الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientfiique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي -سكيكدة-
Ecole Normale Supérieure d'Enseignement Technologique -Skikda-

Département de Mathématiques

قسم الرياضيات

مُذكّرة تخَرج لنيَل شهَادة أُستَاذ التَّعلِيم المتوسط

بعض الطرق العددية لحل جمل المعادلات الخطية والمعادلات غير الخطية

من إعداد :
- مكاحلية فاطمة الزهراء
- سنوسي نجلاء

تحت إشراف الأستاذة :
- غمراني سارة

من طرف لجنة المناقشة :

• قواسمية محمد	أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة	رئيسا.
• بولعراس صالح	أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة	مناقشا.
• فراق عزوز	أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة	مناقشا.

دفعة جوان 2024

❖ شكـــر وعرفـــان

قال رسول الله صل الله عليه و سلم " من لم يشكر الناس لم يشكر الله ".

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات الحمد لله الذي علم الإنسان ما لم يعلم والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين سيدنا محمد وعلى أله وصحبه أجمعين.

بحمد الله وتوفيقه يسرني أن أقدم هذا العمل الذي يمثل حصيلة جهد مستمر خلال مسيرتنا الدراسية، وفي هذا المقام نود أن نعبر عن خالص شكرنا وامتناننا لأستاذتنا المشرفة "غمراني سارة " التي لم تدخر جهدا في توجيهنا وإرشادنا فكانت نصائحها القيمة ودعمها المستمر نبراسا في إتمام هذا العمل.

كما لا يفوتنا أن نشكر أعضاء لجنة المناقشة كل من الأستاذ "قواسمية محمد " ، "بولعراس صالح " والأستاذ " فراق عزوز " على جهودهم المبذولة لقراءة وتقييم هذه المذكرة.

كما أتوجه بخالص الامتنان وعظيم التقدير إلى كافة أساتذتنا في المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي بسكيكدة الذين لم يبخلوا علينا بعلمهم وخبرتهم خلال الفترة الدراسية وكانوا مثلا يُقتدى به في العلم والأخلاق.

❖ إهـــداء

بسم الله و الصلاة و السلام على رسول الله أشرف الخلق و المرسلين .

من قال أنا لها نالها

وأنا لها إن أبت رغما عنها أتيت بها

بعد تعب ومشقة دامت لسنوات في سبيل الحلم والعلم حملت في طياتها امنيات الليالي، وأصبح عنائي اليوم للعين قرة، ها أنا اليوم أقف على عتبة تخرجي أقطف ثمار تعبي وأرفع قبعتي بكل فخر، فاللهم لك الحمد قبل الرضا ولك الحمد إذا رضيت ولك الحمد بعد الرضا، لأنك وفقتني لإتمام هذا النجاح وتحقيق حلمي ...

وبكل حب اهدي ثمرة نجاحي وتخرجي :

إلى نفسي العظيمة الفتية التي تحملت كل العثرات وأكملت رغم الصعوبات.

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار، إلى النور الذي أنار دربي والسراج الذي لا ينطفئ نوره أبدا و الذي بذل جهد السنين من أجل أن أعتلي سلالم النجاح، إلى من أحمل اسمه بكل فخر، إلى من غرس في روحي مكارم الأخلاق، أسعد الله أوقاتك بالخير و الصحة و العافية و أدامك الله ذخرا لنا طيلة الزمان.

" فخري واعتزازي أبي الغالي "

إلى من جعل الله الجنة تحت أقدامها، واحتضنني قلبها قبل يدها وسهلت لي الشدائد بدعائها، إلى من كانت سندي في كل خطوة خطوتها، إلى من علمتني أن الإيمان بالنفس والعمل الجاد هما مفتاح النجاح، إلى من غمرتني بحبها وحنانها، جزاك الله خير الجزاء في الدارين.

"أمي الغالية "

إلى ملازمي طفولتي، إلى من كانوا لي سندا وداعمين ومشجعين دائما، إلى الذين تقاسمت معهم مر الحياة وحلوها إلى إخوتي ، دمتم لي ضماد الروح وبلسم الحياة.

" سارة، زينب، محمد "

إلى بركة البيت وروحه، من لا يغيب ذكرها الطيب عن كل لسان، إلى مصدر الحكمة والأمانة، إلى حلوة الملامح.

"جدتي"

إلى رفيقة الروح وصديقة القلب، إلى كتفي الثابت الذي لا يميل، إلى أجمل صدفة في حياتي، إلى من تتعافى معها روحي، إلى من تعالت معها الضحكات، إلى حبيبة قلبي .

"نجلاء"

إلى توأم روحي، إلى التي شاركتني كل لحظات حياتي، من فرحي إلى حزني، من الضحكات الصادقة إلى الدموع الحارة، إلى من كانت دائمًا إلى جانبي، مشجعة ومؤيدة، إلى حظي الجميل في الدنيا، إلى جميلة الروح، طيبة القلب، إلى الأخت التي لم تلدها أمي.

"شيماء"

إلى من جمعتني بهم أجمل الأيام وأحلى الذكريات إلى جميلاتي .

"دعاء وعبيرٍ"

إلى رفيقة العمر إلى من تبقى قريبةً حتى في بعد الأميال.

"رندة، حنين"

إلى عائلة أمي الحبيبة، إلى عائلة أبي العزيز كل باسمه ومقامه.

إلى كل من كان عونا وسندا في هذا الطريق... أهديكم هذا الإنجاز الذي لا طالما تمنيته.

"ماريا وملك"

إلى كل من ساهم في توجيهي وتعليمي...

إلى كل من غاب اسمهم عن هذه الكلمات، ذكراكم محفورة في ذاكرتي

مكاحلية فاطمة الزهراء

❖ إهـــداء

الحمد لله ما انتهى درب ولا ختم جهد ولا سعي إلا بفضله، الحمد لله الذي يسر البدايات وبلغنا النهايات

من قال أني لها نالها و إن أبت رغما عنها أتيت بها

لم تكن رحلة قصيرة ولا الطريق محفورا بالتسهيلات، لكن من يسعى ينال ما سعى لأجله

لقوله تعالى: "وأن للإنسان إلا ما سعى". أنا اليوم أعانق حلمي الذي عملت و اجتهدت من أجله طيلة اربع سنوات .

أهدي نجاحي هذا إلى نفسي الطموحة التي تحملت كل العثرات و أكملت رغم الصعوبات.

إلى من جعل الله الجنة تحت قدميها ، إلى من وهبتني الحياة ،ملجئ من وخزات الأيام، الوطن الفسيح الذي يتسع لقلبي حين تضيق به الأماكن، سر قوتي و تشبتي بالحياة ،أمي الغالية أدامك الله تاجا على رؤوسنا ويفخر به قلوبنا. إلى الذي زين إسمي بأجمل الألقاب، فخري و اعتزازي، داعمي و مشجعي الأول في كل خطوة نحو تحقيق حلمي، الذي أفنى زهرة شبابه من أجل أن أعتلي سلالم النجاح أبي الغالي حفظك الله دائما سندا و عونا لنا.

إلى من وهبني الله نعمة وجودهم في حياتي، من أحبهم فوق الحب حبا، الروح المتممة لروحي، ضلعي الثابت أمان قلبي، من ساندني وقت ضعفي وزرع في الثقة أخي الصغير نور عيني، شمعة حياتي معاذ، أختي حبيبة قلبي لينة.

