الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientfiique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي- سكيكدة
Ecole Normale Supérieure d'eneignement technologique, Skikda

قسم الرياضيات والإعلام الآلي
Département de Mathématiques et informatique

مُذكّرة تخرج لنيل شهادة أُستاذ التّعليم الثانوي

تعميمات جديدة للمتراجحات التكاملية من نوع جرونوال-بيلمان-بيهاري في البعد الثاني على المقاييس الزمنية

من إعداد :
★ جلابي آية
★ هوام شروق

تحت إشراف الأستاذة :
★ قيدوشي وحيدة

من طرف لجنة المناقشة :
♦ بولعراس .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... رئيس.
♦ عزوز فراق .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... مشرفا.
♦ مزياني محمد سيف الدين .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... مناقشا.

السنة الجامعية : 2024/2023
دفعة جوان 2024

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

السلام عليكم و رحمة الله و بركاته

تحية طيبة وبعد

❖ شكــــر وتقديـــــــــر

الحمد لله حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه الذي سخر لنا الأسباب للوصول إلى ما نحن عليه، والصلاة والسلام على الحبيب المصطفى الذي أدى الأمانة ونصح للأمة.

عملا بقوله صلى الله عليه وسلم:

﴿ مَنْ لَمْ يَشكُرِ النَّاس لَم يَشكُرِ الله ﴾

رواه " أحمد والترميذي ".

وقبل أن نمضي نتقدم ببالغ شكرنا وعظيم إمتناننا للأستاذة قيدوشي وحيدة.

ونخص بجزيل الشكر والعرفان إلى كل من أشعل شمعة في دروب عملنا وإلى كل من وقف على المنابر وأعطى من حصيلة فكره لنا.

إلى الأساتذة الكرام في المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي.

إلى من قدموا لنا المساعدات والتوجيهات دون أن يشعروا بدورهم بذلك.

كما نشكر أعضاء اللجنة التي تشرفنا بقبولها مناقشة هذه المذكرة.

﴿ربي أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي و على والدي و أن أعمل صالحا ترضاه وأدخلني برحمتك في عبادك الصالحين﴾

❖ إهداء

ما سلكنا البدايات إلا بتيسيره و ما بلغنا الغايات إلا بتوفيقه و ما حققنا الغايات إلا بفضله ، فالحمد الذي وفقنى لثمين هذه الخطوة في مسيرتي الدراسية .

إلى الجدار الذي أستند عليه في تعبي و حزني إلى النور الذي أنار دربي و السراج الذي لا ينطفي نوره في قلبي أبدا من بذل الغالي و النفيس و استمديت منه قوتي و اعتزازي بذاتي إلى عزيزي و حبيبي الذي أحبه بقدر هذا العالم و أكثر أبي العزيز.

إلى الحبيبة الأولى و الصديقة الحنونة ، مصدر قوتي و فخري إلى العظيمة التي يرجع لها الفضل بعد الله في كل انجاز أخطو إليه من أول حرف كتبته إلى ما أنا عليه اليوم ، إلى من غمرتني بدفئها و احتضنتني بدعائها أمي العزيزة ضلعي الثابت و أمان أيامي .

إلى ملهمة نجاحي و صانعة قوتي و صفوة أيامي ،إلى الشمعة التي تنير لي الطريق دوما أختي و صديقتي و توأم روحي نسرين.

إلى من رزقني الله به سندا أشد به عضدي فكان لي خير معين أخي محمد ضياء الدين .

إلى روعة الحياة و من أوحدوا بنفسي الأمنيات ،إلى أعمدة القلب و ضمادات الروح ، إلى من حبهم يعلوا فوق كل حب أختاي هداية و آلاء.

إلى الإنسانة العظيمة "فقيدتي جدتي " لطالما تمنيت أن تقر عينيها برؤيتي في يوم كهذا، إلى من توسدها التراب قبل أن تراني خريجة ، فرجتي تنقصها وحودك و نجاحي ينقصه فخرك بي.

إلى من لم تربطني بهم علاقة النسب ، بل عطر الصداقة ،و ورود المحبة صديقاتي آية ، مروة ، عبير، شاهيناز ، إيناس.

شروق هوام

❖ إهداء

إلى نفسي ...♡

إلى الوالدين الكريمين حفظهما الله وأدامهما نورا لدربي ...♡

إلى أشقائي صهيب ، محمد و زكرياء ...♡

إلى أختي حبيبة قلبي الصغرى تسنيم ...♡

إلى عائلتي الثانية الزملاء ورفقاء المشوار الدراسي ...♡

آية جلابي

الفهرس

مقدمـــة

تعد متراجحات جرونوال -بيهاري التكاملية أدوات هامة في نظرية المعادلات التفاضلية و المتراجحات تستخدم عادة لتقديم تقديرات وحدود على حلول المعادلات التفاضلية والتكاملية، تنسب هذه المتراجحات إلى الرياضيين توماس إتش جرونوال وإيمري بيهاري . الصيغة العامة لمتراجحة جرونوال -بيهاري التكاملية هي كما يلي لأي دالة $f(t)$ و $g(t)$ وثوابت a و b و c و d إذا كان :

$$f(t) \leq a + b \int_0^t f(s)g(s)ds,$$

عندما يكون $0 \leq t \leq T$ حيث T هو الحد الأعلى للفترة المعنية، فإنه يمكن إشتقاق حدود وتقديرات للدالة $f(t)$ بإستخدام هذه المتراجحة . تعتبر هذه المتراجحات مفيدة في مجالات مختلفة من الرياضيات، بما في ذلك دراسة المعادلات التفاضلية، والمعادلات التكاملية، والتحليل الدالي تستخدم غالبا لإثبات وجود ووحدانية وإستقرارالحلول في نماذج رياضياتية مختلفة ومعادلات تفاضلية قد تختلف الصيغة والإستخدام الخاص للمتراجحة بناءا على السياق والمشكلة التي يتم معالجتها . الهدف من هذه المذكرة هو إنشاء تعميمات جديدة للمتراجحات التكاملية من نوع جرونوال-بيلمان-بيهاري، بالإضافة إلى بعض تطبيقاتها. تطرقنا في عملنا هذا إلى ثلاثة فصول:

* الفصل الأول: قدمنا بعض المفاهيم الأولية التي سيتم إستخدامها لاحقا.
* الفصل الثاني: تطرقنا فيه إلى بعض النتائج الكلاسيكية للمتراجحات التكاملية من نوع جرونوال-بيلمان-بيهاري .
* الفصل الثالث: تناولنا فيه تعميمات جديدة للمتراجحات التكاملية المذكورة سابقا، و ختاما قدمنا بعض التطبيقات والأمثلة التوضيحية لهذه التعميمات الجديدة.

الفصل الأول

مفاهيم أولية

إخترنا أن نفتتح مذكرتنا بالتذكير حول أهم التعاريف والمفاهيم الأساسية التي سنستعين بها في الفصلين الثاني والثالث.

1.1 المعادلات التكاملية

تعريف 1.1.1

المعادلة التكاملية هي كل معادلة تظهر فيها الدالة المجهولة $g(x)$ تحت رمز التكامل، و تعتبر المعادلة التالية أحد نماذج المعادلات التكاملية :

$$g(x) = f(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} k(x,t)g(t)dt \tag{1.1}$$

حيث أن $f(x)$ و $k(x,t)$ هي دوال معلومة .
و الدالة $k(x,t)$ تسمى نواة المعادلة التكاملية، و يطلب تعيين الدالة المجهولة $g(x)$.

تستعمل المعادلات التكاملية عادة في الدراسات الفيزيائية و الكيميائية و التطبيقات الهندسية التي يمكن وضع نماذج رياضياتية لها مرفوقة بمسائل قيم إبتدائية أو حدية .

مثال 1.1.1

لنعتبر مسألة القيمة الإبتدائية التالية :

$$g'(x) = 2xg(x); \qquad x \geq 0 \tag{2.1}$$

المزودة بالشرط الإبتدائي :

$$g(0) = 1$$

يمكن بسهولة حل المعادلة (2.1) من خلال فصل المتغيرات و إستخدام الشرط الإبتدائي، إلا أننا و بالمكاملة المباشرة لطرفي المعادلة (2.1) على المجال $[0,x]$ نجد أن :

$$\int_0^x g'(t)dt = \int_0^x 2tg(t)dt$$

بتعويض الشرط الإبتدائي تصبح المعادلة السابقة من الشكل :

$$g(x) = 1 + \int_0^x 2tg(t)dt$$

وهي معادلة مشابهة للمعادلة (1.1) فيها $f(x) = 1$ ، $g(t) = 2t$ ، $a(x) = 0$ ، $b(x) = x$ و $k(x,t) = 2t$.

1.1.1 أنواع المعادلات التكاملية

تعريف 2.1.1

نقول عن المعادلة التكاملية أنها خطية إذا و فقط إذا ظهرت الدالة المجهولة تحت إشارة التكامل بشكل خطي و هي من الشكل :

$$g(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)g(t)dt$$

و تسمى خطية لأن درجة الدالة المجهولة واحد.
نقول عن المعادلة التكاملية أنها غير خطية إذا كانت درجة الدالة المجهولة تختلف عن الواحد أو إستبدلت بدوال من الشكل $\cos(g)$ و $\exp(g)$ ....

مثال 2.1.1

فمثلا المعادلة التالية :

$$g(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)g(t)dt$$

هي معادلة تكاملية غير خطية و تسمى معادلة فولتيرا.

2.1 المتراجحات التكاملية من نوع جرونوال

في عام 1919، تمكن جرونوال من إثبات المتراجحة الشهيرة التي سميت بإسمه و التي لا تزال تثير إهتمام الباحثين و جاء بيانها كالتالي :

نظرية 1.2.1

لتكن u دالة موجبة ومستمرة على المجال $I = [\alpha, \alpha + h]$. إذا كانت العلاقة التالية محققة:

$$u(t) \leq \int_a^h [bu(s) + a]ds, \qquad t \in I,$$

حيث: a و b ثابتان موجبان.فإن:

$$u(t) \leq ahe^{bh}, \qquad t \in I,$$

* الإثبات: نضع:

$$w(t) = \int_{\alpha}^{t} [bu(s) + a]ds$$

حيث:

$$u(t) \leq w(t) \leq ah + \int_{\alpha}^{t} bu(s)ds, \qquad h = t - \alpha$$

نجد:

$$\frac{u(t)}{ah + \int_{\alpha}^{t} bu(s)ds} \leq 1$$

بضرب طرفي المتراجحة الأخيرة في b وإدخال التكامل ، نجد

$$\int_{\alpha}^{t} \left(\frac{bu(\tau)}{ah + \int_{\alpha}^{t} bu(s)ds} \right) d\tau \leq \int_{\alpha}^{t} bd\tau$$

حيث:

$$\int_{\alpha}^{t} \left(\frac{w'(\tau)}{w(\tau)} \right) d\tau \leq \int_{\alpha}^{t} bd\tau$$

ومنه:

$$ln \left(\frac{w(t)}{ah} \right) \leq b(t - \alpha)$$

أي:

$$w(t) \leq ahe^{bh}$$

ومنه:

$$u(t) \leq ahe^{bh}$$

وهو المطلوب .

3.1 المتراجحة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

نظرية 1.3.1

لتكن f و b دالتان مستمرتان على المجال $[a,+\infty[$ و $v \in C^1([a,+\infty])$ حيث :

$$\begin{cases} v'(t) \leq b(t)v(t) + f(t) \\ v(a) \leq v_0 \end{cases}$$

فإن:

$$v(t) \leq v_0 e^{\int_a^t b(s)ds} + \int_a^t f(s) e^{\int_s^t b(\tau)d\tau} ds.$$

* الإثبات: لدينا :

$$v'(t) \leq b(s)v(s) + f(s) \Longleftrightarrow v'(t) - b(s)v(s) \leq f(s)$$

بضرب الطرفين في $e^{\int_s^t b(\tau)d\tau}$ نجد:

$$v'(t)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau} - b(s)v(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau} \leq f(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau}$$

أي:

$$\frac{d}{ds}\left(v(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau}\right) \leq f(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau} ds$$

و بإدخال التكامل على الطرفين:

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\left[v(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau}\right] ds \leq \int_a^t f(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau} ds$$

نجد:

$$v(t) - v(a)e^{\int_a^t b(\tau)d\tau} \leq \int_a^t f(s) e^{\int_s^t b(\tau)d\tau} ds$$

ومنه:

$$v(t) \leq v_0 e^{\int_a^t b(\tau)d\tau} + \int_a^t f(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau} ds$$

وهو المطلوب .

