الجمهوريــة الجزائريــة الـديـمقـراطيــة الـشـعـبـيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Scientifique Supérieur et de la Recherche

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي-سكيكدة-

Ecole Normale Supérieure d'enseignement technologique-Skikda-

قسم : الرياضيات والإعلام الآلي **Département : Mathématiques et Informatique**

مطبوعة دروس في الاحتمالات للسنة الرابعة أستاذ تعليم متوسط

من اعداد الأستاذ: خشمان حسام الدين

الرتبة: أستاذ محاضر قسم "أ"

السنة الدراسية: 2024-2025

الفهرس

مقدمة

تندرج هذه المطبوعة ضمن مقياس الاحتمالات2، وهي موجهة بالأساس إلى طلبة السنة الرابعة أستاذ تعليم متوسط تخصص رياضيات كما يمكن أن يستفيد منها طلبة مختلف الكليات أو التخصصات الأخرى، الذين يدرسون هذا المقياس. بدأت الأبحاث الأولية لنظرية الاحتمال في البحث العلمي الغربي في أواخر القرن الخامس عشر، وبالتحديد عام (1494)، حين نشر الرياضي الإيطالي «لوسا پاسيولي«Luca Pacioli» «ا (1445 - 1514) عمله «Summa de Arithmatica» والذي ناقش فيه ألعاب الحظ. كما أن علم الاحتمال له تعريفات عديدة تختلف باختلاف المجال العلمي: العرفي والرياضي ودرجة التصديق وغير ذلك وقد ذكر **رودولف كارناب** في كتابه «الأسس المنطقية للاحتمال» أن تعريفات الاحتمال كثيرة. وقد نقل عن العالم النمساوي **إرنست ناغل** (1985 - 1901) في كتابه «المبادئ» محاولته فرز التعريفات في ثلاث مجموعات: المفهوم الكلاسيكي للاحتمال، والموضوع من قبل لاپلاس، مفهوم الاحتمال بوصفه علاقة ضرورية موضوعية منطقية بين مفردات الاحتمال، مفهوم الاحتمال بوصفه تكراراً نسبياً.

وهذه المطبوعة تغطي جميع محاور مقياس الاحتمالات حسب ما هو مقرر من طرف وزارة التعليم العالي، وكل محور يتضمن ملخص له، ثم تمارين محلولة ومقترحة لهذا المحور، ونتمنى أن نكون قد أسهمنا بجهودنا المتواضع في اعداد هذه المطبوعة في خدمة طلاب العلم في الأقسام العلمية المختلفة.

1. التحليـــل التوفيقي

نلخص في هذه الفقرة بعض المفاهيم المبدئية و الأساسية في التحليل التوفيقي. هذه المفاهيم جُد مهمة للدروس القادمة، فهي الأدوات التي ستستعمل لاحقا في الاحتمالات.

1.1 المبدأ الأساسي للتحليل التوفيقي :

إذا استطعنا تمثيل عملية بـ n_1 طريقة مختلفة، ثم نجد بعد إجراء العملية أن عملية ثانية يمكن تمثيلها بـ n_2 طريقة مختلفة و هكذا على التوالي، عندئذ يكون عدد الطرق المختلفة التي تسمح بإجراء العمليات المشار إليها بإتباع الترتيب هو الجداء ..... $n_1 \, n \, x_2$.

مثال: تتضمن لوحة ترقيم سيارة حرفين لاتينين مختلفين متبوعين بثلاثة أرقام يختلف أولها عن 0. ما هو عدد اللوحات المختلفة الممكن الحصول عليها بهده الطريقة ؟

عدد الأحرف اللاتينية هو 26 إذن هناك 26 طريقة لاختيار الحرف الأول و 25 طريقة للحصول على الحرف الثاني (لأن الحرف الثاني لا يمكن اختياره مطابقا للأول). هناك أيضا 9 طرق مختلفة للحصول على الرقم الأول و 10 للحصول على الثاني و 10 للحصول على الثالث.

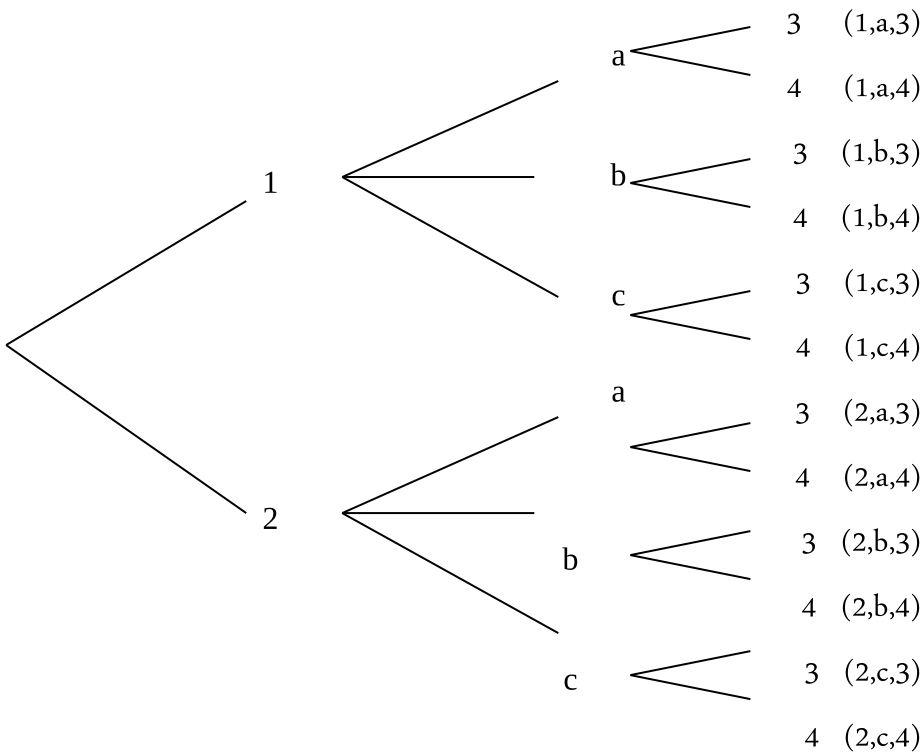
إذن يمكن الحصول على : 585000 = 10.10.9.25.26 لوحة مختلفة

2.1 المخطط الشجراني :

هو طريقة لِعُد كل النتائج الممكنة لمتتالية من التجارب بحيث يمكن وقوع كل منها عدد منته من المرّات.

مثال 1 :

عيّن عدد عناصر $A \times B \times C$ حيث $A = \{1.2\}$، $B = \{a,b,c\}$، و $C = \{3,4\}$ تُمثل الإمكانيات بالمخطط الشجراني التالي :



نلاحظ أن المخطط مرسوم من اليسار إلى اليمين، و عدد الأغصان عند كل نقطة موافق لعدد النتائج الممكنة للتجربة الموالية.

مثال 2 : نرمي 3 حجرات نرد متماثلة. ما هو عدد الإمكانيات كلها ؟ هو 6^3

3.1 التبديلات بدون تكرار(Permutations sans répétition) :

مثال : لدينا ثلاثة أحرف a, b , c .

التبديلات هي كل المجموعات الجزئية المرتبة الممكن تشكيلها بعناصر المجموعة

$\{a, b, c\}$ أي : abc, acb, bac, cab, cba, bca.

تعريف : نسمي **تبديلة** ذات n عنصر، كل تشكيلة مرتبة بدون تكرار لهذه الـ n عنصر (طريقة لترتيب جنبا لجنب n عنصر).

نتيجة : إذا كان P_n هو عدد عناصر التبديلات ذات n عنصر، اذن

$$P_n = n!$$

البرهان : لدينا n عنصر $a_1, a_2,...a_n$ بحيث :

a_1 له n إمكانية

a_2 له $n-1$ إمكانية

....

a_n له 1 إمكانية

مثال آخر : بكم طريقة يمكن أن نرتب 4 أفراد ؟. عدد الطرق هو $P_4 = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

4.1 التبديلات بتكرار(Permutations avec répétition) :

غالبا ما نوُد معرفة عدد التبديلات لعدد من العناصر بعضها متشابه. عندئذ يكون الحل كما يلي : عدد التبديلات لـ n عنصرا من بينها n_1 عنصرا متشابها و n_2

عنصرا متشابها ... و n_k عنصرا متشابها هو :

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

مثال : نريد تشكيل كل الكلمات التي تتضمنها الكلمة « LILLE ».

هناك 5! تبديلا ممكنا للحروف L_1, L, I_2, L_3, E عند اعتبار الحروف L_1, L_2, L_3 مختلفة.

نلاحظ أن التبديلات الستة التالية تشكل نفس الكلمة عند عدم التمييز بين L_1, L_2, L_3 :

$EI_1L_2L_3IE$, $EI_2L_3L_1L$, $EI_3L_1L_2L$, $EI_1L_3L_2L$, $EI_2L_1L_3L$, $L_3L_1L_2L$

أي أن عدد التبديلات من هذا الشكل يساوي 3! و بالتالي هناك :

$$\frac{5!}{3!.1!.1!} = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$ كلمة مختلفة

5.1 الترتيبات (Arrangements)

مثال : لدينا ثلاثة أحرف a, b , c .

كم من كلمة يمكن تشكيلها بحرفين مختلفين مأخوذين من هذه الأحرف الثلاث ؟

لدينا الإمكانيات التالية ab, ba, ac, ca, bc, cb

إذن 6 كلمات مكونة من حرفين ؛ ترتيبة ذات عنصرين مأخوذة من 3 عناصر.

تعريف : نسمي **ترتيبة** ذات p عنصر مأخوذة من n عنصر، كل تشكيلة مرتبة و بدون تكرار ذات p عنصر (طريقة لترتيب p عنصر مأخوذ من n عنصر مع إعتبار الترتيب)

نتائج :

- A_n^p هو عدد الترتيبات ذات p عنصر مأخوذة من n عنصر
- $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

البرهان :

المكان الأول له n إمكانية

المكان الثاني له $n-1$ إمكانية

.....

المكان p له $n-p+1$ إمكانية

من الواضح أن

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-p+1)\times(n-p)!}{(n-p)!} = n\times(n-1)\times\ldots\times(n-p+1)$$

مثال 1 : للدخول إلى بنك معلومات، يجب إدخال كلمة سِرمكونة من 4 أحرف. ما هو عدد الكلمات الممكنة ؟. العدد هو $A_{26}^4 = 258800$.

مثال2: عدد التطبيقات المتباينة E في F حيث

$$CardE = r \quad , \quad CardF = n \quad , \quad / \ r \le n$$

هو A_n^r

مثال 3 : A_n^r هوعدد الطرق اللازمة لوضع r كرة في n صندوق بحيث لا يسقط في الصندوق أكثر واحدة (ترجمة للتطبيق المتباين).

مثال4: لدينا n كتاب و أردنا اختيار مجموعة جزئية منه مكونة من بحيث نراعي منه ترتيب r كتاب $(r \le n)$الكتب .

فيمكن أن يتم دلك بعدد من الطرق هو A_n^r طريقة.

حالة خاصة: $A_n^n = n! = P_n$

مثال5: لدينا 4 كتب A, B, C, D نختار منها 3 كتب مع مراعاة الترتيب . لدينا:

$$\begin{array}{cccc} ABC & ABD & BCD & ACD \\ BCA & ADB & CDB & CDA \\ CAB & BAD & DBC & DAC \\ CBA & BDA & DCB & CAD \\ ACB & DAB & BDC & ADC \\ BAC & DBA & CBD & CAD \end{array}$$

إذن لدينا $3!.4 = 24 = A_4^3$

ملاحظة 1 : ماذا يعني "ترتيبة **بـ** p **تكرار** مأخوذة من n عنصر" ؟.

هي تشكيلة مرتبة ذات p عنصر مع تكرار. عدد الترتيبات عندئذ هو n^p.

ملاحظة 2 : لما نستعمل اللفظ "**ترتيبة**" و فقط،، فنقصد بذلك ترتيبة بدون تكرار

ملاحظة 3 : في حالة الترتيبات :

- لا يوجد تكرار
- الترتيب مُهّم

6.1 التوفيقات (Combinaisons)

مثال6 : لدينا الأحرف a, b, c, d . التوفيقات ذات 2 عنصرهي الإمكانيات التالية :

$\{a,b\}, \{a,c\}, ,\{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}$. عددها 6.

تعريف : نسمي "**توفيقة** ذات p عنصر مأخوذة من n عنصر"، كل تشكيلة غير مرتبة ذات p عنصر (مجموعة جزئية ذات p عنصر مأخوذة من n عنصر ممكن).

نتيجة : عدد التوفيقات ذات p عنصر مأخوذة من n عنصر هو العدد

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

البرهان : إنطلاقا من توفيقة ذات p عنصر مأخوذة من n عنصر نستطيع تكوين r تبديلة، أي $A_n^p = r!.C_n^p$!

مثال7 : إذا رجعنا إلى المثال السابق، فعدد الطرق لإختيار 3 كتب من بين 4 دون مراعاة الترتيب هو $C_4^3 = \frac{A_4^3}{3!} = 4$

خواص:

- $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_{n+1}^i = C_n^{i-1} + C_n^i$

- $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ (دستور ثنائي الحد)

7.1 أنواع السحب :

ا) السحب مع الإرجاع (السحب البرنولي) : ليكن لدينا بعملية سحب في كل n كرة في صندوق ، نقول أننا سحبنا r كرة مع الإرجاع اذا قمنا r مرة

نسحب كرة واحدة ثم نرجعها إلى الصندوق قبل القيام بالعملية الموالية .

إن عدد الطرق لذلك هو n^r

مثال: لدينا صندوق به 3 كرات a,b,c نسحب كرتين مع الإرجاع هو $9=3^2$.

ب)السحب دون إرجاع:

- يمكن أن يتم مع مراعاة الترتيب و عدد الطرق هو A_n^r
- يمكن أن يتم دون مراعاة الترتيب و عدد الطرق هو C_n^r

تمارين

تمرين 1 : E و F مجموعتان بحيث: $r\le n,\ \ card\ \ F=n,\ \ card\ \ E=r$

- ما هو عدد تطبيقات E في F ؟
- ما هو عدد التطبيقات المتباينة لـ E في F ؟

تمرين 2 : بكم طريقة يمكن أن نضع r في n صندوق ؟

تمرين 3 : صندوق يحتوي على n كرة . نسحب منه r كرة. $(r \leq n)$

- ما هو عدد الإمكانيات في حالة السحب مع الإرجاع ؟
- ما هو عدد الإمكانيات في حالة عدم الإرجاع و مراعاة الترتيب ؟
- ما هو عدد الإمكانيات في حالة عدم الإرجاع وعدم مراعاة الترتيب ؟

تمرين 4: بكم طريقة يمكن أن نهدي 7 لعب إلى 3 أطفال بحيث يتلقى أصغرهم 3 لعب و يتلقى الآخرين لعبتين كلاهما ؟

حلـول التمارين

حل التمرين 1 : $r \leq n, \quad card \quad F = n, \quad card \quad E = r$

- عدد تطبيقات E في F هو n^r .

- عدد التطبيقات المتباينة : هنا الترتيب مهم و العدد هو بالتراجع . نستطيع A_n^r . لنبرهن على ذلك تعريف مجموعة التطبيقات المتباينة كما يلي :

$$\mathcal{F}_n^r = \{(x_1, x_2, ..., x_r) \in F^n : x_i \neq x_j, i \neq j\}$$

إذن علينا برهان بالتراجع أن $\mathrm{card}\,\mathcal{F}_n^r = A_n^r$.

- من أجل $r = 2$: لدينا $\mathcal{F}_n^2 = \{(x, y) \in F^2 : x \neq y\}$

نضع $A = \{y \in F : x \neq y, x \in F\}$ هي مجموعة كل عناصر F المختلفة من x مثبت من E

إذن $cardA = n-1$. نلاحظ أن $\mathcal{F}_n^2 = \dot{\bigcup\limits_{x\in F}}\left(\{x\}\times A\right)$ و منه

$$\text{card}\,\mathcal{F}_n^2 = \sum_{x\in F} card\{x\}.cardA = n(n-1) = A_n^2$$

- لأجل $r=3$: $\mathcal{F}_n^3 = \{(x,y,z)\in F^3 : x\neq y, x\neq z, y\neq z\} = \dot{\bigcup\limits_{\substack{z\in F\\ x\neq z, z\neq y}}}\left(\mathcal{F}_n^2\times\{z\}\right)$

و بذلك $card\,\mathcal{F}_n^3 = n(n-1)(n-2) = A_n^3$

نفرض صحة الخاصية من أحل r و نبرهن على صحتها من أجل $r+1$. لدينا :

$$\mathcal{F}_n^{r+1} = \left\{(x_1,x_2,...,x_r,x_{r+1})\in F^{r+1} : x_i \underset{i\neq j}{\neq} x_j\right\} = \bigcup_{\substack{x_{r+1}\in F\\ x_{r+1}\neq x_i}}\left(\mathcal{F}_n^r\times\{x_{r+1}\}\right)$$

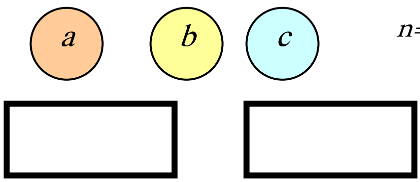
و منه $\mathcal{F}_n^{r+1} = \sum_1^n card\,\mathcal{F}_n^r\times card\{x_{r+1}\} = A_n^r\times(n+1) = A_n^{r+1}$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $r+1$.

من التراجع ينتج أن $card\,\mathcal{F}_n^r = A_n^r$.

حل التمرين 2 : عدد طرق وضع r كرة في n صندوق هو n^r.

مثلا من أجل $r=3$ و $n=2$



abc

ab $\quad\quad$ c

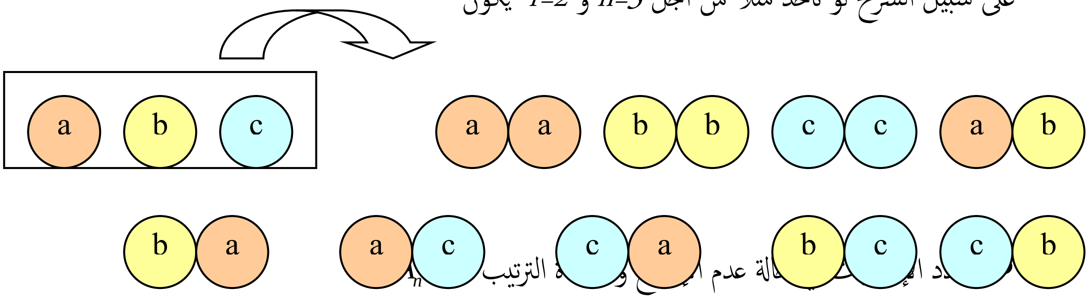
a $\quad\quad$ bc

b	ac
c	ab
ac	b
bc	a
	abc

حل التمرين3 : صندوق يحتوي على n كرة . نسحب منه r كرة. $(r \leq n)$

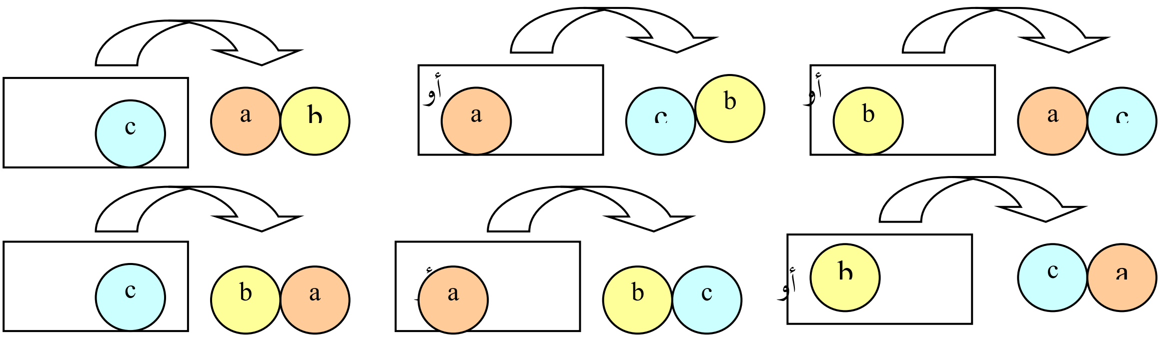
- عدد الإمكانيات في حالة السحب مع الإرجاع هو n^r

على سبيل الشرح لو نأخذ مثلا من أجل $n=3$ و $r=2$ يكون



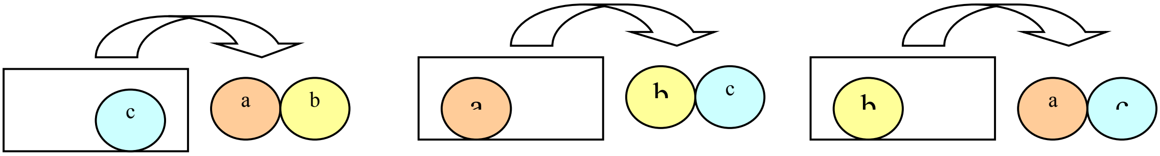
دد الإ ... الة عدم الإ ... ع و ... ة الترتيب $\ _n$

لو أخذنا المثال السابق يكون



- عدد الإمكانيات في حالة عدم الإرجاع وعدم مراعاة الترتيب هو C_n^r

لو أخذنا المثال السابق يكون



حل التمرين 4 : نبحث عن عدد التجزئات المرتبة للعب السبع إلى مجموعات ذات 3، 2، 2 لعب. يكون عدد الطرق إذن

$$\frac{7!}{3!\times 2!\times 2!}$$

2. الإحتمالات

1.2 الفضاء الإحتمالي :

تعريف الفضاء الاحتمالي: نسمي **فضاءا احتماليا** الثلاثية $(\Omega,\mathcal{B},P)$ حيث:

Ω: مجموعة

$\mathcal{B}$: عشيرة من أجزاء Ω

P : قياس موجب على $\mathcal{B}$ بحيث $P(\Omega)=1$

2.2 مصطلحات :

تدعى Ω **بالمجموعة الأساسية** أو مجموعة النتائج الممكنة

- عناصر $\mathcal{B}$ تسمى **أحداث** ، فتكون $\mathcal{B}$ **عشيرة الأحداث.**

- القياس P يسمى قياس الاحتمال و يحقق:

$$0 \leq P \leq 1$$

- اذا كان $A \in \mathrm{B}$ فان $P(A)$ قياس احتمال الحدث A

- اذا كان $A, B \in \mathrm{B}$ بحيث $A \cap B = \phi$ فنقول إنهما **حدثان متنافيان.**

- **الحدث المعاكس** للحدث A هو الحدث $\overline{A} = \Omega - A$

- الحدث Ω يدعى **الحدث الأكيد** و ϕ يدعى **الحدث المستحيل** .