إلى من تنطق عيناها بالحب حين تراني، إلى الأم الثانية ، الحضن الدافئ الذي دعواته ترد الروح، إلى عالية المقام

جدتي الغالية"ماما بريزة".

إلى من غطى التراب جسده و حرمني الدهر من نبرات صوته إلى من غاب عن عيني لكنه بقي في قلب صاحب الابتسامة الدائمة، من كان سينبض قلبه فرحا وسرورا لهذا النجاح

" جدي العزيز رحمه الله".

إلى أجمل صدفة صادفتها في مرحلتي هذه، شريكتي في الرحلة و رفيقتي في الحلم و داعمتي وقت الصعاب، من تشاركنا أحلامنا، تلك التي أصبحت كأخت لي

"فاطمة"

إلى من جعلوا سنواتي بالمدرسة العليا رحلة مفعمة بالحب و الدعم، من كانت صداقتهم أعظم هدية تلقيتها خلال هذه المرحلة ، من زرعن في قلبي ذكريات لا تمحى و أصبحن جزءا لا يتجزأ مني، تبادلنا سويا اللحظات السعيدة و المرهقة

"شيماء، عبير، دعاء."

إلى من ارتشفت معهم كأس المحبة و الأخوة و الصداقة، من رزقني بهن الله لأعرف حلاوة الحياة، أصدقاء السنين و أصحاب الشدائد ،من مدوا لي يد العون عند حاجتني لشموع تنير طريقي، أخواتي بالقلب

" بشرى ،نور، إكرام، ندى، شيماء ،رشا".

إلى كل أقاربي الذين يفرحهم نجاحي، كل من قدم لي التشجيع والدعم

إلى كل من كان له دورمن قريب أو بعيد لإتمام هده الدراسة.

إلى كل من نساهم قلمي و لم ينساهم قلبي

سنوسي نجلاء

الفَهرَس

مقدمة عامة

التحليل العددي هو فرع من فروع الرياضيات يهتم بتطوير وتحليل وتطبيق أساليب من مختلف المجالات الرياضية المتنوعة مثل: التحليل، الجبر الخطي، الهندسة،... إلخ، فالطرق العددية هي تقنيات يتم من خلالها صياغة المشكلات الرياضية بحيث يمكن حلها بالعمليات الحسابية، وعلى الرغم من وجود أنواع عديدة من الطرق العددية، إلا أنها تشترك في أنها تتضمن أعدادا كبيرة من الحسابات.
نجد هذا المجال الدراسي في العديد من العلوم ولا ينقطع عن انكشاف آفاق جديدة والعثور على مجالات تطبيق جديدة، وكذا إيجاد طرق عددية أبسط لحل المعادلات وجمل المعادلات ،لأن حل المعادلات الجبرية هو أحد الأغراض التي تستخدم في كثير من الأحيان في الرياضيات التطبيقية.
فقد شهد حل جمل المعادلات الخطية تطورا هائلا، بدءًا من الأساليب القديمة وصولا إلى الخوارزميات الحديثة. ومن أهم محطات هذا التطور تظهر في القرن السابع عشر حيث ابتكر العالم الألماني "كارل فريدريش غوص" $(Carl Friedrich Gauss)$ طريقة لحل جمل المعادلات الخطية ذات عدد من المتغيرات والمعروفة باسم "طريقة الحذف لغوص" والتي تعد من أهم الخوارزميات المستخدمة إلى يومنا هذا. ثم في القرن التاسع عشر طورت هذه الطريقة لتصبح أبسط وأسهل لنتحصل على طريقة غوص جوردن.

منذ أواخر الأربعينات من القرن العشرين، أدى انتشار أجهزة الكمبيوتر الرقمية على نطاق واسع إلى حدوث انفجار في استخدام وتطوير الطرق العددية من خلال برامج ساعدت في ذلك، إذ توفر أجهزة الكمبيوتر والطرق العددية بديلا للحسابات المعقدة في حل المسائل الرياضية والحصول على الحلول الدقيقة أو التقريبية لها.

من بين الطرق الأخرى التي تعطي حلا دقيقا لجملة المعادلات الخطية: طريقة تفكيك LU ، طريقة تفكيك شولسكي...إلخ، وطرقا تكرارية تعطي حلا تقريبيا نذكر منها: طريقة غوص سايدل وطريقة جاكوبي.
أما بالنسبة للمعادلات غير الخطية فقد واجه الرياضيون منذ فجر التاريخ صعوبة في إيجاد حلول تحليلية دقيقة لهذه المعادلات، مما دفعهم إلى البحث عن طرق تقريبية لحلها. فقد شهد القرن السابع عشر ثورة في طرق حل هذا النوع من المعادلات بفضل أعمال "إسحاق نيوتن " $(Isaac Newton)$ و "فيلهلم ليبنيز" $(Wilhelm Leibniz)$ ، في وضع أسس حساب التفاضل والتكامل، مما أدى إلى ظهور طرق جديدة مثل طريقة نيوتن رافسون.
في بحثنا هذا سنتطرق إلى بعض الطرق العددية لحل جمل المعادلات الخطية والمعادلات غير الخطية، وذلك في فصلين على النحو التالي:

- **الفصل الأول:** تطرقنا في هذا الفصل إلى مجموعة من الطرق العددية لحل جملة المعادلات الخطية والشروط والخصائص التي تسمح بتطبيقها والتي تنقسم إلى طرق مباشرة وغير مباشرة (الطرق التكرارية)، وشروط تقاربها بالإضافة إلى خوارزمية "MATLAB" الخاصة بكل طريقة.
- **الفصل ثاني:** تناولنا في هذا الفصل طرق حل المعادلات غير الخطية وهي طريقة ديكوتومي، طريقة النقطة الثابتة، طريقة نيوتن رافسون بالإضافة إلى خوارزمية "MATLAB" الخاصة بكل طريقة.

الفصل 1

بعض الطرق العددية لحل جمل المعادلات الخطية

مقدمة

يعتبر حل جمل المعادلات الخطية من أساسيات الرياضيات التطبيقية، حيث يستخدم في حل المسائل الهندسية والعلمية، بدءًا من الهندسة وصولاً إلى الفيزياء والاقتصاد والعديد من المجالات الأخرى. يهدف هذا الفصل إلى استعراض وتوضيح بعض الطرق العددية المستخدمة في حل جمل المعادلات الخطية، سواء الطرق المباشرة التي تتيح حساب الحل بشكل مباشر ودقيق، أو الطرق الغير مباشرة التي تقوم بحساب الحل بشكل تكراري وتستند إلى التقارب نحو الحل الصحيح. كما سنتطرق إلى خصائص وشروط تطبيق كل طريقة، مع تقديم أمثلة توضيحية لكل منها وخوارزمية كل طريقة في برنامج $MATLAB$.

1.1 جمل المعادلات الخطية

جملة معادلات خطية مكونة من m معادلة و n مجهول هي مجموعة من المعادلات مكتوبة من الشكل :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

أي من الشكل:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

حيث x_j مجاهيل و a_{ij} معاملات x_j و b_i الطرف الثاني للمعادلة، والتي يمكن كتابتها على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

نضع:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n\times m}), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$$

و

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$$

إذن (1.1) يكافئ الشكل المصفوفي $AX = B$.