4.1 المتراجحات التكاملية من نوع بيلمان

في عام 1943، قام بيلمان بتعميم نتيجة جرونوال في الحالة التي تكون فيها b دالة متعلقة بالمتغير t و كانت النتيجة كما يلي:

نظرية 1.4.1

ليكن a ثابت حقيقي موجب و لتكن $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ و $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ دالتان مستمرتان على المجال $[a,+\infty[$. إذا كانت العلاقة التالية :

$$u(t)\leq a+\int\limits_{t_0}^{t} b(s)u(s)ds;\qquad \forall t\geq a,$$

محققة فإن:

$$u(t)\leq ae^{\int_{t_0}^{t}\ b(s)ds}.$$

* الإثبات: لدينا:

$$u(\tau)\leq a+\int_a^{\tau} b(s)u(s)ds;\qquad \forall \tau\geq a,$$

أي:

$$u(\tau)\leq (a+\int_a^{\tau} b(s)u(s)ds)b(\tau),$$

$$\int\limits_a^t \frac{u(\tau)b(\tau)}{a+\int_a^{\tau} b(s)u(s)ds}d\tau\leq\int\limits_a^t b(\tau)d\tau,$$

ومنه:

$$\left[\ln(a+\int\limits_a^{\tau} b(s)u(s)ds)\right]_a^t\leq\int\limits_a^t b(\tau)d\tau$$

$$\ln\left(a+\int\limits_a^{\tau} b(s)u(s)ds\right)-\ln(a)\leq\int\limits_a^t b(\tau)d\tau$$

$$\ln\left(\frac{a+\int\limits_a^{t}\ b(s)u(s)ds}{a}\right)\leq\int\limits_a^t b(\tau)d\tau$$

إذن:

$$a+\int_a^T b(s)u(s)ds \leq ae^{\int_a^t b(\tau)d\tau}$$

ومنه:

$$u(t) \leq ae^{\int_a^t b(s)ds}$$

5.1 تعميم متراجحة بيلمان

في عام 1958، قام بيلمان بتعميم نظريته الخاصة في الحالة التي تكون فيها a دالة متعلقة بالمتغير t و كانت النتيجة كما يلي:

نظرية 1.5.1

ليكن $J=[\alpha,\beta]$ و لتكن الدوال $a,b,u\in C(J)$ حيث $b\geq 0$ و $T\in J$ ، إذا كان :

$$u(t)\leq a(t)+\int_a^t u(s)b(s)ds,$$

فإن:

$$u(t)\leq a(t)+\int_a^t u(s)b(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau}ds.$$

✻ الإثبات: لدينا:

$$u(t)\leq a(t)+\int_a^t u(s)b(s)ds,$$

نضع $v(t)=\int_a^t u(s)b(s)ds$ ، إذن:

$$v^{'}(t)=b(t)u(t),$$

ومنه:

$$v^{'}(t)\leq b(t)\left[a(t)+\int_a^t u(s)b(s)ds\right]$$

و بالتالي:

$$v^{'}(t)\leq v(t)b(t)+a(t)b(t)$$

وهي من الشكل:

$$\begin{cases} v'(t) \leq b(t)v(t) + f(t) \\ v(a) \leq 0 \end{cases}$$

حسب النظرية 1.3.1 نجد:

$$v(t) \leq \int_a^t a(s)b(s)e^{\int_a^t b(\tau)d\tau} ds$$

ومنه:

$$u(t) \leq a(t) + \int_a^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(\tau)d\tau} ds$$

وهو المطلوب .

6.1 المتراجحات من نوع بيهاري

نظرية 1.6.1

g دالة رتيبة ومستمرة وموجبة على مجال I يحوي نقطة u_0 بحيث $g(u_0 \neq 0)$. لتكن u و k دالتان مستمرتان على مجال $J = [\alpha, \beta]$ بحيث $u(J) \subset I$ ، لنفرض أن k لا تغير إشارتها على J ، لتكن $a \in I$ ، إذا كان:

$$u(t) \leq a + \int_\alpha^t k(s)g(u(s))ds; \qquad t \in J, \tag{3.1}$$

حيث g متزايدة و k موجبة أو g متناقصة و k سالبة فإن :

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G(a) + \int_\alpha^t k(s)ds\right); \qquad \alpha \leq t \leq \beta_1, \tag{4.1}$$

حيث :

$$G(a) + \int_\alpha^t k(s)ds \in Dom(G^{-1})$$

و

$$G(u) = \int_{u_0}^u \frac{dx}{g(x)}; \qquad u \in I, \qquad \beta_1 = min(v_1, v_2),$$

مع:

$$v_1 = sup\Big\{v \in J : a + \int_\alpha^t k(s)g(u(s))ds \in I, \qquad \alpha \le t \le v\Big\},$$

$$v_2 = sup\Big\{v \in J : G(a) + \int_\alpha^t k(s)ds \in G(I), \qquad \alpha \le t \le v\Big\},$$

إذا كانت المساواة في (3.1) محققة من أجل $\alpha \le t \le \beta'(<\beta_1)$ فإن المساواة محققة في (4.1) من أجل t كذلك .

زيادة على ذلك، النتيجة تبقى محققة إذا إستبدلنا ≤ بـ ≥ في كل من (3.1) و (4.1)

* **الإثبات:** لنعتبر أولا أن $g > 0$ و ليكن :

$$v(t) = a + \int_\alpha^t k(s)g(u(s))ds; \qquad t \in J,$$

حيث $v(t) \in I$ من أجل $\alpha \le t \le \beta_1$. ومن كون $u(t) \le v(t)$ فإن (3.1) تستلزم:

$$\frac{d}{ds}G(v(s)) = \frac{g(u(s))}{g(v(s))}k(s) \le k(s),$$

حيث إما $k \ge 0$ و g متزايدة أو $k \le 0$ و g متناقصة . بالمكاملة على $\alpha \le s \le t(<\beta_1)$ نتحصل في كلتا الحالتين على:

$$G(v(t)) \le G(a) + \int_\alpha^t k(s)ds,$$

بما أن $t < \beta_1$ ، فإن $t < v_2$ ومن كون G^{-1} متزايدة (مع G) من أجل $g > 0$ ، فإنه في كلتا الحالتين نجد:

$$v(t) \le G^{-1}(G(a) + \int_\alpha^t k(s)ds), \tag{5.1}$$

وبالتالي من (3.1) و (4.1) نجد (5.1) .

ملاحظة 1.6.1

إذا كان $u(t) \ge v(t)$ ، كل إشارات المتراجحات في البرهان ينبغي أن تعوض بعكسها.

نعتبر الآن أن $g < 0$ على I ، نضع $g_1 = -g$ ، $k_1 = -k$. ثم نتحقق بسهولة أن الدوال

k_1 ، g_1 و u تحقق شروط النظرية السابقة حيث $g_1 > 0$ و

$$G_1(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{dx}{g_1(x)}$$

ومنه: $G_1^{-1}(v) = G^{-1}(-v)$ ، $G_1(u) - = G(u)$. إذن:

$$u(t) \leq G_1^{-1}\left(G_1(a) + \int_{\alpha}^{t} k_1(s)ds\right) = G^{-1}\left(G(a) + \int_{\alpha}^{t} k(s)ds\right).$$

7.1 المقاييس الزمنية

نظرية المقاييس الزمنية هي نظرية جديدة قدمها سيفان هيجلر [27] في أطروحته للدكتوراه عام 1988، وهدفها الأساسي هو توحيد الحالة المستمرة والحالة المنفصلة ،حيث قام بشكل خاص بتعريف التدرج Δ . ومن هذا التعريف تم تقديم معادلات ذات مقياس زمني لها نفس شكل المعادلة التفاضلية، على سبيل المثال معادلة من الدرجة الأولى يتم إستبدال المشتقة u' بالتدرج Δ (u^{Δ}) . إذا كانت $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ فإن التدرج Δ يعادل المشتق بالمعنى الكلاسيكي وتصبح معادلات المقياس الزمني معادلات تفاضلية . إذا كانت $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ تصبح معادلات المقياس الزمني معادلات فروق محدودة . زيادة على ذلك زاد الإهتمام بهذا النوع الأخير من المعادلات بشكل كبير في السنوات الأخيرة لتفسير العديد من الظواهر المنفصلة، خاصة في الإقتصاد والهندسة وعلوم الكمبيوتر . بالإضافة إلى معادلات الفروق المحدودة المستخدمة على نطاق واسع لتطوير هذا العلم . بالإضافة إلى $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Z}$ ، من الممكن إستخدام جميع أنواع المقاييس الزمنية الأخرى.

تعريف 1.7.1

المقياس الزمني $\mathbb{T}$ هو مجموعة جزئية مغلقة وغير خالية من $\mathbb{R}$.

أمثلة 1.7.1

المجموعات $\mathbb{R}$ ، $[0,1] \cup \mathbb{N}$ ، $[0,1] \cup [2,3]$ ، $\mathbb{Z}$ ومجموعات كانتور هي مقاييس زمنية.
المجموعات $(0,1)$، $\mathbb{C}$ ، $\mathbb{R} \setminus Q$ ، $\mathbb{Q}$ مقاييس زمنية.

8.1 معاملي القفز

تعريف 1.8.1

ليكن $\mathbb{T}$ مقياسًا زمنيًا، من أجل كل $t \in \mathbb{T}$ يتم تعريف عامل القفز الأمامي $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ كما يلي:

$$\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

تعريف 2.8.1

ليكن $\mathbb{T}$ مقياسًا زمنيًا، من أجل كل $t \in \mathbb{T}$ يتم تعريف عامل القفز الخلفي $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ كما يلي:

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

9.1 تصنيف النقاط

ليكن $\mathbb{T}$ مقياسًا زمنيًا و t نقطة من $\mathbb{T}$.

تعريف 1.9.1

نقول أن t هي نقطة كثيفة على يمين $\mathbb{T}$ (t نقطة كثيفة على يسار $\mathbb{T}$) إذا كانت العبارة التالية محققة : $\sigma(t) = t$ $(\rho(t) = t)$.

تعريف 2.9.1

نقول أن t هي نقطة كثيفة إذا كانت كثيفة على اليمين وعلى اليسار في آن واحد.

تعريف 3.9.1

نقول أن t هي نقطة متناثرة على يمين $\mathbb{T}$، (t نقطة متناثرة على يسار $\mathbb{T}$) إذا كانت العبارة التالية محققة : $\sigma(t) > t$, $(\rho(t) < t)$.

ملاحظة 1.9.1

ليكن $\mathbb{T}=\mathbb{R}$، من أجل كل $t\in\mathbb{R}$ لدينا

$$\sigma(t)=inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\}=inf(t,\infty)=t$$

$$\rho(t)=Sup\{s\in\mathbb{T}:s>t\}=Sup(t,\infty)=t.$$

إذن جميع نقاط $\mathbb{R}$ كثيفة.

10.1 مجموعات فرعية تؤدي إلى مقاييس زمنية

نلاحظ أنه من كل مقياس زمني يمكننا إستخراج المجموعات الفرعية التالية:

تعريف 1.10.1

ليكن $\mathbb{T}$ مقياس زمني، يتم تعريف المجموعة $\mathbb{T}^k$ على النحو التالي:

$$\mathbb{T}^k=\begin{cases}\mathbb{T}/]\rho(\sup\mathbb{T}),\sup\mathbb{T}]; & \sup\mathbb{T}<\infty\\ \mathbb{T}; & \sup\mathbb{T}=\infty\end{cases}$$

تعريف 2.10.1

ليكن a و b نقطتان من $\mathbb{T}$ يتم تعريف المجال على $\mathbb{T}$ النحو التالي:

$$[a,b]_{\mathbb{T}}=\{t\in\mathbb{T}:a\leq t\leq b\}$$

11.1 التدرج على المقاييس الزمنية

في هذا القسم نذكر بتعريف التدرج و المعروف أيضا بإسم المشتق بمعنى هيجلر

تعريف 1.11.1

لتكن الدالة $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ قابلة للمفاضلة بمعنى هيجلر عند $t\in\mathbb{T}^k$، إذا وجد عدد $(f)^{\Delta}(t)\in\mathbb{R}$ بحيث من أجل كل $\varepsilon>0$ ، يوجد U يحقق:

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|,$$

من أجل كل $s\in U$ إذا كانت f قابلة للمفاضلة بمفهوم هيجلر عند كل $t\in\mathbb{T}$ فإن $(f)^{\Delta}(t):\mathbb{T}^k\to\mathbb{R}$ يسمى مشتق الدلة f على $\mathbb{T}^k$.