- إذا وجد حدث A بحيث $P(A) = 1$ فنسميه A **حدث شبه أكيد.**

- إذا وجد حدث A بحيث $P(A) = 0$ فنقول ان A **حدث شبه مستحيل.**

(مثل قياس الطول عند المجموعات المنتهية و القابلة للعد)

- إذا وجد A, B حيث $A \subset B$ فنقول وقوع A $\Leftarrow$ وقوع B

- إذا كان A, B من B فان $A \cup B$ حدث معناه وقوع A **او** وقوع B

و $A - B$ حدث معناه وقوع A **و عدم** وقوع B

$A \cap B$ حدث معناه وقوع A **و** B معا

- إذا كانت $(A_n) \subset \mathrm{B}$ متتالية من الأحداث فان $\bigcup_n A_n$ **حدث** و معناه وقوع **احد** الأحداث A_n على الأقل

كذلك $\bigcap_n A_n$ حدث و معناه وقوع **كل** الأحداث A_n ، $\forall n \in IN$

3.2 خواص الإحتمال :

ينتج من تعريف الاحتمال الخواص الرئيسية التالية :

أ. $P(\phi)=0$

ب. σ- **جمعية** أي $\sum_n P(A_n)$ $P(\dot{\cup} A)_n =$: المتنافية مثنى مثنى $\forall(A_n)$

ج. $P(\Omega)=1$

د. **الجمعية (الجمعية المنتهية)** و هي كما يلي :

$$\forall A, B \in \mathrm{B},\ A \cap B = \phi:\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\forall A, B \in \mathrm{B}\quad \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow \begin{cases} P(A) \leq P(B) \\ P\left(B - A\right) = P(B) - P(A) \end{cases}$$ (P متزايد)

لأن $B = A \dot{\cup} (B - A)$

$$P(B) = P\left(A \dot{\cup} (B - A)\right)$$

$$= P(A) + P(B - A) \quad ...(*)$$

و بما ان $P(B - A) \geq 0$

إذن $P(A) \leq P(B)$

من (*) أيضا و من كون $\mathrm{P(A)} < \infty$ فان $\boldsymbol{P(B) - P(A) = P(B - A)}$

هـ. بما أن $\phi \subset A \subset \Omega$ ، $\forall A \in \mathrm{B}$ فإن $\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$

و. $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

ي. $$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

إذ يمكن استغلال الكتابة $A\cup B=(A-A\cup B)\cup(B-A\cup B)$

م. خاصية الـ σ-جمعية الجزئية : و تعني

$$\forall A\subset \mathrm{B} : P(\underset{n}{\cup} A_n) \le \sum_n P(A_n)$$

لأن
$$\cup A_n = \overset{\bullet}{\underset{n}{\cup}}\left(A_n - \overset{n-1}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\right)$$

$\left(A_n - \overset{n-1}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\right)$ متتالية متنافية مثنى مثنى ، و بالتالي :

$$P(\cup A_n)=P\left(\overset{\bullet}{\underset{n}{\cup}}(A_n - \overset{n-1}{\underset{i=1}{\cup}} A_i)\right)$$

$$= \sum P\left(A_n - \overset{n-1}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\right)$$

$$\le \sum \mathrm{P}(\mathrm{A}_\mathrm{n})$$

لكون $\left(A_n - \overset{n-1}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\right)\subset A_n$

ن. الجمعية الجزئية: $: \forall (A_i)\subset \mathrm{B}$

$$P\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i\right)\le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

و بصفة خاصة
$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$$

ل. الاستمرار المتزايد (A_n) متتالية متزايدة من $\mathcal{B}$ إذن $P(\underset{n}{\cup} A_n)=\lim\limits_{n} P(A_n)$

مع $\lim\limits_{\mathrm{n}} \mathrm{A_n} = \cup \mathrm{A_n}$

لنبرر ذلك. لتكن (B_n) متتالية بحيث

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 - A_1$$

$$B_3 = A_3 - A_2$$

....

$$B_n = A_n - A_{n-1} \qquad \forall n \geq 2$$

(B_n) متنافية مثنى مثنى و هي أحداث مستقرة بالنسبة لـ (-)

نلاحظ أن $A_n = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n}} B_i$

اذن: $\bigcup\limits_n A_n = \dot{\bigcup\limits_n} B_n$

$$P(\bigcup_n A_n) = P(\dot{\bigcup_n} B_n) = \sum_n P(B_n) = \lim \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$$

و منه $= \lim\limits_n P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i) = \lim\limits_n P(A_n)$

ك. الاستمرار المتناقص $P(\bigcap\limits_n A_n) = \lim\limits_n P(A_n)$, متتالية متناقصة $\forall (A_n) \in \mathrm{B}$

مع $\lim A_n = \cap A_n$

لإثبات ذلك يكفي اختيار متتالية $(\pi_n)_n$ متزايدة مع $B_n = \pi_n$ ، و نستعمل ما سبق (في حالة التزايد) باعتبار $P < \infty$.

4.2 مفهوم التجربة العشوائية:

مثال : اذا خلطنا مجموعة من الكريات في صندوق ثم سحبنا منها كرة عن طريق الصدفة ، فإننا نقول أننا **أجرينا تجربة عشوائية** . يمكن اعتبار التجارب العشوائية التالية:

* إلقاء زهرة نرد.

*إلقاء قطعة نقد.

*إلقاء مجموعة من القطع النقدية.

*إلقاء قطعة نقد عدة مرات.

فتكون النتائج الممكنة لـ Ω كما يلي :

ا) **إلقاء قطعة نقد** $\Omega = \{F, P\}$.

حيث F الوقوع الوجه Face

P الوقوع الوجه Pile

نلاحظ أن $Card\Omega = 2$ ، اذن $B = P(\Omega) = \{\phi, \Omega, \{F\}, \{P\}\}$

ب) القاء قطعة نقد مرتين: (أو قطعتي نقد)

$$\Omega = \{(F, F), (F, P), (P, F), (P, P)\}$$

$\mathrm{Card}\Omega = 2^2 = 4$ و $B = P(\Omega)$

ج) إلقاء زهرة نرد مرتين : $\Omega = \{1,2,.....6\} \times \{1,2,.....6\}$

$$= \{(1,1), (1,2), ...(1,6), (2,1), (2,2), ...(2,6), ...\}$$

$$\mathrm{Card}\Omega = 6^2 = 36$$

5.2 الحدث الابتدائي (الأولي): إن لكل تجربة مجموعة من النتائج الممكنة

$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, ...w_n .....\}$$

يدعى كل منها **حدثا ابتدائيا.**

فإذا حدث واحد منها بعد التجربة فان كل الأحداث الأخرى لن تقع أي الأحداث الابتدائية متنافية مثنى مثنى.

مثال:

ا) إلقاء قطعة نقد $\Omega=\{w_1,w_2\} \quad w_1=F, w_2=P$

ب) إلقاء قطعة نقد مرتين $w_1=(F,F), w_2=(F,P), w_3=(P,F), w_4=(P,P)$

عدد الأحداث الابتدائية هو عدد عناصر Ω التي يمكن أن تكون منتهية ، أو قابلة للعد أو لها قدرة المستمر.

6.2 الحدث المركب: كل مجموعة $A\subseteq\Omega$ مكونة من عنصرين أو أكثر يمكن اعتبارها **حدثا مركبا**.

مثال: عند إلقاء حجر نرد $\Omega=\{1,2,...6\}$

$A=\{1,2,3\}$ و $\overline{A}=\{4,5,6\}$

فاذا أجرينا التجربة و ظهر بعد ذلك 1 أو 2 أو 3 فنقول أن الحدث A قد وقع.

أما إذا ظهر 4 أو 5 أو 6 فنقول أن $\overline{\mathrm{A}}$ قد وقع.

و عموما إذا كان w حدث ابتدائي $(w\in\Omega)$ وظهر w :

1) فنقول أن A قد وقع اذا كان $(w\in A)$

2) و نقول أن A لم يقع إذا كان $(w\notin A)$

و بما ان $(w\in\Omega)$ دوما فان Ω تسمى الحدث الأكيد .

و بالمثل $\forall w, w\notin\phi$ فان ϕ تسمى الحدث المستحيل .

7.2 فرضية التماثل :

إن ابسط الحالات في حساب الاحتمال هي تلك التي تتعلق بتجارب تتصف بعدد منته من الأحداث الابتدائية و تكون الأحداث الإبتدائية متساوية الإحتمال، أي ان (النتائج الممكنة) $:Card\Omega=N$

$$P(w_1)=P(w_2)=.......=P(w_N)$$

خلاصة: $\quad 1\le i\le N \qquad P(w_i)=P=Cte$

فنجد $\quad 1=P(\Omega)=P(\{w_1,w_2,.........w_N\})$

$$=P(\overset{n}{\underset{i=1}{\overset{\oplus}{\cup}}}\{w_i\})=\sum_{i=1}^{N}P(w_i)=P\times N$$

إذن $\quad \forall i: P(w_i)=P=\dfrac{1}{N}=\dfrac{1}{Card\Omega}$

و من اجل حدث A (مركب أو ابتدائي)

$$P(A)=P(\overset{\bullet}{\underset{w_i\in A}{\cup}}\{w_i\})=P\times CardA$$

إذن $\quad \forall A\in P(\Omega): \quad P(A)=\dfrac{CardA}{Card\Omega}$

ونقول أن احتمال وقوع A هو نسبة عدد الحالات الموافقة لحدوثه على عدد الحالات الممكنة للتجربة.

مثال: عند إلقاء قطعة نقد متماثلة الوجهين نجد

$$\Omega=\{F,P\} \qquad / \quad P(\Omega)=P(F)+P(P)=1$$

و منه $\quad P(F)=P(P)=\dfrac{1}{2}$

8.2 عدم التماثل: عموما يمكن أن لا يتوفر تماثل في الاحتمالات بين الأحداث الابتدائية، فنجد في قطعة نقد غير منتظمة الوجهين أن :

$$P(P)=P_2 \quad \text{و} \quad P(F)=P_1$$

مع $\quad P_1+P_2=1$ و $P_1,P_2>0$

و في حجر نرد غير منتظم الوجوه $\quad P(w_i)=P_i \quad 1\le i\le 0$

مع $\quad \sum_{i=1}^{n} P_i=1 \quad$ و $\quad Pi>0$

9.2 حالات أخرى لـ Ω :

1) Ω **قابلة للعد:** $\quad \Omega=\{w_1,w_2,........w_n.....\}$ واضح أن $|\Omega|=\infty$.

فادا وضعنا $\quad P(w_n)=P_n \quad$ مع $\quad P_n>0, \quad$ و $\quad \sum_n P_n=1$

فإن $\quad P(A)=P(\dot{\bigcup}_{w_i\in A}\{w_i\})=\sum_{w_i\in A}P(w_i) \quad \forall A\in \mathrm{P}\ (\mathrm{E})\ :$

مثال: $\quad n\in IN^* \quad P(w_n)=P_n=\dfrac{6}{\pi^2 n^2}=1$

$$P_n\ge 0, \qquad \sum_{n\ge 1}P_n=\sum_{n\ge 1}\frac{6}{\pi^2 n^2}=1$$

2) Ω **لها قدرة المستمر** : كأن تكون $\quad \Omega=[a,b]$

يمكن اعتباران التجربة تتمثل في اختيار عشوائي لنقطة x_0 من هذا المجال .

و إذا كان $\quad [c,d]=A\subset\Omega \quad$ فنقبل الخاصية :

$P(A)=\alpha.\lambda(A) \quad$ (قياس الطول = λ ، $\alpha>0$)

$$=\alpha(d-c)$$

و منه $\quad 1=P(\Omega)=\alpha.\lambda(\Omega)=\alpha(b-a)$

أي $\quad \alpha=\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{1}{\lambda(\Omega)}$

ينتج $$P(A)=\frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$$

احتمال الحصول على نقطة x_0 هو : $\mathrm{P}(\{x_0\})=\frac{0}{\lambda(\Omega)}=0$ إذن فهو حدث شبه مستحيل.

احتمال الحصول على عدد كسري من المجال :

$$P(Q\cap[a,b])=\frac{\lambda(Q\cap[a,b])}{\lambda(\Omega)}$$

$$=0$$

اذا سمينا $Q_1=Q\cap[a,b]$ فان Q_1 حدث شبه مستحيل .

احتمال الحصول على عدد أصم : $\overline{\mathrm{Q}_1}=\Omega-\mathrm{Q}_1$

إذن حدث شبه أكيد $\overline{Q_1}$ $P(\overline{Q_1})=1-P(Q_1)=1$

مثال : يمكن اعتبار التجربة تتمثل في لعبة رشق لوح معلق في جدار A جزء من هذا اللوح بسهم , و نعمم إلى قياس المسافة في المستوى و نكتب:

$$\forall A\in \mathrm{B}\quad P(A)=\frac{A\ \text{مساحة}}{\Omega\ \text{مساحة}}$$

10.2 الاحتمال الشرطي :

حيث $(\Omega,\mathcal{B},P)$ فضاء احتمال. A حدث بحيث $P(A)\neq 0$. إذا علمنا أن A قد وقع فيمكن عند ئذ الحصول على فضاء احتمالي جديد $(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P_A})$

$$\forall B\in \mathrm{B},\ P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

و عموما $P_A(B) \neq P(B)$

و نلاحظ أن $1)\quad P_A(\phi)=0$

$2\,)\quad P_A(\Omega)=1$

$3\,)\quad \forall (B_n) \subset \mathrm{B}$ متنافية مثنى مثنى $(B_n)_n$

$$P_A\left(\dot{\cup} B_n\right)=\frac{P\left(A\cap\left(\dot{\cup} B_n\right)\right)}{P(A)}$$

$$=\frac{P\left(\dot{\cup}_n (A\cap B_n)\right)}{P(A)}$$

$$=\sum_n \frac{P\left(A\cap B_n\right)}{P(A)}=\sum_n P_A(B_n)$$

P_A هو احتمال على B و يسمى **الاحتمال الشرطي** علما أن A قد وقع .

مثال: القينا حجر نرد و لدينا $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{4,5,6\}$ إذن

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

إذا علمنا أن A قد وقع ، فيصبح عدد النتائج الممكنة هو $CardA=4$

وذلك بعدما كان هو $Card\Omega=6$.

و يصبح عدد الحالات الممكنة لـ B هو $Card(A\cap B)=1$ بعدما كان

$CardB = 3$

إذن $$P_A(B) = \frac{1}{4} = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)} \neq P(B) = \frac{1}{2}$$

و منه $$P_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{CardA}$$

$$= \frac{\frac{Card(A \cap B)}{Card\Omega}}{\frac{CardA}{Card\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

نصطلح على الكتابة $$P_A(B) = P\left(B/A\right)$$

نتيجة: ينتج من تعريف الاحتمال الشرطي أن من اجل حدثين A و B من العشيرة B لدينا

$$P(A \cap B) = P(A).P\left(B/A\right)$$
$$= P(B).P\left(A/B\right)$$

ونقول أن احتمال وقوع حدثين معا هو احتمال وقوع احدهما مضروبا في احتمال الآخر علما أن الأول قد وقع.

مثال: وعاء يحتوي على 12 كرة 5 كرات خضراء، 7 زرقاء سحبنا كرتين دفعة واحدة (سحب دون إرجاع و دون مراعاة الترتيب). ما هو احتمال أن يكونا زرقاوين ؟

نضع A_1 حدث ظهور كرة زرقاء في المرة الأولى

A_2 حدث ظهور كرة زرقاء في المرة الثانية

يصبح $A = A_1 \cap A_2$ هوحدث ظهور كرتين زرقاوين. إذن

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P\left(A_2 / A_1\right) = \frac{C_7^1}{C_{12}^1} \times \frac{C_6^1}{C_{11}^1} = \frac{7}{12}.\frac{6}{11} = \frac{C_7^2}{C_{12}^2} = \frac{7}{22}$$

11.2 الاحتمال الكلي:

قضية: (Ω, B, P) فضاء احتمالي . الأحداث $A_1, A_2, ...A_n$ تجزئة لـ Ω

(متنافية مثنى مثنى ، $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$).

اذا كان B حدث ($B \in \mathrm{B}$) فعند ئذ لدينا

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P\left(B / A_i\right)$$

البرهان:

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i \right) = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} (B \cap A_i)$$

و من جهة أخرى $$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

و $$P(B) = P(A_i).P(B / A_i)$$

حالة خاصة: $n = 2$ $\quad A_1 = A, \quad A_2 = \overline{A}$

اذن $$\forall B \in \mathrm{B}: \quad P(B) = P(A).P\left(B / A\right) + P(\overline{A}).P\left(B / \overline{A}\right)$$

مثال: وعاءين يحتوي الأول على 5 كرات، 3 حمر و زرقاوين و يحتوي الثاني على 2 حمر و 8 زرقاء و لهما نفس الأفضلية للسحب . ما هو احتمال سحب كرة حمراء ؟

الحل: نضع H حدث ظهور كرة حمراء

A_1 سحب كرة من الوعاء الأول (A)

A_2 سحب كرة من الوعاء الثاني $(\overline{A})$

إذن

$$P(H) = P(A_i).P\left(H/A_1\right) + P(A_2).P(H/A_2)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{C_3^1}{C_5^1} + \frac{1}{2}.\frac{C_2^1}{C_{10}^1}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{3}{5} + \frac{1}{2}.\frac{2}{10} = \frac{2}{5}$$

12.2 قاعدة بايز Bayes (احتمال السبب) :

اذا كانت $A_1, A_2, ...A_n$ تجزئة للحدث الأكيد Ω و كان $B \in \mathrm{B}$ في الفضاء (Ω, B, P) فلدينا:

$$\forall j \in \{1,2,.......n\} \quad : \quad P\left(A_j/B\right) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_j).P\left(B/A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)}$$

و منه
$$P\left(A_j/B\right)=\frac{P(A_j).P\left(B/A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i).P\left(B/A_i\right)}$$

و هذا ينتج من تعريف الاحتمال الشرطي، و من القضية السابقة، و يمكن أن ننظر إلى الأحداث $(A_i)_{i=1,n}$ على أنها تمثل دور الأسباب التي أدت إلى وقوع الحدث B وذلك أن احدهما فقط يقع.