1.2 الطرق المباشرة لحل جمل المعادلات الخطية

1.2.1 طريقة الحذف لغوص

تسمى أيضا بطريقة التثليث لغوص، وهي طريقة تعتمد على بناء جملة معادلات مكافئة لجملة المعادلات الأصلية لكن بمصفوفة مثلثية علوية، وذلك لأن مجموعة الحلول لا تتغير إذا أجرينا على المعادلات العمليات الأولية التالية:

-تغيير ترتيب المعادلات.

-ضرب معادلة في قيمة غير صفرية.

-إضافة معادلة إلى معادلة أُخرى بجمع خطي.

تتكون طريقة غوص من مرحلتين: مرحلة الحذف و مرحلة الحل.

وظيفة مرحلة الحذف هي تحويل جملة المعادلات إلى الشكل $UX = C$ حيث U مصفوفة مثلثية علوية و C الطرف الثاني للمعادلة، ويتم بعد ذلك حل المعادلات عن طريق التعويض التراجعي.
يرمز إلى جملة المعادلات الخطية الأصلية بـ : $A^{(1)}X = B^{(1)}$.
حيث:

$$A^{(1)} = [a_{ij}]^{(1)}$$
$$B^{(1)} = [b_i^{(1)}]^T$$

$1 \leqslant i, j \leqslant n$

خوارزمية غوص

مرحلة الحذف

لنفترض أن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قابلة للقلب، وأن a_{11} عنصر المصفوفة الرئيسي غير صفري، نضع $A^{(1)} = A$ و $B^{(1)} = B$.
ليكن:

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \text{ , } i = 2, 3, ..., n$$

حيث $a_{ij}^{(1)}$ تمثل عناصر المصفوفة $A^{(1)}$.
نستطيع حذف المجهول x_1 من الأسطر $i = 2, 3, ..., n$ عن طريق طرح m_{i1} مرة من السطر الأول وإجراء نفس الشيء بالنسبة للطرف الأيمن.
نعرف إذا :

$$l_i^{(2)} = l_i^{(1)} - m_{i1}l_1^{(1)}, i = 2, 3, ..., n$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{(ij)}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)}; i, j = 2, 3, ..., n \\ b_{ij}^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)} \end{cases}$$

حيث $b_i^{(1)}$ هي مركبات $B^{(1)}$.
نتحصل على جملة معادلات جديدة من الشكل :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

بحيث نسميها $A^{(2)}X = B^{(2)}$ وهي مكافئة للجملة الأصلية.

يمكننا مرة أُخرى تحويل هذه الجملة بنفس الطريقة لإزالة المجهول x_2 من الأسطر $3, 4, ..., n$ ، من خلال المتابعة على هذا النحو نحصل على سلسلة نهائية من جمل المعادلات $A^{(k)}X = B^{(k)}, 1 \leq k \leq n$.
من أجل $k > 2$، المصفوفة $A^{(k)}$ تكون من الشكل التالي:

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ... & ... & ... & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & ... & ... & ... & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & ... & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

حيث $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ من أجل $i = 1, 2, ..., k-1$.
من الواضح أنه من أجل $k = n$ ، فإننا نحصل بعد ذلك على مصفوفة الجملة المثلثية العلوية $A^{(n)}X = B^{(n)}$ التالية:

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

مرحلة الحل (التعويض التراجعي)

بعد مرحلة الحذف تأخذ جملة المعادلات الشكل:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

يتم حل المعادلة الأخيرة أولا: $a_{nn}x_n = b_n^{(k)}$ مما ينتج: $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$.

ثم يتم حل المعادلات واحدة تلو الأُخرى باستخدام التعويض التراجعي وحساب $x_n, x_{n-1}, ..., x_{k+1}$ (بالترتيب) ونحدد x_k من المعادلة k:

$$a_{kk}x_k + a_{kk+1}x_{k+1} + ... + a_{kn}x_n = b_k$$

حلها: $x_k = \frac{1}{a_{kk}}(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j)$ ، $k = n-1, n-2, ..., 1$

ملاحظة 2.1.1

1-الإنتقال من الجملة $A^{(k)}X = B^{(k)}$ إلى الجملة $A^{(k+1)}X = B^{(k+1)}$ حيث $k = 1, 2, ..., n-1$ يتم وفق الخوارزمية التالية:

$$\begin{cases} l_i^{(k+1)} = l_i^{(k)} & ; i = 1, 2, ..., k \\ l_i^{(k+1)} = l_i^{(k)} - m_{ik}l_k^{(k)} & ; i = k+1, ..., n \end{cases}$$

2- إذا كان $a_{kk}^{(k)} = 0$ نستبدل السطر $l_k^{(k)}$ بسطر $l_i^{(k)}$ أسفل منه يتحقق فيه الشرط $a_{ik} \neq 0$، ونأخذ $l_i^{(k)}$ هو السطر رقم k للجملة $(A^{(k)} : B^{(k)})$.

3-من خلال طريقة غوص ومن خواص حساب المحددات، نحصل على العلاقة التالية:

$$det(A) = (-1)^s \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(m)}.$$

حيث s هو عدد مرات تعديل الأسطر.

مثال 1.2.1. باستخدام طريقة غوص جد حل جملة المعادلات التالية :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow l_1^{(1)} \\ \longrightarrow l_2^{(1)} \\ \longrightarrow l_3^{(1)} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow l_1^{(2)} = l_1^{(1)} \\ \longrightarrow l_2^{(2)} = l_2^{(1)} - \frac{3}{1} l_1^{(1)} \\ \longrightarrow l_3^{(2)} = l_3^{(1)} - \frac{3}{1} l_1^{(1)} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow l_1^{(3)} = l_1^{(2)} \\ \longrightarrow l_2^{(3)} = l_2^{(2)} \\ \longrightarrow l_3^{(3)} = l_3^{(2)} - \frac{7}{5} l_2^{(2)} \end{matrix}$$

بما أن المصفوفة المتحصل عليها مثلثية علوية إذا باستخدام خوارزمية التعويض التراجعي نجد :

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{-\frac{11}{5}} = -\frac{5}{11} \\ x_2 = \frac{1}{5}(-5 - (-2)(-\frac{5}{11})) = -\frac{65}{55} \\ x_1 = \frac{1}{1}(2 - [(1)(-\frac{5}{11}) + (-2)(-\frac{65}{55})]) = \frac{1}{11} \end{cases}$$

خوارزمية *MATLAB*

```
function [A2,b2]=gauss(A,b)
n=size(A,1);
m=size(A,2);
if det(A)==0
    disp('gauss method can not be applied')
else
if n==m
    for i=1:n-1
        if A(i, i) == 0
            for k = i+1:n
                if A(k, i) ~= 0
                    A([i, k], :) = A([k, i], :);
                    b([i, k]) = b([k, i]);
                    break;
                end
            end
        end
         for j=i+1:n
            c=A(j,i)/A(i,i);
            A(j,:)=A(j,:)-c*A(i,:);
            b(j)=b(j)-c*b(i);
        end
    end
    A2=A
    b2=b
    x=zeros(n,1);
    x(n,1)= b(n)/A(n,n);
    for i=n-1:-1:1
    sum = 0;
    for k=i+1:n
        sum=sum+A(i,k)*x(k);
    end
    x(i)=(b(i)-sum)/A(i,i);
    end
else
    disp ('la matice nest pas carrée')
end
end
end
```

مشكلة المرتكز القريب من الصفر

تفشل طريقة غوص في تحديد الحل الدقيق لجملة المعادلات إذا كان المرتكز صفرا أو رقما صغيرا جدا قريبا من الصفر. إذا كان المرتكز صفرا فإن القسمة عليه تؤدي إلى خطأ، لأن القسمة على صفر غير محددة، وإذا كان المرتكز رقما صغيرا جدا فإن القسمة عليه تؤدي إلى أخطاء تقريب كبيرة.