نظرية 1.11.1

([16]) لتكن $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ دالة و $t\in\mathbb{T}$:

1- إذا كانت f مستمرة عند t فإن f قابة للمفاضلة بمفهوم هيجلر عند t

2- إذا كانت f مستمرة عند t و t نقطة متناثرة على اليمين فإن f قابة للمفاضلة بمفهوم هيجلر عند t ، زيادة على ذلك :

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

3- إذا كانت t نقطة متناثرة على اليمين فإن f تكون قابة للمفاضلة بمفهوم هيجلر عند t إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

موجود ووحيد زيادة على ذلك :

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

4- إذا كانت f قابلة للمفاضلة عند t إذن:

$$f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$$

ملاحظة 1.11.1

إذا كان $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ وفقا (iii) من النظرية تكون الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ قابلة للمفاضلة بمفهوم هيجلر عند $t\in\mathbb{R}$ إذا و فقط إذا كان :

$$f'(t)=\lim_{x\to 0}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

موجودة زيادة على ذلك: $f^{\Delta}=f'(t)$

إذا كان $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ وفقا لـ (ii) من النظرية السابقة الدالة $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ قابلة للمفاضلة بمفهوم هيجلر عند $t\in\mathbb{R}$ عندئذ لدينا :

$$f^{\Delta}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{f(t+1)-f(t)}{1}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t)$$

1.11.1 خصائص المشتق

نظرية 2.11.1: (نظرية 1.20 [16])

إذا كان $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ دالتان قابلتان للمفاضلة بمفهوم هيجلر عند $t\in\mathbb{T}^k$ ،

(1) $f+g$ قابلة للمفاضلة بمفهوم هيجلر حيث :

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t)$$

(2) إذا كانت αf قابلة للمفاضلة بمفهوم هيجلر عند t ، و من أجل كل $\alpha\in\mathbb{R}$ لدينا :

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)$$

(3) لتكن f و g دوال قابلة للمفاضلة بمفهوم هيجلر عند t ، لدينا :

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta}(t)&=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\\&=f(t)g^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\end{aligned}$$

(4) إذا كانت $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$, فإن $\frac{f}{g}$ قابلة للمفاضلة بمفهوم هيجلر عند t ، عندئذ يكون لدينا:

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

تعريف 2.11.1

كل دالة f معرفة بـ $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ تسمى من الصنف C_{rd} إذا تحققت فيها الشروط التالية:

1- f مستمرة عند كل نقطة كثيفة على يمين $\mathbb{T}$.

2- النهاية $\lim\limits_{s\to t} f(s)$ موجودة و منتهية لكل نقطة كثيفة على يسار $\mathbb{T}$.

ملاحظة 2.11.1

نرمز إلى مجموعة جميع الدوال من الصنف C_{rd} بالرمز C_{rd} أو $C_{rd}(\mathbb{T})$.

ملاحظة 3.11.1

نرمز إلى مجموعة جميع الدوال من الصنف C_{rd} والقابلة للمفاضلة بمفهوم هيجلر بالرمز C^1_{rd} أو $C^1_{rd}(\mathbb{T})$.

تعريف 3.11.1

كل دالة f معرفة على $\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2$ تسمى من الصنف CC_{rd} إذا تحققت فيها الشروط التالية:

1- f مستمرة على يمينها في s.

2- f مستمرة على يمينها في t.

3- f مستمرة على $(s,t)\in\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2$ حيث (s,t) هما نقاط كثيفة على اليمين أو قصوى .

4- إذا كانت s و t نقاط كثيفة إلى اليسار وكانت النهاية $f(\alpha,\beta)$ موجودة عندما تقترب (α,β) من (s,t) عبر أي مسار من المنطقة $\{(\alpha,\beta):\alpha\in[a,s]\cap\mathbb{T}_1,\beta\in[c,t]\cap\mathbb{T}_2\}$.

تعريف 4.11.1

نرمز بـ $CC^1{}_{rd}$ إلى مجموعة كل الدوال CC_{rd} التي توجد مشتقاتها الجزئية f^{Δ_1} و f^{Δ_2} وتنتمي إلى CC_{rd}.

12.1 حساب التكاملات على المقاييس الزمنية

تعريف 1.12.1

الدالة $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ هي الدالة الأصلية لـ $f:\mathbb{T}^k\to\mathbb{R}$ وتحقق $F^{\Delta}(L)=f(L)$ من أجل كل $L\in\mathbb{T}^k$.

نظرية 1.12.1

كل دالة مستمرة على الفترات المتقطعة $f:\mathbb{T}^k\to\mathbb{R}$ تقبل دالة أصلية $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ونكتب:

$$\int_s^r f(t)\Delta t = F(r)-F(s)$$

من أجل كل $r,s\in\mathbb{T}$.

* فرضية1: من أجل $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ لدينا:

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_b^a f(t)dt.$$

* فرضية2: صيغة التكامل بالتجزئة هي كما يلي:

$$\int_a^b f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t,$$

$$\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t)\Delta t.$$

تعريف 2.12.1

لتكن $p \in \mathbb{R}$ و $t_0 \in \mathbb{T}$ نقطة ثابتة ، نعرف الدالة الأسية كحل للمسألة:

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t), y(t_0) = 1,$$

كالتالي:

$$y(t) = exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\Delta\tau\right),$$

بحيث:

$$\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) = \frac{1}{\mu(\tau)} log(1 + \mu(\tau)p(\tau)),$$

غالبا مانقوم بتمثيلها عن طريق:

$$e_p(t, t_0) = exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\Delta\tau\right).$$

ملاحظة 1.12.1

من الواضح أن: $e_p(\sigma(t), t_0) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, t_0)$.

ملاحظة 2.12.1

من أجل $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ تعطى الدالة الأسية بواسطة :

$$e_p(t, t_0) = exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right),$$

حيث $t, t_0 \in \mathbb{Z}$ ، $t_0 < t$ و $p : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة.

نظرية 2.12.1

ليكن $a \in \mathbb{T}^k$ ، $b \in \mathbb{T}$ و $L : \mathbb{T}^k \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ، مستمرة على (t,t) من أجل $t \in \mathbb{T}^k$ ، $t > a$ و $L^{\Delta}(t,.)$ ومستمرة في $[a,\sigma(t)]$ نفرض من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد U منطقة محيطية لـ (t) مستقلة عن $\tau \in [a,\sigma(t)]$ حيث :

$$|L(\sigma(t),\tau) - L(s,\tau) - L^{\Delta}(t,\tau)(\sigma(t)-s)| \leq \varepsilon|\sigma(t)-s|, \qquad \forall s \in U$$

حيث f^{Δ} تمثل المشتقة الأولى لـ f بالنسبة للمتغير الأول نحصل على :

$$g(t) = \int_a^t L(t,\tau)\Delta\tau \Longrightarrow g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau + L(\sigma(t),\tau),$$

$$h(t) = \int_a^t L(t,\tau)\Delta\tau \Longrightarrow g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau + L(\sigma(t),\tau),$$

13.1 بعض التوطئات

توطئة 1.13.1

لنفرض أن $u,b \in C_{rd}$ و $a \in \mathbb{R}^+$ ، إذا كان :

$$u^{\Delta}(t) \leq a(t)u(t) + b(t), \qquad t \geq t_0, \qquad t \in \mathbb{T}^k$$

إذن :

$$u(t) \leq u(t_0)e_a(t,t_0) + \int_{t_0}^t e_a(t,\sigma(s))b(s)\Delta s, \qquad t \geq t_0, \qquad t \in \mathbb{T}^k$$

توطئة 2.13.1: [22]

ليكن $a \leq 0$ و $b \leq 0$ ، المتراجحة التالية محققة:

$$(a+b)^{\lambda} \leq 2\lambda - 1(a^{\lambda} + b^{\lambda}); \qquad \lambda \leq 1$$

و

$$(a+b)^{\lambda} \leq a^{\lambda} + b^{\lambda}; \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

2- الفصل الثاني

المتراجحات التكاملية من النوع جرونوال-بيلمان-بيهاري

من بين أكثر الطرق إستخداما لدراسة نظام المعادلات التفاضلية غير الخطية هي مقارنة هذا النظام بمعادلة من الدرجة الأولى ، إلا أنه في الواقع من الصعب تقدير الحلول المقدمة بطريقة المقارنة بشكل صريح . في العديد من التطبيقات تكون التقديرات الصريحة أكثر فائدة عند دراسة سلوك حلول مثل هذه الأنظمة . إتضح أن دراسة إستخدام المتراجحات التكاملية يعطي حدودا واضحة للدوال غير المعروفة ، لهذه الأسباب يعد إدخال المتراجحة التكاملية في دراسة خصائص حلول المعادلات التفاضلية أمرا ضروريا ، لقد جذبت متراجحة جرونوال و التي تعتبر أداة أساسية في الرياضيات إنتباه العديد من علماء الرياضيات ، و ظهرت العديد من التعميمات لهذه المتراجحة فقد قدم بيلمان 1943 متراجحة أكثر عمومية تحمل إسم متراجحة جرونوال -بيلمان ، و في عام 1956 قام بيهاري بتعميم هذه الأخيرة . سوف نتناول في هذا

الفصل من خلال الإستناد إلى بعض النتائج الكلاسيكية المتعلقة بمتراجحة جرونوال الشهيرة بعض التعميمات في البعد الأول ، ثم سنذكر بعض النتائج المتعلقة بهذه الأخيرة في البعد الثاني مما يعطينا تعميمات جديدة تتعلق بجرونوال ، بيلمان و بيهاري في البعد الثاني على المقاييس الزمنية .

1.2 بعض المتراجحات التكاملية الشهيرة من نوع جرونوال في البعد الأول

في عام 1919 ، قدم جرنوال متباينة تكاملية لا تزال تثير فضول الباحثين جاء بيانها كما يلي :

نظرية 1.1.2: [15]

لتكن $u(t)$ دالة مستمرة على $I=[\alpha;\alpha+h]$ و a و b ثابتان موجبان ، إذا كانت العلاقة التالية :

$$0 \le u(t) \le \int_{\alpha}^{t} [bu(s)+a]ds, \qquad t \in I,$$

محققة فإن :

$$0 \le u(t) \le ah\exp(bh), \qquad t \in I,$$

في عام 1943 ، قام بيلمان بتعميم نظرية جرونوال في الحالة التي تكون فيها b دالة تتعلق بالمتغير t و كانت النتيجة كما يلي :

نظرية 2.1.2: [4]

لتكن u و f دالتان مستمرتان و موجبتان على : $I=[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ و $c\ge 0$ إذا كانت العلاقة التالية محققة :

$$u(t) \le c + \int_{\alpha}^{t} f(s)u(s)ds, \qquad t \in I$$

فإن :

$$u(t) \le c\exp\left(\int_{\alpha}^{t} f(s)ds\right), \qquad t \in I$$

في عام 1956 ، أثبت بيهاري وجود متراجحة أكثر عمومية من تلك التي قدمها جرونوال و بيلمان جاء بيانها كما يلي:

نظرية 3.1.2: [7]

لتكن f و u دالتان مستمرتان وموجبتان على المجال $[0,+\infty[$ و ω دالة متزايدة و مستمرة على $[0,+\infty[$ تحقق $\omega(x)>0$ ، من أجل كل $x>0$ و c ثابت موجب تماما .
إذا كانت العلاقة التالية:

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} f(s)w(u(s))ds, \qquad t \geq 0$$

فإن :

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G(c) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right), \qquad 0 \leq t \leq T$$

حيث G هو حل للمعادلة التكاملية التالية :

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{w(s)}ds, \qquad t > t_0 > 0$$

G^{-1} هي الدالة العكسية لـ G ، يتم إختيار T بحيث يكون :

$$\left\{G(c) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right\} \in DomG^{-1}, \qquad 0 \leq t \leq T$$

في عام 1957 ، أظهر أويانج نسخة مختلفة من النظرية 1.1.2 في الصورة غير خطية و جاء نصها كالآتي :

نظرية 4.1.2: [26]

