})\in\mathbb{R};[-\infty,a[\subseteq v$

4- ليكن v جوارا كيفيا لـ $+\infty$:

- إذا كان $v=\overline{\mathbb{R}}$ فإن: $]0,+\infty]\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ وبالتالي: $\exists a=0\in\mathbb{R};]a,+\infty]\subseteq v$
- نفرض أن $v\neq\overline{\mathbb{R}}$: نعلم أنه: $\exists r>0;B(+\infty,r)\subseteq v$ لدينا: $v\neq\overline{\mathbb{R}}\Longrightarrow r\leq\pi$

إذا كان: $r=\pi$ فإن: $B(+\infty,r)=B(+\infty,\pi)=]-\infty,+\infty]$

عندئذ لدينا: $v\supseteq]-\infty,+\infty]\supseteq]0,+\infty]$ وبالتالي يكفي أخذ $a=0$

أما إذا كان $r<\pi$ فإن:

$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-r<\frac{\pi}{2}\Longrightarrow h^{-1}(r-\frac{\pi}{2})\in\mathbb{R}$ ومنه بوضع $h^{-1}(\frac{\pi}{2}-r)=a$ نستنتج أن:

$$B(+\infty,r)=]a,+\infty]$$

أي أنه: $\exists a=h^{-1}(\frac{\pi}{2}-r)\in\mathbb{R};]a,+\infty]\subseteq v$

توطئة :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

برهان :

بوضع: $\forall x\in\mathbb{R}_+^*;f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولدينا:

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*;f'(x)=0$$

و بما أن $\mathbb{R}_+^*$ عبارة عن مجال (مجموعة مترابطة في $\mathbb{R}$) إذن f ثابتة على $\mathbb{R}_+^*$ ومنه:

$$\exists c\in\mathbb{R};\forall x\in\mathbb{R}_+^*;f(x)=c$$

بالخصوص لما $x=1$ نجد: $f(1)=\frac{\pi}{2}=c$ إذن نجد المساواة.

مبرهنة 1.2.0 :

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية ذات قيم حقيقية ولتكن $a\in\mathbb{R}$، عندئذ يكون لدينا:

1- $\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو a في $\mathbb{R}\Big)\Longleftrightarrow\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو a في $\overline{\mathbb{R}}\Big)$.

2- $\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تؤول إلى $+\infty$ في $\mathbb{R}\Big)\Longleftrightarrow\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو $+\infty$ في $\overline{\mathbb{R}}\Big)$.

3- $\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تؤول إلى $-\infty$ في $\mathbb{R}\Big)\Longleftrightarrow\Big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو $-\infty$ في $\overline{\mathbb{R}}\Big)$.

1- كفاية الشرط واضحة وتنتج من المتراجحة: $\forall x,y\in\mathbb{R};|h(x)-h(y)|\leq|x-y|$

العكس نفرض $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو a في $\overline{\mathbb{R}}$، إذن $(h(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو $h(a)$ في $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$، إذن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو a في $\mathbb{R}$.

2-إذا كانت $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تؤول إلى $+\infty$ في $\mathbb{R}$ فإنه: $\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0;U_n>0$ والمتتالية $\left(\frac{1}{U_n}\right)_{n\geq n_0}$ تتقارب نحو 0 لكن $\forall n\geq n_0;h(U_n)+h\left(\frac{1}{U_n}\right)=\frac{\pi}{2}$

إذن: $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} h(U_n) = \frac{1}{U_n}$ ومنه المتتالية تتقارب نحو $+\infty$ في $\mathbb{R}$.

• لزوم الشرط: نفرض أن المتتالية تتقارب في $\mathbb{R}$ إذن $h(U_n)$ تتقارب نحو $\frac{\pi}{2}$ في $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ معناه:

$$\begin{aligned}\exists n_0, \forall n \geq n_0; U_n > 0 \Longrightarrow h(U_n) + h\left(\frac{1}{U_n}\right) &= \tfrac{\pi}{2}\\ \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} h\left(\frac{1}{U_n}\right)\\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} h\left(\frac{\pi}{2} - h(U_n)\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه: $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} h\left(\frac{1}{U_n}\right) = 0$ إذن (U_n) تؤول إلى $+\infty$ في $\mathbb{R}$.

بالنسبة إلى (U_n) تؤول إلى $-\infty$ في $\mathbb{R}$

3- تبرهن بنفس الطريقةالسابقة.

نتيجة 1.2.0 :

كل متتالية رتيبة في $\overline{\mathbb{R}}$ هي متتالية متقاربة.

برهان :

إذا كانت: (U_n)متقاربة $\Longleftarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_n = -\infty$

لنفرض أن (U_n) ليست ثابتة ولتكن متزايدة إذن: $\exists n_0 \in \mathbb{N}, U_{n_0} > -\infty$ وهذا معناه أنه:

إذا وجدت رتبة $n_1 \in \mathbb{N}$ بحيث: (U_n)متقاربة $\Longleftarrow \forall n_1 > n_0; U_{n_1} = +\infty \Longrightarrow U_n = +\infty$

وإذا كانت $\forall n_1 > n_0, U_n \in]-\infty, +\infty[$ عندئذ نميز حالتين:

• إذا كانت (U_n) محدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو L في $\mathbb{R}$ بحيث $L = \sup\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ فهي متقاربة نحو L في $\overline{\mathbb{R}}$.

• (U_n) ليست محدودة من الأعلى فهي تؤول إلى $+\infty$ في $\overline{\mathbb{R}}$ ومما سبق فإن المتتالية متقاربة في $\overline{\mathbb{R}}$

3.0.1 النهاية العليا والنهاية السفلى لمتتالية من $(\overline{\mathbb{R}})$

لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط $\overline{\mathbb{R}}$.

نضع: $\inf(A_n) = U_n \quad , \quad \sup(A_n) = V_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} : A_n = \{a_k,\ \ k \geqslant n\}$

لدينا $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية متناقصة و $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية متزايدة ومنه حسب النتيجة رقم $(1.2.0)$

فإنهما متقاربتان في $(\overline{\mathbb{R}})$ ولدينا: $\lim U_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n \quad , \quad \lim V_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$

تعريف 1.3.0 :

نسمي $\lim V_n$ بالنهاية العلوية للمتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونرمز لها بالرمز $\limsup(a_n)$ أو $\overline{\lim} a_n$ ونسمي $\lim U_n$ بالنهاية السفلية للمتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونرمز لها بالرمز $\liminf(a_n)$ أو $\underline{\lim} a_n$.

ونكتب:

$$\limsup(a_n)=\lim V_n=\inf_{n\in\mathbb{N}} V_n=\inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup A_n)=\inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup\{a_k,k\geqslant n\})=\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n\geqslant k} a_k\right)$$

$$\liminf(a_n)=\lim U_n=\sup_{n\in\mathbb{N}} U_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf A_n)=\sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf\{a_k,k\geqslant n\})=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geqslant n} a_k\right)$$

مبرهنة 1.3.0 :

لتكن (U_n) و(V_n) متتاليتان من نقاط $\mathbb{R}$ عندئذ يكون لدينا:

$$\begin{aligned}
&① \blacktriangleright \inf_{n\in\mathbb{N}} U_n\leq\liminf(U_n)\leq\limsup(U_n)\leq\sup_{n\in\mathbb{N}} U_n\\
&② \blacktriangleright \limsup(U_n+V_n)\leq\limsup U_n+\limsup V_n\\
&③ \blacktriangleright \liminf U_n+\liminf V_n\leq\liminf(U_n+V_n)
\end{aligned}\tag{1.1}$$

برهان :

1− من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n=\{U_k;k\geq n\}$ لدينا: $\forall n\in\mathbb{N}; A_n\subseteq\{U_n;n\in\mathbb{N}\}$

ومنه: $\inf_{n\in\mathbb{N}} U_n\leq\inf A_n\leq\sup\{\inf(A_n)\}\Longrightarrow\inf U_n\leq\liminf U_n\quad ...(1)$

هذا من جهة ومن جهة أخرى نضع:

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}, a_n=\inf A_n\Longrightarrow (a_n)\text{متزايدة}\\ \forall n\in\mathbb{N}, b_n=\sup A_n\Longrightarrow (a_n)\text{متناقصة}\end{cases}$$

نجد: $\forall n\in\mathbb{N}; a_n\leq b_n$ ومنه حسب الخاصية إذا كان $p\in\mathbb{N}$ فإنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ نجد:

$$\begin{aligned}
a_n\leq b_p\Longrightarrow \sup a_n\leq b_p &\Longrightarrow \liminf U_n\leq b_p\\
&\Longrightarrow \liminf U_n\leq\limsup U_n\\
&\leq \sup U_n\quad ...(2)
\end{aligned}$$

من (1) و (2) نجد: $\inf_{n\in\mathbb{N}} U_n\leq\liminf U_n\leq\limsup U_n\leq\sup_{n\in\mathbb{N}} U_n$

2− نفرض أن المتتالية $(U_n+V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة جيدا وكذلك القيم:

$\liminf U_n+\liminf V_n$ ، $\limsup U_n+\limsup V_n$ موجودتان.

ليكن $n,p\in\mathbb{N}$، إذا كان:

$$\forall p\geq n\Longrightarrow\begin{cases}U_p\leq\sup_{k\geq n} U_k\\ V_p\leq\sup_{k\geq n} V_k\end{cases}$$

$$\forall p \geq n; \quad U_p + V_p \leq \sup_{k\geq n} U_k + \sup_{k\geq n} V_k \Longrightarrow \sup(U_p + V_p) \leq \sup_{k\geq n} U_k + \sup_{k\geq n} V_k$$
$$\Longrightarrow \limsup(U_p + V_p)$$
$$\leq \limsup U_n + \limsup V_n$$

- ليكن $n, p \in \mathbb{N}$ إذا كان:

$$\forall p \geq n \Longrightarrow \begin{cases} \sup_{k\geq n} U_k \leq U_p \\ \sup_{k\geq n} V_k \leq V_p \end{cases}$$

ومنه: $\forall p \geq n; \inf_{k\geq n} U_k + \inf_{k\geq n} V_k \leq U_p + V_p$
نجد:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \inf_{k\geq n} U_k + \inf_{k\geq n} V_k \leq \inf_{k\geq n}(U_k + V_k) \Longrightarrow \liminf U_n + \liminf V_n \leq \liminf(U_n + V_n)$$

3- لتكن a قيمة ملاصقة لـ (U_n) إذا توجد متتالية من الأعداد الطبيعية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما حيث: $\underset{n\longrightarrow+\infty}{U_{\varphi(n)}} = a$ معناه: $(U_{\varphi(n)})$ متتالية مستخرجة من (U_n) تتقارب نحو a ومنه: $\lim(-U_{\varphi(n)}) = -a$ و $(-U_{\varphi(n)})$ هي متتالية مستخرجة من $(-U_n)$ إذن: $-a$ هي قيمة ملاصقة لـ $(-U_n)$.
- بما أن $\mathbb{R}$ هو فضاء متري متراص، إذن لكل متتالية من نقاطه قيمة ملاصقة على الأقل.
ومنه:

$$A \neq \emptyset$$

لتكن $\lambda \in A$ إذن توجد متتالية مستخرجة $(U_{np})_{p\in\mathbb{N}}$ من (U_n) بحيث: $\lim_{p\longrightarrow+\infty} U_{np} \leq U_p = \lambda$

$$\forall n \in \mathbb{N}; \inf_{k\geq n} U_k \leq U_n \leq \sup_{k\geq n} U_k$$
$$\forall p \in \mathbb{N}; \inf_{k\geq np} U_k \leq U_{np} \leq \sup_{k\geq np} U_k$$

بالمرور إلى النهاية لما $(p \longrightarrow +\infty)$ نجد: $\liminf U_n \leq \lambda \leq \limsup U_n$ نثبت أن: $\limsup U_n \in A$
نميز ثلاث حالات:
1 - لما $\limsup U_n = -\infty$ بما أنه:

$$\forall n \in \mathbb{N}; -\infty \leq U_n \leq \sup_{k\geq n} U_k \Longrightarrow \lim U_n = -\infty \Longrightarrow -\infty = \limsup U_n \in A$$

2 - لما $\limsup U_n = +\infty$ إذن:

$$\inf(\sup_{k\geq n} U_k) = +\infty \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \sup_{k\geq n} U_k = +\infty$$

ليكن: $a \in \mathbb{R}$ و$p \in \mathbb{R}$، نميز حالتين:

1 - $\exists k_0 \geq p; U_{k_0} = +\infty \in]a, +\infty]$

2 - أما إذا كان: $\forall k \geq p; U_k < +\infty$ وهذا معناه أن المجموعة: $\{U_k; k \geq p\}$ ليست محدودة من الأعلى في $\mathbb{R}$، إذن: $\forall k_1 \geq p; U_k \in]a, +\infty[\subseteq]a, +\infty]$

لما: $\limsup U_n = -\infty$، إذن: $\inf\left(\sup\limits_{k\geq n}\right) U_k = -\infty$ ليكن $a \in \mathbb{R}$ و$p \in \mathbb{N}$:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \sup\limits_{k\geq n} U_k = -\infty \Longrightarrow \forall k \geq n; U_k = -\infty$

بوضع $\max(n_0, p) = k_0$ نستنتج أن: $k \geq n; U_{k_0} = -\infty \in [-\infty, a[$

أما إذا كان: $\forall n \in \mathbb{N}; -\infty < \sup\limits_{k\geq n} U_k$ وبالتالي المجموعة $\{\sup U_k, n \in \mathbb{N}\}$ ليست محدودة من الأسفل في $\mathbb{R}$ إذن: $\exists n \in \mathbb{N}; \sup\limits_{k\geq n_0} U_k < a$.

$\forall k \geq n_0; U_k < a$ بوضع: $\max(n_0, p) = k_1$ نستنتج أن: $k_1 \geq p \wedge U_k \in]-\infty, a[\subseteq [-\infty, a[$

لما: $\limsup U_n \in \mathbb{R}$ نضع: $\limsup U_n = \lambda \in \mathbb{R}$ إذن: $\inf(\sup\limits_{k\geq n}) U_k = \lambda \in \mathbb{R}$.

ليكن: $\epsilon > 0$ و$p \in \mathbb{R}$ إذن: $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \lambda \leq \sup\limits_{k\geq n} U_k < \lambda + 2$

بوضع: $\max(n_0, p) = k_1$ نستنتج أن: $\lambda \leq \sup\limits_{k\geq n} U_k \leq \sup\limits_{k\geq n} U_k < \lambda + \epsilon$

إذن: $\lambda \leq \sup\limits_{kn} U_k < \lambda + \epsilon$

ولدينا أيضا: $\exists k_0 \geq n_1; \lambda - \epsilon \leq \sup\limits_{kn} U_k - \epsilon \leq U_{k_0} \leq \sup\limits_{kn} U_k < \lambda + \epsilon$

إذن: $\exists k_0 \geq n_1; U_{k_0} \in]\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon[$.

مبرهنة 2.3.0 :

لتكن A مجموعة غير خالية من $\mathbb{R}$، نضع: $A = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in A : y = -x\}$

- $-A$ تكون محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا كانت A محدودة من الأسفل وعندئذ يكون: $\sup(-A) = -\inf(A)$ لما $\inf(A) = -\infty$
- $-A$ تكون محدودة من الأسفل إذا وفقط إذا كانت A محدودة من الأعلى وعندئذ يكون: $\inf(-A) = -\sup(A)$ لما $\sup(A) = +\infty$
- إذا كانت $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط $\overline{\mathbb{R}}$ فإنه يكون لدينا دوما: $\limsup(-U_n) = -\liminf(U_n)$

برهان :

لدينا: $A \subseteq \mathbb{R}$، $A \neq \emptyset$ و$-A = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in A : y = -x\}$

- لنفرض أن A محدودة من الأعلى، إذن $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : x \leq M$ وليكن $y \in -A$

إذن $\exists x \in A, y = -x \Longrightarrow y > -M$ ومنه $-A$ محدودة من الأسفل بـ $-M$.

- عكسيا يتم بنفس الطريقة.
- لنفرض أن A محدودة من الأسفل، إذن $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A : m \leq x$ وليكن $-y \in -A$

إذن $\exists x \in A, y = -x \Longrightarrow y > -m$ ومنه $-A$ محدودة من الأعلى.

• عكسيا يتم بنفس الطريقة.

لنبرهن أن: $(*)...$ $\sup(-A) = -\inf(A)$ لدينا $\forall x \in A : \inf(A) \leq x$

وليكن $y \in -A$ إذن: $\exists x \in A, y = -x \Longrightarrow y \leq -\inf(A) \Longrightarrow \sup(-A) \leq -\inf(A)...(1)$

ولدينا أيضا $x \in A$ إذن $-x \in -A$ ومنه:

$$-x \leq \sup(-A) \Longrightarrow x \geq -\sup(-A) \Longrightarrow \sup(-A) \geq -\inf(A)....(2)$$

من (1) و (2) نجد $(*)$.

ملاحظة: بالنسبة لـ $\inf(-A) = -\sup(-A)$ تتم بنفس الطريقة.

$A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$، $A \neq \emptyset$ و $\inf(A) = -\infty...(**)$

إن $(**)$ تعني إما $-\infty \in A$ أو $A \subseteq \mathbb{R}$ و A ليست محدودة من الأسفل إذا كانت $-\infty \in A$ فإن $+\infty \in (-A)$ ومنه $\sup(-A) = +\infty = -\infty(A)$

العلاقة (2) بنفس الطريقة.

• إذا كانت A هي مجموعة القيم الملاصقة للمتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ فإنّ: $A \neq \emptyset$

ولدينا: $\min(A) = \liminf(U_n) \wedge \max(A) = \limsup(U_n)$

نتيجة 1.3.0 :

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من نقاط $\overline{\mathbb{R}}$، تكون $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة إذا وفقط إذا كان:

$$\liminf(U_n) = \limsup(U_n)$$

4.0.1 العمليات في $\overline{\mathbb{R}}$

◄ إذا مدّدنا عملية الجمع العادي " + " لـ $\mathbb{R}$ إلى $\overline{\mathbb{R}}$ فإنّ " + " لا تعرّف تطبيق من $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ إلى $\overline{\mathbb{R}}$ (لأنّ: $(+\infty) + (-\infty)$ غير معينة) وبالتالي $(\overline{\mathbb{R}}, +)$ ليست زمرة ومع ذلك نستطيع القيام ببعض العمليات في $\overline{\mathbb{R}}$ كما يلي:

$\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}_+^* :\quad x + (+\infty) = +\infty \quad , \quad x + (-\infty) = -\infty \quad , \quad y \times (+\infty) = +\infty$

$(-y) \times (+\infty) = -\infty \quad , \quad (-y) \times (-\infty) = +\infty \quad , \quad .y \times (-\infty) = -\infty$

$(-\infty) \times (+\infty) = -\infty \quad , \quad (-\infty) \times (-\infty) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$

إصطلاح :(خاص بنظرية القياس)

نصطلح على أنّ: $0 \times (+\infty) = 0 \times (-\infty) = (+\infty) \times 0 = (-\infty) \times 0 = 0$

الفصل 2

العشيرة والتطبيقات القيوسة

1.2 مفاهيم أساسية

يتضمن هذا الفصل أهم المفاهيم والمبرهنات المتعلقة بنظرية القياس والتي تشمل على تعريف العشائر بأنواعها، وتعريف القياس وخصائصه.