مثال 1.2.2. باستخدام طريقة غوص جد حل لجملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} 0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001 \\ 1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000 \end{cases}$$

المرتكز الأول في هذه الجملة هو $a_{11} = 0.0003$ وهو قريب جدا من الصفر
لدينا: $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ ومنه: $m_{21} = \frac{1}{0.0003} = 3333.33 \simeq 3333$
بتطبيق خوارزمية غوص نحصل على جملة المعادلات التالية :

$$\begin{cases} 0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001 \\ -9999.0x_2 = -6665 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية نجد : $x_2 = 0.667$ بالتعويض في المعادلة الأولى نجد : $x_1 = -3$
وهو ليس الحل الدقيق للجملة إذ يحقق المعادلة الأولى فقط.
ومنه نستنتج أن المرتكزات القريبة من الصفر تؤدي بنا إلى حلول خاطئة لجملة المعادلات، لذا يجب إستخدام إحدى الطرق التالية:

المرتكز الجزئي

المثال السابق يوضح الصعوبات التي تنشأ عندما يكون $a_{kk}^{(k)}$ صغير جدا بالنسبة لـ $a_{ij}^{(k)}$، من أجل $k \leq i, j \leq n$، لتجنب هذه المشكلة يتم تغيير المرتكز عن طريق إختيار العنصر $a_{pq}^{(k)}$ ذو القيمة المطلقة الأكبر كمرتكز و تبديل الصفوف k و p حيث: $|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$.
تعمل طريقة المرتكز الجزئي كالتالي:

في المرحلة الأُولى من الإزالة يتم البحث في العمود الأول من المصفوفة عن أكبر

عنصر من حيث القيمة المطلقة ويتم إحضاره كمرتكز أول عن طريق تبديل الصف الأول للمصفوفة (المعادلة الأُولى) مع الصف (المعادلة) التي تحتوي على أكبر عنصر من حيث القيمة المطلقة. في المرحلة الثانية من الحذف يتم البحث في العمود الثاني عن أكبر عنصر من حيث القيمة المطلقة، بين عناصر $n-1$ تاركا العنصر الأول، ويتم إختيار هذا العنصر كمرتكز ثاني عن طريق تبديل الصف الثاني للمصفوفة مع الصف اللاحق الذي يحتوي على أكبر عنصر من حيث القيمة المطلقة. تستمر هذه العملية حتى يتم الحصول على الجملة المثلثية العلوية.

مثال 1.2.3. باستخدام طريقة الحذف لغوص بالمرتكز الجزئي جد حل جملة المعادلات التالية :

$$\begin{cases} 0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001 \\ 1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000 \end{cases}$$

نقوم أولا بالبحث عن المرتكز :

$$\max\{|a_{11}^{(1)}|, |a_{21}^{(1)}|\} = \max\{0.0003, 1\} = 1 = a_{21}^{(1)}$$

ومنه نقوم بتبديل السطر الأول مع السطرالثاني وتصبح جملة المعادلات كالتالي :

$$\begin{cases} 1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000 \\ 0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001 \end{cases}$$

وعليه : $m_{21} = \frac{0.0003}{1} = 0.0003$.

بتطبيق خوارزمية غوص نحصل على الجملة المكافئة التالية:

$$\begin{cases} 1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000 \\ \qquad\qquad +2.9997x_2 = 1.9998 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية نجد : $x_2 = 0.66... = \frac{2}{3}$.

بتعويض قيمة x_2 في المعادلة الأُولى نجد $x_1 = 0.33... = \frac{1}{3}$ وهو الحل الدقيق للجملة .

خوارزمية *MATLAB*

```
function [A2, b2, x] = gausspivol(A, b, eps)
    n = size(A, 1);
    m = size(A, 2);
    % Check if A is a square matrix
    if n ~= m
        error('Matrix A must be square.');
    else
    for i = 1:n-1
        % Check if the diagonal element is close to zero
     if abs(A(i, i)) < eps
            [max_val, lmax] = max(abs(A(i:n, i)));
            lmax = lmax + i - 1;
            if max_val ~= 0
                A([i lmax], :) = A([lmax i], :);
                b([i lmax]) = b([lmax i]);
            else
                error('Matrix is singular or nearly singular.')
            end
        % Perform Gaussian elimination
        for j = i+1:n
            c = A(j, i) / A(i, i);
            A(j, :) = A(j, :) - c * A(i, :);
            b(j) = b(j) - c * b(i);
        end
    end
    % Back substitution
    x = zeros(n, 1);
    x(n) = b(n) / A(n, n);
    for i = n-1:-1:1
        sum = 0;
        for k = i+1:n
            sum = sum + A(i, k)*x(k);
        end
        x(i) = (b(i) - sum) / A(i, i);
    end
    A2 = A;
    b2 = b;
    x;
    end
    end
end
```

المرتكز الكلي

في طريقة غوص، يشار إلى المرتكز الكلي على أنه العنصر الذي له أكبر قيمة مطلقة في مصفوفة المعاملات وليكن $a_{i_0 j_0}$ حيث :

$$|a_{i_0 j_0}^{(k)}| = \max_{k \leq i,j \leq n} |a_{ij}^{(k)}|.$$

هذه الطريقة لا تتطلب فقط تبادل الصفوف بل تبادل الأعمدة أيضا ومنه تبادل مواضع المتغيرات، ومن المحتمل أن يتغير موضع المتغير عدة مرات أثناء هذه العملية، لذا يجب تتبع مواضع المتغيرات بدقة.

مثال 1.2.4. باستخدام طريقة الحذف لغوص بالمرتكز الكلي جد حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} 0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001 \\ 1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000 \end{cases}$$

والتي تكافئ الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{pmatrix} 0.0003 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0001 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نحدد المرتكز أولا : $\max\{|0.0003|, |1|, |3|, |1|\} = 3 = a_{12}$.

إذن نقوم بتبديل العمود الأول مع العمود الثاني من المصفوفة فنتحصل على :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0.0003 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0001 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وعليه : $m_{21} = \frac{1}{3} = 0.33...$.

بتطبيق خوارزمية غوص نجد:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0.0003 \\ 0 & 0.9999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.0001 \\ 0.333 \end{pmatrix}$$

من المعادلة الثانية: $0.9999x_1 = 0.333$ نجد $x_1 = 0.33... = \frac{1}{3}$.

بتعويض قيمة x_1 في المعادلة الأولى نجد $x_2 = \frac{2}{3}$ وهو الحل الدقيق للجملة.