فإذا وقع B فان احتمال أن يكون A_j هو السبب هو الاحتمال :

$$P\left(A_j/B\right)=\frac{P(A_j).P\left(B/A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i).P\left(B/A_i\right)}$$

ملاحظة: يمكن أن تكون $A_1,A_2,....A_n...$ (أحداث غير منتهية) أي $\Omega=\bigcup_n A_n$. أي يمكن أن تكون تجزئة لـ Ω غير منتهية و قابلة للعد و تبقى قاعدة بايزصحيحة .

مثال : ثلاث آلات H_1,H_2,H_3 تنتج على الترتيب 40% ،35% ،25% من إنتاج مصنع ما. نفرض أن 2 % ، 4 % و 5% من إنتاج هده الآلات رديء.

أخذنا عينة من هذا الإنتاج و وجدناها رديئة .

ما هو احتمال أن تكون من إنتاج الآلة H_1 ؟

الحل : حسب قاعدة بايز نضع

A_i السلعة من إنتاج H_i $\qquad 1 \le i \le 3$

B سحبنا سلعة رديئة

المقصود إذن هو حساب $P\left(A_1/B\right)$. لدينا :

$$P\left(A_1/B\right) = \frac{P(A_1).P\left(B/A_1\right)}{P(A_1).P\left(B/A_1\right) + P(A_2).P\left(B/A_2\right). + P(A_3).P\left(B/A_3\right)}$$

حيث

$P(A_3) = 0,4 \qquad P(A_2) = 0,35 \qquad \begin{cases} \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = 0,025 \\ \mathrm{P}\left(B/A_1\right) = 0,05 \end{cases}$

$P\left(B/A_3\right) = 0,02 \qquad P\left(B/A_2\right) = 0,04$

إذن $\qquad P\left(A_1/B\right) = \dfrac{125}{345}$

13.2 استقلال الأحداث:

1) الحدثان المستقلان : إذا كان $A, B \in \mathrm{B}$ حدثان و كان وقوع A **لا** يؤثر في احتمال وقوع B ، فإن :

$$P\left(B/A\right) = P(B)$$

فنقو ل أن A و B **حدثان مستقلان**.

و بما ان $\qquad P\left(B/A\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

فان: A و B **مستقلان** $\Leftrightarrow \boldsymbol{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$

و نرمز لذلك بـ $\mathrm{A} \amalg \mathrm{B}$.

مثال1: عندما نلقي قطعة نقد مرتين ، فان كل أحداث المرة الأولى مستقلة عن أحداث المرة الثانية.

مثال 2 : عندما نسحب من صندوق كرات مرتين مع الإرجاع ، فان الأحداث المتعلقة بالمرة الأولى ، مستقلة من أحداث المرة الثانية .

مثال 3 : رمى شخصان في اتجاه لوح واحد معلق في جدار ، و احتمال

اصابتهما للهدف هو $\frac{4}{10}$ للأول و $\frac{7}{10}$ للثاني. ما احتمال إصابة الهدف؟

نضع A_1 إصابة الأول الهدف $P(A_1)=\frac{4}{10}$

نضع A_2 إصابة الثاني الهدف $P(A_2)=\frac{7}{10}$

$A=A_1\cup A_2$ حدث إصابة الهدف ، إذن علينا حساب $P(A_1\cup A_2)$

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$$

و بملاحظة ان A_1 و A_2 مستقلان ينتج ان $P(A_1\cap A_2)=P(A_1).P(A_2)$

و بالتالي :

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1).P(A_2)$$

أي $$P(A_1\cup A_2)=\frac{4}{10}+\frac{7}{10}\quad\frac{28}{100}=\frac{82}{100}=\frac{41}{50}$$

ملاحظة: يجب أن ننتبه إلى **الفرق** بين استقلال حدثين و بين تنافيهما ، فإذا كان الحدثان متنافيان[1] فهما عموما مستقلين ، لأن وقوع احدهما يدل على أن الآخر لم يحدث.

مثلا: عند إلقاء قطعة نقد $\Omega = \{F, P\}$

$$A = \{F\}, B = \{P\} \Rightarrow A \cap B = \phi$$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(A \cap B) = 0$$

لكن شرط الاستقلال $0 = P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{4}$ (مستحيل)

الأمر الذي يدل على أن A, B غير مستقلين.

3) استقلال ثلاثة أحداث: نقول أن الأحداث الثلاثة A_1, A_2, A_3 مستقلة

إذا تحقق ما يلي :

$$\begin{cases} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1).P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2).P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) \end{cases}$$

مثال: القينا حجر نرد مرتين

$|\Omega| = 36$ و $\Omega = \{(1,1)..........(0,6)\}$. نضع :

A_1 ظهور عدد زوجي في المرة الأولى

A_2 ظهور عدد فردي في المرة الثانية

A_3 ظهور مجموع زوجي

---

[1] $(A \cap B = \phi)$

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{2}$$

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1\cap A_3)=P(A_2\cap A_3)=\frac{1}{4}$$

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(\phi)=0$$

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1).P(A_2) \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{A}_1 \coprod \mathrm{A}_2$$

$$P(A_1)\cap P(A_3)=P(A_1).P(A_3) \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{A}_1 \coprod \mathrm{A}_3$$

$$P(A_2)\cap P(A_3)=P(A_2).P(A_3) \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{A}_2 \coprod \mathrm{A}_3$$

و

$$0=P(A_1\cap A_2\cap A_3)\neq P(A_1).P(A_2).P(A_3)=\frac{1}{8}$$

واضح أن $0\neq\frac{1}{8}$

نلاحظ أن هذه الأحداث مستقلة مثنى مثنى و لكنها ليست مستقلة.

التعميم : من اجل الأحداث $A_1, A_2.......A_n$ نقول أنها مستقلة إذا و فقط إذا كان :

$$\forall I\subset\{1,.....n\}:\quad CardI\geq 2:\quad P\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}^{n}P(A_i)$$

فنحصل على عدد من العلاقات هو :

$$C_n^2+C_n^3+.......+C_n^n=2^n-n-1$$

3) العشائر المستقلة :

تعريف : ليكن لدينا الفضاء الاحتمالي (Ω, B, P) و لتكن B_1 و B_2 عشيرتين جزئيتين من B.

نقول أنهما **مستقلتان** إذا تحقق ما يلي :

$$\forall X \in \mathcal{B}_1,\ \ \forall Y \in \mathcal{B}_2 \Rightarrow X \coprod Y$$

التعميم : نقول أن العشائر الجزئية B_1 و B_2 من B **مستقلة** إذا كان

$$\forall A_i \in B \quad i=1,\dots\dots n: \quad P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

نتيجة : اذا كانت $A_1, A_2 \dots\dots A_n$ مستقلة فإن $\overline{A_1}, \overline{A_2} \dots\dots \overline{A_n}$ مستقلة لأن

استقلال $(A_i)_{i=1,n}$ يجعل العشائر الجزئية $(B(A_i))_{i=1,n}$ مستقلة و لكن

$\forall i=1\dots n \ \ (B(A_i))=(B(\overline{A_i}))$ فتكون $(B(\overline{A_i}))$ مستقلة و ينتج

أن $(\overline{A_i})$ مستقلة.

تطبيق: 1) إذا كان $A_1, A_2 \dots\dots A_n$ مستقلة ، بين أن $\overline{A_1}, \overline{A_2} \dots\dots \overline{A_n}$ مستقلة

و أن
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$$

الحل:

أن $(\overline{A_i})$ مستقلة لكون (A_i) مستقلة

و لدينا
$$P(\cup A_i)=1-P(\overline{\cup A_i})$$

$$=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right)=1-\prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$$

2) نلقي حجر نرد 9 مرات. ما احتمال ظهور 3 مرة واحدة على الأقل ؟

$|\Omega|=6^9$ نسمي A حدث ظهور 3 مرة واحدة على الأقل

A_i هو ظهور 3 خلال المرة i : $i=1,\dots\dots 9$

$$A=\bigcup_{i=1}^{9} A_i$$

إن $\left(A_i\right)$ مستقلة و كذلك $\left(\overline{A_i}\right)$

$$P\left(A_i\right)=\frac{1}{6} \qquad , \qquad P\left(\overline{A_i}\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

بالتالي
$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{9} A_i\right)=1-\prod_{1}^{9} P\left(\overline{A_i}\right)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^9$$

تمارين حول الإحتمالات

تمرين 1 : ندرج حجري نرد متوازنين، عين الأحداث التالية واحتمالاتها :

Ω : ظهور الحدث الأكيد.

A_1 : ظهور 1 الحجر الأول و 3 في الحجر الثاني

A_2 : ظهور الرقمين 1،3 معا.

A_3 : ظهور 1 في احدهما على الأقل.

A_4 : ظهور مجموع = 7.

A_5 : ظهور مجموع ≤ 8

A_7 : ظهور مجموع > 8 ، $A_2 \cap A_4$ ، $A_2 \cap A_6$ ، $A_4 - A_3$

تمرين 2 : نضع بصفة عشوائية 3 رسائل في 6 صناديق ، ما احتمال وجود الرسائل في صناديق مختلفة ؟

تمرين 3 : (Ω, B, P) فضاء احتمال. $A, B \in \mathrm{B}$ بحيث $P(A)=\frac{1}{3}$

$P(B)=\frac{1}{4}$ ، $P(A \cap B)=\frac{1}{5}$. احسب :

$(\overline{A}=\Omega - A)$ $P(\overline{A})$ ، $P(A \cup B)$ ، $P(A-B)$ ، $P(A \cup \overline{B})$

تمرين 4 : وعاء يحتوي 12 كرة، 3 كرات حمر، 5 زرق و 4 صفر سحبنا كرتين دفعة واحدة. ما احتمال أن يكونا من نفس اللون ؟

تمرين 5 : وعاء يحتوي 20 كرة منها 5 حمر و 6 زرق و 7 خضر و 2 صفر .

ا) إذا سحبنا 3 كرات دفعة واحدة، فما هو احتمال أن تكون حمراء؟

ب) إذا سحبنا 5 كرات دفعة واحدة، فما هو احتمال ظهور 3 حمراء و 2 خضر ؟

ج) إذا سحبنا 12 كرات دفعة واحدة، فما هو احتمال ظهور 3 خضر و ظهور 3 حمر و 4 زرق ؟

تمرين 6 : إذا كان الحدث A مستقلا عن نفسه، فبين انه إما شبه أكيد أو شبه مستحيل .

تمرين 7 : بين أن الحدثين A, ϕ مستقلان ، و كذلك A, Ω ، وذلك $\forall A \in \mathrm{B}$

تمرين 8 : إذا كان $\mathrm{A} \amalg \mathrm{B}$ فبيِّن أن $\mathrm{A} \amalg \overline{\mathrm{B}}$ ، $\overline{\mathrm{A}} \amalg \mathrm{B}$ ، $\overline{\mathrm{A}} \amalg \overline{\mathrm{B}}$ ، و أن $\mathrm{B}(\mathrm{A}) \amalg \mathrm{B}(A)$.

تمرين 9 : بين $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P\left(\frac{A_2}{A_1}\right).P\left(\frac{A_3}{A_1 \cap A_2}\right)$

ثم عمم العلاقة إلى n حدثا.

تطبيق: وعاء يحتوي 13 كرة، 6 حمراء 4 زرقاء، 3 صفراء سحبنا 5 كرات دفعة واحدة، ما احتمال أن تكون حمراء ؟

تمرين 10 : نعتبر التجربة تتمثل في إلقاء قطعة نقد متوازنة عددا لا نهائيا من المرات. A هو الحدث عدم ظهور القفا خلال التجربة.

بيِّن أن A حدث شبه مستحيل .

تمرين 11 : نلقي حجر نرد غير متوازن بحيث:

$$P(1) = P(3) = P(5) = \frac{1}{21} \quad \text{و} \quad P(2) = P(4) = P(6) = \frac{6}{21}$$

احسب احتمالات الأحداث التالية :

$$A_1 = \{1,3\} \ , \ A_2 = \{3,4,6\} \ , \ A_2 - A_1 \ , \ A_1 \cup A_2 \ , \ A_2 \cup \overline{A}_1$$

حلـول التمارين

حل التمرين 1 : ندحرج حجري نرد متوازيين نعين الأحداث :

1) Ω الحدث الأكيد

عند إلقاء حجر واحد نجد $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$

عند إلقاء حجرين

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),.......,(1,6),(2,1),.....,(2,6),........(6,5),(6,6)\}$$

مع $Card\Omega = (Card\Omega_1)^2 = 6^2 = 36$

2) A_1 ظهور 1 في الحجر الأول و 3 في الحجر الثاني

$$A_1 = \{(1,3)\}$$

3) A_2 ظهور الرقمين 1 و 3 معا، (هذه العبارة تعني 1 في الأول و 3 في الثانية أو 1 في الثانية و 3 في الأولى)

$A_2 = \{(1,3),(3,1)\}$ و بذلك $CardA_2 = 2$

4) A_3 ظهور 1 في احدهما على الأقل : الإمكانيات هي إذن

و بذلك $CardA_3 = 11$

$$A_3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$$

5) A_4 ظهور مجموع = 7 : الإمكانيات هي:

$CardA_4 = 6$ و بذلك $A_4 = \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$

6) A_6 ظهور مجموع > 8 (A_5 ظهور مجموع ≤ 8)

$$A_6 = \overline{A_5} \Rightarrow P(A_6) = P(\overline{A_5}) = 1 - P(\overline{A}_5)$$

$$= 1 - \frac{cardA_5}{Card\Omega}$$

$$= 1 - \frac{15}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

7) تعيين $A_2 \cap A_4$: نلاحظ أن $A_2 \cap A_4 = \phi$ ومنه $P(A_2 \cap A_4) = 0$

8) تعيين $A_2 \cap A_6$ نلاحظ أن : $A_2 \cap A_6 = A_2$ ومنه

$$P(A_2 \cap A_4) = P(A_2) = \frac{cardA_2}{card\Omega} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

9) تعيين $A_4 - A_3$: لدينا

$$A_4 - A_3 = \{(2,5),(3,4),(4,3),(5,2)\}$$

و منه

$$P(A_4 - A_3) = \frac{Card(A_4 - A_3)}{Card\Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

حل التمرين 2 : نضع 3 رسائل في 6 صناديق بصفة عشوائية، لنحسب ما احتمال وجود الرسائل في صناديق مختلفة .

نضع Ω هو حدث وضع 3 رسائل في 6 صناديق إذن $Card\Omega = 6^3$. (عدد التطبيقات من مجموعة الرسائل إلى مجموعة الصناديق) :

نسمي A حدث وجود الرسائل الثلاث في 3 صناديق مختلفة ، ومنه

$$CardA = A_6^3 \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{A_6^3}{6^3}$$

حل التمرين 3 : (Ω, B, P) فضاء احتمال $A, B \in \mathrm{B}$. لدينا :

$P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ ، لنحسب :

$$P(\overline{A}) = P(\Omega - A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

لأن
$$P(\Omega) = P\left(A \dot{\cup} \overline{A}\right) = P(A) + P(\overline{A})$$

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = P(\Omega) - P(A) = (1 - P(A))$$

أيضا

$$A \cup B = A \dot{\cup} (B - A)$$

ينتج أن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A \cap B)$$

ومنه
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{23}{60}$$

لنحسب الآن $P(A - B)$

$$\begin{cases} A - B = A - A \cap B \\ A \cap B \subset A \end{cases}$$

إذن
$$P(A - B) = P(A - A \cap B)$$

$$= P(A) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

لنحسب الآن $P(A \cup \overline{B})$

$$\begin{aligned} P(A \cup \overline{B}) &= P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + (1 - P(B)) - P(A - B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{19}{20} \end{aligned}$$

طريقة أخرى :

$$\begin{aligned} P(A \cup \overline{B}) &= P(\overline{\overline{A} \cap B}) \\ &= 1 - P(\overline{A} \cap B) \\ &= 1 - P(B - A) \\ &= 1 - (P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{19}{20} \end{aligned}$$

تمرين 4 : وعاء يحتوي 12 كرة ، 3 حمر، 5 زرقاء و 4 صفر، سحبنا كرتين دفعة واحدة بدون إرجاع و بدون مراعاة الترتيب . لنحسب :

1. احتمال أن يكونا من نفس اللون:

نضع Ω حدث سحب كرتين من مجموع 12 (دفعة واحدة) إذن $Card\Omega = C_{12}^{2}$

نضع A حدث ظهور كرتين من نفس اللون ، لكن A مركب من :

A_1 ظهور كرتين حمراوين من 3 حمر

A_2 ظهور كرتين زرقاوين من 5 زرقاء

A_3 ظهور كرتين صفراوين من 4 صفر

أي $A = \overset{3}{\underset{i=1}{\dot{\cup}}} A_i$

لدينا

$$\begin{cases} CardA_1 = C_3^2 \\ CardA_2 = C_5^2 \\ CardA_3 = C_4^2 \end{cases}$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$= \frac{C_3^2 + C_5^2 + C_4^2}{C_{12}^2}$$

2 . احتمال ظهور كرتين مختلفتين:

هذا الحدث هو الحدث المعاكس للذي سبق، إذن احتمال ظهور كرتين مختلفتين هو: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

حل التمرين 5 : وعاء يحتوي 20 كرة ، 5 كرات حمراء ، 6 زرقاء ، 7 خضراء و 2 صفراء

1) سحبنا 3 كرات دفعة واحدة . لنحسب احتمال أن تكون حمراء

نسمي Ω حدث سحب 3 كرات من 20 كرة دفعة واحدة و نسمي A حدث ظهور 3 كرات حمراء

و منه

$$Card\Omega = C_{20}^3$$
$$CardA = C_5^3$$

$$P(A)=\frac{C_6^3}{C_{20}^3}$$

2) سحبنا 5 كرات دفعة واحدة . لنحسب احتمال ظهور 3 حمراء و 2 خضراء

نسمي Ω حدث سحب 5 كرات من 20 دفعة واحدة و نسمي B حدث ظهور 3 حمراء و 2 خضراء

عدد إمكانيات سحب 3 حمر C_5^3

عدد إمكانيات سحب 2 خضر C_7^2

إذن $|B|=C_5^3\times C_7^2$

$$P(B)=\frac{C_5^3\times C_7^2}{C_{20}^5}$$

3) سحبنا 12 كرات من 20 كرة دفعة واحدة $Card\Omega=C_{20}^{12}$ ، لنحسب احتمال ظهور 3 خضراء:

نسمي A حدث سحب 12 كرة منها 3 خضراء و 9 بالألوان الأخرى، إذن:

$$CardA=C_5^3C_{15}^9$$

و منه
$$P(A)=\frac{C_5^3C_{15}^9}{C_{20}^{12}}$$

4) لنحسب الآن احتمال ظهور 3 حمراء و 4 زرقاء

نسمي Ω حدث سحب 12 كرة من 20 دفعة واحدة إذن $|\Omega|=C_{20}^{12}$

نسمي B حدث ظهور 3 حمراء و 4 زرقاء ، إذن

$$|B| = C_5^3.C_6^4.C_9^5$$

$$P(B) = \frac{C_5^3.C_6^4.C_9^5}{C_{20}^{12}}$$

حل تمرين 6 : إذا كان الحدث مستقلا عن نفسه ، فلنبين انه إما شبه أكيد أو شبه مستحيل

$$A \coprod A \Leftrightarrow P(A \cap A) = P(A).P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A) = P^2(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A).(P(A) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(A) = 0 \\ \vee \\ P(A) = 1 \end{cases}$$

إذن A شبه أكيد أو A شبه مستحيل.

حل التمرين 7 : لنبين أن A و ϕ مستقلان وكذلك و A و Ω

و ذلك من اجل كل حدث A .

لدينا التكافؤ التالي $A \coprod B \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$

اذن $A \coprod \phi \Leftrightarrow P(A \cap \phi) = P(A).P(\phi)$

لدينا $P(A \cap \phi) = P(\phi) = 0$

من جهة أخرى $P(A).P(\phi) = P(A) = 0$

$$= 0$$

اذن A و ϕ مستقلان.