✓ في كل ما يأتي E هي مجموعة غير خالية، $\mathcal{P}(E)$ هي مجموعة أجزائها.

✓ إذا كانت A مجموعة جزئية من E فإننا نرمز إلى متممة A بالنسبة إلى E بالرمز A^c.

✓ إذا كانت A وB مجموعتان جزئيتان من E بحيث $A \subseteq B$ فإننا نرمز إلى متممة A بالنسبة إلى B بالرمز C_B^A أو $(B \backslash A)$.

1.1.2 العشائر

تعريف 2.1.1 :
لتكن E مجموعة غير خالية، ولتكن $\mathcal{A}$ أسرة جزئية من $\mathcal{P}(E)$ نقول عن $\mathcal{A}$ أنها عشيرة على E إذا وفقط إذا تحقق:

1- $\emptyset \in \mathcal{A}$

2- $\forall A \in \mathcal{A}, A^c \in \mathcal{A}$

3- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}, \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (مستقرة بالنسبة إلى الإتحاد القابل للعد)

ملاحظة :
تكون الأسرة $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ قابلة للعد إذا وفقط إذا كانت $\mathbb{N}$ قابلة للعد.

تعريف 3.1.1 :
نسمي الثنائية ($E, \mathcal{A}$) فضاءا قيوسا إذا كانت $\mathcal{A}$ عشيرة على E.

أمثلة :

✓ $\mathcal{P}(E)$ عشيرة على E

✓ $\{E, \emptyset\}$ عشيرة على E

نتيجة 1.1.1 :

$$\forall A, B \in \mathcal{A};\quad A\cap B;\quad A\Delta B;\quad A-B \in \mathcal{A}$$

$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} : \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}$ (مستقرة بالنسبة للتقاطع القابل للعد)

برهان 1.1.1 :

لتكن $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أسرة جزئية قابلة للعد من $\mathcal{A}$، إذن : $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{A}$

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_n^c \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \in \mathcal{A} \Longrightarrow \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c \in \mathcal{A}$$

ومنه : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

مبرهنة 3.1.1 :
لتكن $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أسرة من عشائر على E، عندئذ تكون $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ عشيرة على E.

الإثبات 2.1.1 :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}; \emptyset \in \mathcal{A} \quad &\Longrightarrow \emptyset \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n \\
(A_i)_{i\in I} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n &\Longleftrightarrow \forall i \in I; \forall n \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{A}_n \\
&\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}_n \\
&\Longleftrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n \\
\forall A \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n \quad &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A \in \mathcal{A}_n \\
&\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A^c \in \mathcal{A}_n \\
&\Longleftrightarrow A^c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n
\end{aligned}$$

إذا $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ عشيرة على E.

مبرهنة 4.1.1 :
لتكن ξ أسرة جزئية غير خالية من $\mathcal{P}(E)$، عندئذ توجد أصغر عشيرة على E تحوي ξ (بمفهوم الإحتواء).

الإثبات 3.1.1 :

• نضع: $\mathcal{D}=\{\mathcal{M}\subseteq\mathcal{P}(E),\mathcal{M}\in E,\xi\subseteq\mathcal{M}\}$ ، $\bigcap\limits_{\mathcal{M}\in\mathcal{D}}\mathcal{M}=\mathcal{A}$ حيث $\mathcal{M}$ عشيرة.

إن: $\mathcal{D}\neq\emptyset$ لأن: $\mathcal{P}(E)\in\mathcal{D}$

• لدينا: $\forall\mathcal{M}\in\mathcal{D},\xi\subseteq\mathcal{M}\Longrightarrow\xi\subseteq\bigcap\limits_{\mathcal{M}\in\mathcal{D}}\mathcal{M}\Longleftrightarrow\xi\subseteq\mathcal{A}$

هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا $\mathcal{A}$ هي عشيرة على E وذلك حسب المبرهنة (3.1.1)

• لتكن $\mathcal{A}'$ عشيرة على E تحوي ξ فإن: $\mathcal{A}'\in\mathcal{D}$ ومنه: $\bigcap\limits_{\mathcal{M}\in\mathcal{D}}\mathcal{M}\subseteq\mathcal{A}'\Longleftrightarrow\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}'$

إذن: $\mathcal{A}';\xi\subseteq\mathcal{A}'\Longrightarrow\mathcal{A}\subseteq\mathcal{A}'$ عشيرة على E وذلك $\forall\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{P}(E)$

تعريف 4.1.1 :
نسمي العشيرة المعرفة في المبرهنة (4.1.1) بالعشيرة المولدة بواسطة ξ ونرمز لها بالرمز $\sigma(\xi)$
إن: $\sigma(\xi)$ هي أصغر عشيرة على E تحوي ξ.

✓ وتحقق هذه العشيرة المولدة:

$\forall\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(E);\xi\subseteq\mathcal{B}\Longrightarrow\sigma(\xi)\subseteq\mathcal{B}$ حيث: $\mathcal{B}$ عشيرة.

نتيجة 2.1.1 :
• إذا كانت $\mathcal{A}$ عشيرة على E فإن: $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{A}$
• إذا كانت $\mathcal{A}_1\subseteq\mathcal{A}_2$ فإن: $\sigma(\mathcal{A}_1)\subseteq\sigma(\mathcal{A}_2)$ حيث: $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\neq\emptyset$

مثال 2.1.1 :

إذا كانت $A\in\mathcal{P}(E)$ فإن: $\sigma(\{A\})=\{\emptyset,A,A^c,E\}$

مبرهنة 5.1.1 :
لتكن E وF مجموعتان غير خاليتان، $\mathcal{A}$ عشيرة على F وf تطبيق من E نحو F
نضع: $f^{-1}(\mathcal{A})=\{f^{-1}(\mathcal{A}),A\in\mathcal{A}\}$
إن $f^{-1}(\mathcal{A})$ هي عشيرة على E تسمى بعشيرة الصورة العكسية لـ $\mathcal{A}$.

الإثبات :

• لدينا: $f^{-1}(\mathcal{A})=\{f^{-1}(A),A\in\mathcal{A}\}$ ومنه: $f^{-1}(F)=E$ ، $F\in\mathcal{A}$ $\big($كون $\mathcal{A}$ عشيرة على $F\big)$

ومنه: $f^{-1}(F)\in f^{-1}(\mathcal{A})$ ، إذن: $E\in f^{-1}(\mathcal{A})$.

• ليكن: $B\in f^{-1}(\mathcal{A})$ إذن: $\exists A\in\mathcal{A}:f^{-1}(A)=B$ ومنه: $B^c=(f^{-1}(A))^c=f^{-1}(A^c)$

لدينا $A^c\in\mathcal{A}$ كون $\mathcal{A}$ عشيرة إذن: $B^c\in f^{-1}(\mathcal{A})$.

• لتكن $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $f^{-1}(\mathcal{A})$ إذن: $\forall n\in\mathbb{N},\exists A_n\in\mathcal{A},f^{-1}(A_n)=B_n$

ومنه: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(f^{-1}(A_n))$

ومنه: $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$

بما أن: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\in\mathcal{A}$، إذن: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\in f^{-1}(\mathcal{A})$.

ملاحظة 3.1.1 :
الصورة العكسية تحافظ على الإحتواءات بين العشائر، أي أنه إذا كان:

$$\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}_2\Longrightarrow f^{-1}(\mathcal{A}_1)\subset f^{-1}(\mathcal{A}_2)$$

مبرهنة 6.1.1 :
لتكن E و F مجموعتان غير خاليتان، ξ أسرة جزئية غير خالية من $\mathcal{P}(E)$ و f تطبيق من E نحو F عندئذ يكون لدينا: $f^{-1}(\sigma(\xi))=\sigma(f^{-1}(\xi))$

الإثبات :

لنثبت الإحتواء الأول: $\sigma(f^{-1}(\xi))\overset{?}{\subset} f^{-1}(\sigma(\xi))$

لدينا:

$$\begin{aligned}\xi\subset\sigma(\xi)&\Longrightarrow f^{-1}(\xi)\subset f^{-1}(\sigma(\xi))\\&\Longrightarrow\sigma(f^{-1}(\xi))\subset f^{-1}(\sigma(\xi))\end{aligned}\tag{1.2}$$

عكسيا: $f^{-1}(\sigma(\xi))\overset{?}{\subset}\sigma(f^{-1}(\xi))$

لتكن $\xi\neq\emptyset,\xi\subseteq P(F)$

لنضع: $\mathcal{B}=\{B\in P(F),f^{-1}(B)\in\sigma(f^{-1}(\xi))\}$

لنبرهن أن $\mathcal{B}$ عشيرة على F، $\xi\subset\mathcal{B}$

أولا:

$$\mathcal{B}=\{B\in P(F),f^{-1}(B)\in\sigma(f^{-1}(\xi))\}$$

لدينا: $f^{-1}(F)=E\in\sigma(f^{-1}(\xi))$ مباشرة نجد $F\in\mathcal{B}$

ثانيا: $B\in\mathcal{B}$ معناه $f^{-1}(B)\in\sigma(f^{-1}(\xi))\Longrightarrow(f^{-1}(B))^c\in\sigma(f^{-1}(\xi))$

ومنه: $f^{-1}(B^c)\in\sigma(f^{-1}(\xi))$

ومنه: $B^c\in\mathcal{B}$

ثالثا لتكن $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{B}$ حيث: $\forall n\in\mathbb{N};f^{-1}(B_n)\in\sigma(f^{-1}(\xi))$

$$\begin{aligned}f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)&=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f^{-1}(B_n))\in\sigma(f^{-1}(\xi))\\&\Longrightarrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\in\mathcal{B}\end{aligned}$$

لنبين أنَ: $\xi \overset{?}{\subseteq} \mathcal{B}$
لتكن: $B \in \xi$، لدينا: $\xi \subseteq \sigma(\xi)$ ومنه:

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\xi) &\Longrightarrow f^{-1}(\xi) \subset \sigma(f^{-1}(\xi)) \\ &\Longrightarrow f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\xi)) \\ &\Longrightarrow B \in \mathcal{B} \\ &\Longrightarrow \xi \subseteq \mathcal{B} \end{aligned}$$

لنبرهن الإحتواء العكسي: $\left(f^{-1}(\sigma(\xi)) \overset{?}{\subseteq} \sigma(f^{-1}(\xi))\right)$
لدينا $\emptyset \neq \xi \subset P(F)$ و $\mathcal{B}$ عشيرة.
و لدينا $\xi \subseteq \mathcal{B}$ ومنه:

$$\sigma(\xi) \subset \mathcal{B} \Longrightarrow f^{-1}(\sigma(\xi)) \subset f^{-1}(B) \subset \sigma(f^{-1}(\xi))$$

$$\Longrightarrow f^{-1}(\sigma(\xi)) \subset \sigma(f^{-1}(\xi)) \tag{2.2}$$

من (1.2) و (2.2) نجد المساواة.

تعريف 5.1.1 :
ليكن $(E, \mathcal{A})$ فضاءا قيوسا وB مجموعة جزئية من E ليست خالية نضع: $\mathcal{A}_B = \{A \cap B, A \in \mathcal{A})$
إن $\mathcal{A}_B$ عشيرة على B تسمى بالعشيرة المستنتجة على B بواسطة $\mathcal{A}$ أو عشيرة الأثر على B.
و إذا كان $B \in \mathcal{A}$ فإن: $\mathcal{A}_B \subseteq \mathcal{A}$.

الإثبات :

لنبرهن على أن $\mathcal{A}_B$ هي عشيرة على B:
- واضح أن $\emptyset \cap B = \emptyset \in \mathcal{A}_B$.
- ليكن: $D \in \mathcal{A}_B$ إذن: $\exists A \in \mathcal{A} : D = A \cap B$
ومنه: $C_B^D = C_B^{A\cap B} = C_B^{\mathcal{A}} \cup C_B^B = C_B^{\mathcal{A}} \cup \emptyset = A^c \cap B$
ونعلم أنّ: $A^c \in \mathcal{A}$ كون $\mathcal{A}$ عشيرة وبالتالي: $C_B^D \in \mathcal{A}_B$.
- من أجل كل $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{A}_B$: توجد متتالية $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{A}$ حيث: $\forall n \in \mathbb{N}; B_n = A_n \cap B$
ومنه:

$$\begin{aligned} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \bigcap B\right) \\ &= B \bigcap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}_B \end{aligned}$$

لأن: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

✓ النقطة الثانية من المبرهنة واضحة لأن: $\forall A \in \mathcal{A}; A\cap B \in \mathcal{A}$

تعريف 6.1.1 :
ليكن $(E,\mathcal{A})$ و$(F,\mathcal{B})$ فضاءان قيوسان، نسمي عشيرة الجداء على $E\times F$ و نرمز لها بـ: $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ العشيرة المولدة بواسطة الأسرة $\{A\times B, A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}\}$
أي أن: $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} = \sigma\left(\{A\times B, A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}\}\right)$

تعريف 7.1.1 :
ليكن (E,τ) فضاءا طوبولوجيا، نسمي $\sigma(\tau)$ بالعشيرة البوريلية لـ: E أو عشيرة بورال $Borel$ لـ E ونرمز لها بالرمز $\mathcal{B}(E)$، أي أن: $\mathcal{B}(E)=\sigma(\tau)$ تسمى عناصر $\mathcal{B}(E)$ بالمجموعات البوريلية لـ E.

مبرهنة 7.1.1 :
إذا كانت $\mathbb{R}$ مزودة بالطوبولوجيا الإعتيادية τ_u فإنه لدينا:

$\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{P}(\mathbb{R})$ حيث: $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma(\tau_u)$

الإثبات :

نقبل بدون برهان النظرية التالية:

نظرية 1.1.1 :
ليكن (E,τ) فضاءا طوبولوجيا، $\xi\subseteq P(E)$، $\xi\neq\emptyset$ إذا كانت ξ غير منتهية قابلة للعد ومولدة لـ $\mathcal{B}(E)$ (أي: $\sigma(\xi)=\mathcal{B}(E)$) فإن: $Card(\mathcal{B}(E))=Card(\mathbb{R})$.
(أي أن $\mathcal{B}(E)$ متساوية القدرة مع $\mathbb{R}$).

توطئة 1.1.1 :
لتكن D مجموعة ليست خالية، إذا وجد تطبيق متباين من D نحو مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ فإن D قابلة للعد.

الإثبات :

لتكن $N\subseteq\mathbb{N}$ وf تطبيق متباين من D نحو N، نضع:

$$g:\begin{cases} D\to f(D)=N\subseteq\mathbb{N}\\ x\to g(x)=f(x)\end{cases}$$

واضح أن g تقابلي، إذن D قابلة للعد.

توطئة 2.1.1 :

لتكن U مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}$، نضع: $I=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}^2,\alpha\leq\beta,]\alpha,\beta[\subseteq U\}$ عندئذ تكون I قابلة للعد و $U=\bigcup\limits_{(a,b)\in I}]a,b[$

الإثبات :

$I\subset\mathbb{Q}^2$ ، إذن I قابلة للعد، لنبرهن أنّ: $U=\bigcup\limits_{(a,b)\in I}]a,b[$

لدينا الإحتواء الأول واضح $(\bigcup\limits_{(a,b)\in I}]a,b[\subset U)$، ليكن $x\in U$ ، إذن: $\exists r>0,]x-r,x+r[\subseteq U$

ومنه: $\exists(p,q)\in\mathbb{Q}^2;p<q,x\in]p,q[\subseteq U$ إذن: $(p,q)\in I$ ومنه: $]p,q[\subseteq\bigcup\limits_{(a,b)\in I}]a,b[$

وبالتالي: $U=\bigcup\limits_{(a,b)\in I}]a,b[$

قضية 1.1.1 :

لتكن $Card(\mathcal{B}(\mathbb{R}))=Card(\mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma(\tau_\mu)$، τ_μ الطوبولوجيا الإعتيادية لـ $\mathbb{R}$)

الإثبات :

نضع: $\xi=\{]a,b[,(a,b)\in\mathbb{Q}^2,a\leq b\}$، لتكن $U\in\tau_\mu\backslash\{\emptyset\}$ من التوطئة السابقة 2.1.1 نستنتج أنّ: $U\in\sigma(\xi)$، إذن: $\tau_\mu\in\sigma(\xi)$ وبالتالي: $\sigma(\xi)=\mathcal{B}(\mathbb{R})$ بما أنّ: ξ قابلة للعد، إذن حسب النظرية 1.1.1 يكون لدينا: $Card(\mathcal{B}(\mathbb{R}))=Card(\mathbb{R})$

توطئة 3.1.1 :

لتكن E مجموعة ليست خالية، لا يوجد تطبيق غامر من E نحو $\mathcal{P}(E)$.

الإثبات :

نفرض أنه يوجد تطبيق غامر f من E نحو $\mathcal{P}(E)$، نسمي:

$$\Omega=\{x\in E,x\notin f(x)\}$$

و لنفرض أنه: $\exists a\in E;f(a)=\Omega$

نميز حالتين: إما $a\in\Omega$ ومنه $a\notin f(a)=\Omega$ تناقض.

و إما $a\notin\Omega$ ومنه $a\in f(a)=\Omega$ تناقض أيضا.

وبالتالي فإنه: $\forall a\in E;f(a)\neq\Omega$، أي:

$$\exists F=\Omega\in\mathcal{P}(E);\forall a\in E,f(a)\neq F$$

وهذا تناقض مع كون f غامر.