لتكن u و g دالتين مستمرتين و موجبتين تماما على $\mathbb{R}_+$ و ليكن u_0 ثابت موجب تماما .
إذا كانت المتراجحة التالية محققة :

$$u^2(t) \leq u_0^2 + 2\int_0^t g(s)u(s)ds$$

فإن :

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^t g(s)ds$$

في عام 1958، قام بيلمان بتعميم نظريته الخاصة (النظرية 2.1.2) على النحو التالي :

نظرية 5.1.2: [5]

لتكن u و g دالتين مستمرتين و موجبتين تماما على $I=[\alpha,\beta]$ و لتكن $n(t)$ دالة مستمرة و موجبة تماما و متزايدة معرفة على I . إذا كانت المتراجحة التالية محققة :

$$u(t) \leq n(t) + \int_{\alpha}^{t} g(s)u(s)ds, \qquad t \in I$$

فإن :

$$u(t) \leq n(t) \exp\left(\int_{\alpha}^{t} g(s)ds\right), \qquad t \in I$$

في عام 1969 ،أثبت جولويتز وجود متراجحة أكثر عمومية من بيلمان بيانها في النظرية التالية:

نظرية 6.1.2: [14]

لتكن u ، g ، f و h دوال مستمرة و موجبة على $I=[\alpha,\beta]$. إذا كانت المتراجحة التالية محققة :

$$u(t) \leq f(t) + g(t)\int_{\alpha}^{t} h(s)u(s)ds, \qquad t \in I$$

فإن :

$$u(t) \leq f(t) + g(t)\int_{\alpha}^{t} h(s)f(s)\exp\left(\int_{s}^{t} h(\sigma)g(\sigma)d(\sigma)\right)ds, \qquad t \in I.$$

نظرية 7.1.2: [3]

لتكن u و h دالتين مستمرتين f و g دوال ريمان القابلة للمكاملة ، على $I=[\alpha,\beta]$ بحيث g و h موجبتان على $I=[\alpha,\beta]$. إذا كانت العلاقة التالية محققة :

$$u(t) \leq f(t) + g(t)\int_{\alpha}^{t} h(s)u(s)ds, \qquad t \in I$$

فإن :

$$u(t) \leq f(t) + g(t)\int_{\alpha}^{t} f(s)h(s)\exp\left(\int_{s}^{t} h(\sigma)g(\sigma)d(\sigma)\right)ds, \qquad t \in I$$

كذلك قام جيوري بتعميم النظرية 3.1.2 على النحو التالي :

نظرية 8.1.2: [16]

لتكن u و β دالتان مستمرتان و موجبتان على $I=[t_0,+\infty[$ و لتكن f ، g و α دوال قابلة للمفاضلة حيث f موجبة ، g موجبة تماما و متزايدة و α موجبة و متناقصة ، لنفرض أنه لدينا :

$$u(t)\leq f(t)+\alpha(t)\int_{t_0}^{t}\beta(s)g(u(s))ds$$

إذا كان

$$f'(t)\left\{\frac{1}{g(\eta(t))}-1\right\}\leq 0,$$

على I من أجل كل دالة مستمرة و موجبة $\eta(t)$ فإن :

$$u(t)\leq G^{-1}\left\{G(f(t_0))+\int_{t_0}^{t}\left[\alpha(s)\beta(s)+f'(s)\right]ds\right\},$$

حيث G هو حل للمعادلة التكاملية التالية :

$$G(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{g(s)}ds,\qquad t>t_0>0$$

G^{-1} هي الدالة العكسية لـ G ، و

$$\left\{G(f(t_0))+\int_{t_0}^{t}\left[\alpha(s)\beta(s)+f'(s)\right]ds\right\}\in DomG^{-1}.$$

قدم مارتينيواد و كوزولابوف إمتدادا للنظرية 5.1.2 و المقدمة من خلال النظرية التالية:

نظرية 9.1.2: [21]

لتكن u و a و b دوال مستمرة و موجبة على $I=[\alpha,\beta]$ و $0<p<1$ ، إذا كان :

$$u(t)\leq a(t)+\int_{\alpha}^{t}b(s)u^{p}(s)ds,\qquad t\in I$$

فإن :

$$u(t)\leq a(t)+u_0^{p}\left(\int_{\alpha}^{t}b^{\frac{1}{q}}(s)ds\right)^{q}$$

حيث : $q=1-p$ و u_0 هو الجذر الوحيد الموجب للمعادلة $x-a-bx^p=0$ حيث :

$$b=\int_\alpha^\beta\left(\int_\alpha^\beta b^{\frac{1}{q}}(s)ds\right)^q dt \qquad a=\int_\alpha^\beta a(t)dt$$

أعطى بيروف شكلا آخر في إطار غير خطي لمتراجحة جرونوال و هو كالآتي:

نظرية 10.1.2: [32]

لتكن u ، a و b دوال مستمرة و موجبة ، إذا كانت المتراجحة التالية :

$$u(t)\le c+\int_{t_0}^t[a(s)u(s)+b(s)u^p(s)]ds, \qquad t\ge t_0,$$

محققة من أجل كل $c\ge 0$ و$p\ge 0$ فإن :

$$u(t)\le\left\{c^{1-p}\exp\left[(1-p)\int_{t_0}^t a(s)ds\right]\right.$$
$$\left.+(1-p)\int_{t_0}^t b(s)\exp\left[(1-p)\int_s^t a(\tau)d\tau\right]ds\right\}^{\frac{1}{1-p}},$$

من أجل $0\le p<1$:

$$u(t)\le c\exp\left(\int_{t_0}^t[a(s)+b(s)]ds\right),$$

من أجل $p=1$ و $p>1$:

$$u(t)\le\left\{c\exp\left[(1-p)\int_{t_0}^t a(s)ds\right]\right.$$
$$\left.-c^{-1}(p-1)\int_{t_0}^t b(s)\exp\left[(1-p)\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau\right]ds\right\}^{\frac{1}{1-p}},$$

في حالة $p>1$ ، يجب أن يحقق c الشرط التالي :

$$c<\left\{\exp\left[(1-p)\int_{t_0}^{t_0+h}a(s)ds\right]\right\}^{\frac{1}{p-1}}\left\{(p-1)\int_{t_0}^{t_0+h}b(s)ds\right\}^{-\frac{1}{p-1}},$$

من أجل كل $t\in[t_0,t_0+h]$ حيث $h>0$.

كما ناقش باتشبات متراجحة مماثلة لمتراجحة بيرون بيانها في النظرية التالية :

نظرية 11.1.2: [29]

لتكن u ، b ، g و h دوال مستمرة و موجبة تماما . ليكن c دالة مستمرة ، متزايدة و موجبة تماما على $\mathbb{R}_+$. إذا كانت المتراجحة التالية محققة :

$$u^p(t) \leq c^p(t) + b(t) \int_0^t \left[g(s)u^p(s) + h(s)u(s)\right] ds,$$

فإن:

$$u(t) \leq c(t) \left\{1 + b(t) \int_0^t \left(g(s) + h(s)c(s)^{1-p}\right) \times \exp\left(\int_s^t b(\sigma)\left[g(\sigma) + \frac{h(\sigma)}{p}\right] d\sigma\right) ds\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

تم تعميم النظرية 11.1.2 من قبل العالم جيونغ و مونغ ، كذلك من قبل بوكريوة و كيزان-لاكود ، و بيان هاته التعميمات فيما يلي :

نظرية 12.1.2: [18]

إنطلاقا من فرضيات النظرية 11.1.2 . إذا كانت المتراجحة التالية محققة :

$$u^p(t) \leq c^p(t) + b(t) \int_0^t \left[g(s)u^q(s) + h(s)u^r(s)\right] ds,$$

فإن:

$$u(t) \leq c(t) \left\{1 + b(t) \int_0^t \left[g(s)c^{q-p}(s) + h(s)c^{r-p}(s)\right] \times \exp\left(\int_s^t b(\sigma)\left[\frac{q}{p}g(\sigma) + \frac{r}{p}c^{r-p}(\sigma)h(\sigma)\right] d\sigma\right) ds\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{1.2}$$

حيث $c(t)$ هي دالة متزايدة و موجبة تماما ، $0 \leq q \leq p$ ، $0 \leq r \leq p$ و $p \neq 0$.

من أجل تفاصيل أكثر أنظر المراجع [1 ، 3 ، 9 ، 12 ، 23 ، 27]

2.2 بعض المتراجحات التكاملية من نوع جرونوال ذات النواة في البعد الأول

في عام 1967 ، قدم كل من تشو و ميتكالف صيغة مختلفة عن متراجحة جرونوال-بيلمان (النظرية 5.1.2) في هذه الحالة الدالة g ومتعلقة بالبارامتر t (بمعنى : $g(s) = k(t,s)$) و بيانها كما يلي :

نظرية 1.2.2: [11]

لتكن u و f دالتين مستمرتين و موجبتين على $I = [\alpha, \beta]$: و $k(t,s)$ دالة مستمرة و موجبة على المثلث Δ حيث $\Delta : \alpha \le s \le t \le \beta$. إذا كان :

$$u(t) \le f(t) + \int_0^t H(t,s) f(s) ds$$

فإن:

$$u(t) \le f(t) + \int_0^t k(t,s) u(s) ds, \qquad t \in I$$

حيث:

$$H(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i(t,s), \qquad (t,s) \in \Delta,$$

هي نواة الحل .

في عام 1987 ، أظهر نوربيري و ستيوارت صيغة أخرى للنظرية السابقة .

نظرية 2.2.2: [24]

لتكن u و $k(t,s)$ المعرفة كما في النظرية 1.2.2 بحيث $k(t,s)$ متزايدة بالنسبة إلى t من أجل كل $s \in I$.

1- إذا كانت المتراجحة التالية محققة :

$$u(t) \le c + \int_\alpha^t k(t,s) u(s) ds, \qquad t \in I, \qquad c \ge 0$$

فإن :

$$u(t) \le c \exp\left(\int_\alpha^t k(t,s) ds \right), \qquad t \in I$$

2- لتكن $n(t)$ دالة مستمرة و موجبة و متزايدة على I ، من أجل كل قيم t حيث : $t \in I$ ، إذا كانت المتراجحة التالية محققة :

$$u(t) \leq n(t) + \int_{\alpha}^{t} k(t,s)u(s)ds, \qquad t \in I,$$

فإن:

$$u(t) \leq n(t)\exp\left(\int_{\alpha}^{t} k(t,s)ds\right), \qquad t \in I,$$

باتشبات قام بتعميم نتائج النظرية السابقة على النحو التالي :

نظرية 3.2.2: [29]

لتكن u ، p ، q ، r و fدوال مستمرة و موجبة و متزايدة على I حيث $I = [\alpha, \beta]$ ولتكن $k(t,s)$ و مشتقتها الجزئية $\frac{\partial}{\partial s}k(t,s)$ دالتان مستمرتان و موجبتان من أجل $\alpha \leq s \leq t \leq \infty$. إذا كانت المتراجحة التالية محققة :

$$u(t) \leq p(t) + q(t)\int_{0}^{t} k(t,s)\left[r(s)u(s) + f(s)\right]ds,$$

فإن :

$$u(t) \leq p(t) + q(t)\left(\int_{\alpha}^{t} B(\sigma)\left(\exp\int_{\sigma}^{t} A(\tau)d\tau\right)d\sigma\right)$$

حيث :

$$A(t) = k(t,t)r(t)q(t) + \int_{0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}k(t,s)r(s)q(s)ds$$

و

$$B(t) = k(t,t)\left[r(t)p(t) + f(t)\right] + \int_{0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}k(t,s) \times \left[r(s)p(s) + f(s)\right]ds$$

نظرية 4.2.2: [29]

لنفرض أن فرضيات النظرية 3.2.2 محققة و لتكن $k(t,s)$ و مشتقتها الجزئية $\frac{\partial}{\partial s}k(t,s)$ دوال مستمرة و موجبة تماما من أجل : $0 \leq s \leq t \leq \infty$. إذا كانت المتراجحة التالية محققة:

$$u^{p}(t) \leq a(t) + b(t)\int_{0}^{t} k(t,s)[g(s)u^{p}(s) + h(s)u(s)]ds$$

فإن:

$$u(t) \leq \left\{a(t) + b(t) \int_0^t A(\sigma) \left(\exp \int_\sigma^t B(\tau) d\tau\right) d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}}$$

حيث:

$$A(t) = k(t,t) \left\{g(t)a(t) + h(t) \left[\frac{a(t)}{p} + \frac{p-1}{p}\right]\right\} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} k(t,s) \left\{g(s)a(s) + h(s) \left[\frac{a(s)}{p} + \frac{p-1}{p}\right]\right\} ds$$