خوارزمية $MATLAB$

```
function [A2, b2,x] = gausspivo2(A, b,eps)
    n = size(A, 1);
    m = size(A, 2);
    if n ~= m
        error('Matrix A must be square.');
    end
    for i = 1:n-1
        if abs(A(i, i)) < eps
            [lmax, cmax] = find(abs(A(i:n, i:n)) == max(max(abs(A(i:n, i:n)))));
            lmax = lmax + i - 1;
            cmax = cmax + i - 1 ;
            if A(lmax, cmax) ~= 0
                A([i lmax], :) =A([lmax i], :);
                b([i lmax]) = b([lmax i]);
                A(:, [i cmax]) = A(:, [cmax i]);
            else
                error('Matrix is singular or nearly singular.');
            end
        end
        for j = i+1:n
            c = A(j, i) / A(i, i);
            A(j, :) = A(j, :) - c * A(i, :);
            b(j) = b(j) - c * b(i);
        end
    end
    x = zeros(n, 1);
    x(n) = b(n) / A(n, n);
    for i = n-1:-1:1
        sum = 0;
        for k = i+1:n
            sum = sum + A(i, k) * x(k);
        end
        x(i) = (b(i) - sum) / A(i, i);
    end
    A2 = A;
    b2 = b;
end
```

1.2.2 طريقة غوص جوردن

تسمح هذه الطريقة بتغيير جملة المعادلات $AX = B$ إلى جملة مكافئة لها $IX = D$ حيث I مصفوفة الوحدة، في حين أن D حل جملة المعادلات.

خوارزمية غوص جوردن

تتشابه هذه الطريقة إلى حد كبير مع طريقة غوص، إذ أنها فكرة جديدة مضافة إليها.

في الخطوة k من خوارزمية الحذف نختار المرتكز كما هو موضح سابقا ثم نعرف :

$$a_{kj}^{(k+1)} = \frac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \qquad ; j = k, .., n$$
$$b_k^{(k+1)} = \frac{b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

ونقوم بإزالة x_k في المعادلات الموجودة أعلى و أسفل المعادلة k .
نعرف $a_{ij}^{(k+1)}$ و $b_i^{(k+1)}$ على النحو التالي :

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k+1)}$$
$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - a_{(ik)}^{(k)} b_k^{(k+1)}$$

من أجل: $i = 1, ..., n, j = k, ..., n$ و $i \neq k$.
ومنه عملية الإنتقال من $AX = B$ إلى $IX = D$ تتم وفق الخوارزمية:

$$\begin{cases} l_k^{(k+1)} = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} l_k^{(k)} \\ l_i^{(k+1)} = l_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} l_k^{(k)} & , i = \overline{1:n} \wedge i \neq k \end{cases}$$

مثال 1.2.5. باستخدام طريقة غوص جوردن جد حل جملة المعادلات التالية :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow l_1^{(1)} \\ \longrightarrow l_2^{(1)} \\ \longrightarrow l_3^{(1)} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow l_1^{(2)} = l_1^{(1)} \\ \longrightarrow l_2^{(2)} = l_2^{(1)} - 3l_1^{(1)} \\ \longrightarrow l_3^{(2)} = l_3^{(1)} - 3l_1^{(1)} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 5 & -\frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{-11}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow l_1^{(3)} = l_1^{(2)} - \frac{2}{5} l_2^{(2)} \\ \longrightarrow l_2^{(3)} = \frac{1}{5} l_2^{(2)} \\ \longrightarrow l_3^{(3)} = l_3^{(2)} - \frac{7}{5} l_2^{(2)} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{65}{11} \\ -\frac{5}{11} \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow l_1^{(4)} = l_1^{(3)} - \frac{1}{11} l_3^{(3} \\ \longrightarrow l_2^{(4)} = l_2^{(3)} - \frac{2}{11} l_3^{(3)} \\ \longrightarrow l_3^{(4)} = \frac{-5}{11} l_3^{(3)} \end{matrix}$$

إذن :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11} \\ x_2 = -\frac{65}{55} \\ x_3 = -\frac{5}{11} \end{cases}$$

ملاحظة 2.2.1

-تمتع طريقة غوص جوردن بعدة مزايا منها :

-الكفاءة: طريقة غوص جوردن هي طريقة فعالة لحل جمل المعادلات الخطية، يمكن إستخدامها لحل جمل المعادلات الخطية بأي عدد من المجاهيل.

-الوضوح: طريقة غوص جوردن طريقة واضحة و مباشرة بسيطة نسبيا للفهم والتطبيق.

-تمككنا من حساب المصفوفة العكسية لجملة المعادلات وذلك من خلال الإنتقال من الجملة $A^{(n)}X = I_n$ إلى الجملة $I_nX = A^{-1}$.

خوارزمية $MATLAB$

```
function X= methodgaussjordan(A,b)
[m,n]=size(A);
 if m~=n
disp('no solution,you have to intrude a square matrix')
 return
 end
 D=det(A);
 if D==0
 disp('no solution,determinant equal to zero')
 return
 end
 for i=1:n
 if A(i, i) == 0
     for k = i+1:n
         if A(k, i) ~= 0
             A([i, k], :) = A([k, i], :);
             b([i, k]) = b([k, i]);
           break;
         end
     end
 end
  A(i,:)=A(i,:)/A(i,i);
 b(i)=b(i)/A(i,i);
 for j=1:n
 if j~=i
 A(j,i:n)=A(j,i:n)-A(i,i:n)*A(j,i);
  b(j)=b(j)-b(i)*A(j,i);
end
end
end
X=b;
end
```

1.2.3 تفكيك LU

تعمل طريقة LU على تحليل المصفوفة A إلى جداء مصفوفتين مثلثيتين $A = LU$ حيث L مثلثية سفلية (L نسبة إلى "$Lower$" باللغة الإنجليزية) و U مثلثية علوية (U نسبة إلى "$Upper$" باللغة الإنجليزية) وبمجرد إنشاء هذا التحليل فإن حل الجملة الخطية $AX = B$ يكافئ حل الجملتين الخطيتين $LY = B$ ثم $UX = Y$.

تعريف 2.1.1

نسمي تفكيك LU لمصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ كل مصفوفة A يمكن كتابتها على الشكل $A = LU$ مع U مثلثية علوية، و L مثلثية سفلية مع قطر واحدي .

نظرية 1.2.1

من أجل كل مصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
1-تفكيك LU لـ A موجود إذا وفقط إذا كانت المحددات الصغرى غير معدومة أي $detA(1:k,1:k) \neq 0$ من أجل $k = 1, ..., n$.
2-إذا كان تفكيك LU موجود فهو وحيد.

برهان لنثبت صحة الفرضية الأولى، إذا كان $A = LU$ فمن السهل أن نرى أنّ:
$A(1:k,1:k) = L(1:k,1:k)U(1:k,1:k)$ **بحيث:** $detA(1:k,1:k) = U_{11}...U_{kk}$.
بما أن $A \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$، لدينا: $detA = U_{11}...U_{nn} \neq 0$.
إذن: $detA(1:k,1:k) \neq 0$.
هذا يثبت أن الشرط $detA(1:k,1:k) \neq 0$ ضروري.
لإثبات أنها كافية، نستعمل البرهان بالتراجع.