نتيجة 3.1.1 :

$\mathcal{B}(\mathbb{R})\neq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (أي: $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{P}(\mathbb{R})$)

الإثبات :

من التوطئة 3.1.1 نجد $Card(\mathbb{R}) \neq Card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$، إذن من القضية 1.1.1 يكون لدينا $Card(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \neq Card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$، إذن: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

مبرهنة 9.1.1 :
نزود $\mathbb{R}$ بالطوبولوجيا الإعتيادية τ_u ثم نضع: $\zeta = \{]a,b[\,; a,b \in \mathbb{R}; a \leq b\}$
و $\zeta_1 = \{]-\infty,a[\,; a \in \mathbb{R}\}$ و $\zeta_2 = \{]-\infty,a]\,; a \in \mathbb{R}\}$.
عندئذ يكون لدينا: $\sigma(\zeta) = \sigma(\zeta_1) = \sigma(\zeta_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

الإثبات :

◄ لدينا:

$$\zeta \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \sigma(\zeta) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{3.2}$$

• العكس :

- لتكن $\theta \in \tau_u \backslash \{\emptyset\}$ ، حيث: $\theta = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in D}]\alpha,\beta[$ ، $D = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}^2, \alpha \leq \beta,]\alpha,\beta[\subseteq \theta\}$
إذن: $\theta \in \sigma(\tau)$ ومنه: $\tau_u \subseteq \sigma(\tau)$ إذن:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\zeta) \tag{4.2}$$

من (3.2) و (4.2) نستنتج أن: $\sigma(\zeta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
واضح أن: $\zeta_1 \subseteq \tau_u$.
◄ ليكن $a \in \mathbb{R}$، لدينا $]-\infty,a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ومنه: $\zeta_2 \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ وبالتالي: $\sigma(\zeta_2) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
◄ لدينا: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\infty, b-\frac{1}{n}\right] =]-\infty,b[$، وليكن $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\infty, b-\frac{1}{n}\right]$،
إذن: $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*; x \leq b - \frac{1}{n} < b$ أي: $x \in]-\infty,b]$.
• العكس :

- ليكن $x \in]-\infty,b[$، إذن : $b - x > 0$.
نضع $E\left(\frac{1}{b-x}\right) + 1 = n_0 \in \mathbb{N}^*$، ومنه: $\frac{1}{b-x} < n_0 \Longrightarrow x < b - \frac{1}{n_0}$.
أي: $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\infty, b-\frac{1}{n}\right] \Longrightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\infty, b-\frac{1}{n}\right[$.
نجد: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\infty, b-\frac{1}{n}\right] \in \sigma(\zeta_2)$ $]-\infty,a] =$ وبالتالي: $\zeta_1 \subseteq \sigma(\zeta_2)$ ومنه: $\sigma(\zeta_1) \subseteq \sigma(\zeta_2)$،
أي: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\zeta_2)$.

ليكن $a, b \in \mathbb{R}$ حيث $a \leq b$.

لدينا: $]a, b[\subset]-\infty, b] \Longrightarrow]a, b[\in \zeta_1 \Longrightarrow \zeta \subset \zeta_1 \Longrightarrow \sigma(\zeta) \subseteq \sigma(\zeta_1)$

ومنه: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\zeta) \subset \sigma(\zeta_1) \subset \sigma(\zeta_2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$، نجد: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\zeta) = \sigma(\zeta_1) = \sigma(\zeta_2)$.

ملاحظة :

نستطيع أن نثبت أن $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ مولّدة كذلك بأسرة المجالات من الشكل $[a, b]$ أو من الشكل $[a, b[$ أو من الشكل $]a, b]$ أو $[b, +\infty[$ أو $]b, +\infty[$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$.

2.1.2 التطبيقات (الدّوال) القيوسة

تعريف 1.2.1 :
ليكن $(E, \mathcal{A})$، $(F, \mathcal{B})$ فضاءان قيوسان و f تطبيق من E نحو F، نقول عن f أنه تطبيق قيوس (Mesurable) إذا وفقط إذا تحقق: $\forall A \in \mathcal{B}, f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

- بعبارة أخرى يكون f قيوس من $(E, \mathcal{A})$ في $(F, \mathcal{B})$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$.

- إذا كان E و F فضاءان طوبولوجيان و A، B هما عشيرتا Borel لهما على الترتيب فإننا نسمي التطبيق القيوس f تطبيقا Boréliènne.

مثال 1.2.1 :

ليكن $(E, \mathcal{A})$ فضاء قيوس، ولتكن $a \in E$، عندئذ نعرف القياس χ_a كما يلي :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \chi_a(A) = \begin{cases} 1 : a \in A \\ 0 : a \neq A \end{cases}$$

بحيث χ_a قياسا موجبا على $(E, \mathcal{A})$ يسمى قياس ديراك عند a.

مبرهنة 2.2.1 :
ليكن $(E, \mathcal{A})$، $(F, \mathcal{B})$ فضاءان قيوسان و f تطبيق من E نحو F، و ξ أسرة جزئية غير خالية من $\mathcal{P}(F)$ بحيث: $\sigma(\xi) = \mathcal{B}$، عندئذ يكون f قيوس إذا وفقط إذا كان: $\forall A \in \xi : f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

برهان :

لزوم الشرط بديهي (لأنّ: $\xi \subseteq \sigma(\xi)$)، نفرض أنّ $f^{-1}(\xi) \subseteq \mathcal{A}$ إذن: $\sigma(f^{-1}(\xi)) \subseteq \mathcal{A}$ ومنه حسب المبرهنة $(6.1.1)$ يكون لدينا $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ ومنه f قيوس.

نتيجة 1.2.1 :
ليكن (E, τ) و(F, τ') فضاءان طوبولوجيان، عندئذ كل تطبيق مستمر من E نحو F هو تطبيق قيوس.

الإثبات :

ليكن f تطبيق مستمر من E نحو F، إذن:

$$f^{-1}(\tau') \subseteq \tau \subseteq \sigma(\tau)$$

ومنه نجد:

$$f^{-1}(\mathcal{B}(F)) = f^{-1}(\sigma(\tau')) = \sigma(f^{-1}(\tau')) \subseteq \mathcal{B}(E)$$

إذن: f تطبيق قيوس.

نتيجة 2.2.1 :
ليكن $(E, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا و f تطبيق من E نحو $\mathbb{R}$، يكون f قيوس إذا وفقط إذا تحقق إحدى القضايا التالية:

1. $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \leq a\} \in \mathcal{A}$
2. $\forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathcal{A}$
3. $\forall a \in \mathbb{R} : \{f > a\} \in \mathcal{A}$
4. $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \geqslant a\} \in \mathcal{A}$

بحيث: $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \leq a\} = \{x \in E : f(x) \leq a\} = f^{-1}(]-\infty, a])$ ونفس التعريف بالنسبة لبقية المجموعات.

برهان :

لزوم الشرط بديهي، أما كفاية الشرط فتنتج مباشرة من المبرهنتين (9.1.1) و(2.1.1).

مبرهنة 3.2.1 :
ليكن $(E, \mathcal{A})$ ، $(F, \mathcal{B})$ و$(G, \mathcal{D})$ ثلاثة فضاءات قيوسة، f تطبيق قيوس من E نحو F وg تطبيق قيوس من F نحو G عندئذ يكون $g \circ f$ قيوس من E نحو G.

برهان :

ينتج من كون :

$$\forall A \in \mathcal{D} : (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{A}$$

مبرهنة 4.2.1 :
ليكن $(E, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا، (F, τ) فضاء طبولوجيا، f_1 و f_2 تطبيقان من E نحو $\mathbb{R}$ قيوسان و φ تطبيق مستمر من $\mathbb{R}^2$ نحو F. نعرّف تطبيق ψ من E نحو $\mathbb{R}^2$ وذلك بوضع:

$$\forall x \in E : \psi(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

عندئذ يكون التطبيق f المعرّف من E نحو F بـ: $\forall x \in E : f(x) = (\varphi \circ \psi)(x)$ تطبيقا قيوسا.

برهان :

يكفي أن نثبت أن ψ قيوس من E نحو $\mathbb{R}^2$ ولأجل ذلك نعتبر $A,B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
لدينا: $\psi^{-1}(A\times B) = f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B) \in \mathcal{A}$
وبما أن: $\sigma(\{A\times B; A,B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ إذن حسب المبرهنة (2.2.1) يكون التطبيق ψ قيوس من E نحو $\mathbb{R}^2$ ولدينا φ مستمر من $\mathbb{R}^2$ نحو F فهو قيوس إذن f هو تطبيق قيوس $(\varphi \circ \psi)$ كتركيب تطبيقان قيوسان.

نتيجة 3.2.1 :
ليكن $(E,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا و g، f تطبيقان من E نحو $\mathbb{R}$ قيوسان عندئذ تكون التطبيقات:
$\max(f,g)$ ، $\min(f,g)$ ، fg ، $\lambda f\,(\lambda \in \mathbb{R})$ ، $f+g$ قيوسة.

برهان :
لدينا التطبيق λf هو تركيب تطبيق قيوس وتطبيق مستمر إذن λf قيوس، هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا التطبيقات من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$: $(x,y) \longmapsto \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$ ، $(x,y) \longmapsto x+y$
$(x,y) \longmapsto \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ ، $(x,y) \longmapsto xy$ هي كلها تطبيقات مستمرة ومنه حسب المبرهنة (4.2.1) تكون التطبيقات $f+g, \lambda f\,(\lambda \in \mathbb{R}), fg, \min(f,g), \max(f,g)$ قيوسة.
لنبرهن التطبيق: $(x,y) \longmapsto \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$

لدينا:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \varphi(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|) \end{cases}$$

نضع: $(x_1,y_1);(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ نجد:

$$\begin{aligned}
|\varphi(x_2,y_2) - \varphi(x_1,y_1)| &= \left|\frac{1}{2}(x_2+y_2-|x_2-y_2|) - \frac{1}{2}(x_1+y_1-|x_1-y_1|)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(x_2+x_1)+(y_2-y_1)+|x_1-y_1|-|x_2-y_2|\right| \\
&\le \frac{1}{2}|x_2-x_1|+|y_2-y_1|+|x_1-x_2+y_2-y_1| \\
&\le |x_2-x_1|+|y_2-y_1| \\
&\le 2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\
&\le 2d((x_2,y_2);(x_1,y_1))
\end{aligned}$$

بنفس الطريقة نبرهن التطبيقات الأخرى.

مبرهنة 4.2.1 :
ليكن (E,τ) فضاء طوبولوجي و Ω مجموعة جزئية غير خالية من E عندئذ يكون لدينا: $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}_\Omega$
حيث: $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E) = \sigma(\tau)$ و $\mathcal{B}_\Omega$ هي العشيرة المستنتجة على Ω بواسطة $\mathcal{B}$.

برهان :

ليكن $U \in \tau_{\Omega}$ إذن: $\exists O \in \tau, U = O \cap \Omega \Longrightarrow U \in \mathcal{B}_{\Omega}$ ومنه: $\tau_{\Omega} \subseteq \mathcal{B}_{\Omega}$

وبالتالي فإنّ: $\sigma(\tau_{\Omega}) \subseteq \mathcal{B}_{\Omega}$ أي أنّ: $\mathcal{B}(\Omega) \subseteq \mathcal{B}_{\Omega} \ldots (1)$

عكسيا، ليكن f التطبيق المعرّف بـ:
$$\begin{aligned} f : \Omega &\to E \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned}$$

نعلم أنّ f هو تطبيق مستمر من (Ω, τ_{Ω}) نحو (E, τ) فهو إذا تطبيق قيوس من $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ نحو $(E, \mathcal{B})$، إذن: $\forall A \in \mathcal{B} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\Omega)$ ومنه: $\forall A \in \mathcal{B} : A \cap \Omega \in \mathcal{B}(\Omega)$ وبالتالي نجد: $\mathcal{B}_{\Omega} \subseteq \mathcal{B}(\Omega) \ldots (2)$، من (1) و (2) نجد المساواة.

مبرهنة 5.2.1 :

نرمز $\mathcal{B}$ لعشيرة $Borel$ لـ $\overline{\mathbb{R}}$ أي $\left(\mathcal{B} = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\tau_{\overline{\mathbb{R}}})\right.$ و $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ هي الطوبولوجيا على $\overline{\mathbb{R}}$ الناتجة عن المسافة d المعرّفة في المبرهنة $\left.(3.1.0)\right)$.

لتكن : $B \in p(\overline{\mathbb{R}})$ عندئذ تكون B قيوسة لـ $\overline{\mathbb{R}}$ أي $(B \in \mathcal{B})$ إذا وفقط إذا:
$$\exists A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : B \in \{A,\ A \cup \{-\infty\},\ A \cup \{+\infty\},\ A \cup \{-\infty, +\infty\}\}$$

برهان :

لنفرض $B \in p(\overline{\mathbb{R}})$، وأنه
$$\exists A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \in B \in \{A,\ A \cup \{-\infty\},\ A \cup \{+\infty\},\ A \cup \{-\infty, +\infty\}\}$$

ولنبرهن أنّ $B \in \mathcal{B}$ $\left(B\right.$ قيوسة لـ $\left.\overline{\mathbb{R}}\right)$

لدينا $\tau_{\overline{\mathbb{R}}} \in \mathcal{B}$ ومنه $\mathbb{R} \in \mathcal{B}$ ومنه $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ نجد $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B} \ldots (1)$

واضح أنّ $\{+\infty\}, \{-\infty\} \in \mathcal{B}$ و بإستخدام العلاقة (1) نجد أنّ $B \in \mathcal{B}$.

- عكسيا: لنفرض أنّ $B \in p(\overline{\mathbb{R}})$ وأنّ B قيوسة لـ $\overline{\mathbb{R}}$ بمعنى $B \in \mathcal{B}$ ولنبرهن أنه
$$\exists A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \in B \in \{A,\ A \cup \{-\infty\},\ A \cup \{+\infty\},\ A \cup \{-\infty, +\infty\}\}$$

عندئذ نميز 4 حالات:

- الحالة الأولى: $-\infty \notin \mathcal{B}$ و$+\infty \notin \mathcal{B}$ ومنه $B \subseteq \mathbb{R}$ نجد:
$$B \subseteq \mathbb{R} \Longrightarrow B \cap \mathbb{R} \Longrightarrow \exists A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = B \subseteq \mathbb{R} = B$$

- الحالة الثانية: $-\infty \in \mathcal{B}$ و$+\infty \notin \mathcal{B}$ ومنه: $B \backslash \{-\infty\} \subseteq \mathbb{R} \Longrightarrow B \backslash \{-\infty\} \cap \mathbb{R} = B \backslash \{-\infty\}$

نجد $B \backslash \{-\infty\}^c \cap \mathbb{R} \Longrightarrow B \cap \mathbb{R} \cap \{-\infty\}^c = B \backslash \{-\infty\}$

ولدينا: $B = B \backslash \{-\infty\} \cup \{-\infty\} = (B \cap \mathbb{R} \cap \{-\infty\}^c) \cup \{-\infty\}$ ومنه
$$\exists A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = B \cap \mathbb{R}, B = A \cup \{-\infty\}$$

- الحالة الثالثة: $-\infty \notin \mathcal{B}$ و$+\infty \in \mathcal{B}$ بنفس الطريقة نجد $A = B \cap \mathbb{R} = B \wedge B = A \cup \{+\infty\}$
- الحالة الرابعة: $-\infty \in \mathcal{B}$ و$+\infty \in \mathcal{B}$ كذلك بنفس الطريقة نجد
$$A = B \cap \mathbb{R} = B \wedge B = A \cup \{-\infty, +\infty\}$$

نتيجة 3.2.1 :
لتكن ζ أسرة جزئية من $p(\mathbb{R})$ ، بحيث:

$$\zeta = \{]a,b[\,,[-\infty,\alpha[\,,]\beta,+\infty]\,,a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R},a\leq b\}$$

عندئذ يكون لدينا: $\sigma(\zeta)=\mathcal{B}$

برهان :

لدينا : $\forall n\in\mathbb{N};\{-\infty\}\subseteq[-\infty,-n[\Longrightarrow\{-\infty\}\subseteq\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[-\infty,-n[$

ليكن $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[-\infty,-n[$ إذن : $\forall n\in\mathbb{N};-\infty\leq x<-n$ بالمرور إلى النهاية $x=-\infty$ ومنه $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[-\infty,-n[=\{-\infty\}$ بنفس الطريقة نجد: $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[n,+\infty,[=\{+\infty\}$

$\Longleftarrow$ واضح أن $\sigma(\zeta)=\mathcal{B}$ واضح $\zeta\subseteq\tau_{\mathbb{R}}$ إذن $\sigma(\zeta)\subseteq\mathcal{B}...(1)$.

ليكن $B\in\mathcal{B}$ لدينا مما سبق $\{-\infty\},\{+\infty\}\in\sigma(\zeta)$

وبما أن $\{]a,b[\,;a,b\in\mathbb{R},a\leq b\}\subseteq\zeta$

إذن $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subseteq\sigma(\zeta)$

ومما سبق نعلم أنه

$\exists A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),B\in B\in\{A,\ \ A\cup\{-\infty\},\ \ A\cup\{+\infty\},\ \ A\cup\{-\infty,+\infty\}\}\subseteq\sigma(\zeta)$

إذن : $\mathcal{B}\subseteq\sigma(\zeta)...(2)$

من (1) و(2) نجد المساواة.

مبرهنة 6.2.1 :
ليكن $(E,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا و(f_n) متتالية من الدّوال (أو التطبيقات) القيوسة المعرّفة من E نحو $\overline{\mathbb{R}}$، عندئذ تكون المتاليتان $\sup\limits_{n\geqslant0}f_n$ و $\inf\limits_{n\geqslant0}f_n$ قيوسان.

برهان :

لدينا: $\forall a\in\mathbb{R}:\left\{\sup\limits_{n\geqslant0}f_n\leq a\right\}=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\leq a\}\in\mathcal{A}$ وبما أنّ: $\sigma\left(\{[-\infty,a]\,,a\in\mathbb{R}\}\right)=\mathcal{B}$،

إذن: $\sup\limits_{n\geqslant0}f_n$ هي دالة قيوسة.

• ليكن $n\in\mathbb{N}$، لدينا: $\forall a\in\mathbb{R}$ فإنّ: $\{-f_n<a\}=\{f_n>-a\}=\{f_n<-a\}^c\in\mathcal{A}$ ومنه: $(-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية من الدوال القيوسة وبما أن : $\inf\limits_{n\geqslant0}f_n=-\sup\limits_{n\geqslant0}(-f_n)$ إذن $\inf\limits_{n\geqslant0}f_n$ هي دالة قيوسة

$$\left(\forall a\in\mathbb{R}\left\{\inf_{n\geqslant0}f_n<a\right\}=\bigcup_{n\geqslant0}\{f_n<a\}\right)$$

نتيجة 5.2.1 :
ليكن $(E,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا و $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من الدّوال القيوسة المعرّفة من E نحو $\overline{\mathbb{R}}$ عندئذ:
1- تكون الدّالتان $\limsup f_n$ و $\liminf f_n$ قيوسان.
2- إذا كانت (f_n) متقاربة ببساطة على E نحو دالة f فإنّ هذه الأخيرة تكون قيوسة.