و

$$B(t) = k(t,t)b(t) \left[g(t) + \frac{h(t)}{p}\right] + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} k(t,s)b(s) \times \left[g(s) + \frac{h(s)}{p}\right] ds$$

قام بوكريوة بتعميم نظرية تشو و ميتكالف على المقاييس الزمنية بيانها يعطى في النظرية التالية:

نظرية 5،2،2: [10]

لتكن $u(t)$ ، $a(t)$ ، $b(t)$ و $h_i(t)(i=1,n) \in C_{rd}$ ، $a(t)>0$ ومتزايدة من أجل $t \in \mathbb{T}$ ، توجد متتالية أعداد حقيقية موجبة تماما $p_1, p_2, ..., p_n$ بحيث $p \geq p_i > 0$ ، $i=1,...n$. إذا كانت $L(t,.)$ معرفة كما في النظرية 2،12،1 مع $L(t,s) \geq 0$ و $L^{\Delta}(t,s) \geq 0$ من أجل $t,s \in \mathbb{T}$ و $s \leq t$. إذا كانت المتراجحة التالية :

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_{t_0}^t L(t,s) \sum_{i=1}^{i=n} h_i(s) u^{p_i}(s) \Delta s, \qquad t \in \mathbb{T}^k$$

محققة فإن:

$$u^p(t) \leq \left(a(t) + b(t) \int_{t_0}^t e_B(t,\sigma(s)) A(s) \Delta s\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad t \in \mathbb{T}^k$$

أي:

$$A(t) = L(\sigma(t),t) \sum_{i=1}^{i=n} h_i(t) \left[\frac{p_i}{p} K^{\frac{p_i-p}{p}} a(t) + \frac{p-p_i}{p} K^{\frac{p_i}{p}}\right] + \int_{t_0}^t L^{\Delta}(t,s) \sum_{i=1}^{i=n} h_i(s) \left[\frac{p_i}{p} K^{\frac{p_i-p}{p}} a(t) + \frac{p-p_i}{p} K^{\frac{p_i}{p}} \Delta s\right]$$

و

$$B(t)=b(t)L(\sigma(t),t)\left(\sum_{i=1}^{i=n}h_i(t)\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}}\right)+\int_{t_0}^{t}b(s)L^{\Delta}(t,s)\sum_{i=1}^{i=n}h_i(s)\frac{p_i}{p}K^{\frac{p_i-p}{p}}\Delta s$$

لمزيد من التفاصيل راجع الكتب والمقالات: [1 ، 6 ، 10 ، 11 ، 12 ، 18 ، 23 ، 24 ، 29]

3.2 بعض المتراجحات التكاملية من نوع جرونوال في البعد الثاني

المتراجحة المناظرة لمتراجحة جرونوال للدوال ذات المتغيرين المعروفة باسم متراجحة وندروف وهي معطاة بواسطة النظرية التالية:

نظرية 1.3.2: [2]

ليكن $u(x,y)$ ، $c(x,y)$ دالتان موجبتان ومستمرتان معرفتان من أجل $x,y\in\mathbb{R}^+$ ، $a(x)$ ، $b(y)$ دالتان موجبتان تماما ومستمرتان على $\mathbb{R}^+$. إذا كانت المتراجحة التالية محققة :

$$u(x,y)\leq a(x)+b(y)+\int_0^x\int_0^y c(t,s)u(t,s)dtds$$

فإن:

$$u(x,y)\leq E(x,y)\exp\left(\int_0^x\int_0^y c(t,s)dtds\right)$$

حيث:

$$E(x,y)=\frac{[a(x)+b(0)][a(0)+b(y)]}{a(0)+b(0)}$$

قام ناريموف بتعميم النظرية 1.3.2 التي حصل عليها ووندروف على النحو التالي :

نظرية 2.3.2: [25]

لتكن $u(x,y)$ ، $a(x,y)$ ، $b(x,y)$ و $c(x,y)$ دوال مستمرة وموجبة ومعرفة على $D=[0,x_0]\times[0,y_0]$. إذا كانت المتراجحة التالية محققة:

$$u(x,y)\leq a(x,y)+b(x,y)\int_0^x\int_0^y c(t,s)u(t,s)dtds$$

فإن:

$$\begin{aligned}u(x,y)\leq \{&a(x,y)\\ &+b(x,y)\int_0^x\int_0^y\left[\exp\left(\int_\tau^x\int_\eta^y c(t,s)b(t,s)dtds\right)a(\tau,\eta)c(\tau,\eta)\right]d\tau d\eta\Big\}\end{aligned}$$

كما أنشأ بينوف وسيميونوف النظرية المناظرة لنظرية بيهاري في سياق الدوال ذات المتغيرين كالتالي :

نظرية 3.3.2: [1]

ليكن $I=[0,a]$ و $J=[0,b]$ بحيث $a,b\leq\infty$ ، و ليكن $c\geq 0$ و $\varphi\in C([0,\infty),[0,\infty))$ دالة متزايدة وتحقق $\varphi(r)>0$ من أجل $r>0$ و $u,f\in C(I\times J,[0,\infty))$. إذا كانت المتراجحة التالية محققة:

$$u(x,y)\leq c+\int_0^x\int_0^y f(t,s)\varphi(u(t,s))dtds \qquad ,(x,y)\in I\times J$$

فإن:

$$u(x,y)\leq\phi^{-1}\left[\phi(c)+\int_0^x\int_0^y f(t,s)dtds\right]$$

من أجل كل $(x,y)\in[0,x_1]\times[0,y_1]$ ، حيث:

$$\phi(r)=\int_1^r\frac{1}{\varphi(s)},r>0$$

ϕ^{-1} هو الدالة العكسية لـ ϕ و $(x_1,y_1)\in I\times J$ يتم اختياره بالطريقة التالية :

$$\left\{\phi(c)+\int_0^x\int_0^y f(t,s)dtds\right\}\in Dom(\phi^{-1})$$

المتراجحة المناظرة لنظرية بيهاري ذات النواة في البعد الثاني تعطى بواسطة النظرية التالية والتي وضعها باتشبات:

نظرية 4.3.2: [19]

لتكن $\psi(x,y)$ ، $p(x,y)$ و $q(x,y)$ دوال موجبة و مستمرة ومعرفة على $\mathbb{R}_+$ ، ليكن $K(x,y,s,t)$ ، $D_1K(x,y,s,t)$ ، $D_2K(x,y,s,t)$ و $D_1D_2K(x,y,s,t)$ دوال موجبة ومستمرة من أجل كل $0\leq s\leq x<\infty$ و $0\leq t\leq y<\infty$ و $w(u)$ دالة موجبة و مستمرة و متزايدة على $\mathbb{R}_+$ ، زيادة على ذلك نفرض أنها تجميعية وتوزيعية. إذا كانت العلاقة التالية محققة:

$$\psi^r(x,y)\leq p(x,y)+q(x,y)+\int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t)w(\psi(s,t))dtds$$

من أجل كل $x,y\in\mathbb{R}_+$ و $r\geq 1$ فإن:

$$\begin{aligned}\psi(x,y)\leq\Bigg\{&p(x,y)+q(x,y)G^{-1}\left(G\left(\int_0^x\int_0^y A(\sigma,\tau)d\tau d\sigma\right)\right.\\&\left.+\int_0^x\int_0^y B(\sigma,\tau)d\tau d\sigma\right)\Bigg\}^{\frac{1}{r}}\end{aligned}$$

من أجل كل $0\leq x\leq x_2$ ، $0\leq y\leq y_2$ حيث:

$$\begin{aligned}A(x,y)=&K(x,y,x,y)w\left(\frac{1}{r}K^{\frac{1-r}{r}}\right)w(p(x,y))+K(x,y,x,y)w\left(\frac{r-1}{r}K^{\frac{1}{r}}\right)\\&+w\left(\frac{1}{r}K^{\frac{1-r}{r}}\right)\int_0^y D_2K(x,y,x,t)w(p(x,t))dt\\&+w\left(\frac{r-1}{r}K^{\frac{1}{r}}\right)\int_0^y D_2K(x,y,x,t)dt\\&+w\left(\frac{1}{r}K^{\frac{1-r}{r}}\right)\int_0^x D_1K(x,y,s,y)w(p(s,y))dt\\&+w\left(\frac{r-1}{r}K^{\frac{1}{r}}\right)\int_0^x D_1K(x,y,s,y)dt\\&+w\left(\frac{1}{r}K^{\frac{1-r}{r}}\right)\int_0^x\int_0^y D_1D_2K(x,y,s,t)w(p(s,t))dtds\\&+w\left(\frac{1}{r}K^{\frac{1-r}{r}}\right)\int_0^x\int_0^y D_1D_2K(x,y,s,t)dtds\end{aligned}$$

و

$$B(x,y)=K(x,y,x,y)w\left(\frac{1}{r}K^{\frac{1-r}{r}}\right)w(q(x,y))$$
$$+w\left(\frac{1}{r}K^{\frac{1-r}{r}}\right)\int_0^y D_2K(x,y,x,t)w(q(x,t))dt$$
$$+w\left(\frac{1}{r}K^{\frac{1-r}{r}}\right)\int_0^x D_1K(x,y,s,y)w(q(s,y))dt$$
$$+w\left(\frac{1}{r}K^{\frac{1-r}{r}}\right)\int_0^x\int_0^y D_1D_2K(x,y,s,t)w(q(s,t))dtds$$

G^{-1} هو الدالة العكسية لـ G و $x_2,y_2\in\mathbb{R}_+$ ويتم اختيارهم بحيث:

$$G\left(\int_0^x\int_0^y A(\sigma,\tau)d\tau d\sigma\right)+\int_0^x\int_0^y B(\sigma,\tau)d\tau d\sigma\in Dom(G^{-1})$$

كما أنشأ فريرة وطورس تعميم للنظرية 1.3.2 في القياسات الزمنية وهي كالتالي:

نظرية 5.3.2: [13]

ليكن $u(t_1,t_2)$ ، $a(t_1,t_2)$ و $f(t_1,t_2)\in C(\bar{\mathbb{T}}_1\times\bar{\mathbb{T}}_2,\mathbb{R}_0^+)$ بحيث $a(t_1,t_2)$ دالة متزايدة بالنسبة لجميع متغيراتها . إذا كانت المتراجحة التالية محققة :

$$u(t_1,t_2)\le a(t_1,t_2)+\int_{a_1}^{t_1}\int_{a_2}^{t_2} f(s_1,s_2)u(s_1,s_2)\Delta_1 s_1\Delta_2 s_2$$

من أجل $(a_1,a_2),(t_1,t_2)\in\bar{\mathbb{T}}_1\times\bar{\mathbb{T}}_2$ ، فإن:

$$u(t_1,t_2)\le a(t_1,t_2)e_{\int_{a_2}^{t_2} f(t_1,s_2)\Delta s_2}(t_1,a_1),\qquad (t_1,t_2)\in\bar{\mathbb{T}}_1\times\bar{\mathbb{T}}_2$$

بحيث: $\mathbb{T}_1$ ، $\mathbb{T}_2$ هما مقياسان زمنيان و $\bar{\mathbb{T}}_1=[a_1,\infty)\bigcap\mathbb{T}_1,\bar{\mathbb{T}}_2=[a_2,\infty)\bigcap\mathbb{T}_2$

باتشبات أنشأ المتراجحة التكاملية التالية للدوال ذات المتغيرين على المقاييس الزمنية وجاء بيانها في النظريات التالية :

نظرية 6.3.2: [31]

ليكن $u, f \in C_{rd}(\Omega, \mathbb{R}_+)$ ، $K(x,y,s,t)$ ، $K^{\Delta_1}(x,y,s,t)$ ، $K^{\Delta_2}(x,y,s,t),$ و $K^{\Delta_1\Delta_2(x,y,s,t)} \in C_{rd}(\Omega, \mathbb{R}_+)$ و c ثابت موجبة . إذا كانت المتراجحة التالية محققة:

$$u(x,y) \leq c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)\left[u(s,t) + \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} K(s,t,\tau,\xi)u(\tau,\xi)\Delta\xi\Delta\tau\right]\Delta t\Delta s,$$

من أجل $(x,y) \in \Omega$ نجد:

$$u(x,y) \leq c\left[1 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(s,t)e_{\int_{t_0}^{t}[f(\tau,\xi)+A(\tau,\xi)]\Delta\xi\Delta\tau}(x,x_0)\Delta t\Delta s\right]$$

حيث:

$$\begin{aligned} A(x,y) &= K(x,y,\sigma(x),\sigma(y)) + \int_{x_0}^{x} K^{\Delta_1}(x,y,\tau.\sigma(y))\Delta\tau \\ &\quad + \int_{y_0}^{y} K^{\Delta_2}(x,y,\sigma(x),\xi)\Delta\xi + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} K^{\Delta_1\Delta_2}(x,y,\tau.\xi)\Delta\xi\Delta\tau \end{aligned}$$

من أجل $(x,y) \in \Omega = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ ، حيث $\mathbb{T}_1$ ، $\mathbb{T}_2$ هما مقياسان زمنيان.