كذلك $A \coprod \Omega \Leftrightarrow P(A \cap \Omega) = P(A).P(\Omega)$

لدينا $P(A\cap\Omega)=P(A)$

أيضا $P(A).P(\Omega)=P(A).1=P(A)$

ينتج أن A و ϕ مستقلان

حل التمرين 8 : لنبرهن أنه اذا كان $A\amalg B$ فان $\overline{A}\amalg\overline{B}$, $\overline{A}\amalg B$, $A\amalg\overline{B}$

و ان $\mathrm{B}(A)\amalg\mathrm{B}\ (B)$

1) نبرهن $\overline{A}\amalg\overline{B}$. لدينا :

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A-B)=P(A-(A\cap B))$$

$$=P(A)-P(A\cap B)$$

$$=P(A)-P(A).P(B)\qquad \text{لأن } (A\amalg B)$$

$$=P(A)(1-P(B))$$

$$=P(A).P\left(\overline{B}\right)$$

إذن بالفعل $\left(A\amalg\overline{B}\right)$.

2) نبرهن $\left(\overline{A}\amalg B\right)$ لدينا

$$P\left(\overline{A}\cap B\right)=P\left(B\cap\overline{A}\right)$$

$$=P(B-A)=P(B-A\cap B)$$

$$=P(B)-P(B\cap A)$$

$$=P(B)-P(B).P(A)$$

$$=P(B).(1-P(A))=P(B).P\left(\overline{A}\right)$$

و منه $\left(\overline{A}\amalg B\right)$.

3) نبرهن أن $A\amalg\overline{B}$ $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\
&= 1 - \mathrm{P}(A) - P(B) + P(A).P(B) \\
&= P(\overline{A}) - P(B)(1 - P(A)) \\
&= P(\overline{A}) - P(B).P(\overline{A}) \\
&= P(\overline{A})(1 - P(B)) \\
&= P(\overline{A})(P(\overline{B}))
\end{aligned}
$$

إذن بالفعل $(\overline{A} \amalg \overline{B})$.

4) برهان أن $\mathrm{B}(A) \amalg \mathrm{B}(B)$

لدينا $\mathrm{B}(A)$ هي اصغر عشيرة مولدة بـ A و منه $\mathrm{B}(A) = \{\phi, \Omega, A, \overline{A}\}$

تعريف استقلال عشيرتين: نلاحظ أن

(من أجل $\mathrm{A} \amalg \mathrm{B}$) $\forall \mathrm{X} \in \mathrm{B}(A), \ \forall Y \in \mathrm{B}(B) \Rightarrow X \amalg Y$

نلاحظ بذلك أن $\mathrm{B}(A)$ و $\mathrm{B}(B)$ مستقلتين

حل التمرين 9 : من أجل الأحداث A_1, A_2, A_3 لنبين ان :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P\left(A_2 / A_1\right).P\left(A_3 / A_1 \cap A_2\right)$$

لدينا

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P((A_1 \cap A_2) \cap A_3)$$

$$= P(A_1 \cap A_2).P(A_3 / A_1 \cap A_2)$$
$$= P(A_1).P(A_2 / A_1).P(A_3 / A_1 \cap A_2)$$

مهم :

2) تعميم العلاقة في حالة الأحداث $A_1, A_2, ...A_n$

نبرهن انه: $\forall n \in IN \ : P(A_1 \cap A_2 \cap ...... \cap A_n)$

$$= P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2)...P(A_n / A_1 \cap ..... \cap A_{n-1}))$$

بالتراجع : $n = 2$ الخاصية محققة نفرض صحتها من اجل n ، نبرهنها من اجل $n+1$

$$P(A_1 \cap .... \cap A_n \cap A_{n+1})$$
$$= P\left(\left(\underbrace{A_1 \cap .... \cap A_n}_{D}\right) \cap A_{n+1}\right)$$
$$= P(D \cap A_{n+1}) = P(D).P(A_{n+1} / D)$$
$$= P(A_1 \cap .... \cap A_n)P(A_{n+1} / A_1 \cap .... \cap A_n)$$
$$= P(A_1)P\left(\frac{A_2}{A_1}\right)P(A_3 / A_1 \cap A_2)....P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$
$$....P(A_{n+1} / A_1 \cap ....A_n)$$

و منه

$\forall n \in IN^* \ :$

$$P(A_1 \cap ......A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2)......P\left(\frac{A_n}{A_1 \cap .....A_{n-1}}\right)$$

تطبيق : وعاء يحتوي 13 كرة، 6 حمراء، 4 زرقاء و 3 صفراء, سحبنا 5 كرات دفعة واحدة. ماحتمال أن تكون حمراء؟

الحل: A_i ظهور كرة حمراء في المرة i: $\quad i = 1,..,5$

A ظهور 5 كرات حمر $\quad P(A)=P\left(\bigcap_{i=1}^{5}A_i\right)$

$$=P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1\cap A_2).P(A_4/A_1\cap A_2\cap A_3).P(A_5/A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)$$

$P(A_1)=\dfrac{C_6^4}{C_{13}^1}$ و $P(A_2/A_1)=\dfrac{C_5^1}{C_{12}^1}$ و $P(A_3/A_1\cap A_2)=\dfrac{C_4^1}{C_{11}^1}$ و

$P(A_4/A_1\cap A_2\cap A_3)=\dfrac{C_3^1}{C_{10}^1}$ و $P(A_5/A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=\dfrac{C_2^1}{C_9^1}$

بالتالي $\quad P(A)=\dfrac{5}{13}.\dfrac{5}{12}.\dfrac{4}{11}.\dfrac{3}{10}.\dfrac{2}{9}=\dfrac{C_6^5}{C_{13}^5}$

3. المتغير العشوائي الحقيقي

1.3 تعريف المتغير العشوائي الحقيقي:

ليكن $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ فضاء احتمال ونعتبر التطبيق :

$$X : (\Omega, \mathcal{B}, P) \to (IR, \mathcal{B}_{IR})$$

بحيث: $X^{-1}.(\mathcal{B}_{IR}) \subset \mathcal{B}$.

إذا كان X تطبيق قابل للقياس يحقق :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{IR} X^{-1}.(B) \in \mathcal{B}$$

(أي أن الصورة العكسية لكل مجموعة بوريلية هي حدث) ، فيسمى عندئذ **X متغيرا عشوائيا حقيقيا**.

مثال: نقذف قطعة نقد مرتين، نجد $\Omega = \{(F, F), (F, P), (P, F), (P, P)\}$

نعتبر أن X هو عدد مرات ظهور الوجه

$$X. : (\Omega, \mathcal{B}) \to (IR, \mathcal{B}_{IR})$$

$$X.(P, P) = 0 \qquad X.(F, P) = X.(P, F) = 1 \qquad X.(F, F) = 2$$

و منه :

$$X(\Omega) = \{0,1,2\}$$

2.3 المتغير العشوائي النقطي و المستمر:

- المتغير العشوائي الذي يأخذ عددا منتهيا أو قابلا للعد من القيم، يسمى **متغيرا نقطيا**.
- المتغير الذي يمكن أن يأخذ كل قيم مجال محدود أو غير محدود فيسمى **متغيرا عشوائيا مستمرا**.

مثال: عندما نزن مجموعة من الأشياء، فان الوزن يمكن أن يمثل متغير عشوائي مستمر، وكذلك ارتفاع المياه في سد معين.

3.3 قانون احتمال X: ليكن لدينا المتغير العشوائي الحقيقي X

$$X:(\Omega,\mathcal{B},P)\rightarrow(IR,\mathcal{B}_{IR})$$

نعرف التابع P_X على العشيرة $\mathcal{B}_{IR}$ كما يلي : $\forall B\in\mathcal{B}_{IR},\ P_X(B)=P\left(X^{-1}(B)\right)$

و هو معرف جيد لأن $X^{-1}(B)\in\mathcal{B}$

نتحقق أن P_X يمثل احتمال على $\mathcal{B}_{IR}$

$$P_X(\phi)=P\left(X^{-1}(\phi)\right)=P(\phi)=0$$
$$P_X(IR)=P\left(X^{-1}(IR)\right)=P(\Omega)=1$$

$\forall(B_n)\subset\mathcal{B}_{IR}$ منفصلة مثنى مثنى (B_n) : $P_X\left(\dot{\bigcup_n} B\right)=P\left(X^{-1}\left(\dot{\bigcup_n} B_n\right)\right)$

$$=P\left(\dot{\bigcup_n}X^{-1}(B_n)\right)$$
$$=\sum_n P\left(X^{-1}(B_n)\right)$$
$$=\sum_n P_X(B_n)$$

هذا يعني أن σ, P_X جمعي على $\mathcal{B}_{IR}$

من هذه الدراسة نجد ان P_X احتمال، يسمى P_X قانون احتمال X او قانون توزيع X.

4.3 مصطلحات : فيما يلي من الدروس نعتمد على الرموز الآتية :

$$X^{-1}(]-\infty,a[)=\{\omega\in\Omega: X(\omega)<a\}=[X<a]$$
$$X^{-1}([a,b])=\{\omega\in\Omega: a\le X(\omega)\le b\}=[a\le X\le b]$$
$$X^{-1}(]a,b])=\{\omega\in\Omega: a< X(\omega)\le b\}=[a< X\le b]$$
$$X^{-1}(\{t\})=\{\omega\in\Omega: t=X(\omega)\}=[X=t]$$

فيمكن إذن أن نحسب المقادير $P[a\le X\le b]$, $P[X<a]$ ، $P[X=t]$ ...

5.3 التابع التوزيعي fonction de répartition : ليكن X متغير عشوائي حقيقي على $(\Omega,\mathcal{B},P)$

من اجل كل $t\in IR$. نضع

$$F_X(t)=P[X<t]$$
$$=P_X(]-\infty,t[)$$

فنجد $0\le F\le 1$ و

$$P_X([a,b[)=P(]-\infty,b[-]-\infty,a[)$$

$$= P(]-\infty, b[) - P(]-\infty, a[)$$
$$= F_X(b) - F_X(a)$$

فيكون P_X اذن هو قياسا لـ لوبيغ-ستلجس الموافق للتابع F_X

يمكن التأكد من أن :

ا) F_X تابع متزايد

ب) F_X مستمر من اليسار

ج) $\lim_{X \to +\infty} F_X(t) = 1, \lim_{X \to -\infty} F_X(t) = 0$

ملاحظة : هناك بعض المراجع ، تعتمد على التعريف الآتي لـ F_X :

$$F_X(t) = P[X \le t] = P_X(]-\infty, t])$$

و تبقى كل الخواص السابقة محققة ما عدا خاصية الاستمرار من اليسار التي تعوض بـالاستمرار من اليمين.

مثال لتابع توزيعي: نلقي نرد ثلاث مرات. ليكن X هو عدد مرات ظهور الوجه .

لدينا

$$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, PPF, PFP, FPP, PPP\}$$
$$\omega_1 = FFF, \omega_2 = FFP, \omega_3 = FPF, \omega_4 = PFF, \omega_5 = PPF$$
$$\omega_6 = PFP, \omega_7 = FPP, \omega_8 = PPP$$

$P(\omega_i) = \frac{1}{8}$ و $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$

نعرف

$$X(\omega_1) = 3$$
$$X(\omega_2) = X(\omega_3) = X(\omega_4) = 2$$
$$X(\omega_5) = X(\omega_6) = X(\omega_7) = 1$$
$$X(\omega_8) = O$$

$$\mathrm{X}(\Omega) = \{0,1,2,3\}$$

قانون احتمال X :

$$P_X(\{0\}) = P(X^{-1}(0)) = P(\omega_8) = \frac{1}{8}$$

احتمال ظهور الوجه مرة واحدة :

$$P_X(\{1\}) = P(X^{-1}(1)) = P(\omega_5, \omega_6, \omega_7) = \frac{3}{8} = P[X = 1]$$

احتمال ظهور الوجه مرتين

$$P_X(\{2\}) = P\left(X^{-1}(2)\right) = P(\omega_2, \omega_3, \omega_4) = \frac{3}{8} = P[X = 2]$$

$$P_X(\{3\}) = P(\omega_1) = \frac{1}{8} = P[X = 3]$$

قانون يعطى في الجدول التالي:

قانون احتمال X

X	0	1	2	3
P_X	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تابع التوزيعF_X:

$$F_X(t) = P(X < t) = P_X(]-\infty, t[)$$

$$= P\left(X^{-1}(]-\infty, t[)\right)$$

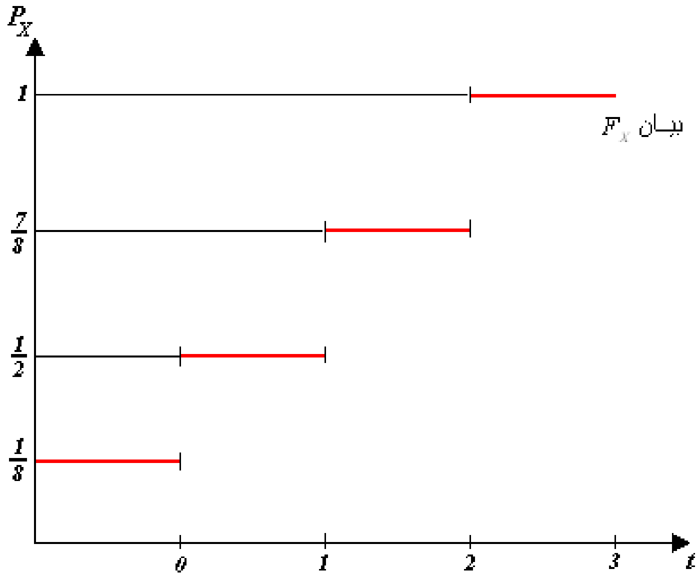
$$t \le 0 : F_X(t) = P\left(X^{-1}(]-\infty, t[)\right) = P(\phi) = 0$$

$$0 < t \le 1 : F_0(t) = P\left(X^{-1}(]-\infty, t[)\right) = P\left(X^{-1}(0)\right) = P(\omega_8) = \frac{1}{8}$$

$$1 < t \le 2 : F_X(t) = P\left(X^{-1}(0,1)\right) = P(\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$2 < t \le 3 : F_X(t) = P\left(X^{-1}(0,1,2)\right) = P(\omega_2, \omega_3, \ldots\ldots, \omega_8) = \frac{7}{8}$$

$$t > 3 : F_X(t) = P\left(X^{-1}(0,1,2,3)\right) = P(\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots, \omega_8) = P(\Omega) = 1$$



نلاحظ ان F_X مستمر من اليسار.

1.5.3) تابع التوزيع المنقطع: a نقطة انقطاع لـ F. يسمى F_X **تابع توزيعي نقطي**.

و نقول أن P_X نقطي ،وان المتغير العشوائي X هو متغير نقطي ، و يكون:

$$X(\Omega)=\{x_1,x_2,x_3,......x_n.....\},\quad x_n<x_{n+1}$$

اصطلاحات: إذا وضعنا

$$P(X=i)=P_X(\{i\})=f(i),\quad i\in X(\Omega)$$

فان f يمثل **قانون احتمال** X و يمثل ما يلي

$$f(i)\geq 0,\forall i$$
$$\sum_{i=X(\Omega)} f(i)=1$$

و يكون لدينا :

$$F_X(t)=P(X<t)=P_X(]-\infty,t[)$$
$$=\sum_{i<t} f(i)$$

2.5.3) تابع التوزيع المستمر: إذا كانت a نقطة استمرار للتابع F فان :

$$P(X=a)=0$$

لذلك F مستمرا فان P_X يصبح مستمر التوزيع و نقول أن X متغير عشوائي حقيقي مطلق الاستمرار

- إذا كان

و يقبل عندئذ تابع كثافة احتماله هو

$$f : IR \to IR_+$$

و يكو ن f قابلا للمكاملة بحيث

$$1)\quad f(x) \geq 0, \forall x \in IR$$

$$2)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

و يكون

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$P(a \leq x < b) = P_X([a,b[) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

و هي العلاقة المقابلة في الحالة ا

مثال : X متغير عشوائي حقيقي مطلق الاستمرار ، كثافته الإحتمالية هي :

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

نلاحظ ان :

$$f(x) \geq 0, \forall x \in IR$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 2x + \int_{1}^{+\infty} 0dx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1] \\ 0 & x \leq 0 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

نلاحظ أن:

$$P(x = a) = P(x \leq X \leq a)$$

$$=\int_a^b f(t)dt=0$$

$$P\left(\frac{1}{3}\le X\le\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(t)dt$$

6.3. بعض التوزيعات الشهيرة النقطية :

1.6.3) توزيع برنولي : و هو ابسط مثال X هنا يأخذ قيمتين فقط و هما 0 ، 1 أي $X(\Omega)=\{0,1\}$ للتوزيع النقطي

نعتبر الحدث A المتعلق بتجربة معينة و احتماله $P(A)=P$.

$X(\overline{A})=0$ و $X(A)=1$

إذن قانون احتمال X هو

$$\begin{cases}P(X=1)=P(A)=p=f(1)\\ P(X=0)=P(\overline{A})=1-p=q=f(0)\end{cases}$$

$$\boxed{f(k)=p^k.q^{1-k},k=0,1}$$ **قانون توزيع برنولي**

نلاحظ أن X يمثل عدد مرات وقوع النجاح (عدد مرات وقوع A)

2.6.3) التوزيع الثنائي la distribution binomiale:

نعتبر نفس شروط توزيع برنولي ، أي أن هناك حدث A متعلق بتجربة معينة، نفرض أننا كررنا هذه التجربة n مرة . احتماله $P(A)=P$

نعتبر في كل مرة X_i $i=1,2,....$ حيث X_i هو متغير برنولي في المرة i ، الأمر الذي يعني : متغير عشوائي

$X_i:\Omega\to\{0,1\}/P(X_i=1)=P(A)=p$ و $P(X_i=0)=P(\overline{A})=q$

من الواضح أن هذه التجارب مستقلة، نعتبر الآن متغير عشوائي جديد هو :

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i=X_1+........+X_n$$

واضح أن هذا المتغير يتعلق بالتجربة الكلية. يمثل X عدد مرات وقوع النجاح (وقوع نجاح A) في التجربة الكلية، و خلال n من التكرارات .

$$X : \Omega^n \to \{1,2,3,.........n\}$$

يتعين قانون احتمال X بحساب $\forall k = 0,......n, \ f(k) = P(X = k)$.إن الحدث $(X = k)$ يقع عندما يقع الحدث A ، k مرة خلال n تكرار.

أي عندما يأخذ k من المتغيرات X_i القيمة 1، و يأخذ $(n-k)$ الباقية القيمة 0 و يتم ذلك بعدد من الطرق هو C_n^k .

عموما

$$\boxed{\begin{array}{l} f(k) = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \\ k = 0,1,.......n \end{array}}$$

أي

$$X \longrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

X يخضع لتوزيع ثنائي بـ n مرة ذو احتمال P

مثال : القينا حجر نرد 100 مرة ، ما احتمال ان يظهر الرقم 3 ، 9 مرات؟

كررنا نفس التجربة $n = 100$ مرة

$A = \{3\}$ هو ظهور 3 (النجاح)

ولدينا $P(A) = p = \dfrac{1}{6}$

نضع X عدد مرات وقوع A

اذن $X \longrightarrow \mathcal{B}\left(100, \dfrac{1}{6}\right)$

$$f(k) = P(X = k) = \binom{100}{k} . \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}$$

$k = 0,..,100$

إذن

$$P(X = 9) = \binom{100}{9} . \left(\frac{1}{6}\right)^9 \left(\frac{5}{6}\right)^{91}$$

ملاحظة : يمكن أن نتأكد أن f قانون احتمال لأن :

$$1)\ f(k) \geq 0, \qquad \forall k = \{0,1,\dots\dots n\}$$

$$2)\sum_{k}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

3.6.3) التوزيع الهندسي الزائد la loi hypergeometrique :

نفرض انه لدينا صندوق يحتوي n كرة، يوجد من بينها h من الكرات الحمر.

سحبنا r كرة دفعة واحدة (دون إرجاع و بدون مراعاة الترتيب).