برهان :

1- من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $\inf\limits_{k\geqslant n} f_k = g_n, \sup\limits_{k\geqslant n} f_k = h_n$ عندئذ ينتج من المبرهنة (5.2.1) أنّ (g_n) و (h_n) هما متتاليتان من الدوال القيوسة
وبما أنّ: $\limsup f_n = \inf\limits_{n\geqslant\geqslant 0} h_n$ $\liminf\limits_{k\geqslant n} f_k = \sup\limits_{n\geqslant 0} g_n \wedge$ إذن حسب نفس المبرهنة تكون الدالتان $\limsup f_n$ و $\liminf f_n$ قيوسان.

2- لدينا (f_n) متقاربة ببساطة على E نحو f معناه: $\forall x\in E : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), (\text{في } \mathbb{R})$
ومنه: $\forall x\in E : f(x) = (\limsup f_n)(x) = (\liminf f_n)(x)$، إذن f قيوسة.

نتيجة 6.2.1 : **(أساسية)**
ليكن $(E,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا و g ، f تطبيقان قيوسان معرّفان من E نحو $\overline{\mathbb{R}}$ عندئذ تكون التطبيقات:
fg, $\frac{1}{f}$ (عندما يكون معرّف), $f+g$ (عندما يكون معرّف) αf, $(\alpha\in\mathbb{R})$ قيوسة .

3.1.2 خصائص قابلية القياس لتطبيق (أو دالة) عند المرور إلى النهاية

إنّ النظرية المجردة للقياس والمكاملة تفرض توسيعا لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ إلى مجموعة نرمز لها بالرمز $\overline{\mathbb{R}}$، هذه الأخيرة تضم بالإضافة إلى كل الأعداد الحقيقية النهايتين $-\infty$ و $+\infty$.
أي أنّ: $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\} = [-\infty,+\infty]$

◂ نسمي $\overline{\mathbb{R}}$ بالمستقيم العددي المكتمل، كما نسمي $[0,+\infty]$ حيث: $([0,+\infty]) = \mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ نصف المستقيم العددي الموجب المكتمل. كل خصائص $\overline{\mathbb{R}}$ التي ستأتي ستنقل إلى $[0,+\infty]$.

◂ نستطيع تمديد علاقة الترتيب الكلي " $\leq$ " في $\mathbb{R}$ إلى $\overline{\mathbb{R}}$ وذلك بإضافة العلاقتان الطبيعيتان:
$(\forall x\in\mathbb{R} : -\infty < x)\wedge(\forall x\in\mathbb{R} : x < +\infty)$ وعندئذ يكون لدينا: $\forall x\in\overline{\mathbb{R}} : -\infty\leq x\leq +\infty$
في $\overline{\mathbb{R}}$ مزّودة بعلاقة الترتيب الكلي المعرّفة سابقا كل مجموعة جزئية منها غير خالية تقبل حدا أعلى و حد أدنى.

مبرهنة 7.2.1 :
في $\overline{\mathbb{R}}$ مزّودة بعلاقة الترتيب الكلي المعرّفة سابقا كل مجموعة جزئية منها غير خالية تقبل حدا أعلى و حدا أدنى.

برهان :
لتكن $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $A \neq \emptyset$، نميز حالتين:
◂ إذا كانت $+\infty \in A$ فإنّ: $\sup A = +\infty$
◂ إذا كانت $+\infty \notin A$ فإننا نميز أيضا حالتين:

• إذا كانت A محدودة من الأعلى في $\mathbb{R}$ فإنها تقبل حدا أعلى في $\mathbb{R}$ وهو أيضا حدا أعلى في $\overline{\mathbb{R}}$

• إذا كانت A غير محدودة من الأعلى في $\mathbb{R}$ فإنّ $+\infty$ هوّ الحاد الأعلى الوحيد لـ A في $\overline{\mathbb{R}}$ ومنه:
$$\sup A = +\infty$$

◂ ندرس وجود الحد الأدنى لـ A $(\inf A)$ في $\overline{\mathbb{R}}$ بنفس الطريقة.

4.1.2 الدوال البسيطة

تعريف 1.4.1 :
ليكن $(E, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا و f دالة معرّفة من E نحو $\mathbb{R}$.
نقول عن f أنّها دالة **بسيطة** (f est une fonction étagée) إذا وفقط إذا كانت **قيوسة** وتأخذ عدد **منته** من القيم (أي أنّ $f(E)$ هي مجموعة **منتهية** من $\mathbb{R}$.
وإذا كانت : $f(E) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ حيث: λ_1، λ_2، ....، λ_n هي أعداد حقيقية مختلفة مثنى مثنى فعندئذ نضع: $\forall k = \overline{1,n} : f(\{\lambda_k\}) = A_k \in \mathcal{A}$ كون من جهة الأسرة $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ تشكل تجزئة لـ E وينتج عن ذلك من جهة أخرى: $(*)$ ... $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}$ أو $f = \sum_{y \in f(E)} y \chi_{\{f=y\}}$
نسمى العلاقة $(*)$ بالكتابة القانونية للدالة البسيطة f.

أمثلة :

1- ليكن $a, b \in \mathbb{R}$ حيث $a < b$، كل دالة درجية على $[a, b]$ هي دالة بسيطة على $[a, b]$ أما العكس غير صحيح في الحالة العامة، فعلا لتكن f إقتصار الدالة $\chi_{\mathbb{Q}}$ على $[a, b]$.

(a و b عددان حقيقيان حيث $a < b$)، واضح أنّ f هي دالة قيوسة من $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ نحو $\mathbb{R}$ لكنها ليست درجية على $[a, b]$.

2- ليكن $(E,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا فعندئذ يكون: $\forall A\in\mathcal{A}$ فإنّ χ_A هي دالة بسيطة.

توطئة 1.4.1 :
$E\neq\emptyset$، نرمز بـ G لمجموعة كل الدّوال المعرّفة من E نحو $\mathbb{R}$ ذات **عدد منته** من القيم، إنّ لـ G بنية فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$.

نتيجة 1.4.1 :
ينتج مباشرة من النتيجة السابقة أنّه إذا كان $(E,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا فإنّ مجموعة كل الدّوال البسيطة المعرّفة على E تشكل بنية فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$.

نظرية 1.4.1 :
ليكن $(E,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا وf دالة قيوسة من $(E,\mathcal{A})$ نحو $(\overline{\mathbb{R}}_+,\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ عندئذ توجد متتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متزايدة** من الدّوال **البسيطة الموجبة** تتقارب **ببساطة** نحو الدالة f (على E).
- وإذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من E و **وجد** عدد حقيقي موجب M بحيث: $\forall x\in A: f(x)\leq M$ فإنّ (f_n) تتقارب **بإنتظام** نحو الدالة f على A.

نتيجة 2.4.1 :
ليكن $(E,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا و f دالة قيوسة من $(E,\mathcal{A})$ نحو $(\overline{\mathbb{R}}_+)$، عندئذ توجد متتالية (f_n) من الدّوال البسيطة تتقارب ببساطة نحو الدالة f على E.

برهان :
للبرهان على النظرية (1.4.1) و النتيجة (2.4.1) يكفي أن نثبت ما يلي:

I) 1) ليكن $n\in\mathbb{Z}$ واضح أنّ: و $\forall x\in[n,n+1[: E(x)=n$ لأنه إذا كان:
$x\in[n,n+1[\Longrightarrow n\leq x<n+1\Longrightarrow n\leq E(x)$ فعلا إذا كان: $n<E(x)$ فإنّ:
$n+1\leq E(x)\leq x$ تناقض مع كون $x\leq n+1$ ومنه: $E(x)=n$

2) إنّ الأسرة $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ تشكل تجزئة من المجموعات القيوسة لـ $\mathbb{R}$.
- واضح أن $\forall n\in\mathbb{N}, I_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$
ليكن $x\in\mathbb{R}$، إذن: $x\in[E(x),E(x)+1[\subseteq\underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup}I_n$
إذن: $\forall x\in\mathbb{R}; x\in\underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup}I_n$ ومنه: $\mathbb{R}=\underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup}I_n$
- ليكن: $n,p\in\mathbb{Z}$ بحيث $n\neq p$ و $n<p$ ومنه $...(*)$ $n+1\leq p$ لنفرض أنّ:
$x\in I_n\cap I_p\neq\emptyset$ نجد $p\leq x<n+1$ وهذا تناقض مع $(*)$ إذن: $I_n\cap I_p=\emptyset$

ومنه $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ شكل تجزئة من المجموعات القيوسة لـ $\mathbb{R}$.

3) لتكن f دالة الجزء الصحيح ومن أجل كل عدد صحيح n نرمز بـ f_n لإقتصارها على I_n

واضح أنه: $\forall A \in P(\mathbb{R}), f^{-1}(A) = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup} f_n^{-1}(A)$

لأنّ: $f^{-1}(A) = f^{-1}(A)\cap\mathbb{R} = f^{-1}(A)\cap(\underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup} I_n)$

ومنه: $\underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup}(f_n^{-1}(A)\cap I_n) = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\cup} f_n^{-1}(A)$

- نلاحظ أنه يمكننا إستنتاج مما سبق أنّ $f : (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ هي دالة قيوسة.

(لتكن $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$، بما أنه لكل عدد صحيح n فإن f_n هي دالة قيوسة من $(I_n,\mathcal{B}(I_n))$ نحو $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

إذن: $\forall n\in\mathbb{Z} : f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(I_n)\subseteq\mathcal{B}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} f_n^{-1}(A)\in\mathcal{B}(I_n)$

ومنه: $f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(I_n)$ وعليه f هو دالة قيوسة).

II) ليكن a عدد حقيقي، من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$\forall n\in\mathbb{N} : d_n = \frac{E(10^n a)}{10^n}$$

إنّ المتتالية $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ a.

ويمكن أن نثبت بسهولة أنّ: $\forall n\in\mathbb{N} : 0\le a-d_n<\frac{1}{10^n}$ وبالتالي $\lim d_n = a$

III) ليكن الأن $(E,\mathcal{A})$ فضاء قيوسا و f دالة قيوسة من $(E,\mathcal{A})$ نحو $(\overline{\mathbb{R}}_+,\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$

1) من أجل كل عدد طبيعي n نعرف دالة φ_n من $\overline{\mathbb{R}}_+$ نحو $\mathbb{R}_+$

بوضع: $\forall t\in\overline{\mathbb{R}}_+ : \varphi_n(t) = \frac{E(10^n t)}{10^n}\chi_{[0,n[}(t) + n\chi_{[n,+\infty]}(t)$

إنّ: $\varphi_n(\overline{\mathbb{R}}_+)$ هي مجموعة منتهية.

لأنّ:

$$\varphi_n(\overline{\mathbb{R}}_+) = \varphi_n([0,n[\cup[n,+\infty]) = \varphi_n([0,n[)\cup\varphi_n([n,+\infty]) = \varphi_n([0,n[)\cup\{n\}$$

لدينا: $(10^n\varphi_n)([n,+\infty[) = \{10^n\varphi_n(t), 0\le t<n\} = \{E(10^n t), 0\le t<n\}$

ولدينا: $0\le t<n \Longleftrightarrow 0\le 10^n t<n10^n \Longrightarrow 0\le E(10^n t)<n10^n$

إذن: $\{E(10^n t), 0 \leq t < n\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, ..., n10^n - 1\}$

ومنه: $(10^n \varphi_n)([0, n[)$ منتهية، إذن: $\varphi_n([0, n[)$ منتهية وبالتالي $\varphi_n(\overline{\mathbb{R}}_+)$ منتهية.

2) المتتالية $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ قيوسة وبالتالي فهي متتالية من الدوال البسيطة الموجبة.

(ليكن $n \in \mathbb{N}$ بما أن $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ إذن الدالة:
$$\begin{cases} \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t \longmapsto \dfrac{1}{10^n} E(10^n t) \end{cases}$$
هي دالة قيوسة.

و بما أن: $[0, n[, [0, +\infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$

إذن الدالتان $\chi_{[0,n[}$ و $\chi_{[0,+\infty[}$ قيوستان وبالتالي الدالة φ_n قيوسة. بما أن $\varphi_n(\overline{\mathbb{R}}_+) \subseteq \mathbb{R}_+$، $\varphi_n(\overline{\mathbb{R}}_+)$ منتهية و φ_n قيوسة، إذن φ_n هي دالة بسيطة موجبة).

3) لنثبت الأن أنّ: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$

ليكن $n \in \mathbb{R}$ و $t \in [0, +\infty[$، نميز 4 حالات:

- الحالة الأولى: إذا كان $0 \leq t < n$ فإن: $\varphi_n(t) = \dfrac{E(10^n t)}{10^n}$ ، $\varphi_{n+1}(t) = \dfrac{E(10^{n+1} t)}{10^{n+1}}$

ومن (II) نستنتج أن: $\varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$

- الحالة الثانية: إذا كان $0 \leq t < n + 1$ فإن: $\varphi_n(t) = n$ ، $\varphi_{n+1}(t) = \dfrac{E(10^{n+1} t)}{10^{n+1}}$

لدينا:
$$\begin{aligned} n \leq t \Longrightarrow n10^{n+1} \leq 10^{n+1} t \Longrightarrow n10^{n+1} \leq E(10^{n+1} t) &\Longleftrightarrow n \leq \frac{E(10^{n+1} t)}{10^{n+1}} \\ &\Longleftrightarrow \varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t) \end{aligned}$$

- الحالة الثالثة: إذا كان $n + 1 \leq t \leq +\infty$

فإن : $\varphi_n(t) = n, \varphi_{n+1}(t) = n + 1 \Longrightarrow \varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$

- الحالة الرابعة: إذا كان $t = +\infty$

فإن: $\varphi_n(t) = n, \varphi_{n+1}(t) = n + 1 \Longrightarrow \varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$

(ملاحظة : يمكن دمج الحالتين الثالثة والرابعة في حالة واحدة).

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n الدالة: $f_n = \varphi_n \circ f$

- يمكن أن نثبت بسهولة أنّ f_n متتالية متزايدة من الدوال البسيطة الموجبة على E.

ليكن $n \in \mathbb{N}$، f_n هي دالة قيوسة كتركيب لدالتين قيوستين وبما أن: $f(E) \subseteq \mathbb{R}_+$

إذن: $\varphi_n(f(E)) \subseteq \varphi_n(\overline{\mathbb{R}}_+)$ أي أن: $f_n(E) \subseteq \varphi_n(\overline{\mathbb{R}}_+)$، من السابق نجد أن:

$f_n(E) \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+ \subseteq \mathbb{R}_+$ و$f_n(E)$ منتهية، إذن f_n هي دالة بسيطة موجبة.

• لنثبت أنّ المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب ببساطة نحو دالة f على E.

ليكن $x \in E$، لدينا: $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \varphi_n(f(x))$

بما أن $n \longrightarrow +\infty$، إذن: $0 \leq f(x) \leq n$

ومنه: $$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{E(10^n f(x))}{10^n} = f(x)$$

وبالتالي: $\forall x \in E; \lim f_n(x) = f(x)$ أي أن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب ببساطة نحو f على E.

• لنفرض وجود مجموعة جزئية غير خالية A من E ويوجد عدد حقيقي موجب M حيث: $\forall x \in A : f(x) \leq M$ عندئذ يمكننا إثبات أنّ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بإنتظام نحو الدالة f على A.

ليكن $x \in A$، إذن: $f(x) \leq M < E(x)+1$ نضع: $E(x)+1 = n_0 \in \mathbb{N}$ وليكن $n \in \mathbb{N}$، نلاحظ أنه إذا كان $n \leq n_0$ فإن: $|f_n(x) - f(x)| = |\varphi_n(f(x)) - f(x)|$ ومنه: $\left|\frac{E(10^n f(x))}{10^n} - f(x)\right|$ (لأن: $f(x) \in [0,n]$)، نجد: $f(x) - \frac{E(10^n f(x))}{10^n} < \frac{1}{10^n}$

ومنه: $\forall n \leq n_0; \forall x \in A; |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{10^n}$.

وعليه $$\forall n \leq n_0; \forall x \in A; \qquad \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{10^n}$$

بالمرور إلى النهاية في العلاقة الأخيرة لما $n \mapsto \infty$ نجد: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

وبالتالي المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بإنتظام نحو الدالة f على A.

IV) نفرض الأن أن $(E, \mathcal{A})$ فضاء قيوسا وf دالة قيوسة من E نحو $\overline{\mathbb{R}}$

• لنثبت أنّه توجد متتالية من الدوال البسيطة تتقارب ببساطة نحو الدالة f على E.

بما أن f هي دالة قيوسة من E نحو $\overline{\mathbb{R}}$، إذن f_+ وf_- حيث:

$$f_+ = \sup(f, 0)$$
$$f_- = \sup(-f, 0)$$

هما دالتان قيوستان من E نحو $\overline{\mathbb{R}}_+$ وبالتالي مما سبق نستنتج أنه توجد متتاليتان (g_n) و(h_n) متزايدتان من الدوال البسيطة الموجبة بحيث:

$$\left(E \text{ على}\right) \lim_{n\to+\infty} g_n = f_+ \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} h_n = f_-$$

لكل $n \in \mathbb{N}$، نضع: $g_n - h_n = \psi_n$ لدينا $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية من الدوال البسيطة، زيادة على ذلك إذا كان $x \in E$ فإن:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \psi_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (g_n(x) - h_n(x)) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) - \lim_{n\to+\infty} h_n(x) &= f_+(x) - f_-(x) \\
&= (f_+ - f_-)(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

وبالتالي $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب ببساطة نحو الدالة f على E.