الفصل الثالث

تعميمات جديدة للمتراجحات التكاملية من نوع ووندروف-بيهاري و تطبيقاتها

الهدف من هذا العمل هو إعطاء تقدير مسبق لحل المتراجحات التكاملية التالية:

$$u^p(t,s) \leq a(t,s) + b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta,u^r(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau, \qquad (t,s)\in\bar{\Omega}$$

$$u^p(t,s) \leq a(t,s) + b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} K(t,s,\tau,\eta)w(u^r(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau, \qquad (t,s,\tau,\eta)\in\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$$

و

$$\varphi(u(t,s)) \leq a(t,s) + b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)w(u(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau, \qquad (t,s)\in\bar{\Omega}$$

حيث f ، w ، φ ، K ، p و r يجب أن تستوفي شروطا معينة .

نذكر أن النتائج التي تم الحصول عليها تمثل تعميمات النتائج التي تم الحصول عليها في المراجع التالية [1،19،30].

في كل مما يأتي $\mathbb{T}_1$ ، $\mathbb{T}_2$ هما مقياسان زمنيان و $\bar{\Omega} = \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ جداء المقاييس الزمنية.

1.3 المتراجحات التكاملية من نوع ووندروف-بيهاري

نظرية 1.1.3

ليكن $u(t,s)$ ، $a(t,s)$ ، $b(t,s)$ و $f(t,s)$ دوال موجبة ومعرفة من أجل $(t,s) \in \bar{\Omega}$ مستمرة عند كل نقطة كثيفة على اليمين . من أجل $(t,s) \in \bar{\Omega}$ و $w(x)$ دالة موجبة ومتزايدة و مستمرة من أجل $x \in \mathbb{R}_+$ نفرض أن $a(t,s)$ و $b(t,s)$ متزايدة من أجل $(t,s) \in \bar{\Omega}$. إذا كانت المتراجحة التالية محققة :

$$u(t,s) \leq a(t,s) + b(t,s) \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta) w(u(\tau,\eta)) \Delta\eta \Delta\tau, \qquad (t,s) \in \bar{\Omega} \quad (1.3)$$

فإنه يكون لدينا:

$$u(t,s) \leq G^{-1} \left[G(a(t,s)) + b(t,s) \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta) \Delta\eta \Delta\tau \right],$$

من أجل كل $t_0 < t \leq t_1$ و $s_0 < s \leq s_1$ بحيث G^{-1} هو الدالة العكسية للدالة G بحيث G هي دالة متزايدة تقابلية تحقق:

$$G^{\Delta\tau}(u(\tau,\eta)) = \frac{u^{\Delta\tau}(\tau,\eta)}{w(u(\tau,\eta))}, \qquad (\tau,\eta) \in \bar{\Omega} \quad (2.3)$$

t_1 و s_1 يتم اختيارهما بحيث :

$$\left\{ G(a(t,s)) + b(t,s) \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta) \Delta\eta \Delta\tau \right\} \in Dom(G^{-1})$$

❃ الإثبات: نضع $\bar{t_1} \in \tilde{\mathbb{T}}_1$ ، $\bar{s_1} \in \tilde{\mathbb{T}}_2$ مع $t_0 < \bar{t_1} \leq t_1$ و $s_0 < \bar{s_1} \leq s_1$ وفقا للعلاقة (1.3) لدينا:

$$u(t,s) \leq a(\bar{t_1}, \bar{s_1}) + b(\bar{t_1}, \bar{s_1}) \int_{t_0}^{t} \int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta) w(u(\tau,\eta)) \Delta\eta \Delta\tau, \quad (3.3)$$

من أجل كل $t_0 < t \leq \bar{t_1}$ و $s_0 < s \leq \bar{s_1}$. نعرف الدالة $z(t,s)$ كالتالي:

$$z(t,s) = a(\bar{t_1},\bar{s_1}) + b(\bar{t_1},\bar{s_1}) \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)w(u(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau \tag{4.3}$$

إذن:

$$z(t_0,s) = z(t,s_0) = a(\bar{t_1}\bar{s_1}) \tag{5.3}$$

و

$$u(t,s) \leq z(t,s). \tag{6.3}$$

بإدخال الإشتقاق Δ على المعادلة (4.3) بالنسبة للمتغير t نجد :

$$z^{\Delta t}(t,s) = b(\bar{t_1},\bar{s_1}) \int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)w(u(\tau,\eta))\Delta\eta \tag{7.3}$$

نعوض (6.3) في (7.3) نجد:

$$z^{\Delta t}(t,s) \leq b(\bar{t_1},\bar{s_1}) \int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)w(z(\tau,\eta))\Delta\eta \tag{8.3}$$

نظرا لأن الدالة $z(t,s)$ متزايدة بالنسبة لـ s ، فإن المعادلة (8.3) تضمن:

$$z^{\Delta t}(t,s) \leq b(\bar{t_1},\bar{s_1})w(z(t,s)) \int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\Delta\eta \tag{9.3}$$

لنقسم طرفي المعادلة (9.3) على الدالة الموجبة $w(z(t,s))$ فنحصل على

$$\frac{z^{\Delta t}(t,s)}{w(z(t,s))} \leq b(\bar{t_1},\bar{s_1}) \int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\Delta\eta \tag{10.3}$$

نعوض t بـ τ في (10.3) ونقوم بمكاملة الطرفين من المتراجحة الناتجة بالنسبة لـ τ ونستخدم المساواة (2.3) و (5.3) ، نجد

$$G(z(t,s)) \leq G(a(\bar{t_1},\bar{s_1})) + b(\bar{t_1},\bar{s_1}) \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau. \tag{11.3}$$

عندما نأخذ $t = \bar{t_1}$ و $s = \bar{s_1}$ في (11.3) نحصل على :

$$G(z(\bar{t_1},\bar{s_1})) \leq G(a(\bar{t_1},\bar{s_1})) + b(\bar{t_1},\bar{s_1}) \int_{t_0}^{\bar{t_1}}\int_{s_0}^{\bar{s_1}} f(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau. \tag{12.3}$$

بما أن $t_0 < t_1 \leq t_1$ و $s_0 < s_1 \leq s_1$ بالإضافة إلى ذلك t_1 و s_1 تختار بشكل كيفي فإن المعادلة (12،3) تعطي :

$$G(z(t,s)) \leq G(a(t,s)) + b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau, \qquad (13.3)$$

من أجل كل $t_0 < t_1 \leq t_1$ و $s_0 < s_1 \leq s_1$
بتطبيق G^{-1} على طرفي (13،3) وبإستخدام المتراجحة (6،3) نجد

$$u(t,s) \leq G^{-1}\left(G(a(t,s)) + b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau\right).$$

وهو المطلوب .

ملاحظة 1،1،3

النظرية 1،1،3 تصبح النظرية 2،3،2 ، إذا اخترنا $a(t,s) = c$ ، $b(t,s) = 1$ ، $t_0 = s_0 = 0$ و $\bar{\Omega} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. تصبح النظرية 4،3،2 في حالة : $t_0 = s_0 = 0$ و $\bar{\Omega} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

نظرية 2،1،3

نفرض أن $u(t,s)$ ، $a(t,s)$ و $b(t,s)$ دوال موجبة ومعرفة على $(t,s) \in \bar{\Omega}$ مستمرة عند كل نقطة كثيفة على اليمين من أجل $(t,s) \in \bar{\Omega}$ ولتكن:
$f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ دالة موجبة ومستمرة عند كل نقطة كثيفة على اليمين على $\bar{\Omega}$ ومستمرة على $\mathbb{R}_+$ تحقق

$$0 \leq f(t,s,x) - f(t,s,y) \leq h(t,s,y)w(x-y),$$

من أجل كل $(t,s) \in \bar{\Omega}$, $x \geq y \geq 0$ حيث $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ دالة موجبة ومستمرة عند كل نقطة كثيفة على اليمين على $\bar{\Omega}$ ومستمرة على $\mathbb{R}_+$ و $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ دالة متزايدة وتحقق المتراجحة التالية و $K > 0$ إذا كانت العلاقة التالية محققة:

$$u^p(t,s) \leq a(t,s) + b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta,u^r(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau \qquad ,(t,s) \in \tilde{\Omega},$$

فإن

$$u(t,s) \leq \left\{\left[a(t,s) + b(t,s)G^{-1}\left(G(A(t,s)) + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} B(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau\right)\right]\right\}^{\frac{1}{p}}$$

حيث

$$A(t,s)=\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f\left(\tau,\eta,\frac{r}{p}\left(K^{\frac{r-p}{p}}a(t,s)+\frac{p-r}{r}K^{\frac{r}{p}}\right)\right)\Delta\eta\Delta\tau. \qquad (14.3)$$

و

$$B(t,s)=h\left(t,s,\frac{r}{p}\left(K^{\frac{r-p}{p}}a(t,s)+\frac{p-r}{r})K^{\frac{r}{p}}\right)\right)w(\frac{r}{p}(K^{\frac{r-p}{p}}b(t,s)), \qquad (15.3)$$

من أجل $p\neq 0$ و $0\leq r\leq p$ و G دالة متزايدة وتقابلية تحقق العلاقة (2.3) حيث G^{-1} هي الدالة العكسية لـ G . بالإضافة إلى ذلك لدينا :

$$\left\{G(A(t,s))+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}B(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau\right\}\in Dom(G^{-1}),$$

* الإثبات: لتكن $z(t,s)$ دالة معرفة كما يلي:

$$z(t,s)=\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta,u^r(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau, \qquad (t,s)\in\bar{\Omega},$$

و منه:

$$u^p(t,s)\leq a(t,s)+b(t,s)z(t,s) \qquad (16.3)$$

و بالتالي:

$$u^r(t,s)=(u^p(t,s))^r\leq (a(t,s)+b(t,s)z(t,s))^{\frac{r}{p}}$$

و بإستعمال التوطئة 3.13.1 نجد:

$$u^r(t,s)\leq \frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}(a(t,s)+b(t,s)z(t,s))+\frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}, \qquad K>0 \qquad (17.3)$$

الفرضيات الموضوعة على f و w تسمح لنا بكتابتها على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}f(\tau,\eta,u^r(\tau,\eta)) &\leq f(\tau,\eta,\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}(a(t,s)+b(t,s)z(t,s))+\frac{p-r}{r}K^{\frac{r}{p}})\\ &\leq h\left(\tau,\eta,\frac{r}{p}\left(K^{\frac{r-p}{p}}a(t,s)+\frac{p-r}{r}K^{\frac{r}{p}}\right)\right)w(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}b(t,s))w(z(t,s))\\ &+f(\tau,\eta,\frac{r}{p}\left(K^{\frac{r-p}{p}}a(t,s)+\frac{p-r}{r}K^{\frac{r}{p}}\right)) \qquad (18.3)\end{aligned}$$

بإدخال التكامل المزدوج بالنسبة لـ τ و η حسب هيجلر على طرفي المتراجحة (18.3) نجد:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta,u^r(\tau,\eta)) \leq \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta,\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}(a(t,s)+b(t,s)z(t,s))+\frac{p-r}{r}K^{\frac{r}{p}})\Delta\eta\Delta\tau$$
$$\leq \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} h\left(\tau,\eta,\frac{r}{p}\left(K^{\frac{r-p}{p}}(a(t,s)+\frac{p-r}{r}K^{\frac{r}{p}}\right)\right)$$
$$\times w(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}b(t,s))w(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}z(t,s))\Delta\eta\Delta\tau \qquad (19.3)$$

بتعويض (14.3)و (15.3) في (19.3) نجد :

$$z(t,s) \leq A(t,s)+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} B(\tau,\eta)w(z(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau \qquad (20.3)$$

نلاحظ أن (20.3) مشابهة لـ (1.3) و منه و بإستعمال النظرية 1.1.3 نحصل على المتراجحة التالية :

$$z(t,s) \leq G^{-1}\left(G(A(t,s))+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} B(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau\right) \qquad (21.3)$$

من المتراجحتين (21.3) و (16.3) نحصل على المطلوب .