يمكن تنفيذ الخطوة الأُولى من الحذف لأن : $a_{11} = detA(1:1,1:1) \neq 0$. لنفترض أنه تم تنفيذ $k-1$ خطوة بنجاح، مما أدى بنا إلى التفكيك :

$$A = L\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1k} & u_{1k+1} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & u_{kk} & u_{kk+1} & \cdots & u_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & v_{k+1k+1} & \cdots & v_{k+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & v_{nk+1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

حيث L مصفوفة مثلثية سفلية ذات قطر واحدي، للمتابعة في تنفيذ الخوارزمية يجب التأكد من أن: $v_{k+1\ k+1} \neq 0$.
نلاحظ أن:

$$A(1:k+1,1:k+1)=L(1:k+1,1:k+1)\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1k} & u_{1k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & u_{kk} & u_{kk+1} \\ 0 & \cdots & 0 & v_{k+1k+1} \end{pmatrix}$$

بحيث: $detA(1:k+1,1:k+1)=u_{11}...u_{kk}v_{k+1\ k+1}$.

بما أن: $detA(1:k+1,1:k+1)\neq 0$ فإنه كذلك بالنسبة لـ v_{k+1k+1}.

-يبقى إثبات أن التفكيك LU وحيد:

ليكن $A=L_1U_1=L_2U_2$ ، بما أن A قابلة للقلب، فإن المصفوفات L_i و U_i قابلة للقلب أيضا و: $L_2^{-1}L_1=U_2U_1^{-1}$.

فنتحصل من اليسار على مصفوفة مثلثية سفلية ذات قطر واحدي، ومن اليمين على مصفوفة مثلثية علوية، المصفوفة الوحيدة التي تمتلك هاتين الصفتين هي I_n (مصفوفة الوحدة) ومن ثم فإن : $L_1=L_2$ و $U_1=U_2$. ■

خوارزمية تفكيك LU

من خوارزمية غوص ينتج لنا مصفوفة مثلثية علوية و لتكن U نعرفها كالتالي:

$$U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

يمكن ربط هذه المصفوفة المثلثية العلوية U بالمصفوفة A كمايلي:

$$LU=A. \tag{2.1}$$

حيث L مصفوفة مثلثية سفلية عناصر قطرها 1، التعبير العام عنها هو :

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

وعليه يمكن التعبير عن المعادلة (2.1) على النحو التالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

حيث : $det(A) = det(L)det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$ لأن : $det(L) = 1$.

تنص جملة المعادلات (3.1) على أن المصفوفة A يمكن تفكيكها إلى مصفوفتين مثلثيتين L و U. يمكن تحديد هذه المصفوفات دون إستخدام طريقة الحذف لغوص، عن طريق إجراء ضرب المصفوفتين L و U في المعادلة (3.1) ومساواة المعادلات الناتجة مع المصفوفة المقابلة A، على النحو التالي:

يؤدي ضرب الصف الأول من L مع العمود الأول من U إلى القيمة التالية:

$1 \times u_{11} = a_{11}$

وبالتالي :
$$\begin{cases} u_{11} = a_{11} \\ u_{12} = a_{12} \\ u_{12} = a_{12} \\ \vdots \\ u_{1n} = a_{1n} \end{cases}$$
شرط أن يكون : $u_{11} = a_{11} \neq 0$.

نواصل عملية الضرب فنتحصل على :

$$\begin{cases} l_{21}u_{11} = a_{21} & \Longrightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ l_{31}u_{11} = a_{31} & \Longrightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \\ & \vdots \\ l_{n1}u_{11} = a_{n1} & \Longrightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}} = \frac{a_{n1}}{a_{11}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{21}u_{12}+u_{22}=a_{22} & \Longrightarrow u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12} \\ l_{21}u_{13}+u_{23}=a_{23} & \Longrightarrow u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13} \\ & \vdots \\ l_{21}u_{1n}+u_{2n}=a_{2n} & \Longrightarrow u_{2n}=a_{2n}-l_{21}u_{1n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}=a_{32} \Longrightarrow l_{32}=\frac{a_{32}-l_{31}u_{12}}{u_{22}} \\ l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22}=a_{42} \Longrightarrow l_{42}=\frac{a_{42}-l_{41}u_{12}}{u_{22}} \\ \vdots \\ l_{n1}u_{12}+l_{n2}u_{22}=a_{n2} \Longrightarrow l_{n2}=\frac{a_{n2}-l_{n1}u_{12}}{u_{22}} \end{cases}$$

حيث $u_{22}\neq 0$ ، $n>2$.

وهكذا تكون :

$$\begin{cases} l_{ji}=\frac{1}{u_{ii}}(a_{ji}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{jk}u_{ki}) \\ u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj} \end{cases}$$

حيث: $i=\overline{1:n}$ و $j=\overline{2:n}$.

لحل جملة المعادلات $AX=B$ نتبع مايلي:

$$AX=b \Longleftrightarrow LUX=b \Longleftrightarrow \begin{cases} LY=B \\ UX=Y \end{cases}$$

أي نقوم بحل الجملتين $LY=B$ و $UX=Y$.

الجملة $LY=B$ حلها Y معطى بـ:

$$\begin{cases} y_1=\frac{b_1}{l_{11}} \\ y_i=\frac{1}{l_{ii}}(b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k) & ;i=2,...,n \end{cases}$$

بعد حساب Y نعوضه في الجملة: $UX=Y$ ونقوم بإيجاد قيم الشعاع X حيث:

$$\begin{cases} x_n=\frac{y_n}{u_{nn}} \\ x_i=y_i-\sum_{k=i+1}^{n}u_{ik}x_k & ;i=n-1,...,1 \end{cases}$$

ملاحظة 2.3.1

هناك صنفان من تفكيك LU هما:
-تفكيك كروت $"Crout"$: تكون فيه المصفوفة U علوية في حين L مصفوفة مثلثية سفلية واحدية.
-تفكيك دوليتل $"Doolitel"$: تكون فيه المصفوفة U علوية واحدية في حين L مصفوفة مثلثية سفلية.

مثال 1.2.6. باستعمال طريقة كروت حل جملة المعادلات التالية :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

تكافئ الشكل المصفوفي $AX = b$ التالي :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نحسب أولا المحددات الصغرى للمصفوفة A لدينا:

$$det(A_1) = |\, 1 \,| = 1 \neq 0 \;\; ; \;\; det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \;\; ; \;\; det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$$

بما أن $det(A_k) \neq 0$ من أجل $k = \overline{1:3}$ فإن المصفوفة A تقبل تفكيك LU ومنه :

$$A = LU \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

وعليه :

$$\begin{cases} u_{11} = 1 \\ u_{12} = -2 \\ u_{13} = 1 \\ l_{21}u_{11} = 3 \Longleftrightarrow l_{21} = 3 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} = -1 \Longleftrightarrow u_{22} = 5 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} = 1 \Longleftrightarrow u_{23} = -2 \\ l_{31}u_{11} = 3 \Longleftrightarrow l_{31} = 3 \\ l_{31}l_{12} + l_{32}u_{22} = 1 \Longleftrightarrow l_{32} = 7/5 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = -2 \Longleftrightarrow u_{33} = -11/5 \end{cases}$$

إذن :

$$A = LU \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 7/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -11/5 \end{pmatrix}$$

الآن باستخدام التعويض التراجعي نحل أولا جملة المعادلات $LY = B$:

$$LY = B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 7/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نجد : $\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -5 \\ y_3 = 1 \end{cases}$