الفصل 3

القياس الموجب

1.3 مقدمة

نعلم أن كل مجموعة غير خالية قابلة للعد تكون في تقابل مع $\mathbb{N}$ أو مع مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{N}$ وبالتالي يمكننا كتابة عناصرها على شكل متتالية ....a_0, a_1, a_2, a_3 وعندئذ نضع: $E = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ وبناء على هذا سنعتبر في هذا الفصل كل أسرة A غير خالية وقابلة للعد من المجموعات على الشكل $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أي متتالية مجموعات، عوض الترميز $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ الذي يبقى لأسرة كيفية مجموعة أدلتها I

تعريف 1.1.3 :
ليكن $(E, \mathcal{A})$ فضاءا قيوسا، نسمي قياس موجب على $(E, \mathcal{A})$ أو إختصارا على E، كل تطبيق μ معرف من $\mathcal{A}$ نحو $\overline{\mathbb{R}}_+$ يحقق:

$$\mu : \begin{cases} \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A \to \mu(A) \end{cases}$$

حيث أن:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- من أجل كل متتالية (أسرة قابلة للعد) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من المجموعات القيوسة لـ E المنفصلة مثنى مثنى ...$(*)$ يكون لدينا :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \textstyle\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) \; ...(**)$$ (خاصية الـ σ - جمعية)

ملاحظات

✓ $(*)$ تعني: $\forall n, p \in \mathbb{N}; n \neq p \Longrightarrow A_n \cap A_p = \emptyset$

✓ لدينا: $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k\geq 0}^{n} \mu(A_k) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$

✓ إذا كانت $A_1, A_2, A_3......A_n$ مجموعة قيوسة لـ E منفصلة مثنى مثنى

(يكفي أخذ في العبارة $(**)$ $A_k = \emptyset$ لما $k \geq n+1$) $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$

مثال

لدينا: $E = \mathbb{N}$ و $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$m_1 : \; \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$A \longmapsto m_1(A) = \begin{cases} Card\ \ A, & \text{منتهية } A \\ +\infty, & \text{غير منتهية } A \end{cases}$$

بحيث : $Card\ \ \emptyset = 0$

• لتكن $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ عائلة من $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى. لدينا حالتين:

1- إذا كانت: $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ منتهية. في هذه الحالة :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0 : A_n = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{منتهية أو خالية } A_n$$

إذن:

$$m_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = m_1\left(\bigcup_{p=0}^{n_0} A_p\right) = card\left(\bigcup_{p=0}^{n_0} A_p\right)$$
$$= \sum_{p=0}^{n_0} card\left(A_p\right) = \sum_{p=0}^{n_0} m_1\left(A_p\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} card\left(A_p\right)$$

2- إذا كانت: $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ غير منتهية، فهذه الحالة بدورها تتجزء إلى حالتين:

ا) يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث A_{n_0} غير منتهية وبالتالي:

$$+\infty \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} m_1\left(A_n\right) \geqslant m_1\left(A_{n_0}\right) = m_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = +\infty$$

ب) من أجل كل دليل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: A_n منتهية أو خالية.

بماأن: $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ غير منتهية إذن توجد عائلة مستخرجة $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

بحيث: $\forall k \in \mathbb{N} : A_{n_k} \neq \emptyset$

وبالتالي: $+\infty \geqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} m_1\left(A_n\right) \geqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} m_1\left(A_{n_k}\right) \geqslant +\infty$ لأنّ: $\forall k \in \mathbb{N} : m_1\left(A_{n_k}\right) \geqslant 1$

إذن: $$m_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = +\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} m_1\left(A_n\right)$$

ملاحظة

إذا وضعنا من كل جزء A غير منته $(A \subseteq \mathbb{N})$: $cardA = +\infty$ نجد:

$$card\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} cardA_n, \quad \left(i \neq j \quad \text{لما} \quad \emptyset = A_i \cap a_j\right)$$

تعريف 2.1.3 :
نسمي فضاءا مقاسا كل ثلاثية $(E, \mathcal{A}, \mu)$ حيث E مجموعة غير خالية، $\mathcal{A}$ عشيرة على E و μ قياس على $(E, \mathcal{A})$.
- إذا كانت $\mu(E) < +\infty$ فإننا نقول عن μ أنه قياس منته (أو محدود).
- إذا كانت $\mu(E) = 1$ فإننا نقول عن μ أنه قياس إحتمالي.
- إذا وجدت متتالية $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{A}$ بحيث: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$ و $\forall n \in \mathbb{N}; \mu(A_n) < +\infty$

فإننا نقول عن μ أنه قياس σ - منته.

مبرهنة 1.1.3 :
ليكن $(E, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءا مقاسا عندئذ يكون لدينا:
◁ $\forall A, B \in \mathcal{A}; A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
و إذا كان $\mu(A) < +\infty$ فإن: $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
◁ $\forall A, B \in \mathcal{A}; \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

الإثبات

1- لتكن $A, B \in \mathcal{A}$ حيث $A \subseteq B$:

$$B = A \cup (B - A)$$

و لدينا $A \cap (B - A) = \emptyset$ منه نجد:

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B - A)) = \mu(A) + \mu(B - A)$$

و بما أن: $\mu(B - A) \geq 0$ فإن: $\mu(B) \geq \mu(A)$
لدينا مما سبق: $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$
ومنه:

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$$

لأن: $\mu(A) < +\infty$
2- لتكن $A, B \in \mathcal{A}$ ، إذا كانت $\mu(A \cap B) = +\infty$ فإن: $\mu(A) = \mu(B) = +\infty$
أما إذا كانت $\mu(A \cap B) < +\infty$ فإن: $A \cup B = (A \backslash (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash (A \cap B))$
ومنه: $\mu(A \cup B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
نجد: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

مبرهنة 2.1.3 :
ليكن $(E, \mathcal{A})$ فضاءا قيوسا وμ تطبيق من $\mathcal{A}$ نحو $\overline{\mathbb{R}}_+$، يكون μ قياس على E إذا وفقط إذا حقق ما يلي:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\forall A, B \in \mathcal{A}; A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

3) من أجل كل متتالية كيفية $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{A}$ لدينا:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$$

4) من أجل كل متتالية متزايدة $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{A}$ فإن: $\forall n \in \mathbb{N}; (B_n) \subseteq (B_{n+1})$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$$

5) من أجل كل متتالية متناقصة $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{A}$ فإن: $\forall n \in \mathbb{N}; (B_{n+1}) \subseteq (B_n)$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$$

الإثبات

- إذا كان μ قياس على E فإن الشرطان 1) و2) محققان بداهة.

- $(3) \Longleftarrow$ لتكن $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{A}$ نعرف المتتالية $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بـ:

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*; A_n &= B_n - \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k\right) \end{aligned}$$

إذن لدينا:

- $\forall n \in \mathbb{N}; A_n \in \mathcal{A}$
- لدينا أيضا أن $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ منفصلة مثنى مثنى ... (1).
- كما لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{N}; A_n \subseteq B_n \quad \ldots \ (2)$$

- ولدينا:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \;\cdots\; (3)$$

من (1) و (2) و (3) نجد:

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

و منه:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n\geq 0}\mu(A_n) \\ &\leq \sum_{n\geq 0}\mu(B_n) \end{aligned}$$

هذه المتراجحة نتجت من (2).

- $(4) \Longleftrightarrow$ لتكن $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من المجموعات القيوسة لـ E، نضع:

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 \\ \forall n\in\mathbb{N}; A_n &= B_n\backslash B_{n-1} \end{aligned}$$

وليكن $n,p\in\mathbb{N}$ نفرض $n<p$ ($p\geq 1$ وإذا كان $p=0$ نفرض $p<n$) عندئذ نجد:

$$\begin{aligned} A_n\cap A_p &= (B_n\backslash B_{n-1})\cap B_p\backslash B_{p-1} \\ &= B_n\cap B_{p-1}^c, (B_{p-1}^c\subseteq B_n^c) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

ومنه $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ منفصلة مثنى مثنى، زيادة على ذلك من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا:

$$\forall k\in\{0,1,2,3,....,n\}; A_k\subseteq B_k \Longrightarrow \bigcup_{k=0}^{n} A_k\subseteq B_n$$

العكس ليكن $x\in B_n$، نميز حالتين إذا كان $x\notin B_{n-1}$ فإن: $x\in A_n\subseteq\bigcup_{k=0}^{n}A_k$

أما إذا كان $x\in B_{n-1}$ فنميز أيضا حالتين، إما: $x\in A_{n-1}\subseteq\bigcup_{k=0}^{n}A_k$

أو $x\notin B_{n-2}$ و هكذا نستمر في العملية إلى أن نصل إلى $x\in B_1$ و عندئذ إما: $x\notin B_0$ و منه $x\in A_1\subseteq\bigcup_{k=0}^{n}A_k$ أو $x\in A_0\subseteq\bigcup_{k=0}^{n}A_k$.

إذن: $B_n \subseteq \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$ و منه: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \Longrightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \forall n \in \mathbb{N}; B_n$

العكس إذا كان $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ فإنه: $\exists n \in \mathbb{N}; x \in A_{n_0} \subseteq B_{n_0} \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$

ومنه نجد: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ وبالتالي يكون لدينا يكون:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\\
&= \textstyle\sum_{n\geq 0} \mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n)\\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)
\end{aligned}$$

نفرض الآن μ تطبيق من A نحو $\bar{\mathbb{R}}_+$ يحقق الشروط (1)،(2)،(3) إنطلاقا من الشرط (2) وبالتراجع نستنتج أنه إذا كانت $A_0, A_1, A_2, A_3, ...; (n+1)A_n$ مجموعة قيوسة لـ E فإن:

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$$

لتكن $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر A منفصلة مثنى مثنى، نضع: $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$ عندئذ تكون $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من عناصر A وتحقق: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ومنه:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n)\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)\\
&= \sum_{n\geq 0} \mu\left(A_n\right)
\end{aligned}$$

إذن μ هو قياس على E.

- (4) تكافىء المبرهنة التالية:

ليكن $(E,\mathcal{A},\mu)$ فضاءا مقاساو $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من المجموعات القيوسة لـ E عندئذ يكون لدينا: $\sum_{n\geq 0}\mu\left(A_n\right)\leq\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)$، وإذا كانت $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة ووجد عدد طبيعي n_0 بحيث $\mu\left(A_n\right)<+\infty$ فإن:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(A_n)=\inf_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$$

إثبات المبرهنة:

أولا: نعرف متتالية $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بوضع: $B_0=A_0$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*, B_n=A_n\backslash\bigcap_{k=0}^{n-1}(A_k)$

واضح أنه: $\forall n\in\mathbb{N}, B_n\in\mathcal{A}$ ليكن $n,p\in\mathbb{N}$ بحيث: $n\neq p$.

نفرض أن: $n<p$ (و إذا كان $p=0$ نفرض $p<n$). إذن: $n\leq p-1$ ومنه:

$$\begin{aligned}A_n\subseteq\bigcup_{k=0}^{p-1}(A_k)&\Longrightarrow\left(\bigcup_{k=0}^{p-1}(A_k)\right)^c\subseteq A_n^c\\&\Longrightarrow A_n\bigcap\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}(A_k)\right)^c\bigcap A_p\bigcap\left(\bigcup_{k=0}^{p-1}(A_k)\right)^c\\&\subseteq A_n^c\bigcap A_n\bigcap\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}(A_k)\right)^c\bigcap A_p\end{aligned}$$

إذن: $B_n\cap B_p=\emptyset$ ومنه: $\forall n,p\in\mathbb{N}; n\neq p\Longrightarrow B_n\cap B_p=\emptyset$

إذن حدود المتتالية $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ منفصلة مثنى مثنى.

حيث:

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n$ بديهي.

العكس:

$$\forall n_0\in\mathbb{N}; x\in A_{n_0}, N=\{k\in\{0,1,2,...,n\}, x\in A_k\}\neq\emptyset$$

حيث: $(n_0\in N),\min N=k_0, k=0, k\geq 1$

ومنه نستنتج أن: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n$ ومنه نجد:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)=\sum_{n\geq 0}\mu(B_n)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n}\mu(B_k)\leq\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n}\mu(A_k)$$

إذن: $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0}\mu(A_n)$

ثانيا: نعرف المتتالية $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بوضع: $\forall n \geq n_0; B_n = A_{n_0}\backslash A_n$ وواضح أن: $\forall n \geq n_0; B_n \in \mathcal{A}$، ليكن $n \in \mathbb{N}$، لدينا: $A_{n+1} \subseteq A_n$ ومن: $A_{n_0}\backslash A_n \subseteq A_{n_0}\backslash A_{n+1}$ أي: $B_n \subseteq B_{n+1}$

إذن: $(B_n)_{n\in\geq n_0}$ متزايدة و لدينا: $B_n = A_{n_0}\backslash\left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right)$ و بما أن: $\bigcap_{n\geq n_0} A_n \subseteq A_{n_0}$ إذن:

$\mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right) < +\infty$ ومنه نجد: $\mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} B_n\right) = \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n\in\geq n_0} A_n\right)$

إذن: $\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(B_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right)$

و بما أن: $\forall n \geq n_0; A_n \subseteq A_{n_0}$ إذن : $\forall n \geq n_0; \mu(A_n) < +\infty$ ومنه نجد:

$$\mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(A_n)$$

إذن: $\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\right)$ لكن $\bigcap_{n\geq 0} A_n = \bigcap_{n\geq n_0} A_n$ و $\mu(A_n)$ هي متتالية متناقصة، إذن :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$$

ملاحظة :

في البراهين السابقة النهايتان $\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(B_n)$ و $\lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(A_n)$ موجودتان في $\overline{\mathbb{R}}_+$ لأن المتتالية $\mu(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة فهي متقاربة في $\overline{\mathbb{R}}_+$.
والمتتالية $\mu(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة فهي متقاربة في $\overline{\mathbb{R}}_+$.

تعريف 3.1.3 :

ليكن $(E, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءا مقاسا، $(F, \mathcal{B})$ فضاءا قيوسا و f تطبيق قيوس من E نحو F، نعرف تطبيق m من $\mathcal{B}$ نحو $\overline{\mathbb{R}}_+$ بـ:

$$\forall A \in \mathcal{B}; m(A) = \mu[f^{-1}(A)]$$

إن m هو قياس موجب على $(F, \mathcal{B})$، يسمى بقياس صورة μ بواسطة f و نرمز له بالرمز μ_f أي: $m = \mu_f$

تعريف 4.1.3 :
ليكن $(E,\mathcal{A},\mu)$ فضاءا مقاسا، $\Omega\in\mathcal{A}\backslash\{\emptyset\}$، إن إقتصار μ على $\mathcal{A}_\Omega$ يعرف قياس موجب على $(\Omega,\mathcal{A}_\Omega)$ يسمى بالقياس الموجب المستنتج (أو قياس الأثر) على Ω بواسطة μ ونرمز له بالرمز μ_Ω
(أي : $\mu_\Omega=\mu_{/\mathcal{A}_\Omega}$).

تعريف 5.1.3 :
ليكن (E,τ) فضاءا طوبولوجيا نسمي قياس Boréliènne على E كل قياس موجب على $(E,\sigma(\tau))$ يحقق:

$$\forall K\in\sigma(\tau);\ \text{متراصة } K\Longrightarrow\mu(K)<+\infty$$

تعريف 6.1.3 :
ليكن $(E,\mathcal{A},\mu)$ فضاءا مقاسا.
◃ نقول عن المجموعة $A\subseteq E$ أنها مهملة بالنسبة للقياس μ إذا وفقط إذا وجدت قيوسة B تحقق:

$$A\subseteq B\wedge\mu(B)=0$$

◃ إذا كانت كل مجموعة مهملة بالنسبة للقياس μ، نقول أن الفضاء المقاس $(E,\mathcal{A},\mu)$ هو فضاء تام، أو أن القياس μ قياس تام إختصارا.

2.3 قياس Borel-Lebsegue

نظرية 1.2.3 :
يوجد قياس موجب وحيد يرمز له بالرمز λ على $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})$ قياس Borel-Lebsegue أو (قياس بورال) يحقق:

$$\forall a,b\in\mathbb{R};a\leq b;\lambda(]a,b[)=b-a$$

الإثبات :
إن إثبات هذه الخاصية صعب لذلك سنقبل بها دون عرض إثباتها، ولكن من المعلوم أن كل مجموعة مفتوحة O تكتب بشكل إجتماع متتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من المجالات المفتوحة المنفصلة مثنى مثنى، التي يمكن أن يكون بعضها خاليا، وعندئذ يكون لدينا $\lambda(O)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\lambda(I_n)$ كما يمكن الإستفادة من كون قياس لوبيغ قياسا نظاميا لحساب قياس أي مجموعة بوريلية، إذ تنص على أنه في حالة A من $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ لدينا:

$$\lambda(A) = \inf\left\{\lambda(O) : \text{A مجموعة مفتوحة تحوي O}\right\}$$
$$= \sup\left\{\lambda(K) : \text{A مجموعة متراصة محتواة في K}\right\}$$

نظرية2.2.3 :
يوجد قياس موجب وحيد يرمز له بالرمز λ_n على $\mathbb{R}_n$، $\mathcal{B}(\mathbb{R}_n)$ قياس بوريل على $\mathbb{R}_n$ يحقق:
مهما كان $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ و $\{b_0, b_1, ...b_n\}$ من $\mathbb{R}$ و $a_k \leq b_n; \forall k\bar{1,n}$ نجد:

$$\lambda_n(\prod_{k=1}^{n}]a_k, b_k]) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$$

خواص قياس بورال :

1- لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}; \lambda(\{x\}) = 0$ وإذا كانت D مجموعة جزئية قابلة للعد من $\mathbb{R}$ فإن: $\lambda(D) = 0$ (بالخصوص فإن: $\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$).

2- إن قياس B_L لمجال من $\mathbb{R}$ يساوي طوله.

3- قياس B_L لـ $\mathbb{R}$ هو قياس موجب σ - منته لكنه غير منته.

4- كل مجموعة بوريلية لـ $\mathbb{R}$ محدودة ذات قياس بورال منته أما العكس فهو غير صحيح في الحالة العامة.

5- كل مجموعة مفتوحة لـ $\mathbb{R}$ غير خالية ذات قياس بورال موجب تماما.

6- إن قياس بورال على $\mathbb{R}$ صامد بالنسبة للإنسحاب وكذلك بالنسبة للتناظر المركزي بمعنى :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \forall \alpha \in \mathbb{R}; \lambda(B + \alpha) = \lambda(B) = \lambda(-B)$$

3.3 تميم فضاء مقاس

المجموعات المهملة بالنسبة لقياس :

تعريف1.3.3 :
ليكن: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءا مقاسا و$N \subseteq \Omega$، نقول عن N أنها مجموعة μ - مهملة.
(ونقرأ N مهملة بالنسبة للقياس μ) أو N هي مجموعة مهملة إختصارا.
إذا وفقط إذا كان:

$$\forall A \in \mathcal{A}; \mu(A) = 0, N \subseteq \Omega$$

تعريف2.3.3 :
ليكن: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءا مقاسا، نقول عن μ أنه قياس تام إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall A \in \mathcal{A}, \forall N \in \mathcal{P}(\Omega), N \subseteq \Omega, \mu(A) = 0 \Longrightarrow N \in \mathcal{A}$$

ملاحظة :

إن قياس بورال غير تام على $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (مجموعة Cantor والتي يرمز لها بـ $\mathring{K}_3$). هي مجموعة جزئية من $[0,1]$ متراصة، غير منتهية، غير قابلة للعد، (متساوية القدرة مع $\mathbb{R}$، $\mathring{K}_3=\emptyset$، $\lambda(K_3)=0$ وهي تحتوي على مجموعات ليست بوريلية وبالتالي فهي مجموعات λ - مهملة).