نظرية 3.1.3

ليكن u ، a ، b و f دوال معرفة كما في النظرية 2.1.3 و لتكن $\varphi(x)$ دالة مستمرة و موجبة و متزايدة بحيث $\varphi(x)>0$ ، من أجل كل $x>0$. إذا كانت المتراجحة التالية :

$$\varphi(u(t,s)) \leq a(t,s)+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)w(u(\tau,\eta)))\Delta\eta\Delta\tau, (t,s)\in\bar{\Omega}, \qquad (22.3)$$

محققة فإن :

$$u(t,s) \leq \varphi^{-1}\left[\phi^{-1}\left[\phi(a(t,s))+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau\right]\right]. \qquad (23.3)$$

حيث ϕ هي الدالة بمتغيرين تحقق المعادلة التفاضلية التالية :

$$\phi^{\Delta_r} = \frac{u^{\Delta_\tau}(\tau,s)}{w(\varphi^{-1}(u(\tau,s)))}, \qquad (t,s)\in\bar{\Omega}, \qquad (24.3)$$

و ϕ^{-1} هي الدالة العكسية لـ ϕ حيث :

$$\left\{\phi(a(t,s))+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau\right\} \in Dom(\phi^{-1}) \qquad (25.3)$$

* **الإثبات:** لتكن $z(t,s)$ دالة معرفة بالشكل التالي:

$$z(t,s)=a(t,s)+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}f(\tau,\eta)w\left(u(\tau,\eta)\right)\Delta\eta\Delta\tau \tag{26.3}$$

إذن:

$$\varphi(u(t,s))\leq z(t,s) \tag{27.3}$$

كذلك:

$$\mu(t,s)\leq\varphi^{-1}(z(t,s)) \tag{28.3}$$

من المتراجحتين (28.3) و (22.3) نجد:

$$z(t,s)\leq a(t,s)+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}f(\tau,\eta)w(\varphi^{-1}(z(t,s)))\Delta\eta\Delta\tau \tag{29.3}$$

بتطبيق النظرية 2.1.3 على المتراجحة (29.3) نجد:

$$z(t,s)\leq\phi^{-1}\left[\phi(a(t,s))+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}f(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau\right]. \tag{30.3}$$

من المتراجحتين (30.3) و (27.3) نحصل على المطلوب.

نظرية 4.1.3

لتكن $a(t,s)$ ، $u(t,s)$ و $b(t,s)$ دوال موجبة من أجل $(t,s)\in\bar{\Omega}$ ، مستمرة عند كل نقطة كثيفة على اليمين من أجل كل $(t,s)\in\bar{\Omega}$ ، $k(t,s,\tau,\eta)$ ، $k^{\Delta\eta}(t,s,\tau,\eta)$ ، $k^{\Delta\tau}(t,s,\tau,\eta)$، $k^{\Delta\eta\Delta\tau}(t,s,\tau,\eta)$ دوال موجبة ومستمرة عند كل نقطة كثيفة على اليمين من أجل كل $(t,s,\tau,\eta)\in\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$ ، $w(x)$ دالة موجبة ، متزايدة ومستمرة من أجل كل $x\in\mathbb{R}_+$ حيث $0<w(x)$ من أجل كل $0<x$ ، تحقق (1.13) و(1.14) ، $0<k$.
إذا كانت المتراجحة التالية محققة:

$$u^p(t,s)\leq a(t,s)+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}k(t,s,\tau,\eta)w\left(u^r(\tau,\eta)\right)\Delta\eta\Delta\tau, \tag{31.3}$$

و من أجل كل $(t,s,\tau,\eta)\in\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$ فإن :

$$u(t,s)\leq\left\{a(t,s)+b(t,s)\left[G^{-1}\left(G(c(t,s))+\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}D(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau\right)\right]\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{32.3}$$

حيث:

$$c(t,s)=\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}A(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau, \tag{33.3}$$

$$\begin{aligned}
A(t,s)=&\, w\left(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}\right)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}K^{\Delta_\eta\Delta_\tau}(t,s,\tau,\eta)w(a(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau\\
&+w\left(\frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}K^{\Delta\eta\Delta\tau}(t,s,\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau\\
&+w\left(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}\right)\int_{t_0}^{t}K^{\Delta\tau}(t,s,\tau,\sigma(s))w(a(\tau,s))\Delta\tau\\
&+w\left(\frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)\int_{t_0}^{t}K^{\Delta_\tau}\left(t,s,\tau,\sigma(s)\right)\Delta\tau\\
&+w\left(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{r}}\right)\int_{t_0}^{t}K^{\Delta_\eta}(t,s,\sigma(t),\eta)w(a(t,\eta))\Delta\eta\\
&+w\left(\frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)\int_{t_0}^{t}K^{\Delta_\eta}(t,s,\sigma(t),\eta)\Delta\eta\\
&+w\left(\frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)K(t,s,\sigma(t),\sigma(s))\\
&+w\left(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}\right)K(t,s,\sigma(t),\sigma(s))w(a(t,s)),
\end{aligned} \tag{34.3}$$

$$\begin{aligned}
D(t,s)=&\, w\left(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}\right)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}K^{\Delta_\eta\Delta_\tau}\left(t,s,\tau,\eta\right)w(b(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau\\
&+w\left(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}\right)\int_{t_0}^{t}K^{\Delta_\tau}(t,s,\tau,\sigma(s)),w(b(\tau,s))\Delta\tau.\\
&+w\left(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}\right)\int_{t_0}^{t}K^{\Delta\eta}(t,s,\sigma(t),\eta)w(b(t,\eta))\sigma\eta\\
&+w\left(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}\right)K(t,s,\sigma(t),\sigma(s))w(b(t,s))
\end{aligned} \tag{35.3}$$

من أجل كل $p\neq 0$ و $0\leqslant r\leqslant p$. حيث G هي دالة تقابلية ومتزايدة وتحقق المتراجحة (2.3) حيث G^{-1} هي الدالة العكسية لـ G. تحقق:

$$\left\{G(A(t,s))+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}B(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau\right\}\in\mathrm{Dom}\left(G^{-1}\right)$$

* الإثبات: لتكن $z(t,s)$ دالة معرفة بـ:

$$z(t,s)=\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s}K(t,s,\tau,\eta)w(u(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau \tag{36.3}$$

لدينا كذلك :

$$u^p(t,s) \le a(t,s) + b(t,s)z(t,s) \tag{37.3}$$

زيادة على ذلك:

$$u^r(t,s) \le (a(t,s) + b(t,s)z(t,s))^{\frac{r}{p}} \tag{38.3}$$

بإستخدام التوطئة 3.13.1 نجد:

$$u^r(t,s) \le \frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}(a(t,s) + b(t,s)z(t,s)) + \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}, \qquad K > 0 \tag{39.3}$$

بإدخال الإشتقاق المزدوج بالنسبة لـ t و s حسب هيلجر على طرفي المتراجحة (36.3) نجد:

$$\begin{aligned} z^{\Delta_t\Delta_s}(t,s) &= \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} K^{\Delta_\eta\Delta_\tau}(t,s,\tau,\eta)w\left(u^r(\tau,\eta)\right)\Delta\eta\Delta\tau \\ &+ \int_{t_0}^{t} K^{\Delta_\tau}(t,s,\tau,\sigma(s))w\left(u^r(\tau,s)\right)\Delta\tau \\ &+ \int_{s_0}^{s} K^{\Delta_\eta}(t,s,\sigma(t),\eta)w\left(u^r(t,\eta)\right)\Delta\eta \\ &+ K(t,s,\sigma(t),\sigma(s))w\left(u^r(t,s)\right) \end{aligned} \tag{40.3}$$

بتطبيق w على المتراجحة (38.3) و باستخدام خصائصها نجد:

$$w\left(u^r(t,s)\right) \le w\left(\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}\right)\left(w(a(t,s)) + w(b(t,s))w(z(t,s))\right) + w\left(\frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right), \tag{41.3}$$

بتعويض (40.3)في (41.3) وبإستخدام المتراجحتين (34.3) و (35.3) ومن تزايد الدالتين $z(t,s)$ و$w(u)$ نحصل على:

$$z^{\Delta_t\Delta_t}(t,s) \le A(t,s) + D(t,s)w(z(t,s)) \tag{42.3}$$

بإدخال التكامل المزدوج بالنسبة لـ t, s على طرفي المتراجحة (42.3) نجد:

$$z(t,s) \le \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} A(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} D(\tau,\eta)w(z(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau, \tag{43.3}$$

نضع:

$$c(t,s) = \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} A(\tau,\eta)\Delta\eta\Delta\tau$$

في هذه الحالة يمكن إعادة كتابة (43.3) بالشكل التالي:

$$z(t,s) \leq c(t,s) + \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} D(\tau,\eta)w(z(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau \qquad (44.3)$$

بأخذ $f(t,s) = D(t,s)$ ، $a(t,s) = c(t,s)$ ، $b(t,s) = 1$ ، تصبح المتراجحة (44.3) مشابهة للمتراجحة (1.3).

بإستخدام نظرية 1.1.3 نحصل على النتيجة المطلوبة.

ملاحظة 2.1.3

النظرية 4.1.3 هي حالة خاصة من النظرية 4.3.2 في حالة: $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ، $r = 1$ و $t_0 = s_0 = 0$ ، زيادة على ذلك إذا أخذنا $p = 1$ و $b(x,y) = 1$ نحصل على (b_2) من النظرية 3.3.2 .

2.3 تطبيقات

سنقوم بتوضيح بعض النتائج السابقة من خلال تطبيقاتها على المعادلات التفاضلية الجزئية:

مثال 1.2.3

نعتبر المعادلة الديناميكية التالية على $\Omega = T_1 \times T_2$ بحيث T_1 و T_2 هما مقياسان زمنيان:

$$u(x,y)^2 \leq a(x,y) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(\tau,\eta,u(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau \qquad (45.3)$$

حيث: $f(\tau,\eta,u(\tau,\eta)) \in C_{rd}(\Omega\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ و $a \in C_{rd}(\Omega,\mathbb{R})$ تحقق:

$$|f(\tau,\eta,x) - f(\tau,\eta,y)| \leq h(\tau,\eta,y)(x-y), \qquad (46.3)$$

حيث: $h \in C_{rd}(\Omega\times\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ ، إذن:

$$||u(t,s) \leq \left\{ \left[|a(t,s)| + A(t,s)e_{\int_{x_0}^{s} B(\tau,\eta)\Delta\eta}(t,t_0) \right] \right\}^{1/2}, \qquad (47.3)$$

حيث:

$$A(t,s) = \int_{x_0}^{s}\int_{y_0}^{t} f\big(\tau,\eta,\frac{1}{2\sqrt{k}}\Big(|a(\tau,\eta)| + \frac{1}{2}k\Big)\big)\Delta\eta\Delta\tau, \qquad (2.138)$$

$$B(t,s) = \frac{1}{4k}|h(\tau,\eta,\frac{1}{2\sqrt{k}}(|a(\tau,\eta)| + \frac{1}{2}k))|, \qquad (2.139)$$

❀ الإثبات:

حل المعادلة (45.3) يحقق:

$$|u(x,y)|^2 \leq |a(x,y)| + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} |f(\tau,\eta,u(\tau,\eta))|\Delta\eta\Delta\tau \tag{48.3}$$

بتعويض المعادلة (46.3) في (48.3) نحصل على:

$$|u(x,y)|^2 \leq |a(x,y)| + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{1}{4K}\left|h(\tau,\eta,\frac{1}{2\sqrt{K}}(|u(\tau,\eta)|+\frac{1}{2}K))\right||u(\tau,\eta)|\Delta\eta\Delta\tau \tag{2.141}$$

واضح أن فرضيات النظرية (2.33) مستوفاة يكفي أن نأخذ $p=2$ ، $r=1$ ، $b(t,s)=1$ و $w(x)=|x|$ وبالتالي نحصل على التقدير (47.3)