X : هو عدد الكرات الحمر الظاهرة في السحب، فيكون قانون احتمال X

$$f(k) = P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}}{\binom{n}{r}} \qquad \begin{cases} \left.\begin{matrix} 0 \leq k \leq h \\ 0 \leq k \leq r \end{matrix}\right\}, \quad 0 \leq k \leq \min(h, r) \\ 0 \leq h \leq n \\ 0 \leq r \leq n \end{cases}$$

$$X \longrightarrow \mathcal{H}(n, h, r)$$

4.6.3) التوزيع الهندسي la loi géométrique: نعتبر الحدث A المتعلق بتجربة معينة واحتماله $P(A) = P$

نستمر في إجراء هذه التجربة إلى أن يتحقق الحدث A (النجاح).

نعتبر أن X هو عدد مرات التكرارات اللازمة لوقوع A

قانون احتمال X :

$$(X = k) = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots\dots \cap \overline{A}_{k-1} \cap \overline{A}_k$$

(A_i وقوع الحدث A في المرة i مع A_i مستقلة)

$$\boxed{\begin{array}{l} f(k) = p(X = k) = q^{k-1} p \\ k \in IN^* \end{array}}$$

$$X \rightarrow G(p)$$

ملاحظة : نلاحظ أن

$$1)\ f(k) \geq 0, \qquad \forall k \in IN$$

$$2) \sum_{k} f(k) = \frac{p}{q} \sum_{k \geq 1} q^k = \frac{p}{q}\left(\frac{q}{1-q}\right) = 1$$

$0 < p < 1$ و $0 < q < 1$

مجموع متتالية هندسية

5.6.3) توزيع بواصون Poisson : قانون احتمال X هو

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad , k \in IN, \ \lambda > 0$$

و يمكن أن نحصل عليه ، بتقريب في التوزيع الثنائي و ذلك عندما n كبيرة و p صغير $[X \to B(n, p)]$ تكون

كما يلي :

لدينا

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,\dots,n$$

نضع $\left(p = \frac{\lambda}{n}\right) \qquad np = \lambda$

$$f(k) = \frac{n(n-1)\dots\dots.(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} \lambda^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

لما

$$n \to +\infty \Rightarrow \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to e^{-\lambda}.1 = e^{-\lambda}$$

و تصبح نهاية التوزيع

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in IN$$

و نكتب

$$X \to P(\lambda)$$

ملاحظة 1 : يكون هذا التقريب مقبول من اجل $n > 20, p \leq \frac{5}{n}$

ملاحظة 2 : نلاحظ ان $\forall k \in IN, f(k) \geq 0$

$$\sum_{k\geq 0}^{\infty} f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} p(X = k) = e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}.e^{\lambda} = 1$$

إذن f يعرف قانون احتمال .

مثال : احتمال رد فعل ناتج عن الحساسية ضد دواء معين هو 1‰ أعطينا هذا الدواء لـ 2000 شخص .

ما هو احتمال:

1) ان تظهر الحساسية عند ثلاث أشخاص

2) احتمال أن تظهر الحساسية عند أكثر من شخصين

الحل :

المتغير العشوائي الممثل لعدد الأشخاص الذين تظهر عندهم الحساسية، أجرينا تجربة إعطاء الدواء

نضع X

2000 مرة ($n = 2000$)

احتمال ظهور الحساسية عند شخص معين هو $p = \frac{1}{1000}$

إذن X يخضع لتوزيع ثنائي أي $X \to B(n, p)$

و نلاحظ أن $n > 20 \quad , p = 0,001 \leq \frac{5}{2000}$

يمكن أن نقرب التوزيع إلى توزيع بواصون $P(\lambda)$

حيث $\lambda = np = 2$ و $X \to P(2)$

بالتالي $P(X = k) = \frac{2^k e^{-2}}{k!}$

إذن

$$P(X = 3) = \frac{2^3.e^{-2}}{3!} \Rightarrow P(X = 3) = 0.18$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

لدينا $P(X = 0) = e^{-2} \quad , P(X = 1) = 2e^{-2}$

$$P(X = 2) = 2e^{-2}$$

إذن $P(X > 2) = 1 - 5e^{-2} = 0.323$

7.3. بعض التوزيعات المستمرة :

1.7.3) التوزيع المنتظم Distribution uniforme:

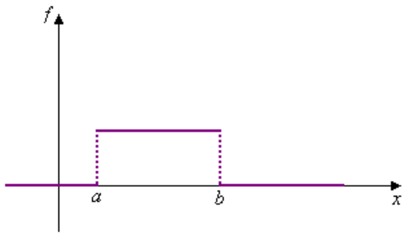
هو ابسط مثال للتوزيع المستمر، و نقول إن المتغير X يتبع قانون الاحتمال المنتظم على المجال $[a,b]$ العشوائي

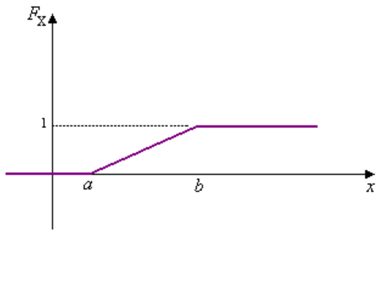
إذا كانت كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & ,x\in[a,b]\\ 0 & ,x\notin[a,b]\end{cases}$$

نجد أن تابع التوزيع F هو :

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & ,x\in[a,b]\\ 1 & ,x\ge b\end{cases}$$





2.7.3) Gamma : نقول عن متغير عشوائي حقيقي X مستمر، انه يخضع لتوزيع جاما إذا كانت **التوزيع**

كثافته الاحتمالية هي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta x}x^{\alpha-1} & ,x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$

نعلم أن : $\int_{IR} f dx=1, \quad (\beta=1)\Rightarrow \Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

من خصائصه :

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

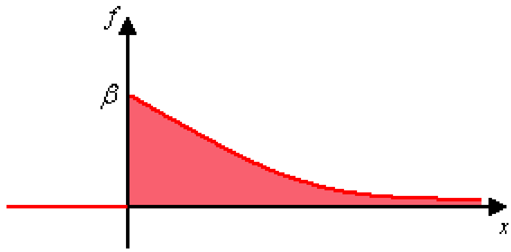
بالتالي في IN : $\Gamma(n+1)=n! \quad ,n\in IN$

يسمى **الوسيط الأسي بوسيط** β

$$\alpha=1\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\beta^{\alpha}e^{-\beta x} & ,x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$

و نكتب :

$$X\rightarrow Exp(\beta)$$



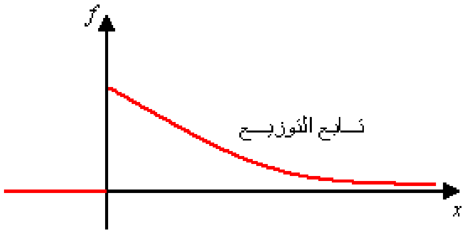
بيان الكثافة الاحتمالية للتوزيع الآسي

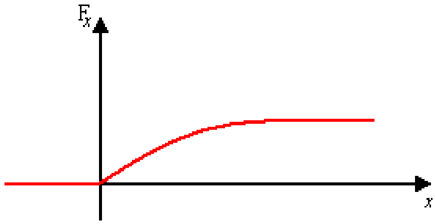
3.7.3) التوزيع الأسي : هو توزيع مستمر ، و كثافته X معطاة كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x\geq 0 \qquad (\alpha>0)\\ 0 & x<0\end{cases}$$

و يكون تابع التوزيع

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

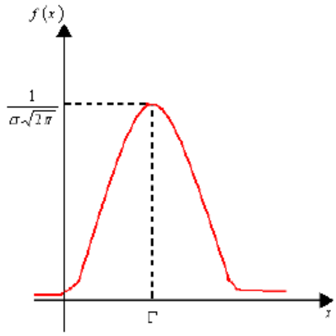




4.7.3 التوزيع الطبيعي Distribution normale: هو توزيع مستمر و كثافته الاحتمالية تعطى بـ :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\Gamma}{\sigma}\right)^2} \qquad ,x\in IR$$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\Gamma}{\sigma}\right)^2} \qquad \left(\sigma\in IR_+^*,\Gamma\in IR,x\in IR\right)$$



و نقول أيضا أن X يخضع لتوزيع لابلاس غوص و نكتب

$$x\rightarrow N\left(\Gamma,\sigma^2\right)$$

يمكن التأكد أن f يمثل فعلا كثافة احتمالية أي انه موجب و

$$I=\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

لدينا $\frac{x-\Gamma}{\sigma}=t$ أي $dx=\sigma dt$

إذن

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt}_{A}$$

$$A=\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}g^2}$$

$$A^2=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

بالإحداثيات القطبية $dxdy=rdrd\theta$

$$A^2=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(r^2\right)}rdrd\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{2}r^2}\Big|_{\infty}^{0}=\frac{\pi}{2}$$

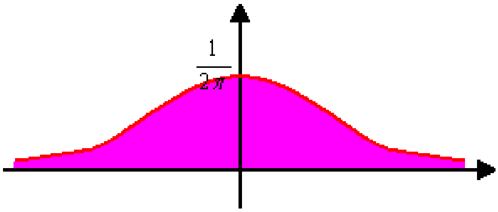
$$A=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

5.7.3) **التوزيع الطبيعي المعياري** (حالة خاصة)

عندما يكون $\Gamma=0$, $\Gamma=1$ نحصل على متغير عشوائي X^* كثافته

$$f^*(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad x\in IR$$

أيضا



$$f^*(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad x\in IR$$

$$F^*(a)=\int_{-\infty}^{a} f^*(x)dx$$

$$X\to N(0,1)$$

يسمى X^* ا**لمتغير الطبيعي المعياري**، و يمكن أن نصل إليه باستعمال التبديل التالي :

$$X^*=\frac{X-\Gamma}{\sigma}$$

و توجد جداول تبين من اجل كل حقيقي a ، قيمة تابع التوزيع $F^*(a)$ و تسمى **جداول التوزيع الطبيعي المعياري**.

تطبيق : $X\to N(\alpha,\beta)$ احسب احتمال $P(a\le X\le b)$ باستعمال جداول التوزيع الطبيعي المعياري.

$$P(a\le X\le b)=P\left(\frac{a-\alpha}{\sqrt{\beta}}\le\frac{x-\alpha}{\sqrt{2}}<\frac{b-a}{\sqrt{\beta}}\right)$$

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}=X^*\to N(0,1)$$

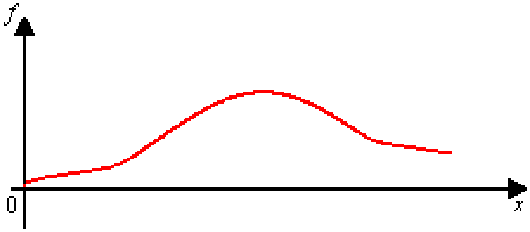
$$\Rightarrow P(a\le x\le b)=P(a_1\le x^*\le b_1)$$

$$=F^*(b_1)-F^*(a_1)$$

نحصل على قيمتين $F^*(a_1)$ $F^*(b_1),$ من الجدول .

(6.7.3 التوزيع χ^2 :هو توزيع مستمر كثافته الاحتمالية تكتب كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\[2ex] 0 & x\le 0\end{cases}$$



و نكتب $X\to\chi_n^2$

و تسمى n بدرجة الحرية

تمارين المتغير العشوائي الحقيقي

تمرين 1 : قطعة نقد غير متوازنة، احتمال ظهور الوجه عند إلقائها يساوي 0,7. ألقيناها مرتين، نعتبر أن X هو عدد مرات ظهور الوجه خلال هذه التجربة ، عين قانون احتمال X ، ثم احسب $P(X=2)$ ، $P(X\geq 1)$.

تمرين 2 : X متغير عشوائي حقيقي نقطي حيث $X(\Omega)=IN^*$ ، نعرف التابع :

$$f:IN^*\to IR_+,\quad f(n)=\frac{\alpha}{n^2},\quad \forall n\in IN^*,\quad (\alpha>0)$$

عين قيمة α حتى يكون f قانون احتمال للمتغير X ، واحسب الاحتمالات

$$P(X=2),\qquad P(X\leq 3),\qquad P(X>3),\qquad P(2\leq X<4)$$

تمرين 3 : نعرف التابع f كما يلي :

$$f(x)=\frac{a}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}\qquad x\in IR,\qquad (a>0)$$

تأكد من أن f يمثل كثافة احتمالية لمتغير عشوائي حقيقي X مطلق الاستمرار ثم عين تابع التوزيع F_X

تمرين 4 : نلقي عشر كرات إلى أربعة صناديق (متساوية الاحتمال)، X هو عدد الكرات التي تسقط في الصندوق الأول ، ما هو قانون احتمال X ؟

احسب $P(X \le 3)$ ، $P(X \ge 7)$

تمرين 5 : نستمر في إلقاء قطعة نقد متوازية و ذلك حتى يظهر الوجه، نعتبر أن X هو عدد مرات الإلقاء اللازمة. عين قانون احتمال X ؟

ما احتمال أن لا يظهر الوجه حتى المرة العاشرة ؟ حتى المرة الألف ؟

تمرين 6 : القينا حجر نرد مرتين ، X هو مجموع الوجهين الظاهرين ، عين قانون احتمال X .

تمرين 7 : سحبنا 5 أوراق لعب دفعة واحدة ، X هو عدد أوراق الآس الظاهرة في السحب. عين قانون احتمال X ، عين قانون احتمال X إذا كان السحب يتم مع الإرجاع.

حلول التمارين

حل التمرين 1 : إحتمال ظهور الوجه عند إلقاء قطعة نقد و 0,7

أ) لنعين قانون إحتمال X . لدينا :

$$\Omega = \left\{ \underbrace{FF}_{\omega_1}, \underbrace{FP}_{\omega_2}, \underbrace{PF}_{\omega_3}, \underbrace{PP}_{\omega_4} \right\}$$

$$X(\omega_1) = 2$$

$$X(\omega_2) = X(\omega_3) = 0$$

$$X(\omega_4) = 0$$

و منه $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

لدينا :

$$f(0) = P(X = 0)P_4(\{0\}) = P\left(X^{-1}\{0\}\right)$$

$$= P(\omega 4) = P\left(\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2\right)$$

$$= P\left(\overline{F}_1\right)P\left(\overline{F}_2\right) = \frac{9}{100}$$

و

$$f(1)=P(X=1)=P\left(X^{-1}\{1\}\right)=P(\omega_1,\omega_2)$$
$$=P(\omega 2)+P(\omega 3)$$
$$=P(F_1)P\left(\overline{F}_2\right)+P(F_2)P\left(\overline{F}_1\right)=(0,7)(0,3)2=\frac{42}{100}$$

$$f(2)=P(X=2)=P\left(X^{-1}\{2\}\right)$$
$$=P(\omega_1)=P(F_1)P(F_2)=(0,7)^2=\frac{49}{100}$$

i	0	1	2
$f(i)$	$\frac{9}{100}$	$\frac{42}{100}$	$\frac{44}{100}$

ب) نحسب :

$P(X=2)=P\left(X^{-1}(2)\right)=P(\omega_1)$ و هو احتمال ظهور الوجه مرتين و منه :

$$P(X=2)=f(2)=\frac{44}{100}$$

لنحسب الآن $P(X\geq 1)$ ، احتمال ظهور الوجه مرة واحدة على الأقل

$$[x\geq 1]=X^{-1}([1,+\infty[)=X^{-1}(1,2)=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$$
$$[x\geq 1]=[X=1]\dot{\cup}[X=2]$$
$$P([x\geq 1])=P[X=1]+P[X=2]$$
$$=f(1)+f(2)=0,91$$

حل التمرين 2 : لدينا $(\alpha>0)$ $f:IN^*\to IR_+,\quad f(n)=\frac{\alpha}{n^2},\quad \forall n\in IN^*,$

لنعين قيمة α حتى يكون f قانون احتمال لـ X ، لذلك يجب ان يكون

$$f(n)\geq 0,\quad \sum_{n\geq 1} f(n)=1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n\in IN^* & \dfrac{\alpha}{n}>0 \\ \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha}{n^2}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha>0 \wedge \sum \frac{\alpha}{n^2}=\alpha\frac{\pi^2}{6}=1$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{6}{\pi^2}$$

قانون احتمال X هو

$$\underbrace{f(n)}_{P(X=n)}=\frac{6}{\pi^2 n^2}, \qquad n\in IN^*$$

لنحسب :

$$P(X=2)=f(2)=\frac{6}{4\pi^2}$$

$$\begin{aligned} P(X\leq 3)&=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\\ &=f(1)+f(2)+f(3)\\ &=\frac{6}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)=\frac{46}{6\pi^2}\end{aligned}$$

لأن $[X\leq 3]=[X=1]\dot{\cup}+[X=2]\cup+[X=3]$

و منه

$$\begin{aligned} P(X>3)&=1-P(X\leq 3)\\ &=1-\frac{49}{6\pi^2}\end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} P(X>3)&=\sum_{i=4}^{\infty} f(i)\\ &=\sum_{i=1}^{\infty} f(i)-\frac{6}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)\\ &=1-\frac{49}{6\pi^2}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} P(2\leq X\leq 4)&=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\ &=f(2)+f(3)+f(4)\\ &=\frac{6}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)\end{aligned}$$

حل التمرين 3: نلاحظ أن $\forall x \in IR : f(x) \geq 0$

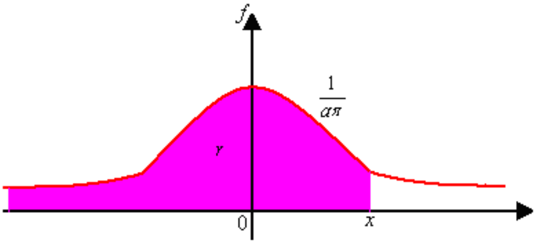
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\pi}\left[arctgt\right|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = 1$$

و هو توزيع كوشي، و نكتب : $X \to \varphi(a)$



- تابع التوزيع :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}Arctg\left.\frac{t}{a}\right|_{-\infty}^{x}$$

$$= \frac{1}{\pi}Arctg\frac{x}{a}+\frac{1}{2}$$

F متزايد و مستمر $X \to \varphi(a)$ (توزيع كوشي)

حل التمرين 4 : تلقى 10 كرات إلى 4 صناديق متساوية الإحتمال. X هو عدد الكرات التي تسقط في الصندوق الأول. لنعين قانون احتمال X:

احتمال السقوط في احد الصناديق هو $\frac{1}{4}$ ، لدينا تكرار نفس التجربة (رمي كرة) 10 مرات : توزيع ثنائي .

احتمال النجاح هو احتمال السقوط بين الصندوق الاول : $p=\frac{1}{4}$ مع X هوعدد النجاح و منه $X \to B\left(10,\frac{1}{4}\right)$.

ينتج:

$$|\Omega| = 4^{10}$$

$$P(X=k) = \frac{\binom{10}{k}.3^{10-k}}{4^{10}}$$

$$= \binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}$$

$$k = 0,1...,10$$

و هو قانون احتمال X .

ب) حساب $P(X \le 3)$, $P(X \ge 7)$

$$(X \le 3) = (X=0)\dot{\cup}(X=1)\dot{\cup}(X=2)\dot{\cup}(X=3)$$

أي

$$P(X \le 3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$= \sum_{k=0}^{3} f(k)$$

حل التمرين 5 : نستمر في إلقاء قطعة نقد إلى ظهور الوجه. X هو عدد مرات الإلقاء اللازمة. لنعين قانون احتمال X

نعلم

عموما

$$P(X=k) = P\left(\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap .... \cap \overline{F}_{k-1} \cap F_k\right)$$

$$= q^{k-1}p \qquad k \in IN^{\delta}$$

$$p = \frac{1}{2}$$

لكن

$$P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

اذن

$$X \to G\left(\frac{1}{2}\right)$$

أي X يخضع للتوزيع الهندسي.