تعريف 3.3.3 :
ليكن: $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ فضاءا مقاسا، نرمز بـ $\mathcal{N}$ لأسرة المجموعات μ - مهملة.
لتكن $D\in\mathcal{P}(\Omega)$، نقول عن D أنها مجموعة μ - قيوسة (ونقرأ D هي مجموعة قيوسة بالنسبة لـ μ) إذا وفقط إذا كان:

$$\forall D\in\mathcal{A},\exists N\in\mathcal{N},D=B\cup N$$

توطئة 1.3.3 :
لتكن $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathcal{N}$ (أسرة المجموعات المهملة بالنسبة لـ μ) عندئذ $\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} N_p\in\mathcal{N}$ مجموعة مهملة.

الإثبات :

-لتكن $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathcal{N}$ حيث: $\forall n\in\mathcal{N},\exists N_p\in\mathcal{N};\mu(A_p),N_p\subseteq A_p$
وبالتالي: $\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} N_p\subseteq\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} A_p$ إذن: $\mu\left(\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} N_p\right)\leq\sum\limits_{p\in\mathbb{N}}\mu(N_p)\Longrightarrow\mu\left(\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} N_p\right)=0$

نظرية 1.3.3 :
ليكن: $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ فضاءا مقاسا، نرمز بـ $\mathcal{A}_\mu$ لأسرة المجموعات μ - قيوسة عندئذ يكون لدينا:
1- $\mathcal{A}_\mu$ هي عشيرة على Ω تحوي كل من $\mathcal{A}$ و $\mathcal{N}$.
2- التطبيق m المعرف على $\mathcal{A}_\mu$ بـ : $\forall D\in\mathcal{A}_\mu;D=B\cup N;B\in\mathcal{A},N\in\mathcal{N};m(D)=\mu(B)$ هو قياس موجب على $(\Omega,\mathcal{A}_\mu)$.
3- $m_{/\mathcal{A}}=\mu$.
4- الفضاء المقاس $(\Omega,\mathcal{A}_\mu,m)$ تام.

الإثبات :

1- لدينا: $\emptyset=\emptyset\cup\emptyset$, $\emptyset\in\mathcal{N}$, $\emptyset\in\mathcal{A}$, إذن: $\emptyset\in\mathcal{A}_\mu$.
لتكن $(D_p)_{p\in\mathcal{N}}$ متتالية من عناصر $\mathcal{A}_\mu$، إذن:

$$\forall p\in\mathbb{N};\exists B_p\in\mathcal{A};\exists N_p\in\mathcal{N};D_p=B_p\cup N_p$$

ومنه: $\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} D_p=\left(\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} B_p\right)\bigcup\left(\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} N_p\right)$

لدينا: $\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} B_p \in \mathcal{A}$ و من التوطئة نستنتج أن: $\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} N_p \in \mathbb{N}$

ومن: $\bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} D_p \in \mathcal{A}_\mu$

- لتكن الآن $D \in \mathcal{A}_\mu$، إذن: $\exists B \in \mathcal{A}; \exists N \in \mathcal{N}; D = B \cup N$

ومنه: $\exists B \in \mathcal{A}; \exists A \in \mathcal{N}; \mu(A) = 0; N \subseteq A; D = B \cup N$

لدينا:

$$\begin{aligned} D^c &= (B \cup N)^c = B^c \cap N^c \cap (A^c \cup A) \\ &= (B \cup A)^c \cup (B^c \cap N^c \cap A) \end{aligned}$$

بما أن: $(B \cup A)^c \in \mathcal{A}$، كما أن: $B^c \cap N^c \cap A \subseteq A \Longrightarrow B^c \cap N^c \cap \mathcal{N}$

ومنه: $\mathcal{D}^c \in \mathcal{A}_\mu$.

- لتكن $A \in \mathcal{A}$، لدينا: $A = A \cup \emptyset$، $\emptyset \in \mathcal{N}$ إذن: $A \in \mathcal{A}_\mu$، ومنه: $b \subseteq \mathcal{A}_\mu$ كما أنه من أجل $N \in \mathcal{N}$، لدينا: $N = \emptyset \cup N$ حيث $\emptyset \in \mathcal{A}$ ومنه $N \subseteq \mathcal{A}_\mu$ إذن: $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}_\mu$.

2- نبين أولا أن التطبيق m معرف جيدا: لكن $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{A}_\mu$

ومنه: $\exists B_1, B_2 \in \mathcal{A}; \exists N_1, N_2 \in \mathcal{N}; \mathcal{D}_1 = B_1 \cup N_1, \mathcal{D}_2 = B_2 \cup N_2$

إذا كان: $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ فإن: $B_1 \cup N_1 = B_2 \cup N_2$.

بما أن $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ إذن:

$$\exists A_1, A_2 \in \mathcal{A}; \mu(A_1) = \mu(A_2) = 0 \wedge \begin{cases} N_1 \subseteq A_1 \\ N_2 \subseteq A_2 \end{cases}$$

ومنه:

$$\exists A_1, A_2 \in \mathcal{A}; \mu(A_1) = \mu(A_2) = 0 \wedge \begin{cases} B_1 \cup N_1 \subseteq B_1 \cup A_1 \\ B_2 \cup N_2 \subseteq B_2 \cup A_2 \end{cases}$$

إذن:

$$\begin{cases} \mu(B_1) \leq \mu(B_2 \cup A_2) \\ \wedge \\ \mu(B_2) \leq \mu(B_1 \cup A_1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_1 \subseteq B_2 \cup A_2 \\ \wedge \\ B_2 \subseteq B_1 \cup A_1 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} \mu(B_1) \leq \mu(B_2) + \mu(A_2) \\ \wedge \\ \mu(B_2) \leq \mu(B_1) + \mu(A_1) \end{cases}$$

وبالتالي يكون: $\mu(B_1) \leq \mu(B_2) \leq \mu(B_1)$

أي أن: $\mu(B_1) = \mu(B_2)$ إذن: $m(D_1) = m(D_2)$ وبالتالي التطبيق m معرف جيدا نثبت أنه قياس موجب على $(\Omega, \mathcal{A}_\mu)$.

لدينا: $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \Longrightarrow m(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

لتكن $(D_p)_{p\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathcal{A}_\mu$ منفصلة مثنى مثنى، إذن توجد متتاليتان $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ و $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{N}$ على الترتيب بحيث: $\forall p \in \mathbb{N}; D_p = B_p \cup N_p$

ليكن $p, q \in \mathbb{N}$ بحيث $p \neq q$، إذن: $B_p \cup B_q = \emptyset$ ومنه $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ هي متتالية من عناصر $\mathcal{A}$ منفصلة مثنى مثنى.

لدينا:

$$m\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_p\right) = \mu\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} B_p\right) = \sum_{p\geq 0} \mu(B_p) = \sum_{p\geq 0} m(D_p)$$

ومنه m هو قياس موجب على $(\Omega, \mathcal{A}_\mu)$.

3- لتكن $A \in \mathcal{A}$، لدينا: $\emptyset \in \mathcal{N}$; $\quad A = A \cup \emptyset$

ومنه: $m(A) = \mu(A)$ وبالتالي: $\forall A \in \mathcal{A}; m(A) = \mu(A)$ ، أي أن: $m_{/\mathcal{A}} = \mu$.

4- لتكن $M \in \mathcal{P}(\Omega)$ ، نفرض أن M مجموعة m - مهملة. إذن: $D \in \mathcal{A}_\mu; m(D) = 0, M \subseteq D$

لدينا: $D \in \mathcal{A}_\mu$ إذن: $\exists B \in \mathcal{A}; \exists N \in \mathcal{N}, D = B \cup N$

و منه: $\exists B \in \mathcal{A}; \exists N \in \mathcal{N}, \mu(B) = 0, M \subseteq B \cup N$

إذن: $\exists B \in \mathcal{A}; \exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0, \mu(B) = 0, N \subseteq A, M \subseteq B \cup N$

و منه: $M \subseteq B \cup N \subseteq B \cup A$، لدينا: $B \cup A \in \mathcal{A}$، كما أن: $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ أي أن: $\mu(A \cup B) = 0$ ومنه: $M \in \mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}_\mu$ إذن: $M \in \mathcal{A}_\mu$.

مبرهنة1.3.3 :
ليكن $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ فضاء مقاسا و$(E,\mathcal{B})$ فضاء قيوسا، f و g تطبيقان من Ω نحو E حيث g هي μ - قيوس من $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ نحو $(E,\mathcal{B})$، نسمي $N=\{x\in\Omega: f(x)\neq g(x)\}$ عندئذ إذا كانت N مجموعة μ - مهملة فإن f μ - قيوس من $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ نحو $(E,\mathcal{B})$.

الإثبات :

لتكن $B\in\mathcal{B}$، لدينا:

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) = f^{-1}(B)\cap\Omega &= f^{-1}(B)\cap(N^c\cup N)\\ &=\left(f^{-1}(B)\cap N^c\right)\cup\left(f^{-1}(B)\cap N\right)\\ &=\left(g^{-1}(B)\cap N^c\right)\cup\left(f^{-1}(B)\cap N\right)\end{aligned}$$

لدينا: $g^{-1}(B)\in\mathcal{A}_\mu, N\in\mathcal{A}_\mu$ إذن: $g^{-1}(B)\cap N^c\in\mathcal{A}_\mu \quad ...(1)$

كما أنه: $f^{-1}(B)\cap N\subseteq N$ إذن: $f^{-1}(B)\cap N$ هي مجموعة μ - مهملة.

ومنه: $f^{-1}(B)\cap N\in\mathcal{A}_\mu \quad ...(2)$

من (1) و(2) نستنتج أن $f^{-1}(B)\in\mathcal{A}_\mu$ إذن f هي أيضا تطبيق μ - قيوس.

ملاحظة :

يسمى الفضاء المقاس $(\Omega,\mathcal{A}_\mu,m)$ بمتمم الفضاء المقاس $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.

تعريف4.3.3 :
نرمز لمتمم الفضاء المقاس $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda_L)$ (حيث λ هو قياس بورال بالرمز: $(\mathbb{R},L(\mathbb{R}),\lambda_L)$) حيث: $L(\mathbb{R})$ هي عشيرة المجموعات القيوسة بالنسبة لقياس بورال وتسمى عناصر $L(\mathbb{R})$ بالمجموعات Lebesguien حيث $(L(\mathbb{R})\subseteq P(\mathbb{R}))$.
وتسمى λ_L (والذي يرمز له أيضا بـ λ) بقياس Lebesegue على $(\mathbb{R},L(\mathbb{R}))$.

مبرهنة2.3.3 :
لدينا: $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subseteq L(\mathbb{R})\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$

مبرهنة3.3.3 :
إن $L(\mathbb{R})$ متساوية القدرة مع $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

الإثبات :

بما أن مجموعة $Cantor$ K_3 متساوية القدرة مع $\mathbb{R}$، إذن:

$$Card(\mathcal{P}(K_3))=2^{Card(k_3)}=2^{Card(\mathbb{R})}=Card(\mathcal{P}(K_3))$$

لكن لدينا: $\mathcal{P}(K_3)\subset\mathcal{L}(\mathbb{R})\subset\mathcal{P}(\mathbb{R})$

إذن: $Card(\mathcal{L}(\mathbb{R})) = (\mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

تعريف 5.3.3 :

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءا مقاسا، $(E, \mathcal{B})$ فضاءا قيوسا وf تطبيق من Ω نحو، نقول عن f أنه تطبيق μ - قيوس إذا وفقط إذا كان: $\forall A \in \mathcal{B}; f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_\mu$

(حيث $\mathcal{A}_\mu$ هي عشيرة المجموعات μ - قيوسة).

-ينتج مباشرة من التعريف أن كل تطبيق قيوس هو تطبيق μ - قيوس، (من كون $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$) أما العكس فهو غير صحيح في الحالة العامة إذا كان μ تام (لأنه عندئذ يكون: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu$).

الفصل 4

القياس الخارجي

1.4 القياس الخارجي

تعريف 1.1.4 :
لتكن Ω مجموعة ليست خالية، نسمي قياس خارجي على Ω كل تطبيق μ^* من $\rho(\Omega)$ نحو $\overline{\mathbb{R}}_+$ يحقق:

✓ $\mu^*(\emptyset) = 0$

✓ $\forall A, B \in \rho(\Omega); A \subseteq B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

✓ $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \rho(\Omega); \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu^*(A_n)$

أمثلة

- كل قياس موجب على $(\Omega, p(\Omega))$ هو قياس خارجي موجب.
-

$$m^* : \ \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$A \longmapsto m^*(A) = \begin{cases} +\infty, & A \text{ منتهية} \\ \sum_{n\in A} \frac{1}{n}, & A \text{ غير منتهية} \end{cases}$$

m^* ليس قياس خارجي لأن: $m^*\left(\bigcup_n \{2^n\}\right) = +\infty$ و $\sum_{n\in A} \frac{1}{2^n} < +\infty$

مبرهنة 1.1.4 :
ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءا مقاسا، نعرف التطبيق μ^* على $\rho(\Omega)$ بوضع:

$$\forall B \in \rho(\Omega); \mu^*(B) = \inf\{\mu(A); A \in \mathcal{A}; B \subseteq A\}$$

عندئذ يكون لدينا:

✓ μ^* هو قياس خارجي على Ω .

✓ $\mu^*/\mathcal{A} = \mu$.

الإثبات

1- لدينا: $\mu^*(\emptyset) = \inf\{\mu(A); A \in \mathcal{A}; \emptyset \subseteq A\}$، بما أن: $\emptyset \in \mathcal{A}; \emptyset \subseteq \emptyset$

إذا: $\mu^*(\emptyset) \in \{\mu(A); A \in \mathcal{A}; \emptyset \subseteq A\}$ ومنه: $0 \leq \mu^*(\emptyset) \leq \mu(\emptyset)$

إذن: $\mu^*(\emptyset) = 0$

لتكن $B, C \in P(\Omega)$ بحيث: $B \subseteq C$ وليكن $x \in \{\mu(A), A \in \mathcal{A}; C \subseteq A\}$.

إذن: $\forall A_1; C \subseteq A_1; x = \mu(A_1)$

ومنه: $\exists A_1 \in \mathcal{A}; B \subseteq A_1$
أي أن: $x \in \{\mu(A); A \in \mathcal{A}, B \subseteq A\}$ ومنه:

$$\{\mu(A); A \in \mathcal{A}; C \subseteq A\} \subseteq \{\mu(A); A \in \mathcal{A}; B \subseteq A\} \Longrightarrow \mu^*(B) \leq \mu^*(C)$$

2- لتكن $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $P(\Omega)$، إذا وجد عدد طبيعي n_0 بحيث: $B_{n_0} = +\infty$ فإن: $\sum_{n\geq 0} \mu^*(B_n) = +\infty$ ومنه: $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu^*(B_n)$.

نفرض أنه: $\forall n \in \mathbb{N}; \mu^*(B_n) < +\infty$ وليكن $\epsilon > 0$.
لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}; \mu^*(B_n) = \inf\{\mu(A); A \in \mathcal{A}; B_n \subseteq A\}$
إذن: $\forall n \in \mathbb{N}; \exists A_n \in \mathcal{A}; B_n \subseteq A_n; \mu(A_n) < \mu^*(B_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. بما أن: $\forall n \in \mathbb{N}; B_n \subseteq A_n$، إذن: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ وبما أن: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ إذن: $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$ ومنه:

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k) \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu^*(B_k) + \epsilon \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}$$

إذن: $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu^*(B_n) + \epsilon$ وبما أن ϵ كيفي، إذن:

$$\forall \epsilon > 0; \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu^*(B_n) + \epsilon \Longrightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu^*(B_n)$$

3-لتكن $B \in \mathcal{A}$، لدينا $B \subseteq \mathcal{B}$، إذن: $\mu(B) \in \{\mu(A); A \in \mathcal{A}; B \subseteq A\}$ ومنه:

$$\mu^*(B) \leq \mu(B) \quad ...(1)$$

هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا: $A \in \mathcal{A}; B \subseteq A \Longrightarrow \mu(B) \leq \mu(A)$ إذن $\mu(B)$ حاد من الأسفل لـ $\{\mu(A); A \in \mathcal{A}; B \subseteq A\}$ ومنه: $\mu(B) \leq \mu^*(B) \quad ...(2)$ من (1) و(2) نستنتج أن: $\mu(B) = \mu^*(B)$ بما أن B كيفية من $\mathcal{A}$ إذن: $\forall B \in \mathcal{A}; \mu^*(B) = \mu(B)$ أي أن: $\mu_{/\mathcal{A}} = \mu$.

مبرهنة 2.1.4 :
ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضاءا مقاسا، μ^* القياس الخارجي المعرف في المبرهنة (1.1.4) عندئذ يكون لدينا:

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \forall A \in \mathcal{A}; \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$$

البرهان

لتكن $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ و $A \in \mathcal{A}$، لدينا:

$$(B \cap A) \cup (B \cap A^c) \Longrightarrow \mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \qquad ...(1)$$

العكس، لتكن $C \in \mathcal{A}$ بحيث $B \subseteq C$ عندئذ يكون:

$$B\cap A\subseteq C\cap A\wedge B\cap A^c\subseteq C\cap A^c\Longrightarrow\begin{cases}\mu^*(B\cap A)\le\mu(C\cap A)\\ \mu^*(B\cap A^c)\Longrightarrow\mu(C\cap A^c)\end{cases}$$

لكن C كيفية من $\mathcal{A}$ بحيث $B\subseteq C$، إذن:

$$\begin{aligned}\forall C\in\mathcal{A}; B\subseteq C &\Longrightarrow \mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\cap A^c)\le\mu(c)\\ &\Longrightarrow \mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\cap A^c)\\ &\le \mu^*(B)...(2)\end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\mu^*(B)=\mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\cap A^c)$

تعريف 2.1.4 :
لتكن Ω مجموعة ليست خالية، μ^* قياس خارجي على Ω و $A\in\mathcal{P}(\Omega)$.
نقول عن A أنها μ^* - قيوسة (أو أن A قيوسة بمفهوم Carathéodory) إذا وفقط إذا كان:

$$\forall B\in\mathcal{P}(\Omega); \mu^*(B)=\mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\cap A^c)$$

نرمز بـ $\mathcal{A}$ لأسرة المجموعات μ^* - قيوسة (واضح أن $\mathcal{A}\neq\emptyset$ لأن : $\emptyset\in\mathcal{A}$)

مثال :

- إذا كانت A مجموعة m^* قيوسة فإن: $m^*(\mathbb{R})=m^*(A)+m^*(A^c)$ إذن:

$A^c\cap\mathbb{Q}=\emptyset$ أو $A\cap\mathbb{Q}=\emptyset$

أي :

$\mathbb{Q}\subseteq A$ أو $\mathbb{Q}\subseteq A^c$

نظرية 1.1.4 :
لتكن Ω مجموعة غير خالية، μ^* قياس خارجي على Ω و $\mathcal{A}$ أسرة المجموعات μ^* - قيوسة، عندئذ يكون لدينا:

1- لتكن $\mathcal{A}$ هي عشيرة على Ω.