مثال 2.2.3

نعتبر المعادلة الجزئية التفاضلية التالية المعرفة على $\Omega = \tilde{\mathbb{T}}_1 \times \tilde{\mathbb{T}}_2$ ، $\mathbb{T}_1$ و $\mathbb{T}_2$ هما مقياسان زمنيان :

$$(u(t,s))^{\Delta_t\Delta_s} = F(t,s,u(t,s)), \qquad \forall (t,s)\in\Omega \tag{49.3}$$

و التي تحقق الشروط الابتدائية التالية :

$$u(t,s_0)=\alpha(t), \qquad u(t_0,s)=\beta(s), \qquad u(t_0,s)=c \tag{50.3}$$

حيث $F = \tilde{\mathbb{T}}_1 \times \tilde{\mathbb{T}}_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مستمر على كل نقطة كثيفة على اليمين على $\bar{\Omega}$ و مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\alpha : \tilde{\mathbb{T}}_1 \to \mathbb{R}$ و $\beta : \tilde{\mathbb{T}}_2 \to \mathbb{R}$ هما دوال مستمرة على كل نقطة كثيفة على اليمين على $\tilde{\mathbb{T}}_1$ و $\tilde{\mathbb{T}}_2$ على الترتيب و c ثابت حقيقي ، نفرض أن :

$$\begin{aligned} &|F(t,s,u)| \leq f(t,s)w(|u|) \\ &|\alpha(t)+\beta(s)-c| \leq a(t,s) \end{aligned} \tag{51.3}$$

حيث $a(t,s)$ هي دالة موجبة و متزايدة بالنسبة لكل متغيراتها. $(t,s)\in\bar{\Omega}$ ، $f(t,s)$ هي دالة موجبة ومستمرة على كل نقطة كثيفة على اليمين على $(t,s)\in\bar{\Omega}$ ، بحيث $\bar{\Omega}=\tilde{\mathbb{T}}_1\times\tilde{\mathbb{T}}_2$ و w دالة مستمرة ومتزايدة من أجل كل $x\in\mathbb{R}^+$ تحقق $0<w(x)$، من أجل كل $0<x$ و لدينا :

$$|u(t,s)| \leq G^{-1}\left[G\left(a(t,s)+b(t,s)\int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} f(\tau,\eta)\right)\Delta\eta\Delta\tau\right].$$

❃ الإثبات: حل المعادلات (49.3) - (50.3) يحقق :

$$u(t,s)=\alpha(t)+\beta(s)-c+\int_{x_0}^{s}\int_{y_0}^{t}F(\tau,\eta,u(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau, \qquad (52.3)$$

بتعويض المعادلة (52.3) في (51.3) نتحصل على:

$$|u(t,s)|=a(t,s)+\int_{x_0}^{s}\int_{y_0}^{t}f(\tau,\eta)w(|u(\tau,\eta)|)\Delta\eta\Delta\tau,$$

بتطبيق النظرية 1.1.3 يمكننا بسهولة العثور على التقدير المطلوب .

خاتمة

إن موضوع المتراجحات التكاملية من نوع بيلمان -جرونوال - بيهاري شاسع جدا والبحث فيه يطول ويتطلب الكثير من الجد والصبر، وما هذه المذكرة إلا غيض من فيض حاولنا جاهدين الوصول إلى الهدف المنشود ألا وهو دراسة تعميمات جديدة للمتراجحات التكاملية من نوع بيلمان -جرونووال -بيهاري ، فإن أصبنا فمن الله تعالى وإن أخطأنا فذلك من أنفسنا والشيطان، فنرجو من الله تعالى أن ينفعنا ومن يطلع على هذا العمل المتواضع وأن يزيدنا من فضله والله ولي التوفيق.

المراجع العلمية

[1] D. Bainov, P. Simeonov, Integral inequalities and applications. Translated by R. A. M. Hoksbergen and V. Covachev. Mathematics and its Applications, 57. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992

[2] E. F. Beckenbach and R. Bellman, Inequalities. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, N. F., Bd. 30 Springer-Verlag, BerlinGottingen-Heidelbe

[3]] P. R. Beesack, Gronwall inequalities. Carleton Mathematical Lecture Notes, No. 11. Carleton University, Ottawa, Ont., 1975.

[4] R. Bellman, The stability of solutions of linear differential equations. Duke Math. J. 10, (1943). 643-647.

[5] R. Bellman, Asymptotic series for the solutions of linear differentialdifference equations. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 7 1958 261269

[6] B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, and M. A. Hammami, On the stability of perturbed time scale systems using integral inequalities. Appl. Sci. 16 (2014), 56-71.

[7] I. Bihari, A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of dierential equations. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 7 (1956), 81-94.

[8] K. Boukerrioua and A. Guezane-Lakoud, Some nonlinear integral inequalities arising in dierential equations. Electron. J. Differential Equations 2008, No. 80, 6 pp.

[9] K. Boukerrioua, Note on some nonlinear integral inequalities and applications to differential equations. Int. J. Differ. Equ. 2011, Art. ID 456216, 15 pp

[10] K. Boukerrioua, Note on some nonlinear integral inequalities on time scales and applications to dynamic equations. J. Adv. Res. Appl. Math. 5 (2013), no. 2, 1-12.

[11] S. C. Chu and, F. T. Metcalf, On Gronwall's inequality. Proc. Amer. Math. Soc. 18 1967 439-440.

[12] S. S. Dragomir, Some Gronwall type inequalities and applications. Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, NY, 2003.

[13] R. A. Ferreira and D. F. Torres, Some linear and nonlinear integral inequalities on time scales in two independent variables. Nonlinear Dyn. Syst. Theory 9 (2009), no. 2, 161-169

[14] H. E. Gollwitzer, A note on a functional inequality. Proc. Amer. Math. Soc. 23 1969 642-647.

[15] T. H. Gronwall, Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. of Math. (2) 20 (1919), no. 4, 292-296

[16] I. Györi, A generalization of Bellman's inequality for Stieltjes integrals and a uniqueness theorem. Studia Sci. Math. Hungar. 6 (1971), 137-145.

[17] [56] S. Hilger, Ein Ma kettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universität. Würzburg (1988).

[18] F. Jiang and F. Meng, Explicit bounds on some new nonlinear integral inequalities with delay. Journal of Computational and Applied Mathematics, (2007) ;205(1), 479-486.

[19] F. Lakhal, A new nonlinear integral inequality of Wendroff type with continuous and weakly singular kernel and its application. J. Math. Inequal. 6 (2012), no. 3, 367-379.

[20]] M. A. Latif and S. S. Dragomir, Some Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose partial derivatives in absloute value are preinvex on the co-oordinates. Facta Universitatis (NIS) Ser. Math. Inform. 28(3) (2013), 257270.

[21] Martynyuk, A. A. ; Kosolapov, V. I. Stability of nonlinear systems with integrable approximation. (Russian) Ninth international conference on nonlinear oscillations, Vol. 2 (Kiev, 1981), 247-251, 478,Naukova Dumka, Kiev, 1984.

[22] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[23] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[24] J. Norbury and A. M. Stuart, Volterra integral equations and a new Gronwall inequality. I. The linear case. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 106 (1987), no. 3-4, 361-373.

[25] T. Nurimov, Investigation of the solution of a two-dimensional nonlinear Volterra integral equation. (Russian) Dokl. Akad. Nauk UzSSR 1971, no. 11, 6-8.

[26] L. Ou Yang, The boundedness of solutions of linear dierential equations y"+A(t)y = 0. (Chinese) Advancement in Math. 3 1957 409-415.

[27] B. G. Pachpatte, Inequalities for dierential and integral equations. Mathematics in Science and Engineering, 197. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1998.

[28] B. G. Pachpatte, On some generalizations of Bellman's lemma. J. Math. Anal. Appl. 51 (1975), 141-150

[29] B. G. Pachpatte, On some new inequalities related to a certain inequality arising in the theory of dierential equations. J. Math. Anal. Appl. 251 (2000), no. 2, 736-751.

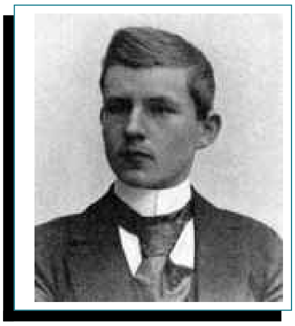
[30] B. G. Pachpatte, On generalizations of Bihari's inequality. Soochow J. Math. 31 (2005), no. 2, 261-271.

[31] D. B. Pachpatte, Estimates of certain integral inequalities on time scales. J. Math. 2013, Art. ID 902087, 5 pp.

[32] A. I. Perov, K voprosu o strukture integral'noi voronki, Nau£. Dokl. Vysseli skoly. Ser FMN, 1959, No.2

ملاحق

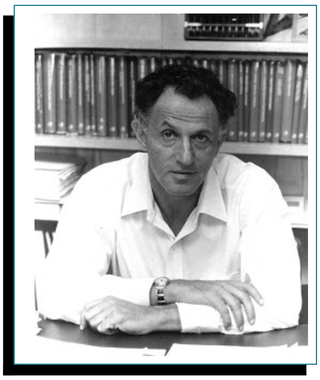
لمحة تاريخية



توماس هاكونغ جرونوال

توماس هاكونغ جرونوال (بالفرنسية: Thomas Hakon Gronwal)
(16 جانفي 1877- 09 ماي 1932) عالم رياضيات سويدي.
درس في كلية ستوكهولم الجامعية وجامعة أوبسالا وحصل على درجة الدكتورا في أوبسالا عام 1898 على الرغم من أنه كرس جزءا كبيرا من حياته لأنشطة أخرى غير البحث في الرياضيات إلا أن النطاق الذي درسه جرونوال واسع بشكل خاص في التحليل الكلاسيكي والمعادلات التفاضلية والتكاملية ،ونظرية الدوال المجسمة والحساب ، في كل موضوع كانت له مساهمات عميقة ،ويعرف بشكل خاص بالنظرية التي سميت بإسمه (نظرية جرونوال) .

لمحة تاريخية



ريتشارد ارنست بيلمان

ريتشارد إرنست بيلمان (بالفرنسية: Richard Ernest Bellman)
عالم رياضياتي أمريكي، ولد في 29 أوت 1984م.
حصل على درجة الماجيستار من جامعة ويسكونسن وحصل على درجة الدكتوراه في الرياضيات عام 1947 قدم مساهمات مهمة في الرياضيات ، أهمها المتراجحة التي سميت بإسمه (متراجحة بيلمان)، معادلة هاميلتون - جاكوبي -بيلمان ، خوارزمية بيلمان فور . توفي في 19 مارس 1984م عن عمر يناهز الأربعة والستين عاما.

لمحة تاريخية

إيمري بيهاري (بالفرنسية: Imre Bihari)

(1915-1989) عالم رياضيات مجري ، مشهور بأبحاثه في المتراجحات التكاملية درس في جامعة بودابست ، وقدم إسهامات كبيرة في هذا المجال . ومن أبرز إنجازاته : تطوير نظرية المتراجحات التكاملية وتطبيقها في مجالات متعددة مثل الفيزياء والهندسة . كما قدم مساهمات في فهم الدوال والتحليل الرياضي .

يعتبر من أهم علماء الرياضيات في التاريخ الحديث

ملخص

في هذه المذكرة تناولنا بعض المفاهيم الأولية ، ثم تطرقنا إلى بعض المتراجحات التكاملية من نوع جرونوال- بيلمان -بيهاري ، مرورا إلى بعض التعميمات الجديدة الخاصة بمتراجحات ووندروف وبيهاري، وأخيرا قدمنا بعض التطبيقات لهذه التعميمات الجديدة.

الكلمات المفتاحية

متراجحات تكاملية،متراجحة حرونوال ،متراجحة بيلمان ،متراجحة بيهاري ، تعميمات جديدة ، مقاييس زمنية.

Résumé

Dans cette note,nous avons abordé quelques concepts de base,puis nous avons traité de quelques inégalités intégrales classique du type Gronwall-Bellman-Bihari,en passant par de nouvelles généralisations,et enfin,nous avons présenté quelques applications de ces nouvelles généralisations

Les mots clés

inégalités intégrales,inégalités de Gronwell,inégalités de Bellman,inégalités de Bihari,nouvelles généralisations,échelles de temps

Abstract

In this note,we discussed some basic concepts,then addressed some classical integral inqualities of the Gronwall-Bellman-Bihari type,followed by some new generalizations,and finally,we presented some applications of these new generalizations.

key words

integral inequalities,Gronwell inequalities,Bellman inequalities,Bihari inequalities,new generalizations,time scales.