- لنحسب احتمال ظهور الوجه في المرة 10 :

$$P(X = 10) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

- احتمال ظهور الوجه في المرة 1000:

$$P(X = 1000) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$$

- احتمال عدم ظهور الوجه عدد لا نهائي من المرات: هو حدث شبه مستحيل

حل التمرين 6: تلقى حجرة نرد مرتين، X هو مجموع الوجهين الظاهرين، لنعين قانون احتمال X :

أ)

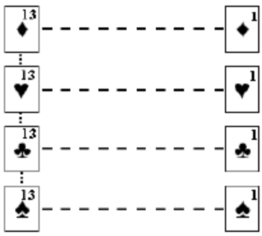
$$\Omega = \{(1,1)(1,2)............(5,6)(6,6)\}$$

$$|\Omega| = 36 = 6^2$$

$$X(\Omega) = \{2,3,............12\}$$

$$P(X=2)=P\left(X^{-1}\{2\}\right)=P(1,1)=\frac{1}{36}$$
$$P(X=3)=P((1,2),(2,1))=\frac{2}{36}$$
$$P(X=4)=P((2,2),(3,1)(1,3))=\frac{3}{36}$$
$$P(X=5)=P((1,4),(4,1)(2,3)(3,2))=\frac{4}{36}$$
$$P(X=6)=P((1,5),(5,1)(2,4)(4,2)(3,3))=\frac{5}{36}$$
$$P(X=7)=P((1,6),(6,1)(2,5)(5,2)(3,4)(4,3))=\frac{6}{36}$$
$$P(X=8)=P((2,6),(6,2)(3,5)(5,3)(4,4))=\frac{5}{36}$$
$$P(X=9)=P((3,6),(6,3)(4,5)(5,4))=\frac{4}{36}$$
$$P(X=10)=\frac{3}{36}$$
$$P(X=11)=\frac{2}{36}$$
$$P(X=12)=\frac{1}{36}$$

حل التمرين 7: تسحب 5 أوراق لعب دفعة واحدة. X هو عدد أوراق الآس الظاهرة. لنعين قانون احتمال X سحب دون إرجاع .



$$\Rightarrow 4\times 13$$

لدينا 52 ورقة لعب و 4 آس.

نلاحظ أن $X \longrightarrow H(52,4,5)$ ، أي X يخضع للتوزيع الهندسي الزائد، بالتالي

$$P(X=k)=\frac{\binom{4}{k}\binom{48}{5-k}}{\binom{52}{5}} \qquad 0\le k\le 4$$
$$=f(k)$$

هذا دون إرجاع .

مع الإرجاع : نكرر التجربة $n=5$ احتمال ظهور الآس $p=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ ، X هو عدد مرات ظهورالآس (النجاح).

إذن $X\to B\left(5,\frac{1}{13}\right)$ (التوزيع الثنائي)

$$f(k)=P(X=k)$$
$$=\binom{5}{k}\left(\frac{1}{13}\right)^{k}\left(\frac{12}{13}\right)^{5-k}$$
$$k=0,1,2,\dots 5$$

8.3. تبديل المتغير

1.8.3 شرط تبديل المتغير: إذا X متغير عشوائي حقيقي على الفضاء $(\Omega,\mathcal{B},P)$ وعلمنا توزيع X . فما هو توزيع المتغير العشوائي الجديد $T=\varphi(X)$ ؟

$$(\Omega,\mathcal{B},P)\xrightarrow{X}(IR,\mathcal{B}_{IR})\xrightarrow{\varphi}(IR,\mathcal{B}_{IR})$$

لكي يكون T متغير عشوائي حقيقي أي تطبيق قابل للقياس، يجب أن يكون φ قابل للقياس أي $\varphi^{-1}(\mathcal{B}_{IR})\subset\mathcal{B}_{IR}$

1.1.8.3) حالة X متغير مستمر : $t=\varphi(x),\quad T=\varphi(X)$

F هو توزيع X و G هو توزيع T. نميز حالتين :

أ) φ متزايدة تماما : نجد

$$\varphi(t)=P(T<t)$$
$$=P(\varphi(X)<\varphi(x))=P(X<x)=F(x)$$

كثافة T:

$$g(t)=\frac{dG}{dt}=\frac{dF}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} \qquad ,\frac{\partial x}{\partial t}>0$$

$$g(t)=\left(f(x)\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\right) \qquad (a),$$

$$\left(x=\varphi^{-1}(t)\right)$$

ب) φ متناقصة تماما : نجد

$$G(t)=P(T<t)$$

$$=P(\varphi(X)<\varphi(x))=P(X>x)=1-F(x)$$

$$g(t)=\frac{dG}{dt}=\frac{dF}{dx}\left(-\frac{dx}{dt}\right)=f(x)\left(-\frac{dx}{dt}\right) \qquad ,\frac{dx}{\partial t}<0$$

$$g(t)=\left(f(x)\left(-\frac{dx}{dt}\right)\right) \qquad (b)$$

$$x=\varphi^{-1}(t)$$

و عموما إذا كان φ رتيبا تماما

$$g(t)=\left(f(x)\left|\frac{dx}{dt}\right|\right)_{x=\varphi^{-1}(t)}$$

2.2.4 أمثلة :

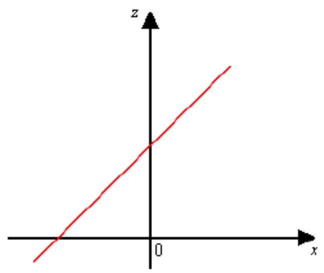
مثال 1 : $X\to\mathcal{N}(\Gamma,\sigma)$. نضع $\mathcal{Z}=\frac{X-\Gamma}{\sigma}$

نعين قانون احتمال $\mathcal{Z}$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\Gamma}{\sigma}\right)^2} \qquad x\in IR,\quad \sigma>0,\ \Gamma\in IR$$

$$Z=\varphi(x)=\frac{1}{\sigma}X-\frac{\Gamma}{\sigma}$$

$$z=\frac{1}{\sigma}x-\frac{\Gamma}{\sigma}$$



كثافة $\mathcal{Z}$

$$g(z)=\left(f(x)\left|\frac{dx}{dz}\right|\right)_{x=\sigma z+\Gamma}, \qquad \frac{\partial x}{\partial z}=\sigma>0$$

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z} \qquad ,z\in IR$$

$$Z\rightarrow N(0,1)$$

ج) φ يمر بمرحلتين أو أكثر : في كل مرحلة تكون إما متزايدة تماما أو متناقصة تماما، عندئذ نجزء مجال تعريف X و نطبق القاعدة السابقة في كل مجال على حدى ، ثم نجمع و نحصل على الكثافة المطلوبة .

مثال 2 :

نفرض أن φ متزايدة من اجل

$X > a$ و متناقصة من اجل $X < a$

$$\varphi=\begin{cases}\varphi_1, X<a\\ \varphi 2, X>a\end{cases}$$

كثافة T

$$g(t)=\left(f(x)\frac{dx}{dt}\right)_{x1=\varphi_1^{-1}(t)}+\left(f(x)\left(\frac{-dx}{dt}\right)\right)_{x=\varphi_2^{-1}(t)}$$

$$=\left(f(x).\left|\frac{dx}{\partial t}\right|\right)_{x=\varphi_1^{-1}(t)}+\left(f(x).\left|\frac{dx}{\partial t}\right|\right)_{x=\varphi_2^{-1}(t)} \quad ....(c)$$

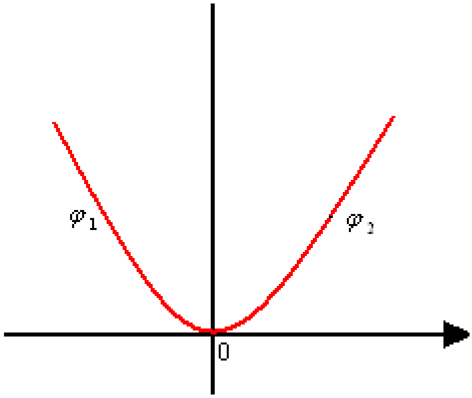
يمكن أن نعمم العلاقة إذا تطلب الأمر إلى أكثر من مجالين .

مثال 3 : $X\rightarrow\mathcal{N}(0,1)$. نعين قانون احتمال $T=X^2$

X مستمر كثافته $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad ,x\in IR$

$$t=\varphi(x)=x^2 \quad , \quad T=\varphi(X)=X^2$$

$x\leq 0$ $\qquad$ φ متناقصة تماما



$$g_1(t)=\left(f(x)\left|\frac{dx}{dt}\right|\right)_{x=-\sqrt{t}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{2\sqrt{2\pi}.\sqrt{t}}\quad , \qquad t>0$$

$x>0$ φ مزايدة تماما

$$g_2(t)=\left(f(x)\left|\frac{dx}{dt}\right|\right)_{x=+\sqrt{t}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{2\sqrt{2\pi}.\sqrt{t}} \qquad t>0$$

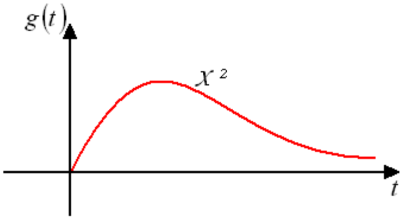
كثافة T

$$g(t)=g_1(t)+g_2(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t}t^{-\frac{1}{2}} \qquad t>0$$

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}t} & ,t\geq 0, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2\pi} \\ 0 & t\leq 0\end{cases}$$

و هو توزيع $\mathcal{X}_1^2$ $\qquad T\rightarrow \mathcal{X}_1^2$

نتيجة : $X\rightarrow \mathcal{N}(0,1)\Rightarrow X^2\rightarrow \mathcal{X}_1^2$



(2.1.8.3 اذا كان X **متغير عشوائي حقيقي نقطي :** X معرف على $(\Omega,\mathcal{B},P)$ قانون احتماله $f(k)=P(X=k)$ ، $T=\varphi(X)$ متغير عشوائي حقيقي بحيث φ متباين $x=\varphi^{-1}(t)$

$$(\Omega,\mathcal{B},P)\xrightarrow{X}(IR,\mathcal{B}_{IR},P_X)\xrightarrow{\varphi}(IR,\mathcal{B}_{IR},P_X)$$

<u>قانون احتمال T:</u>

$$g(l)=P(T=l)=P(\varphi(x)=l)=P(x=\varphi^{-1}(l))=f(\varphi^{-1}(l))$$

$$g(l)=(f(k))_{k=\varphi^{-1}(l)}$$

مثال: $X\to G\left(\frac{1}{2}\right)$. لنعين قانون احتمال $T=X^4+1$

$$f(k)=p(x=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k, \qquad k\in IR$$

$T=\varphi(x)=x^4+1$ متباين

$$X=\sqrt[4]{T-1}$$

$$g(l)=p(T=l)=p(x^4+1=l)=p(x=\sqrt[4]{l-1})$$
$$=f(\sqrt[4]{l-1})$$

$$g(l)=p(T=l)=2^{-(l-1)^{\frac{1}{4}}}=(f(k))_{k=(l-1)^{\frac{1}{4}}}$$

9.3. التوقع الرياضي: ليكن X متغير عشوائي حقيقي على $(\Omega,\mathcal{B},P)$

$$X(\Omega,\mathcal{B},P)\to(IR,\mathcal{B}_{IR},P_X)$$

التوقع الرياضي لـ X تعريفا هو المقدار الذي نرمز له بـ $\boldsymbol{E}(\lambda)$ ،

X مستمر

$$E(X)=\int_{\Omega} Xdp=\begin{cases}\int_{IR} xf(x)dx \\ \sum_k kf(k)\end{cases}$$

X نقطي

و ذلك بشرط أن يكون التكامل مطلق التقارب و السلسلة متقاربة مطلقا أيضا .

ملاحظة : إذا لم يتحقق الشرطين فنقول أن التوقع الرياضي غير موجود في IR

ملاحظتان:

1) X نقطي $X(\Omega)=\{x_1,x_2,.......x_n\}$

$$E(x)=\sum x_i f(x_i)=\frac{\sum x_i f(x_i)}{\sum f(x_i)}$$

فهو بمثابة **مركز ثقل** للنقاط x_i مرفقة بالكتل $f(x_i)$ و خاصة إذا وجد تماثل احتمالي

$$\begin{cases} f(x_i)=\frac{1}{n} \\ E(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=\&}^{n} x_i \end{cases}$$

2) X مستمر $E(X)=\dfrac{\int xf(x)dx}{\int f(x)dx}$ مركز ثقل قيم x

من خصائص تكامل ريمان و السلاسل المتقاربة :

فمن اجل X_1, X_2 متغيرين على $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ و $\lambda_1,\lambda_2 \in IR$ خطي

$E(\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2)=\lambda_1 E(X_1)+\lambda_2 E(X_2)$ و بالنسبة للفرق كذلك.

مثال (1):

X نقطي:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X)=\sum_{k} kf(k)=\sum_{k=2}^{12} kf(k)$$
$$=\frac{1}{36}(2+12)+\frac{2}{36}(3+11)+\frac{3}{36}(4+10)+\frac{4}{36}(5+9)+\frac{5}{36}(6+8)+\frac{6}{36}(7)$$
$$=\frac{14+28+42+56+70+42}{36}$$

ترميز: نرمز لـ : $E(X)$ بـ Γ أو م أو m

مثال(2): $X \longrightarrow (\Gamma,\sigma^2)$. عين القيمة المتوسطة $E(X)$.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\Gamma}{\sigma}\right)^2}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x), \qquad x\in IR$$

1.9.3 توقع تابع : X متغير عشوائي حقيقي على $(\Omega,\mathcal{B},P)$ و φ تطبيق قابل للقياس

$$(\Omega,\mathcal{B},P)\xrightarrow{X}(IR,\mathcal{B}_{IR},P_X)\xrightarrow{\varphi}(IR,\mathcal{B}_{IR})$$

نعرف توقع $\varphi(X)$ كما يلي

X مستمر

$$E(\varphi(x))=\int_{\Omega}\varphi(x)dp=\begin{cases}\int\varphi(x)f(x)dx\\ \sum_{k}\varphi(k)P(\lambda=k)\end{cases}$$

X نقطي

علما انه يجب ان يكون $\int$ و $\sum$ مطلق التقارب .

1.5 أمثلة :

مثال (1):

$$E(\varphi(X))=X^2 \quad , \qquad X\rightarrow P(\lambda)$$
$$E(x^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\lambda^2+\lambda$$
$$X\rightarrow Exp(\alpha)\Longrightarrow E(x^2)=\int_0^{+\infty}x^2\alpha e^{-\alpha x}dx=\frac{2}{\alpha^2}$$

مثال (2) حساب التشتت La variance:

$$V(X)=E(X-\Gamma)^2, \qquad \Gamma=E(X)$$ X مستمر

$$=\int_{\Omega}(X-\Gamma)^2 dp=\begin{cases}\int (x-\Gamma)^2 f(x)dx \\ \sum_k (k-\Gamma)^2 f(k)\end{cases}$$ X نقطي

2.9.3 الانحراف المعياري « Ecart type » Déviation standart:

بما أن $V(X)\geq 0$ نعرف $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$ و يدعى **الانحراف المعياري**

فتكون σ_X من نفس وحدة X (طول، زمن، ...).

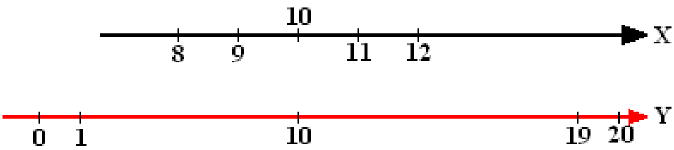
مثال : بعد أربعة امتحانات ، وجدنا علامات طالبين موزعة كما يلي :

$$X \in \{8,9,11,12\}$$

$$Y \in \{0,1,19,20\}$$

$$E(X)=8\times\frac{1}{4}+11\times\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{12}{4}=10$$

$$E(Y)=\frac{0+1+19+20}{4}=10$$



$$V(X)=\frac{(8-10)^2+(9-10)^2+(11-10)^2+(12-10)^2}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$V(Y)=\frac{(0-10)^2+(1-10)^2+(19-10)^2+(20-10)^2}{4}=\frac{363}{4}$$

ايضا

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{5}{2}}=1{,}58$$

$$\sigma_Y=\sqrt{\frac{363}{4}}=9{,}526$$

نتائج :

1) اذا كان $X \equiv a$ متغير عشوائي حقيقي ثابت (او متغير عشوائي حقيقي اكيد) فان قانون احتماله ،

$$f(k) = p(x = k) = \begin{cases} k & k = a \\ 0 & k \neq a \end{cases}$$

اذن : $$E(X) = \sum_k kf(a) = af(a) = a \Rightarrow E(a) = a$$

2)من خطية تكامل لوبيغ (التوقع) نجد:

$$V(X) = E(X - \Gamma)^2 = E(X^2 - 2\Gamma X + \Gamma^2)$$
$$= E(X^2) - 2\Gamma E(X) + E(\Gamma^2)$$
$$= E(X^2) - 2\Gamma.\Gamma + \Gamma^2$$

نجد $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

3) $V(a) = 0$ لأن

$$V(a) = E(a^2) - E^2(a)$$
$$= a^2 - a^2 = 0$$

و

$$V(aX + b) = E((aX + b)^2) - E^2(aX + b)$$
$$= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X) + b)^2$$
$$= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2E^2(X) - 2abE(X) - b^2$$
$$= a^2(E(X^2) - E^2(X)) = a^2V(X)$$

4. الشعاع العشوائي و تبديل المتغير

1.4 الشعاع العشوائي :

1.1.4 تعاريف :

تعريف 1 :نسمي شعاعا عشوائيا X ، كل تطبيق قابل للقياس من الفضاء الاحتمالي $(\Omega,\mathcal{B},P)$ إلى الفضاء $\left(IR^n,\mathcal{B}_{IR^n}\right)$ بحيث :

$$\mathcal{B}_{IR^n} = \bigotimes_{i=1}^{n}\mathcal{B}_{IR}$$ تمثل العشيرة البوريلية على IR^n

تعريف 2 : ليكن الشعاع العشوائي X : $(\Omega,\mathcal{B},P)\xrightarrow{X}\left(IR^n,\mathcal{B}_{IR^n},P_X\right)$

إن قانون احتمال الشعاع X هو P_X : إحتمال صورة لـ P وفق X .

ملاحظة: ليكن الشعاع $X=\left(X_1,X_2,.....X_n\right)$. نعتبر تابع الإسقاط $\pi_i : IR^n \to IR$. من الواضح أن $\pi_i oX = X_i = \pi_i(X)$ (π_i مستمر).

إن X_i متغير عشوائي حقيقي لان π_i مستمر.

2.4 قانون احتمال X_i **:** هوالتابع P_{X_i} حيث $P_{X_i} = P_{\pi_i oX}$

$$(\Omega,\mathcal{B},P)\xrightarrow{X}\left(IR_n,\mathcal{B}_{IR_n},P_X\right)\xrightarrow{\pi_i}\left(IR,\mathcal{B}_{IR^n},P_{Xi}\right)$$

و يسمى قانون الاحتمال الهامشي لـ X من المرتبة i.

حالة خاصة :من أجل $n=2$ ، نحصل على الثنائية العشوائية $X=\left(X_1,X_2\right)$

3.4 تابع التوزيع المشترك: نسمي تابع توزيع X او تابع التوزيع المشترك لـ X_1,X_2 ، التابع F المعرف بـ :

$$F : IR^2 \to IR$$
$$F(t_1,t_2)=P\left(\left(X_1<t_1\right)\cap\left(X_2<t_2\right)\right)=P_X\left(\left]-\infty,t_1\right[\times\left]-\infty,t_2\right[\right)$$

4.4 بعض خصائص تابع التوزيع المشترك F **:**

- $0\le F\le 1$
- F متزايد على كل محور $\left(t_i>t'_i \Rightarrow F(\ldots,t_i,\ldots)\ge F(\ldots,t'_i,\ldots)\right)$
- F مستمرمن اليسار على كل محور
- اذا وجد j بحيث $t_j\to-\infty$ فان $F\to 0$

- اذا كان $\forall i: t_i \to \infty$ فان $F \to 1$

1.4.4 كثافة X : اذا كان X_1, X_2 تابعان مستمران فإن X يكون مستمرا و يقبل كثافة f معرفة كما يلي : $f: IR^2 \to IR_+$

بحيث

$$F(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

و تحقق

$$\forall (x_1,x_2)\in IR^2 \qquad f(x_1,x_2)\geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 1$$

و يسمى الكثافة المشتركة لـ X_1 و X_2 .