2- إقتصار μ^* على $\mathcal{A}$ هو قياس موجب على $(\Omega,\mathcal{A})$.

3- الفضاء المقاس $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ تام حيث $\mu=\mu^*/\mathcal{A}$.

البرهان :

1- لتكن $B\in\mathcal{P}(\Omega)$، لدينا:

$$\mu^*(B)=0+\mu^*(B\cap\Omega)=\mu^*(B\cap\emptyset)+\mu^*(B\cap\emptyset^c)$$

ومنه $\emptyset \in \mathcal{A}$

لتكن $A \in \mathcal{A}$ و $B \in \mathcal{P}(\Omega)$، لدينا:

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) = \mu^*(B \cap A^c) + \mu^*(B \cap (A^c)^c)$$

إذن: $A^c \in \mathcal{A}$.

- نفرض الآن $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ و $B \in \mathcal{P}(\Omega)$، نضع: $\lambda = (B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)^c)$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) &= (B \cap A_1) \cup [(B \cap A_2 \cap A_1) \cup (B \cap A_2 \cap A_1^c)] \cup (A_1 \cup A_2)^c) \\
&\Longrightarrow \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2) \cup (B \cap (A_1 \cup A_2)^c)) \\
&\Longrightarrow \mu^*(B) \leq \lambda ...(*)
\end{aligned}$$

هذا من جهة، و لدينا من جهة أخرى:

$$\begin{aligned}
B \cap (A_1 \cup A_2) &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \\
&= (B \cap A_1) \cup [(B \cap A_2 \cap A_1) \cup (B \cap A_2 \cap A_1^c)] \\
&= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2 \cap A_1^c)
\end{aligned}$$

ومنه يكون: $\mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2) \leq \mu^*(B \cap (A_1) + \mu^*(B \cap (A_1^c \cup A_2)$

وبالتالي نجد: $\lambda \leq \mu^*(B \cap (A_1) + \mu^*(B \cap (A_1^c \cup A_2) + \mu^*(B \cap (A_1^c \cup A_2^c)$

إذن: $\lambda \leq \mu^*(B \cap (A_1) + \mu^*(B \cap (A_1^c)$ (لأن: $A_2 \in \mathcal{A}$).

من (1) و (2) نستنتج أن: $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)^c)$

إذن: $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

وإذا كانت $A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n(n+1)$ مجموعة μ^* - قيوسة فإنه عن طريق التراجع نستنتج أن: $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathcal{A}$

◁ قبل أن نكمل البرهان، نثبت أولا العلاقة التالية:

إذا كانت $A_0, A_1, A_2, A_3, ..., A_n(n+1)$ مجموعة μ^* - قيوسة منفصلة مثنى مثنى فإن:

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega); \mu^*\left(B \bigcap \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(B \cap A_k) \qquad ...(*)$$

نثبت هذه العلاقة بالتراجع، أي نثبت:

$$\forall p\in\{0,1,2,3,...,n\};\forall B\in\mathcal{P}(\Omega);\mu^*\left(B\bigcap\left(\bigcup_{k=0}^{p}A_k\right)\right)=\sum_{k=0}^{p}\mu^*(B\cap A_k)\qquad ...(**)$$

العلاقة $(**)$ محققة بداهة من أجل $p=0$، نفرض صحتها حتى رتبة p حيث: $0\leq p<n$ عندئذ من أجل $B\in\mathcal{P}(\Omega)$ نجد:

$$\begin{aligned}\mu^*\left(B\bigcap\left(\bigcup_{k=0}^{p+1}A_k\right)\right)&=\mu^*\left(B\bigcap\left(\bigcup_{k=0}^{p+1}A_k\right)\bigcap A_{p+1}\right)+\mu^*\left(B\bigcap\left(\bigcup_{k=0}^{p+1}A_k\right)\bigcap A_{p+1}^c\right)\\&=\mu^*\left(B\bigcap A_{p+1}\right)+\mu^*\left(B\bigcap\left(\bigcup_{k=0}^{p}A_k\right)\right)\\&=\mu^*\left(B\bigcap A_{p+1}\right)+\sum_{k=0}^{p}\mu^*\left(B\bigcap A_k\right)\\&=\sum_{k=0}^{p+1}\mu^*\left(B\bigcap A_k\right)\end{aligned}$$

وبالتالي نكون قد أثبتنا العلاقة $(*)$ لتكن الآن $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathcal{A}$ منفصلة مثنى مثنى، نضع: $\forall n\in\mathbb{N};\mathcal{D}_n=\bigcup_{k=0}^{n}A_k;A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}_n$

لدينا مما سبق: $\forall n\in\mathbb{N};\mathcal{D}_n\in\mathcal{A}$

ومنه إذا كان $n\in\mathbb{N}$ و$\mathcal{B}\in\mathcal{P}(\Omega)$

فإن: $\mu^*(B\cap\mathcal{D}_n)+\mu^*(B\cap\mathcal{D}_n^c)=\mu^*(B)\quad ...(***)$

ومنه حسب العلاقة $(*)$ نجد: $(***)\Longleftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\mu^*(B\cap A_k)+\mu^*(B\cap\mathcal{D}_n^c)=\mu^*(B)$

وبما أن $\mathcal{D}_n\subseteq A$، إذن: $A^c\subseteq\mathcal{D}_n^c\Longrightarrow B\cap\mathcal{D}_n^c\subseteq B\subseteq\mathcal{D}_n^c\Longrightarrow\mu^*(B\cap A^c)\leq\mu^*(B\cap\mathcal{D}_n^c)$

ومنه نجد: $\sum_{k=0}^{n}\mu^*(B\cap A_k)+\sum_{k=0}^{n}\mu^*(B\cap A^c)\leq\mu^*(B)$

بما أن n كيفي من $\mathbb{N}$، إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\sum_{k=0}^{n}\mu^*(B\cap A_k)+\mu^*(B\cap A^c)\leq\mu^*(B)$

بالمرور إلى النهاية في المتراجحة الأخيرة نجد:

$$\sum_{n\geq0}\mu^*(B\cap A_n)+\mu^*(B\cap A^c)\leq\mu^*(B)\qquad ...(****)$$

$$\mu^*(B\cap A_n)+\mu^*(B\cap A^c) = \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B\cap A_n\right)+\mu^*(B\cap A^c)$$

$$\sum_{n\geq 0}\mu^*(B\cap A_n)+\mu^*(B\cap A^c) \Longrightarrow \mu^*(B\cap A_n)+\mu^*(B\cap A^c)\leq \mu^*(B) \qquad ...(5)$$

$$\Longrightarrow \mu^*(B)=\mu^*(B\cap(A\cup A^c))$$

$$=\mu^*((B\cap A)\cup(B\cup A^c))$$

$$\mu^*(B)\leq \mu^*((B\cap A)+\mu^*(B\cup A^c)) \qquad ...(6)$$

من (5) و (6) نستنتج أن:

$$\forall B\in\mathcal{P}(\Omega);\mu^*(B)=\mu^*\left(B\bigcap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\right)+\mu^*\left(B\bigcap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)^c\right)$$

ومنه: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\in\mathcal{A}$.

✓ نفرض الآن $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathcal{A}_{n-1}$، نعرف متتالية $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بوضع: $B_0=A_0;\forall n\in\mathbb{N};B_n=A_n\backslash\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}A_k\right)$، لدينا مما سبق من إثبات المبرهنة رقم 2.1.4 وجدنا من جهة المجموعات $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ منفصلة مثنى مثنى ومنه: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\in\mathcal{A}$.

من جهة أخرى: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

ومنه: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\in\mathcal{A}$

بالتالي نستنتج أن $\mathcal{A}$ هي عشيرة على Ω.

- نضع: $\mu^*/\mathcal{A}=\mu$ ولتكن $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathcal{A}$ منفصلة مثنى مثنى لدينا:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\leq\sum\nolimits_{n\geq 0}\mu^*(A_n)$$

ومنه: $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\leq\sum\nolimits_{n\geq 0}\mu^*(A_n) \qquad ...(1)$ هذا من جهة ومن جهة أخرى العودة إلى العلاقة $(***)$ وأخذ: $B=\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)$ نجد: $\sum_{n\geq 0}\mu^*(A_n)\leq\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)$

أي أن: $\sum_{n\geq 0}\mu(A_n)\leq\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right) \qquad ...(2)$

من (1) و(2) نستنتج أن μ هو قياس موجب على $(\Omega,\mathcal{A})$.

- لتكن $N\in\mathcal{P}(\Omega)$، نفرض أن N هي مجموعة μ -، إذن: $\exists A\in\mathcal{A};\mu(A)=0,N\subseteq A$.

بما أن $N\subseteq A$، إذن: $\mu^*(N)\leq\mu^*(A)$، لكن: $\mu^*(A)=\mu(A)=0$ إذن: $\mu^*(N)=0$

لتكن $B\in\mathcal{P}(\Omega)$، لدينا:

$$\begin{cases} B\cap N\subseteq N\\ \wedge\\ B\cap N^c\subseteq B\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\mu^*(B\cap N)\leq\mu^*(N)\\ \wedge\\ \mu^*(B\cap N^c)\leq\mu^*(B)\end{cases}$$

ومنه نجد: $\mu^*(B\cap N)+\mu^*(B\cap N^c)\leq\mu^*(B)$

بما أن: $\mu^*(B)\leq\mu^*(B\cap N)+\mu^*(B\cap N^c)$

إذن: $\mu^*(B)=\mu^*(B\cap N)+\mu^*(B\cap N^c)$

ومنه نستنتج: $N\in\mathcal{A}$.

2.4 إنشاء تكامل Lebesgue

ليكن $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ فضاءً مقاسا، في كل ما يأتي سنرمز بـ:

- $\mathcal{M}$ لمجموعة الدوال القيوسة من $(\Omega,\mathcal{A})$ نحو $(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.
- $\mathcal{M}_+=\{f\in\mathcal{M};f(\Omega)\subseteq\overline{\mathbb{R}}_+\}$.
- ξ للفضاء الشعاعي للدوال البسيطة المعرفة على Ω.
- $\xi_+=\{f\in\xi;f(\Omega)\subseteq\mathbb{R}_+\}$ (ولدينا: $\xi_+\subseteq\mathcal{M}_+$).

1.2.4 تكامل دالة موجبة (التكامل في ξ_+)

تعريف 1.1.2 :

لتكن: $f\in\xi_+$، إذن: $f=\sum\limits_{y\in f(\Omega)}y\chi_{\{f=y\}}$

نعرف تكامل Lebesegue لـ f بالنسبة لـ μ أو إختصارا تكامل f ونرمز له بـ $\int\limits_\Omega fd\mu$ حيث:

$$\int\limits_\Omega fd\mu=\sum_{y\in f(\Omega)}y\mu(\{f=y\})\in\overline{\mathbb{R}}_+$$

- و إذا كانت $A\in\mathcal{A}$ فإننا نعرف تكامل f على A بـ: $\int\limits_A fd\mu=\int\limits_\Omega f\chi_A d\mu$.

مبرهنة 1.1.2 :
لدينا:

$$\forall f \in \xi_+, \forall A \in \mathcal{A}; \int_A f d\mu = \sum_{y \in f(\Omega)} y\mu(\{f = y\} \cap A)$$

البرهان

لتكن $f \in \xi_+$ و $A \in \mathcal{A}$، نضع: $f(\Omega) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...\lambda_n\}$ و $f = \lambda_k \in A_k$ حيث: $k = \overline{1, n}$ عندئذ
نجد: $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}$ ومنه: $f\chi_A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k} \chi_A$، إذن:
$f\chi_A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k} \cap A$ ومنه:

$$\int_A f d\mu = \int_\Omega f\chi_A d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu(A_k \cap A) = \int_A f d\mu = \sum_{y \in f(\Omega)} y\mu(\{f = y\} \cap A)$$

- في كل ما يأتي سنكتب التكامل $\int_A f d\mu$ إختصارا على الشكل $\int f d\mu$ لما $A = \Omega$.

مبرهنة 2.1.2 :
لتكن $f \in \xi_+$، التطبيق m المعرف من A نحو $\mathbb{R}_+$ بـ: $\forall A \in \mathcal{A}; m(A) = \int_A f d\mu$ هو قياس موجب على $(\Omega, \mathcal{A})$.

- **خصائص التكامل في ξ_+ :**

مبرهنة 3.1.2 :
1) $\forall f, g \in \xi_+, \forall a \in \mathbb{R}_+$ نجد :
- 1 • $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$
- 2 • $\int af d\mu = a \int f d\mu$
- 3 • $f \le g \Longrightarrow \int f d\mu \le \int g d\mu$

2) $\forall f \in \xi_+; \int f d\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu; \varphi \in \xi_+; \varphi \le f\right\}$

البرهان

1 • $\forall f, g \in \xi_+$ نضع: $f(\Omega) = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \quad ; \quad g(\Omega) = \{\beta_1, \beta_2, ...\beta_p\}$
نجد: $\forall k = \overline{1, n}; \{f = \alpha_k\} = A_k, \forall j = \overline{1, p}; \{g = \beta_j\} = B_j$

$$\begin{aligned}
f+g &= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_k}+\sum_{j=1}^{p}\beta_j\chi_{B_j}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\sum_{j=1}^{p}\chi_{A_k\cap B_j}+\sum_{j=1}^{p}\beta_j\sum_{k=1}^{n}\chi_{A_k\cap B_j}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\alpha_k\chi_{A_k\cap B_j}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\beta_j\chi_{A_k\cap B_j}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(\alpha_k+\beta_j)\chi_{A_k\cap B_j}
\end{aligned}$$

و بالتالي فإن:

$$\begin{aligned}
\int (f+g)d\mu = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(\alpha_k+\beta_j)\mu_{(A_k\cap B_j)} &= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\sum_{j=1}^{p}\mu_{(A_k\cap B_j)}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\beta_j\mu_{(A_k\cap B_j)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu_{(A_k)}+\sum_{j=1}^{p}\beta_j\sum_{k=1}^{n}\mu_{(A_k\cap B_j)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu_{(A_k)}+\sum_{j=1}^{p}\beta_j\mu_{(B_j)}\\
&= \int fd\mu+\int gd\mu
\end{aligned}$$

• 2 $\forall f\in\xi_+$ و $a\in\mathbb{R}_+$، لدينا: $\int afd\mu=\sum_{y\in(af)(E)} y\mu(\{af=y\}$.

نميز حالتين:

✓ إذا كان $a=0$ فإن: $(af)(E)=\{0\}$ ومنه:

$$\begin{aligned}
\int 0fd\mu &= \sum_{y\in\{0\}} y\mu(\{0f=y\}=0\\
&= 0\int fd\mu
\end{aligned}$$

✓ اما إذا كان $a>0$ فإن: $\int afd\mu=\sum_{y\in(af)(E)} y\mu(\{f=\frac{y}{a}\}$

بوضع $\frac{y}{a}=z\in f(E)$ نجد:

$$\begin{aligned}
\int afd\mu &= \textstyle\sum_{z\in f(E)} az\mu(\{f=z\}\\
&= a\sum_{z\in f(E)} z\mu(\{f=z\}\\
&= a\int fd\mu
\end{aligned}$$

• 3 إذا كانت $f\le g$ فإن: $g-f\in\xi_+$ وبما أن: $g=f+g-f$ فإنه حسب الخاصية 1) 1 •
نجد: $\int gd\mu=\int(f+g-f)\,d\mu=\int fd\mu+\int(g-f)\,d\mu$

لكن: $\int (g-f)\, d\mu \geq 0$ ومنه: $\int gd\mu \leq \int fd\mu$.

2) لتكن $f \in \chi_+$، لدينا:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \xi_+; \varphi \leq f &\Longrightarrow \forall \varphi \in \xi_+; \int \varphi d\mu \leq \int fd\mu \\ &\Longrightarrow \sup\left\{\int \varphi d\mu, \varphi \in \xi_+, \varphi \leq f\right\} \\ &\leq \int fd\mu \quad ...(*) \end{aligned}$$

هذا من جهة، ومن جهة أخرى نجد:

$$\begin{aligned} \forall f \in \xi_+; f \leq f &\Longrightarrow \int fd\mu \in \left\{\int \varphi d\mu; \varphi \in \xi_+, \varphi \leq f\right\} \\ &\Longrightarrow \int fd\mu \leq \sup\left\{\int \varphi d\mu; \varphi \in \xi_+, \varphi \leq f\right\} \quad ...(**) \end{aligned}$$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن: $\int fd\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu; \varphi \in \xi_+, \varphi \leq f\right\}$.

2.2.4 تكامل دالة قيوسة موجبة

- **التكامل في $\mathcal{M}_+$:**

تعريف 1.2.2 :

لتكن $f \in \mathcal{M}_+$، نعرف تكامل Lebesgue لـ f بالنسبة لـ μ على Ω أو إختصارا تكامل f على Ω و نرمز له بالرمز $\int fd\mu$ حيث:

$$\int fd\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu; \varphi \in \xi_+, \varphi \leq f\right\} (\in \overline{\mathbb{R}}_+)$$

و إذا كانت $A \in \mathcal{A}$ فإننا نعرف تكامل f على A بـ:

$$\int fd\mu = \int f\chi_A d\mu$$

- إذا كان $\int fd\mu < +\infty$ فإننا نقول عن الدالة القيوسة الموجبة f أنها قابلة للمكاملة بالنسبة لـ μ على Ω أو قابلة للجمع على Ω.