ثم نقوم بإيجاد قيمة الشعاع X بحل جملة المعادلات $UX = Y$ باستخدام التعويض التراجعي :

$$UX = Y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -11/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نجد : $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11} \\ x_2 = -\frac{65}{55} \\ x_3 = -\frac{5}{11} \end{cases}$

خوارزمية *MATLAB*

```
function [L,U]=decompositionLU(A)
    [m,n]=size(A);
  for k = 1:n
  if det(A(1:k, 1:k)) == 0
 disp(['LU method can not be applied because the leading '
    'principal minor of order ',num2str(k), ' is zero.'])
  L = [];
  U = [];
  return;
  end
  end
if n==m
L=zeros(n,n);
U=zeros(n,n);
for i=1:n
for j=1:i-1
L(i,j)=A(i,j);
for k=1:j-1
L(i,j)=L(i,j)-L(i,k)*U(k,j);
end
L(i,j)=L(i,j)/U(j,j);
end
for j=i:n
U(i,j)=A(i,j);
for k=1:i-1
U(i,j)=U(i,j)-L(i,k)*U(k,j);
end
end
end
for i=1:n
    L(i,i)=1;
end
else
  disp ('la matice nest pas carrée')
end
end
```

```
function y=calcul_y(L,b)
n=length(b);
y=zeros(n,1);
for i=1:n
y(i)=b(i);
for k=1:i-1
y(i)=y(i)-L(i,k)*y(k);
end
end
end
```

```
function x=calcul_x(U,y)
n=length(y);
x=zeros(n,1);
for i=n:-1:1
x(i)=y(i);
for k=i+1:n
x(i)=x(i)-U(i,k)*x(k);
end
x(i)=x(i)/U(i,i);
end
```

1.2.4 طريقة شولسكي

تستعمل هذه الطريقة في حل جمل المعادلات الخطية ذات مصفوفة متناظرة ومعرفة موجبة .

نظرية 1.2.2

إذا كانت A مصفوفة متناظرة و معرفة موجبة، يوجد مصفوفة مثلثية سفلية وحيدة ذات قيم قطرية موجبة ولتكن L بحيث : $A = LL^T$.

برهان نفرض أن $LL^T = MM^T$، حيث: $l_{ii} > 0$ و $m_{ii} > 0$ من أجل كل i . لدينا : $M^{-1}L = M^TL^{-T}$ والتي هي مصفوفة مثلثية سفلية (من اليسار) و مثلثية علوية (من اليمين) في نفس الوقت، وعليه فهي مصفوفة قطرية.

قيم عوامل القطر هي : $m_{ii}^{-1}l_{ii} = m_{ii}l_{ii}^{-1} = 1$ من شرط الإيجابية.
وعليه $M^{-1}L = M^TL^{-T} = I_n$ إذن: $M = L$.
نثبت وجود هذا التفكيك باستعمال البرهان بالتراجع على n:
من أجل $n = 1$ لدينا: $L = \sqrt{a_{11}}$.
نفرض أن تفكيك شولسكي موجود من أجل كل مصفوفة معرفة موجبة $(n-1)(n-1)$.
نكتب : $A = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a \\ a^T & a_{nn} \end{pmatrix}$ حيث : $a = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1\,n} \end{pmatrix}$.
ليكن تفكيك شولسكي لـ A_{n-1} هو:

$$A_{n-1} = L_{n-1}L_{n-1}^T.$$

لدينا :

$$A = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ u^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n-1}^T & u \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

باعتبار أن : $L_{n-1}u = a$ و $u^Tu + \alpha\beta = a_{nn}$، تفكيك شولسكي لـ A موجود إذا كان $\alpha = \beta > 0$ وهذا ممكن إذا كان $\alpha\beta > 0$.
المساواة أعلاه تثبت أن:

$$detA = detL_{n-1}\alpha detL_{n-1}^T\beta.$$

من الفرضية $detA > 0$ و $detL_{n-1} > 0$ فإن $\alpha\beta > 0$. ■

خوارزمية تفكيك شولسكي

نتبع نفس خطوات خوارزمية تفكيك LU، لتكن المصفوفة المتناظرة A ذات 3 أسطر و 3 أعمدة حيث : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.
نعرف تفكيك شولسكي للمصفوفة A كالتالي :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}.$$

نقوم بعملية الضرب فنجد:

$$\begin{cases} a_{11} = l_{11}^2 \Longrightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ a_{21} = l_{21}l_{11} \Longrightarrow l_{21} = a_{21}/l_{11} \\ a_{31} = l_{31}l_{11} \Longrightarrow l_{31} = a_{31}/l_{11} \end{cases}$$

عندما نكمل حساب العمود الأول مع العلم أن l_{11} لاتساوي الصفر، ننتقل إلى

العمود الثاني فنجد : $\begin{cases} a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 \Longrightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\ a_{32} = l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} \Longrightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} \end{cases}$

في العمود الثالث تحصل على : $a_{33} = l_{31}^2 + l_{33}^2 \Longrightarrow l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2}$

في الحالة العامة نستنتج الخوارزمية التالية :

المرتكز الأول : $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$.

عناصر القطر: $k = \overline{2:n}$; $l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$.

العمود الأول : $i = \overline{2:n}$; $l_{i1} = a_{i1}/l_{11}$.

باقي الأعمدة: $i = \overline{k+1:n}$; $l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}l_{kj})/l_{kk}$.

ملاحظة 2.4.1

إذا كانت A مصفوفة متناظرة و معرفة موجبة فإن حل جملة المعادلات وفق تفكيك شولسكي $AX = LL^TX = B$ تتطلب حل الجملتين المثلثيتين $LY = B$ و $L^TX = Y$.

مثال 1.2.7. باستخدام طريقة شولسكي حل جملة المعادلات التالية :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 8x_2 + 22x_3 = 6 \\ 3x_1 + 22x_2 + 82x_3 = -10 \end{cases}$$

تكافئ الشكل المصفوفي $AX = B$ التالي :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 22 \\ 3 & 22 & 82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

بما أن $A^T = A$ فالمصفوفة A متناظرة، نحسب الآن المحددات الصغرى للمصفوفة A، لدينا:

$$det(A_1) = \mid 1 \mid = 1 \neq 0 \;\; ; \;\; det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \;\; ; \;\; det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 22 \\ 3 & 22 & 82 \end{vmatrix} = 36 \neq 0$$

بما أن $det(A_k) \neq 0$ من أجل $k = \overline{1:3}$ فإن المصفوفة A معرفة موجبة، ومنه A تقبل تفكيك شولسكي.