2.4.4 قوانين الإحتمال الهامشية :

$$F_{X_1}(t_1)=P(X_1<t_1)=P((X_1<t_1)\cap(X_2<\infty))=F(t_1,\infty)=P_{X_1}(]-\infty,t_1[)$$

$$F_{X_2}(t_2)=F(\infty,t_2)=P_{X_2}(]-\infty,t_1[)$$

اذا قبل X كثافة f فنجد :

- كثافة X_1 : $f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx_2$
- كثافة X_2 : $f_2(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx_1$

مثال 1 : لدينا التابع :

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} ax_1x_2 & 0<x_1<1, \quad 0<x_2<2 \\ 0 & \text{عند العكس} \end{cases}$$

لنعين a حتى يكون f كثافة احتمالية للثنائية العشوائية (X_1,X_2) ثم لنحسب الاحتمالات :

$$P\left(X_1\geq \frac{1}{2}, X_2\leq 2\right), \quad P\left(\frac{1}{2}<X_1<\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2}<X_2<3\right)$$

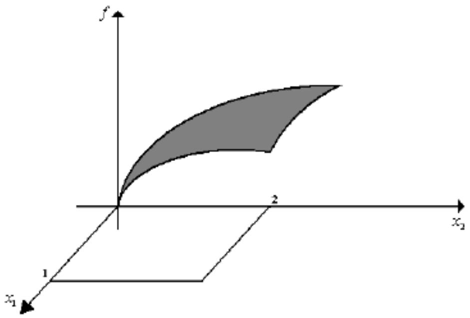
أخيرا لنعين f_1 و f_2 الهامشيين .

الحل: تعيين a $\qquad f>0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f dx_1 dx_2 = 1$

$$a\int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^2 x_2 dx_2 = a\frac{1}{2}2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

بالتالي

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1x_2 & (x_1,x_2)\in]0,1[\times]0,2[\\ 0 & \text{عند العكس} \end{cases}$$



$$P\left(X_1 \geq \frac{1}{2}, X_2 \leq 2\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{2} f(x_1,x_2)dx_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx_1 \int_0^2 x_1x_2dx_2 = \frac{3}{4}$$

- كثافة X_1

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx = \int_0^2 x_1x_2dx_2 = 2x_1$$

$$\Rightarrow f_1(x_1)=\begin{cases} 2x_1 & 0<x_1<1 \\ 0 & \text{عند العكس} \end{cases}$$

- كثافة X_2

$$f_2(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)dx_1=\int_0^1 x_1x_2dx_1=\frac{1}{2}x_1$$

$$\Rightarrow f_2(x_2)=\begin{cases}\frac{1}{2}x_1 & 0<x_2<2\\ 0 & \text{عند العكس}\end{cases}$$

ملاحظة : بدل X_1,X_2 نستعمل $V=(X,Y)$

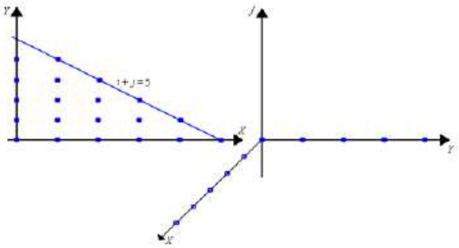
مثال 2 : صندوق يحتوي 17 كرة؛ 6 حمراء، 4 زرقاء و 7 صفراء. سحبنا 5 كرات دفعة واحدة . نضع X هو عدد الكرات الحمر الظاهرة في السحب و Y هو عدد الكرات الزرق الظاهرة في السحب. ما هو قانون احتمال الثنائية (X,Y) ؟

الحل: قانون احتمال (X,Y)

$$\begin{cases}0\le i\le 5\\ 0\le j\le 4\\ 0\le j+1\le 5\end{cases}$$

$$f(i,j)=P(X=i,Y=j)$$

$$=\frac{\binom{6}{i}\binom{4}{j}\binom{7}{5-(i+j)}}{\binom{17}{5}}$$



قانون X

$$f_1(i)=P(X=i)=\sum_i f(i,j)=\frac{\binom{6}{i}}{\binom{17}{5}}\sum_j\binom{4}{j}\binom{7}{5-(i+j)}=\frac{\binom{6}{i}\binom{11}{5-i}}{\binom{17}{5}}$$

$$X\to H(17,6,5)$$

قانون Y: بنفس الطريقة نجد $\quad Y\to H(17,4,5)$

ملاحظة : لدينا التكافؤات التالية :

(X,Y) نقطية $\Leftrightarrow$ X نقطي و Y نقطي

(X,Y) مستمرة $\Leftrightarrow$ X مستمر و Y مستمر

قضية : (X,Y) ثنائية عشوائية نقطية على $(\Omega,\mathcal{B},P)$ قانون احتمالها $f(i,j)$ عندئذ :

$$f_1(j)=\sum_j f(i,j),\quad f_2(j)=\sum_i f(i,j),\quad \sum_{ij} f(i,j)=1$$

البرهان :

$$X(\Omega)=I=\{i,\quad i\in I\},\quad Y(\Omega)=\{j,\quad j\in J\}=J$$

$$\Omega=\dot{\bigcup_j}(Y=j)=\dot{\bigcup_j}Y^{-1}(j)=Y^{-1}\left(\dot{\bigcup_j}\{j\}\right)=Y^{-1}(J)$$

لدينا

$$(X=i)=(X=i)\cap\Omega=(X-i)\cap\left(\dot{\bigcup_j}(Y=j)\right)=\dot{\bigcup_j}(X=i)\cap(Y=j)$$

بالتالي

$$f_1(i)=P(X=i)=\sum_j P(X=i,Y=j)=\sum_j f(i,j)$$

أيضا نبرهن أن $\quad \sum_{i,j} f(i,j)=1$

وجدنا ان $f_1(i)=\sum_j f(i,j)$

و لدينا $\sum_i f(i)=1 \Rightarrow \sum_i \sum_j f(i,j)=\sum_{i,j} f(i,j)=1$

ملاحظة : يمكن أن يمثل قانون احتمال ثنائية عشوائية نقطية (X,Y) بالمصفوفة $(f(i,j))$ مايلي

$X \backslash Y$	x_1	x_2	.	.	.	.	x_n	.	قانون احتمال Y
y_1	.	.	.	.	.	.	.	.	$f_2(y_1)$
y_2	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
y_n	.	.	.	.	.	.	.	$f(x_n,y_n)$	$f_2(y_n)$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	$f_1(x_1)$	$f_1(x_2)$	.	.	.	.	.	.	قانون احتمال X

5.4 قانون الاحتمال الشرطي : نعتبر الحدثين :

$$A=(X=x_i), \qquad B=(Y=y_j)$$

لدينا

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \qquad P(B)\neq 0$$

$$P\left(X=x_i/Y=y_j\right)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_i)}=\frac{f(x_i,y_j)}{f_2(y_j)}, \qquad f_2(y_j)\neq 0$$

و نكتب عموما $f_2(j)\neq 0$ $\quad f_1\left(i/j\right)=\dfrac{f(i,j)}{f_2(j)}$

و يسمى *قانون الاحتمال الشرطي لـ* X باعتبار أن $Y=j$

و يكون قانون الاحتمال الشرطي لـ Y لما $X=i$

$$f_2\left(j/i\right)=\frac{f(i,j)}{f_1(i)} \quad , \qquad f_1(i)\neq 0$$

و نلاحظ أن $\sum_{j} f_2\left(\frac{j}{i}\right)=1$ و $\sum_{i} f_1\left(\frac{i}{j}\right)=1$

- في حالة استمرار (X,Y) نجد :

$$f_1\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \quad , \quad f_2(y)\neq 0$$

و هو قانون الاحتمال الشرطي لـ X

أيضا $$f_2\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)} \quad , \quad f_1(x)\neq 0$$

ملاحظة:

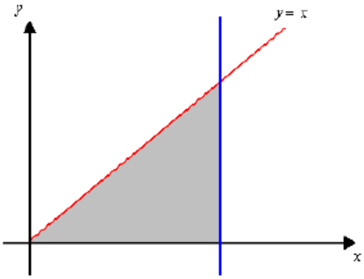
$$\int_{IR} f_2\left(\frac{y}{x}\right)dy=1 \quad \text{و} \quad \int_{IR} f_1\left(\frac{x}{y}\right)dx=1$$

مثال: (X,Y) ثنائية عشوائية مستمرة كثافتها الاحتمالية معرفة بـ :

$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy & ,0\leq x\leq 1 \quad , \quad 0\leq y\leq x \\ 0 & \text{عند العكس} \end{cases}$$

1. يطلب حساب الكثافة الثنائية لـ X و Y
2. يطلب حساب الكثافة الشرطية لـ X و Y

الحل :



نعين $f_2(yx) \quad , \quad f_1(x)$

لدينا
$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$
$$=8\int_{y=0}^{y=x} xy.dy=4x^3$$

إذن
$$f_1(x)=\begin{cases} 4x^3 & 0\leq x\leq 1 \\ & \text{عند العكس} \end{cases}$$

ايضا $f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = 8\int_{x=y}^{x=1} xydx = 4y(1-y^2)$

اذن
$$f_2(y)=\begin{cases}4y(1-y^2) & , \quad 0\le y\le 1\\ 0 & \text{عند العكس}\end{cases}$$

فتكون قوانين الاحتمال الشرطية:

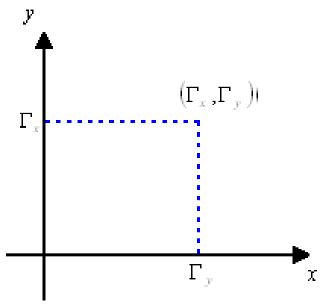
$$f_1\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2} & 0\le y\le x\le 1, \quad y\ne 1\\ 0 & \text{عند العكس}\end{cases}$$

و

$$f_2\left(\frac{y}{x}\right)=\begin{cases}\dfrac{2y}{x^2} & 0\le y\le x\le 1, \quad x\ne 0\\ 0 & \end{cases}$$

1.5.4 التوزيع الرياضي: (X,Y) ثنائية عشوائية حقيقية على $(\Omega,\mathcal{B},P)$

إذا وجد كل من $E(X)$ و $E(Y)$ فان *التوقع الرياضي* لـ (X,Y) هو الثنائية $(\Gamma_x,\Gamma_y)=(E(X),E(Y))$



- اذا كانت (X,Y) نقطية : قانون احتمالها $f(i,j)$ فإن :

$$\Gamma_x = E(X)=\sum_i if_1(i)=\sum_i i\sum_j f(i,j)=\sum_{i,j} if(i,j)$$
$$\Gamma_y = E(Y)=\sum_j jf_1(j)=\sum_j j\sum_i f(i,j)=\sum_{i,j} jf(i,j)$$

- اذا كانت (X,Y) مستمرة:

$$\Gamma_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx = \iint xf(x,y)dxdy$$
$$\Gamma_y = \iint yf(x,y)dxdy$$

قضية : اذا وجد $E(X)$ و $E(Y)$ فان :

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y), \qquad \alpha, \beta \in IR$$

6.4. التوقع الشرطي :

- في حالة (X,Y) نقطي نجد ان :

$$E\left(X/_{Y=j}\right) = \sum_i i f_1\left(i/_j\right)$$
$$E\left(Y/_{X=i}\right) = \sum_j j f_2\left(j/_i\right)$$

- في حالة الاستمرار فان

$$E\left(X/_Y\right) = \int x f_1\left(x/_y\right)dx$$
$$E\left(Y/_X\right) = \int y f_2\left(y/_x\right)dy$$

7.4. التغاير (التباين) la covariance:

(X,Y) ثنائية عشوائية حقيقية على $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ ، نعرف التغاير بين X و Yبـ

$$Cov(X,Y) = E[(X-\Gamma_X)(Y-\Gamma_Y)], \qquad \left(\text{حيث } \Gamma_X = E(X), \quad \Gamma_Y = E(Y)\right)$$

و بنشر هذا المقدار نجد

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

و ينتج أن وجود التغاير مرتبط بوجود كل من $E(X)$ ، $E(Y)$ و $E(XY)$.

إذا كان $X = Y$ فان :

$$Cov(X,X)=E(X^2)-E^2(X)=V(X)=\sigma_X^2$$

8.4. استقلال متغيرين عشوائيين:

$$(\Omega,\mathcal{B},P)\xrightarrow{(X,Y)}(IR,\mathcal{B}_{IR^2},P_{(X,Y)}) \longrightarrow (IR,\mathcal{B}_{IR},P_X)$$
$$\searrow (IR,\mathcal{B}_{IR},P_Y)$$

$P_{(X,Y)}=P_X\otimes P_Y \;\Leftrightarrow\;$ مستقلان Y و X

و يقابل ذلك في الحالة النقطية ما يلي :

$$f(i,j)=f_1(i).f_2(j)\quad ,$$
$$\forall i,j\,/\,P\left(X<t_1,\; Y<t_2\right)=P(X<t_1)\cdot P(Y<t_2)$$

في حالة الاستمرار :

$f(x,y)=f_1(x).f_2(y),\quad \forall(x,y)\Leftrightarrow$ مستقلان Y و X

و ينتج أن : $F(x,y)=F_1(x).F_2(y)$

نتائج : $f_2\left(\frac{j}{i}\right)=f_2(j)$ و $f_1\left(\frac{i}{j}\right)=f_1(i)$

(هذا عند توفر الاستقلال)

مثال : $x\geq 0, y\geq 0 \quad f(x,y)=e^{-(x+y)},$

دراسة الاستقلال: نبحث أولا عن f_1, f_2 . لدينا :

$$f_1(x)=\int f(x,y)dy=$$
$$=\int_0^\infty e^{-(x+y)}dy=e^{-x}$$

اذن

$$\begin{cases} f_1(x) = e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ X \longrightarrow Exp(1) \end{cases}$$

أيضا

$$f_2(x) = \int f(x,y)dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}dx = e^{-y}$$

إذن

$$\begin{cases} f_2(y) = e^{-y} & , \quad y \geq 0 \\ Y \longrightarrow Exp(1) \end{cases}$$

نلاحظ أن $\forall(x,y)$ $\quad f(x,y) = f_1(x).f_2(x)$

الأمر الذي يعني أن X , Y مستقلان و نكتب $\quad X \coprod Y$

نتائج :

- اذا كان $X \coprod Y$ فإن

ا) $E(XY) = E(X)E(Y)$ أي أن :

$\rho = 0$ و $Cov(X,Y) = 0$

ب) $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ (رغم كون V غير خطي)

ج) $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t).\varphi_Y(t)$

د) يمكن التأكد أن انعدام $\rho_{X,Y} \Leftarrow$ ~~دوما~~ أن $X \coprod Y$

تمارين حول الشعاع العشوائي

التمرين 1: قانون احتمال ثنائية عشوائية نقطية (X,Y) هو

$$P(X=i, Y=j) = f(i,j) = \alpha(2i+j) \ , \quad i = 0,1,2 \ , \quad j = 0,1,2,3$$

عين قيمة α واحسب الاحتمالين $P(X \geq 1, Y \leq 2)$, $P(X = 1, Y = 2)$

و عين كذلك $f_1(i), f_2(j)$ ثم $E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$,

التمرين 2: قانون احتمال ثنائية مستمرة معطى بالكثافة :

$$f(x,y) = ax(x+y) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 2$$

عين a ثم $E(X)$, $E(XY)$, $E(X+Y)$, $E(Y)$ و كذلك $f_2(y)$, $f_1(x)$ و

احسب الاحتمالين $P\left(X \geq \frac{1}{2}, Y \leq 1\right)$, $P\left(X = \frac{1}{2}, Y = 1\right)$

هل Y, X مستقلان ؟

التمرين 3: قانون (X,Y) هو:

$$f(-1,-1) = 0, \quad f(-1,0) = \frac{1}{4}, \quad f(-1,1) = 0$$

$$f(0,-1) = \frac{1}{4}, \quad f(0,0) = 0, \quad f(0,1) = \frac{1}{4}$$

$$f(1,-1) = 0, \quad f(1,0) = \frac{1}{4}, \quad f(1,1) = 0$$

تأكد من أن $\rho = 0$ و أن Y, X غير مستقلين.

التمرين 4

لتكن الثنائية العشوائية المستمرة (X,Y) المعرفة على فضاء الاحتمال $(\Omega, \mathcal{A}, IP)$ ، وليكن تابع التوزيع لهذه الثنائية المعرف بـ:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + (e^x + e^y - 1)^{-1} & ; x \geq 0; y \geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. أوجد تابع الكثافة للثنائية (X,Y).
2. أوجد تابع التوزيع الهامشي لـ X و تابع التوزيع الهامشي لـ Y.
3. لتكن الثنائية (U,V)، حيث أن $U = e^{-X+Y}$ و $V = Y + X$.

أوجد تابع الكثافة للثنائية (U,V).

التمرين 5

لتكن (X,Y) ثنائية عشوائية ذات كثافة احتمالية المعطاة كما يلي

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{k}{\sqrt{xy}} & ,0<x\le y<1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

1. أوجد قيمة k ثم أوجد تابع التوزيع المشترك $F_{X,Y}(x,y)$.
2. أوجد تابع التوزيع الهامشي لـ X و Y،
3. باستخدام السؤال السابق (تابع التوزيع الهامشي)، أوجد الكثافة الهامشية لـ X و Y.
4. هل المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان؟
5. أحسب $IE(Y/X=x)$ ثم $IE(IE(Y/X))$.

التمرين 6:

لتكن الكثافة الهامشية لـ X و Y هي:

$$f(x,y)=\frac{e^{-\frac{x}{y}}\cdot e^{-y}}{y} \qquad ,0<x<\infty,\quad 0<y<\infty$$

1) أحسب $IE(X/Y=y)$.

2) أحسب $Var(X/Y=y)$.

التمرين 07:

لتكن (X,Y) ثنائية متغيرات عشوائية حقيقية ذات كثافة احتمالية معطاة كما يلي:

$$f(x,y)=\begin{cases}c & si\ |x|^2+|y|^2\le 1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

1- أوجد c.

2- أثبت أن المتغيران العشوائيان X و Y غير مستقلان.