- **خصائص التكامل في $\mathcal{M}_+$:**

مبرهنة 1.2.2 :

لدينا:

- $\forall f,g \in \mathcal{M}_+; f \leq g \Longrightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$
- $\forall f \in \mathcal{M}_+; \forall a \in \mathbb{R}_+; \int af d\mu = a \int f d\mu$

نظرية 1.2.2 : (نظرية التقاربات الرتيبة)

لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة من عناصر $\mathcal{M}_+$ نضع: $\lim f_n = f \left(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)$

عندئذ يكون لدينا $f \in \mathcal{M}_+$ ويكون:

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu\right)$$

البرهان

واضح أن $f \geq 0$ ومنه حسب ما سبق تكون $f \in \mathcal{M}_+$.

بما أنه $\forall n \in \mathbb{N}; f_n \leq f_{n+1}$، إذن حسب المبرهنة (1.2.2) يكون:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \Longrightarrow \lim \int f_n d\mu \leq \lim \int f_{n+1} d\mu$$

إذن المتتالية $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة في $\overline{\mathbb{R}}_+$ نضع:

$$\lim \int f_n d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu \quad ...(S)$$

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}; f_n \leq f \Longrightarrow \lim f_n d\mu \leq \int f d\mu \Longrightarrow \lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$

إذن: $S \leq \int f d\mu \quad ...(1)$

- <u>العكس:</u>

◁ لتكن $\varphi \in \xi_+$ بحيث: $\varphi \leq f$، من أجل كل عدد حقيقي λ حيث $\lambda \in]0,1[$ نعرف المتتالية $(A_n^\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\rho(\Omega)$ بوضع:

$$\forall n \in \mathbb{N}; A_n^\lambda = \{\lambda\varphi \leq f_n\}$$

◁ ليكن $\lambda \in]0,1[$ و $n \in \mathbb{N}$، لدينا $f_n, \lambda\varphi \in \mathcal{M}_+$ و بما أن:

$$(A_n^\lambda)^c = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \left(\{f_n < r\} \bigcap \{\lambda\varphi > r\}\right)$$

إذن: $(A_n^\lambda)^c \in \mathcal{A}$ ومنه $A_n^\lambda \in \mathcal{A}$.

كما أنه إذا كان $x \in A_n^\lambda$ فإن: $\lambda\varphi(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \Longrightarrow x \in A_{n+1}^\lambda$

إذن: $A_n^\lambda \subseteq A_{n+1}^\lambda$ ومنه: $\forall\lambda \in]0,1[\,; \forall n \in \mathbb{N}; A_n^\lambda \in \mathcal{A}; A_n^\lambda \subseteq A_{n+1}^\lambda$

وليكن الآن $x \in \Omega$، بما أن: $f(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$:

✓ إذا كان $f(x) = 0$ فإن $\lambda\varphi(x) = 0$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N}; x \in A_n^\lambda$ إذن: $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n^\lambda$

✓ إذا كان $f(x) \in \mathbb{R}_+^*$ فإنه: $\exists n_0 \in \mathbb{N}; \lambda\varphi(x) < f_{n_0}(x) \Longrightarrow x \in A_{n_0}^\lambda \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n^\lambda$

✓ إذا كان $f(x) = +\infty$ فإنه كذلك: $\exists n_0 \in \mathbb{N}; \lambda\varphi(x) < f_{n_0}(x) \Longrightarrow x \in A_{n_0}^\lambda \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n^\lambda$

نتيجة : $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n^\lambda = \Omega$

لدينا:

$$\begin{aligned} x \in A_n^\lambda; \lambda\varphi(x) \leq f_n(x) \Longrightarrow \forall x \in \Omega; \lambda\varphi(x)\chi_{A_{n_0}^\lambda}(x) &\leq f_n(x)\chi_{A_{n_0}^\lambda}(x) \\ &\leq f_n(x) \end{aligned}$$

ومنه: $\lambda\varphi\chi_{A_{n_0}^\lambda}(x) \leq f_n \Longrightarrow \lambda\int \varphi\chi_{A_{n_0}^\lambda} d\mu \leq \int f_n d\mu \leq S$.

إذن: $\lambda\int_{A_{n_0}^\lambda} \varphi d\mu \leq S \quad ...(*)$

بما أن n كيفي، إذن بالمرور إلى النهاية في المتراجحة $(*)$ نجد:

$\lambda\int_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{n_0}^\lambda} \varphi d\mu \leq S$ أي أن: $\lambda\int \varphi d\mu \leq S$ وبما أن λ كيفي من $]0,1[$،

إذن: $\forall\lambda \in]0,1[\,; \lambda\int \varphi d\mu \leq S$.

بالخصوص من أجل $p \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$، $\lambda = 1 - \dfrac{1}{p}$ يكون: $\forall p \leq 2; (1 - \dfrac{1}{p})\int \varphi d\mu \leq S$.

بالمرور إلى النهاية نجد: $\int \varphi d\mu \leq S$.

لتكن φ كيفية من ξ_+ بحيث $\varphi \leq f$، إذن:

$$\forall\varphi \in \xi_+; \varphi \leq f \Longrightarrow \int \varphi d\mu \leq S \Longrightarrow \int f d\mu \leq S \quad ...(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $S = \lim\int f_n d\mu = \int f d\mu$.

نتيجة 1.2.2 :
ينتج مباشرة من النظرية السابقة أنه:
• $\forall f,g \in \mathcal{M}_+; \int (f+g)\,d\mu = \int fd\mu + \int gd\mu$.
• $\forall f \in \mathcal{M}_+; \int (+\infty) fd\mu = +\infty \int fd\mu$.
◁ من أجل أي متتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{M}_+$ يكون لدينا:

$$\int \sum_{n\leq 0} f_n d\mu = \sum_{n\leq 0} \int f_n d\mu$$

تعريف 2.2.2 :(خاصية شبه كليا)
في الفضاء المقاس $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ لتكن $P(x)$ قضية متعلقة بالعنصر x.
نقول عن $P(x)$ أنها محققة شبه كليا بالنسبة للقياس μ ونكتب $P(x)$ محققة $\mu - pp$
$(P(x)\ \ est\ \ vraie\ \ \mu - presque\ \ partout)$
إذا وفقط إذا كانت المجموعة $\{\ x \in \Omega\ ;$ غير محققة $P(x)\ \}$ مهملة بالنسبة لـ μ ...$(*)$
وإذا كان μ هو قياس إحتمالي $(\mu(\Omega) = 1)$ فإننا نقول عن القضية $P(x)$ التي تحقق $(*)$ أنها محققة شبه أكيد بالنسبة لـ μ $(P(x)\ \ est\ \ vraie\ \ \mu - presque\ \ surement\ \ vraie)$.
وهكذا إذا كانت $f,g \in \mathcal{M}_+$ فإننا نقول مثلا أن:
• $f = g\ \ \mu - pp$ إذا كانت: $\mu(\{f \neq g\}) = 0$
• $f = 0\ \ \mu - pp$ إذا كانت: $\mu(\{f > g\}) = 0$
• f منتهية شبه كليا بالنسبة لـ μ على Ω (أي $f < +\infty\ \ \mu - pp$) إذا كانت: $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$
• لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية دوال من $\mathcal{M}_+$ و $f \in \mathcal{M}_+$: $f_n \longrightarrow f\ \ \mu - pp$ إذا كانت: $\mu(\{x \in \Omega; f_n(x) \nrightarrow f(x)\}) = 0$.

مبرهنة 2.2.2 :
لدينا:

1) $$\forall f,g \in \mathcal{M}_+;\ \ f = g\ \ \mu - pp \Longrightarrow \int fd\mu = \int gd\mu$$

2) $$\forall f \in \mathcal{M}_+;\ \ f = 0\ \ \mu - pp \Longleftrightarrow \int fd\mu = 0$$

3) $$\forall f \in \mathcal{M}_+;\ \ \int fd\mu < +\infty \Longrightarrow f < +\infty\ \ \mu - pp$$

برهان

1) نضع : $A = \{f > 0\}$ وليكن $x \in \Omega$، لدينا:

$$+\infty f(x)=\begin{cases}+\infty & ,si \quad f(x)>0\\ 0 & ,si \quad f(x)=0\end{cases}$$

ومنه:

$$+\infty f(x)=\begin{cases}+\infty & ,si \quad x\in A\\ 0 & ,si \quad x\notin A\end{cases}$$

إذن: $+\infty f(x)=+\infty\chi_A(x)$ ومنه: $+\infty f(x)=+\infty\chi_A$ وبالتالي فإن:

$$f=0\ \ \mu-pp\Longleftrightarrow\mu(A)=0\Longleftrightarrow\int fd\mu=0$$

2) ليكن f عنصرا من $\mathcal{M}_+$ يحقق $f=0\ \ \mu-pp$، نتيقن مباشرة أن $\{\varphi\in\mathcal{M}_+:\varphi\leq f\}\subset\{\varphi\in\mathcal{M}_+:\varphi=0\ \ \mu-pp\}$ وهذا يقتضي أن

$$\int fd\mu\leq\sup\left\{\int\varphi d\mu:\varphi=0\ \ \mu-pp\right\}=0$$

ومنه نكون أثبتنا الاستلزام $f=0\ \ \mu-pp\Longleftrightarrow\int fd\mu=0$.

• <u>العكس:</u>

لنفرض أن $\int fd\mu=0$، توجد متتالية متزايدة $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{M}_+$ تحقق $\forall x\in X,\ \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\varphi_n(x)=f(x)$.

لما كان $0\leq\varphi_n\leq f$ إستنتجنا أن $\int\varphi_nd\mu=0$، ولأن φ_n ينتمي إلى $\mathcal{M}_+$ ينتج من ذلك أن $\varphi_n=0\ \ \mu-pp$، أي أن المجموعة $A_n=\{x\in X,\varphi_n(x)\neq0\}$ مجموعة μ - مهملة. ينتج من ذلك أن المجموعة $A=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$ هي أيضا مجموعة μ - مهملة.

في حالة $x\notin A$ يكون لدينا $\forall n\in\mathbb{N},\varphi_n(x)=0$ ومنه $f(x)=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\varphi_n(x)=0$

وهذا يثبت أن $f=0\ \ \mu-pp$.

3) نضع: $B=\{f=+\infty\}\in\mathcal{A}$ وليكن $x\in\Omega$، إذا كان $x\in B$ فإن:

$$f(x)=+\infty=+\infty\chi_B(x)$$

أما إذا كان $x\notin B$ فإن: $f(x)\geq+\infty\chi_B(x)\Longleftrightarrow f(x)\geq0$ ومنه: $f\geq+\infty\chi_B(x)$ إذن: $+\infty\mu(B)\leq\int fd\mu$ وبالتالي فإن: $\int fd\mu<+\infty\Longrightarrow\mu(B)=0\Longleftrightarrow f<+\infty\ \ \mu-pp$

لتكن $\forall f \in \mathcal{M}_+$، الإستلزام: $\int f d\mu = 0 \Longrightarrow f = 0 \ \ \mu - pp$ ينتج مباشرة من 1)،
العكس من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع: $A_n = \left\{ x \in \Omega; \frac{1}{n} \leq f(x) \right\}$
إن $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هي متتالية متزايدة من عناصر $\mathcal{A}$ بحيث: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{f > 0\}$
إذن: $\mu\left(\{f > 0\}\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n)$
لكن لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n}\chi_{A_n} \leq f$
إذن: $\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int f d\mu$ وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N}^*; \mu(A_n) = 0$ إذن: $\mu\left(\{f > 0\}\right) = 0$.

مبرهنة 3.2.2 : (توطئة فاتو)
من أجل أية متتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathcal{M}_+$ يكون لدينا:

$$\int \underline{\lim}\, f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n d\mu$$

البرهان

نضع: $f_n = \inf_{p\geq n} f_n$
إن (f_n) هي متتالية متزايدة لدوال قيوسة وموجبة حيث:

$$\forall x \in E, \lim_n f_n(x) = \sup_n f_n(x) = \underline{\lim}_n f_n(x)$$

وبالتالي : $\int_E \underline{\lim}_n f_n dm = \lim_n \int_E f_n dm$

وبما أن من أجل كل دليل $n \leq p$ لدينا $f_n \leq g_p$ فإن: $\int_E f_n dm \leq \inf_{p\geq n} \int_E g_p dm$

إذن:

$$\begin{aligned}
\int_E \underline{\lim}_n g_n dm &= \lim_n \int_E f_n dm \\
&\leq \lim_n \left(\inf_{p\geq n} \int_E g_p dm \right) \\
&\leq \int_E \underline{\lim}_n g_n dm
\end{aligned}$$

نتيجة 2.2.2 :
لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من عناصر $\mathcal{M}_+$ متقاربة ببساطة نحو دالة f، إذا وجدت رتبة n_0 من $\mathbb{N}$ بحيث: $\forall n \leq n_0; f_n \leq f$ فإن:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

• التكامل في $\mathcal{M}$:

تعريف 2.2.2 :
لتكن $f \in \mathcal{M}$، نقول عن f أنها قابلة للمكاملة على Ω بالنسبة لـ μ (أو إختصارا f قابلة للمكاملة) إذا وفقط إذا تحقق:

$$\int_{\Omega} |f|\, d\mu < +\infty$$

ترميز
نضع: $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathcal{M}\}$.
حيث f قابلة للمكاملة على Ω بالنسبة لـ μ، أو إختصارا $\mathcal{L}^1$.

مبرهنة 4.2.2 :
لتكن $f \in \mathcal{M}$، إذا وجد عدد حقيقي موجب α ووجدت A من $\mathcal{A}$ بحيث:

- $|f| \leq \alpha \;\; sur \;\; A \qquad (i)...$
- $f = 0 \;\; sur \;\; A^c \qquad (ii)...$
- $\mu(A) < +\infty \qquad (iii)...$

فإن: $f \in \mathcal{L}^1$.

البرهان
من (i) و (ii) يكون: $|f| \leq \alpha \chi_A$ ومنه: $\int |f|\, d\mu \leq \alpha\mu(A)$ ومن (iii) نستنتج أن: $\int |f|\, d\mu \leq +\infty$
إذن: $f \in \mathcal{L}^1$.

مبرهنة 5.2.2 :
لتكن $f \in \mathcal{L}^1$ عندئذ يكون لدينا:

- $f_+, f_- \in \mathcal{M}_+$.
- $f_+, f_- \in \mathcal{L}^1$.

البرهان
القضية الأولى واضحة، أما الثانية فينتج من كون: $f_+ \leq |f|\, , f_- \leq |f|$.

الخـاتمـة

في رحلتنا عبر عوالم الرياضيات، نصادف مفاهيم أساسية تشكل حجر الأساس لبناء المعرفة العلمية، ومن بين هذه المفاهيم نبرز تميم فضاء مقاس الذي يعد العمود الأساسي لدراسة القياسات وكذا ميادين أخرى كنظرية التوزيعات، المجموعات، الطوبولوجيا،...، وغيرها.
نظرا لتعقيد الموضوع إقتصرنا على تقديم نظرة عامة شاملة على أساسيات إستطعنا من خلالها إنشاء تكامل دالة قيوسة موجبة، وان المكاملة لا تقتصر على $\mathbb{R}^n$ أو أجزاء منها فقط، بل تتعداها إلى مجموعات تجريدية بحتة، فقد إعتمد لوبيغ إلى توظيف نظرية القياس التي بدأها بوريل من قبل، وقام بتجزئة مجموعة المستقر للدالة f، وذلك عكس ما يفعله ريمان عند مكاملته لدالة معينة.
مستندين إلى ذلك ما تمكنا من جمعه من المراجع وما إستطعنا فهمه.
و في الأخير ما يسعنا قوله أن آخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين، وأن يوفقنا الله لما يحبه ويرضاه.

المراجع

[1] الأستاذ يوسف عتيق، مدخل حول نظرية القياس والمكاملة، دروس السنة الجامعية 1996 – 1995 لطلبة السنة الثالثة بالمدرسة العليا للأساتذة - القبة الجزائر العاصمة - قسم الرياضيات.

[2] أ.كولموغوروف وس. فومين - مبادىء في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي - تعريب : أبو بكر خالد سعد الله - ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر.

[3] الأستاذ جاعة مصطفى، تبسيط القياس والتكامل، دروس السنة الجامعية لطلبة السنة الثالثة بالمدرسة العليا للأساتذة - سعيدة - ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر.

[4] الدكتور عمران قوبا، التحليل الجزء الخامس، منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا - الجمهورية العربية السورية - 2018.

[5] الأستاذ الدكتور نصر الدين تطار والسعيد مزوزي، النظرية العامة للقياس والمكاملة (بمفهوم لوبيغ)، جامعة الملك فهد للبترول والمعادن - الظهران - المملكة العربية السعودية، وجامعة باجي مختار - عنابة - الجزائر، العبيكان للنشر 2014.

[6] Bauer Heinz, Measure and Integration Theory, Translated from the German by Robert B. Burckel, Walter de Gruyter; Berlin . New York 2001.

[7] Henri Lebsegue - Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives (2eme édition)- publié par GAUTHIER VILLARS en 1928, édition : Jaques Gabay en 1989.

[8] Stanislaw Saks- théeorie de l'intégrale - chargé de cours à l'université de Varsovie , WARSZAWA 1933.

[9] S. Hartman and J.Mikusinski - the theory of Lebsegue measure and integration - ENLARGED EDITION , TRANSLATED FROM POLISH BY : Leo F. Boron , pergamon press 1961.

[10] Hakim Boumaaza, Benjamin Colla, Stéphane Collion, Marie Dellinger; Zéo Faget, Laurent Lazzarini, Florent Schaffhauser- Mathématique L3 Analyse- PERSON Eucation 2009.

الملخص

بهذه المذكرة ساهمنا بجزء صغير فقط ألا وهو تتميم فضاء مقاس، حيث سلطنا الضوء على النقاط الرئيسية من خلال أربعة فصول، يتكون كل فصل من مجموعة من التعاريف، النظريات، والمبرهنات.

تناولنا في الفصل الأول طوبولوجية $\overline{\mathbb{R}}$.
أما الفصل الثاني قدمنا فيه العشيرة و التطبيقات القيوسة، ثم يليه الفصل الثالث بعنوان القياس الموجب، وأخيرا تطرقنا إلى القياس الخارجي.

في الختام نتمنى أن تساهم هذه الدراسة في توسيع آفاق جديدة للبحث العلمي في مجال القياس، وأن تشكل مرجعا قيما للباحثين يكون نقطة انطلاق لإيجاد حلول للتحديات التي تواجه هذا المجال.

الكلمات المفتاحية

العشائر ، قابلية القياس ، تتميم فضاء مقاس ، تكامل *Lebesgue* .