3-أحسب $Var(X/Y)=IE\left[\left(X-IE(X/Y)\right)^2/Y\right]$

حلول التمارين

حل التمرين 1 :

1) (X,Y) شعاع عشوائي نقطي إذن

$$\sum_{i,j} f(i,j)=1 \Leftrightarrow a\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(2i+j)=1$$

$$\Leftrightarrow a\left(\sum_{i=0}^{3} j+\sum_{j=0}^{3}(2+j)+\sum_{j=0}^{3}(4+j)\right)=1$$

$$\Leftrightarrow a(6+14+22)=1$$

$$\Leftrightarrow a.42=1$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{1}{42}$$

و منه $f(i,j)=\frac{1}{42}(2i+j)\quad,\quad i=0,1,2\quad,\quad j=0,1,2,3$

(2

$$P(X\geq 1,Y\leq 2)=\sum_{i\geq 1}\sum_{j\leq 2} f(i,j)$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{42}(2i+j)$$

$$=\frac{1}{42}\sum_{i=1}^{2}\left(2i\sum_{j=0}^{2}1+\sum_{j=0}^{2} j\right)$$

$$=\frac{1}{42}\sum_{j=1}^{2}(2i+3)$$

$$=\frac{1}{42}\left(6\sum_{i=1}^{2} i+3\times 2\right)$$

$$=\frac{1}{42}(18+6)=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

3) $$P(X=1,Y=2)=f(2,1)=\frac{2}{21}$$

4) لدينا

$$\begin{aligned} f_i(i) &= \sum_j f(i,j) \\ &= \sum_{j=0}^{3}\frac{1}{42}(2i+j) \\ &= \frac{1}{42}\big(2i+(2i+1)+(2i+2)+(2i+3)\big) \\ &= \frac{1}{42}(8i+6) \quad , \quad i=0,1,2 \end{aligned}$$

أيضا

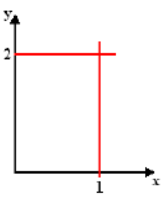
$$\begin{aligned} f_2(j) &= \sum_i f(i,j) \\ &= \frac{1}{42}\sum_{i=0}^{2}(2i+j) \\ &= \frac{1}{42}(j+2+j+4-j) \\ &= \frac{1}{42}(3j+6) \quad , \quad j=0,1,2,3 \end{aligned}$$

5)

$$E(X)=\sum_{i=0}^{2} i f_1(i)=\frac{1}{42}\sum_{i=0}^{2} i(8i+6)=\frac{1}{42}\left[0+2(8+6)+2(16+6)\right]=\frac{58}{42}=\frac{29}{21}$$

حل التمرين 2 : لدينا

$$P\left(X\geq\frac{1}{2},Y=1\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{1} f(x,y)dy\right]dx=\frac{3}{5}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left[\int_{0}^{1}(x+y)dy\right]dx$$



$$=\frac{3}{5}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{3}{5}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right)_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$P\left(X=\frac{1}{2},Y=1\right)=P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq\frac{1}{2},1\leq Y\leq 1\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\int_{1}^{1} f dy\right]dx=0$$

لنحسب $E(X)$:

$$E(X)=\iint xf(x,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_0^2\frac{3}{5}x^2(x+y)dy\right]dx=\frac{3}{5}\int_0^1 x^2\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2}dx$$

$$=\frac{6}{5}\int_0^1 x^2(x+1)dx=\frac{6}{5}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{6}{5}+\frac{7}{12}=\frac{7}{10}$$

حساب $E(XY)$

$$E(XY)=\iint xyf(x,y)dxdy$$

$$=\frac{3}{5}\int_0^1\left[\int_0^2 x^2y(x+y)dy\right]dx$$

$$=\frac{3}{5}\int_0^1 x^2\left[\int_0^2 xy+y^2dy\right]dx$$

$$=\frac{3}{5}\int_0^1 x^2\left[\int_0^2\frac{y^2}{2}x+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=2}dx$$

$$=\frac{3}{5}\int_0^1 x^2\left(2x+\frac{8}{3}\right)dx$$

$$=\frac{3}{5}\left[\frac{x^4}{2}+\frac{8}{9}x^3\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$=\frac{3}{5}\left[\frac{1}{2}+\frac{8}{9}\right]=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

حل التمرين 3 :

$X \backslash Y$	-1	0	1	$f_1(1)$
-1	0	$1/4$	0	$1/4$
0	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$

1	0	$1/4$	0	$1/4$
$f_2(Y)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	

لدينا

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)}.\sqrt{V(Y)}}$$

$$f_1(1) = \sum_j f(i,j) = f(i,-1) + f(i,0) + f(i,1)$$

أيضا

$$f_1(-1) = \frac{1}{4}, \quad f_1(0) = \frac{1}{2}, \quad f_1(1) = \frac{1}{4}$$

كان بالإمكان استنتاج ذلك من الجدول مباشرة إذن

i	-1	0	1
$f_1(i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

لدينا

$$E(X) = -1.\frac{1}{4} + 0.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{4} = 0$$

كذلك

$$E(Y) = -1.\frac{1}{4} + 0.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{4} = 0$$

أيضا

$$E(XY) = \sum_{i,j} ijf(i,j) = \sum_i i\left[\sum_j jf(i,j)\right]$$

لدينا

$$\sum_j jf(i,j) = -1.f(i,-1) + 0 + 1.f(i,1)$$

$$E(XY) = -[f(-1,-1) - f(1,-1)] + f(-1,1) + f(1,1) = -0 - 0 + 0 + 0 = 0$$

و منه

$$\rho = 0$$

بالنسبة للإستقلال، نعلم أن $f(i,j) = f_1(i)f_2(j) \Leftrightarrow Y \amalg X$

من اجل $(i,j) = (-1,-1):\ f(-1,-1) = 0 \neq f_1(-1)f_2(-1) = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

نستنتج أن $\rho = 0 \Rightarrow X \amalg Y$ و $\cancel{X \amalg Y} \Rightarrow \rho = 0$

5.أنواع التقارب و نظرية النهاية المركزية

1.5 بعض أنواع التقارب :

1.1.5 التقارب شبه مؤكد : لتكن (X_n) متتالية متغيرات عشوائية حقيقية معرفة على $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ و X متغير عشوائي حقيقي مع نفس الفضاء.

نقول ان (X_n) تتقارب شبه مؤكدا نحو X إذا و فقط إذا كان :

$$P\left(\omega \in \Omega : \lim_n X_n(\omega) \neq X(\omega)\right) = 0$$

2.1.5 التقارب البسيط (المؤكد أو الكلي) : نقول ان متتالية (X_n) تتقارب بساطة نحو X إذا و فقط إذا كان : $\forall \omega \in \Omega$, $\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$

3.1.5 التقارب بالاحتمال : نقول أن (X_n) تتقارب بالإحتمال نحو X إذا و فقط إذا كان :

$$\left(X_n \xrightarrow{P} x\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 : \lim_n P\left[\left|X_n - X\right| > \varepsilon\right] = 0\right)$$

4.1.5 التقارب بالمتوسط: نقول أن (X_n) تتقارب بالمتوسط نحو X إذا و فقط إذا كان :

$$\left(X_n \xrightarrow[r]{M} x\right) \Leftrightarrow \left(\underset{\forall r \in IN^*}{E}\left(\left|X_n - X\right|^r\right) = \int_\Omega \left|X_n - X\right|^r dp \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\right)$$

5.1.5 التقارب بالقانون: نقول أن (X_n) تتقارب بالقانون نحو X إذا و فقط إذا كان:

$$\left(X_n \xrightarrow{L} x\right) \Leftrightarrow \left(\lim_n F_n(\alpha) = F(x)\right)$$

حيث $F_{X_n}(x) = F_n(x) = P(X_n < x)$ و $F(X) = P(X < x)$

و ذلك عندما تكون x نقطة استمرار لـ F

نتيجة: $\left(X_n \xrightarrow{L} X\right) \Leftrightarrow \left(\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n]{} \varphi_x(t)\right)$

2.5 العلاقات بين أنواع التقارب : رأينا أن التقارب شبه الكلي حيث ما كان تقريبا $\Leftarrow$ التقارب بالقياس في حالة القياس المنته ، لذلك نحصل على الإستلزامات التالية :

1) التقارب شبه المؤكد $\Leftarrow$ التقارب بالاحتمال

2) التقارب بالمتوسط $\Leftarrow$ التقارب بالاحتمال

لنبرهن الاستلزام 2 أي

$$\lim_n \int_\Omega |X_n - X|^r dp = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0: \quad \lim_{\substack{n\\0}} p\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$$

لدينا

$$\lim_n \int_\Omega |X_n - X|^r dp = \int_{(|X_n - X| > \varepsilon)} |X_n - X|^r dp + \int_{(|X_n - X| \leq \varepsilon)} |X_n - X|^r dp$$

$$\geq \int_{(|X_n - X| > \varepsilon)} |X_n - X|^r dp \geq \int_{(|X_n - X| > \varepsilon)} \varepsilon^r dp$$

$$= \varepsilon^r P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right)$$

اذن

$$\lim_n \int_\Omega |X_n - X|^r dp \geq \varepsilon^r P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \qquad \forall \varepsilon > 0$$

نمر الى النهاية عندما $n \to 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad 0 \geq \varepsilon^r \cdot \lim_n P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow \lim_n P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0 \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$$

3) التقارب بالاحتمال $\Leftarrow$ التقارب بالقانون . لنبرهن على ذلك، أي لنبرهن :

$$\left(X_n \xrightarrow{P} X\right) \Rightarrow \left(X_n \xrightarrow{L} Y\right)$$

لدينا فرضا $\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \lim_n P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$

لنثبت أن $\lim_{n} F_n(x)=F(x)$ عند نقاط الاستمرار F. نحاول حصر المقدار

$$F_n(x)-F(x)$$

ا) لدينا الاحتواء (0) $(X_n < x)\subset(X < x+\varepsilon)\cup(|X_n - X| \geq \varepsilon)$.............$(0)$

و من رتابة الاحتمال نجد

$$P(X_n < x)\leq P(X < x+\varepsilon)+P(|X_n - X|\geq \varepsilon)$$

$$\Rightarrow F_n(x)\leq F(x+n)+P(|X_n - X|\geq \varepsilon).............(1)$$

ب) لدينا كذلك

$$(X < x-\varepsilon)\subset(X_n < x)\cup(|X_n - X|\geq \varepsilon)$$

$$\Rightarrow F(x-\varepsilon)\leq F_n(x)+P(|X_n - X|\geq \varepsilon).............(2)$$

ج) من (1) و (2) نجد

$$F(x-\varepsilon)-P(|X_n - X|\geq \varepsilon)\leq F_n(x)\leq F(x+\varepsilon)+P(|X_n - X|\geq \varepsilon)$$

$$\Rightarrow (F(x-\varepsilon)-F(x))-P(|X_n - X|\geq \varepsilon)\leq (F_n(x)-F(x))$$

$$\leq (F(x+\varepsilon)-F(x))+P(|X_n - X|\geq \varepsilon).......(3)$$

د) ليكن $Xn\xrightarrow{P}X$ و F مستمر عن نقاط x إذن و منه

$$\forall\alpha > 0:\exists\eta:|x'-x| < \eta \Rightarrow |F(x')-F(x)| < \frac{\alpha}{2}$$

فمن اجل $\varepsilon < \eta$ لدينا

$$F(x+\varepsilon)-F(x) < \frac{\alpha}{2}$$

$$F(x-\varepsilon)-F(x) > -\frac{\alpha}{2}$$

فتوجد n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$:

(نتيجة للتقارب بالاحتمال) $P(|X_n - X|\geq \varepsilon) < \frac{\alpha}{2}$

و من (3) نجد

$$-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\leq F_n(x)-F(x)\leq \frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}$$

$$\forall\alpha > 0:\exists n_0 : n\geq n_0 \Rightarrow |F_n(x)-F(x)| < \alpha$$

$$\Rightarrow F_n(x)\longrightarrow F(x)\Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$$

3.5 القانون الضعيف للأعداد الكبيرة:

قضية : لتكن $(X_n)_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية الحقيقية المستقلة و لها نفس القانون بحيث

$$\forall n \geq 1, \quad V(x_n) = \sigma^2, \quad E(\alpha_n) = \Gamma$$

إن المتتالية $\left(\overline{X_n}\right)$ حيث $\overline{X_n} = \frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ تتقارب بالاحتمال الى $X = \Gamma$.

تسمي هذه القضية بـ :*القانون الضعيف للأعداد الكبيرة* .

البرهان : نبرهن على ان :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \Gamma\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

$$E\left(\overline{X_n}\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \Gamma = \Gamma$$

و

$$V\left(\overline{X_n}\right) = V\left(\frac{S_0}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot V\left(X_1 + \ldots\ldots\ldots X_n\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\left(\left|\overline{X}_n - \Gamma\right| \geq \varepsilon\right) = \left(\left|\frac{\overline{X}_n - \Gamma}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\right) \geq \frac{2\sqrt{n}}{\sigma}$$

و لدينا من متراجحة تشبيتشيف ؛

$$0 < P\left(\left|\frac{\overline{X}_n - \Gamma}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

و منه $0 \leq P\left(\left|\overline{X}_n - \Gamma\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. نمر الى النهاية $n \longrightarrow +\infty$ نجد

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \Gamma\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

مثال: $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية متغير عشوائي حقيقي مستقلة بحيث $\forall n,\ X_n \longrightarrow \mathcal{B}(s,p)$

لدينا
$$\overline{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ليكن
$$E(X_i) = np = p \quad و \quad V(X_i) = npq = pq$$

$$E\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n}.np = p$$

و
$$V(X_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2}.np = \frac{pq}{n}$$

$$\left(S_n \longrightarrow \mathcal{B}(n,P)\right)$$

و من القضية السابقة نجد $\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n} P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

4.5 نظرية النهاية المركزية (التقارب إلى التوزيع المعياري) :

ليكن $(X_n)_{n\geq 1}$ متتالية متغير عشوائي حقيقي مستقلة لها نفس القانون بحيث $V(X_n) = \Gamma^2$ و $E(X_n) = \Gamma$.

إذا وضعنا $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ و $Z_n = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$ ، عندئذ تتقارب (Z_n) بالقانون إلى متغير عشوائي حقيقي Z طبيعي معياري، أي أن

$$\left(Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z\right) و \ Z \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

سلسلة تمرينات

<u>التمرين الأول:</u>

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس القانون. حيث أن X يتبع القانون الطبيعي $\mathcal{N}(0,\sigma)$ ، σ هو عدد حقيقي موجب معطى.

أثبت أن المتتالية T_n المعرفة بـ:

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

متقاربة بالمتوسط من الرتبة 2 نحو النهاية التي سنحددها.

التمرين الثاني:

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية لها نفس القانون، ذات كثافة احتمالية معطاة كما يلي:

$$f(x) = \frac{\theta}{2}e^{-\theta|x|}$$

حيث θ عدد حقيقي موجب معطى.

أدرس التقارب بالاحتمال لمتتالية المتغيرات العشوائية المعرفة بـ:

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

التمرين الثالث:

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية لها نفس القانون، ذات كثافة احتمالية معطاة كما يلي

$$f(x) = \exp\left[-(x-\theta) - e^{-(x-\theta)}\right]$$

حيث θ عدد حقيقي موجب معطى.

أدرس التقارب بالقانون لمتتالية المتغيرات العشوائية المعرفة بـ:

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{-(X_i-\theta)}$$

التمرين الرابع

لتكن (X_n) متتالية متغيرات عشوائية موجبة ذات كثافة احتمالية $f_n(x) = ne^{-nx}$ من أجل $x > 0$.

- أثبت أن المتتالية (X_n) متقاربة بالمتوسط ($m.q.$) نحو الصفر.

التمرين الخامس:

لتكن (X_n) متتالية متغيرات عشوائية معرفة على الفضاء $(\Omega, \mathcal{B}, IP)$. حيث أن $IE(X_n)$ و $Var(X_n)$ موجودان. X متغير عشوائي معرف على $(\Omega, \mathcal{B}, IP)$. حيث $IE(X)$ و $Var(X)$ موجودان.

- بين أن الشرط الكافي للتقارب بالاحتمال لـ X_n نحو X لما n تؤول إلى ∞ هو:

$$\lim_{n\to+\infty} IE(X_n - X) = 0 \quad و \quad \lim_{n\to+\infty} Var(X_n - X) = 0$$

التمرين السادس:

لتكن $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة و تتبع نفس قانون المتغير العشوائي X ذو الكثافة الاحتمالية $f(x)$ ، حيث:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & ; x \geq \theta \\ 0 & ; ailleurs \end{cases}$$

حيث أن θ هو عدد حقيقي موجب معطى. نعرف المتغير العشوائي $m_n = \min\{X_1, ..., X_n\}$.

1. أوجد تابع التوزيع لـ m_n ، ثم أوجد تابع الكثافة لها.
2. أحسب الأمل الرياضياتي لـ m_n .
3. أثبت أن المتتالية m_n تتقارب بالمتوسط من الرتبة 1 نحو θ ، لما n تؤول إلى ∞ .
4. أثبت أن المتتالية m_n تتقارب بالاحتمال نحو θ ، لما n تؤول إلى ∞ .

الحل

التمرين 4

من أجل اثبات أن متقاربة بالمتوسط ($m.q.$) نحو الصفر، يجب حساب نهاية:

$$\begin{aligned} IE(X_n^2) &= \int_0^\infty x^2 n e^{-nx} dx \\ &= \left[-x^2 e^{-nx}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-nx} dx \\ &= \left[-2x\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^\infty + \frac{2}{n}\int_0^\infty e^{-nx} dx \\ &= \frac{2}{n^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} IE(X_n^2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = 0$$

وبالتالي يكون

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{m.q.} 0$$

التمرين 5

لدينا

$$Var\left(X_n - X\right) = IE\left(\left(X_n - X\right)^2\right) - \left(IE\left(X_n - X\right)\right)^2$$

وبما أن

$$\lim_{n\to+\infty} IE\left(X_n - X\right) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} Var\left(X_n - X\right) = 0$$

فإن

$$\lim_{n\to+\infty} IE\left(X_n - X\right)^2 = 0$$

وبالتالي

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{m.q.} X$$

وبما أن

$$\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{m.q.} X\right) \Rightarrow \left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{IP.} X\right)$$

فإن

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{IP.} X$$

التمرين 6

1. إيجاد تابع التوزيع لـ m_n

$$IP\left(m_n > x\right) = IP\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left(X_i > x\right)\right) = \prod_{i=1}^{n} IP\left(X_i > x\right)$$

$$= IP\left(X_1 > x\right)IP\left(X_2 > x\right)...IP\left(X_n > x\right)$$

$$= \left[IP\left(X_i > x\right)\right]^n = \left[1 - IP\left(X_i \le x\right)\right]^n$$

$$IP\left(m_n > x\right) = \left[1 - F\left(x\right)\right]^n$$

وبالتالي نجد أن $IP(m_n \leq x) = 1 - [1 - F(x)]^n$

ومنه تابع التوزيع لـ m_n هو:

$$G(x) = IP(m_n \leq x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

ومنه تابع الكثافة يكون:

$$g(x) = (G(x))' = nf(x)[1 - F(x)]^{n-1}$$

نحسب $F(x)$ و $f(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-\theta)}dx = \int_{\theta}^{x} e^{-(x-\theta)}dx = 1 - e^{-(x-\theta)}$$

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x}F(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - e^{-(x-\theta)}\right) = e^{-(x-\theta)}$$

وبالتعويض ينتج أن

$$g(x) = ne^{-(x-\theta)}\left[e^{-(x-\theta)}\right]^{n-1} = ne^{-n(x-\theta)}$$

1. حساب الأمل الرياضياتي لـ m_n

$$IE(m_n) = \int_{\theta}^{+\infty} xg(x)dx = n\int_{\theta}^{+\infty} xe^{-n(x-\theta)}dx$$

$$= n\int_{\theta}^{+\infty} (x - \theta + \theta)e^{-n(x-\theta)}dx$$

$$= \int_{\theta}^{+\infty} n(x-\theta)e^{-n(x-\theta)}dx + \theta\int_{\theta}^{+\infty} ne^{-n(x-\theta)}dx$$

$$= \theta + \frac{1}{n}$$

2. إثبات أن المتتالية m_n تتقارب بالمتوسط من الرتبة 1 نحو θ

$$IE(|m_n - \theta|) = IE(m_n - \theta) = IE(m_n) + IE(-\theta)$$

$$= \theta + \frac{1}{n} - \theta = \frac{1}{n}$$

وبحساب النهاية لما n تؤول إلى $+\infty$ نجد أن

$$\lim_{n\to+\infty} IE(|m_n-\theta|)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

ومنه m_n تتقارب بالمتوسط نحو θ، لما n تؤول إلى $+\infty$.

3. إثبات أن المتتالية m_n تتقارب بالاحتمال نحو θ

نطبق متراجحة ماركوف على المتغير الموجب $|m_n-\theta|=m_n-\theta$

$$IP(|m_n-\theta|\geq\varepsilon)=IP(m_n-\theta\geq\varepsilon)\leq\frac{IE(m_n-\theta)}{\varepsilon}=\frac{1}{n\varepsilon}$$

من أجل $\varepsilon>0$

وبحساب النهاية لما n تؤول إلى $+\infty$ نجد أن

$$\lim_{n\to+\infty} IP(|m_n-\theta|\geq\varepsilon)=0$$

ومنه m_n تتقارب بالاحتمال نحو θ، لما n تؤول إلى $+\infty$.

المراجع

1- أحمد شيبات، مفاهيم من حساب الاحتمالات – دروس وتمارين محلولة، ترجمة: يزيد دربال، الجزائر: . جامعة منتوري قسنطينة، 2004

2- أحمد عبد السميع طبيّه، **مبادئ الإحصاء**، ط1 ، الأردن :دار البداية للنشر والتوزيع، 2008

3- السعدي رجال، **نظرية الاحتمال – مبادئ الحساب الاحتمالي**، ج1 ، ط1 ، الجزائر : ديوان المطبوعات . الجامعية، 1995

4- السعدي رجال، **نظرية الاحتمال – مبادئ الحساب الاحتمالي**، ج1 ، ط4 ، الجزائر :ديوان المطبوعات . الجامعية،2005

5- مصطفى عبد الحفيظ، **نظرية الاحتمالات – مبادئ وتطبيقات**، ج1 ، ط3 ، الجزائر :ديوان المطبوعات . الجامعية، 2008

6- KACI REDJDAL, **Probabilites – Exercices Corrigés Avec Rappels de cours,** K R Edition

7- LECOUTRE J-P, **Statistique Et Probabilités,** 4eme Ed Paris: Dunod, 2008