وعليه :
$$A = LL^T \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 22 \\ 3 & 22 & 82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

باستخدام خوارزمية تفكيك شولسكي السابقة نجد :

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1 \\ l_{21} = a_{21}/l_{11} = 2/1 = 2 \\ l_{31} = a_{31}/l_{11} = 3/1 = 3 \\ l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{8 - 2^2} = 2 \\ l_{32} = (a_{32} - l_{31}l_{21})/l_{22} = (22 - 2(3))/2 = 8 \\ l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{82 - 3^2 - 8^2} = \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$

ومنه: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ و $L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

لحل الجملة $Ax = B$ نحل أولا جملة المعادلات $LY = B$:

$$LY = B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

باستخدام التعويض التراجعي نجد :
$$\begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = -3 \end{cases}$$

ثم نقوم بإيجاد قيمة الشعاع X بحل جملة المعادلات $L^TX = Y$ باستخدام التعويض

التراجعي:

$$L^TX = Y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

1.2.5 خوارزمية $MATLAB$

```
function x = cholesky(A, b)
    % Check if A is symmetric and positive definite
    is_symmetric = issymmetric(A);
    is_positive_definite = all(eig(A) > 0);
    % Display whether A is symmetric and positive definite
    if is_symmetric && is_positive_definite
        disp('A is symmetric and positive definite.');
    else
        disp('A is not symmetric and/or not positive definite.');
        x = [];
        return;
    % Exit the function if A is not symmetric and/or not positive definite
    end
    % Calculate the Cholesky decomposition of A
    L = chol(A);
    % Solve the system of equations AX = b
    x = L' \ (L \ b);
end
```

1.3 الطرق غير المباشرة لحل جمل المعادلات الخطية

إن طرق الحل المباشرة فعالة للغاية فهي توفر الحل الدقيق للجملة الخطية ومع ذلك فإنها تتطلب قدرا كبيرا من مساحة ذاكرة الحاسوب، لأنها تتطلب تخزين المصفوفة بالكامل في الذاكرة الرئيسية للحاسوب، حيث أنه عندما نتعامل مع جملة معادلات كبيرة جدا، فإننا نسعى إلى إستخدام طرق تتطلب أقل قدر ممكن من الذاكرة، في هذه الحالة من المفيد إستخدام الطرق التكرارية حيث تعطي حلا تقريبيا بتكلفة أقل من الطرق المباشرة. الفكرة الأساسية للطرق التكرارية هي بناء متتالية متقاربة $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ من الأشعة، تحقق :

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} X^{(k)} = X^*.$$

حيث X^* حل جملة المعادلات $AX=b$، في هذا الجزء نقدم بعض الطرق التكرارية، وهي طريقة جاكوبي، طريقة غوص سايدل . في هذه الطرق تحقق المتتالية $X^{(k)}$ علاقة تكرار من الشكل التالي:

$$\forall k \in \mathbb{N}, X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C.$$

حيث B مصفوفة مربعة تسمى مصفوفة تكرار الطريقة، و C شعاع مرتبط بالمصفوفة A وبالعنصر الثاني b لجملة المعادلات المراد حلها.

1.3.1 مبدأ الطرق التكرارية

نفترض أن المصفوفة A تم تقسيمها إلى الفرق بين مصفوفتين على الشكل التالي :

$$A = K - M \tag{4.1}$$

حيث K مصفوفة قابلة للقلب.
يمكننا تحويل $AX=b$ باستخدام (4.1) على النحو التالي :

$$KX = MX + b$$
$$X = K^{-1}MX + K^{-1}b$$

وعليه فإن الطريقة التكرارية، هي كالتالي :
-نختار شعاعا عشوائيا $X^{(0)}$.
-من أجل $n = 0, 1, 2, ...$,نحسب :

$$X^{(n+1)} = K^{-1}MX^{(n)} + K^{-1}b \tag{5.1}$$

لتكن :

$$A = D - E - F$$

حيث :

$$D = (d_{ij}) \quad , \quad E = (e_{ij}) \quad , \quad F = (f_{ij}) \tag{6.1}$$

و

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases} \quad ; e_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & ; i > j \\ 0 & ; i \leq j \end{cases} \quad ; f_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & ; i < j \\ 0 & ; i \geq j \end{cases}$$

إذا افترضنا $a_{ii} \neq 0$ من أجل $i = \overline{1:n}$ فإن D و $D - E$ قابلة للقلب، ويمكننا إختيار على سبيل المثال $K = D$ أو $K = D - E$.

ملاحظة 3.1.1

1- يعتمد معيار التوقف بشكل عام على الخطأ النسبي بين $X^{(n)}$ و $X^{(n+1)}$ أي:

$$\frac{\| X^{(n+1)} - X^{(n)} \|}{\| X^{(n)} \|} < \varepsilon \tag{7.1}$$

أو على الخطأ المطلق إذا كان $\|X^{(n+1)}\|$ صغيراً جداً.
2-تتقارب الطرق التكرارية إذا كان $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^n, X^{(n)} \longrightarrow X^*$ لما $n \longrightarrow +\infty$ حيث X^* حل لجملة المعادلات $AX = b$.

1.3.2 خوارزمية الطرق التكرارية

لتكن جملة المعادلات الخطية المكونة من ثلاثة معادلات $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ و $b \in \mathbb{R}^3$

$$AX = b \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

حيث : $(a_{ii})_{i=1,2,...,n} \neq 0$.
نقوم باستخراج x_1 من المعادلة الأولى، x_2 من المعادلة الثانية، x_3 من المعادلة الثالثة، تحصل على:

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} = f(x_2, x_3) \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} = g(x_1, x_3) \\ x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} = h(x_1, x_2) \end{cases} \quad (8.1)$$

وليكن: $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^t \in \mathbb{R}^3$، ومنه تكون خوارزمية طريقة جاكوبي وطريقة غوص سايدال كالتالي:

1.3.3 طريقة جاكوبي

تمثل في وضع $K = D$ و $M = E + F$، حيث: $A = K - M$.
إنطلاقا من (8.1) نقوم بالعملية التكرارية التالية:
المرحلة الأولى:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = f(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = g(x_1^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = h(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \end{cases} \longrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

المرحلة الثانية:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = f(x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = g(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} = h(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{cases} \longrightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

وبما أن:

$$K^{-1} = D^{-1} = diag(1/a_{11}, 1/a_{22}, 1/a_{33}...1/a_{ii})$$

يمكننا كتابة المساواة (5.1) بالطريقة التالية:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1;j\neq i}^{N} a_{ij}x_j^{(n)}) \qquad ; 1 \leq i \leq N \quad (9.1)$$

العلاقة (9.1) تسمح بحساب المركبات $x_i^{(n+1)}$ للشعاع $X^{(n+1)}$ إنطلاقا من المركبات $x_i^{(n)}$ للشعاع $X^{(n)}$.
المصفوفة J المعرفة بـ:

$$J = K^{-1}M = D^{-1}(E+F) \tag{10.1}$$

تسمى مصفوفة جاكوبي .

مثال 1.3.1. جد حل جملة المعادلات التالية بطريقتين:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

حيث: $X^{(0)} = (0,0,0)^t$

• الطريقة الأولى:
طريقة جاكوبي في هذه الحالة تكتب على الشكل:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}(2 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(17 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{6}(-18 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)}) \end{cases}$$

بما أن : $X^{(0)} = (0,0,0)^t$ نجد:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{3}(2 - 0 + 0) = \frac{2}{3} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(17 - 0 - 0) = \frac{17}{5} \\ x_3^{(1)} = -\frac{1}{6}(-18 - 0 + 0) = 3 \end{cases}$$

التكرار الثاني يعطي :

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{3}(2 - \frac{17}{5} + 3) = \frac{8}{15} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(17 - \frac{2}{3} - 2(3)) = \frac{31}{15} \\ x_3^{(2)} = -\frac{1}{6}(-18 - 2(\frac{2}{3}) + \frac{17}{5}) = 2.655556 \end{cases}$$

وبالتالي:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.000000	0.000000	0.000000
1	0.666667	3.400000	3.000000
2	0.533333	2.066667	2.655556
3	0.862963	2.231111	2.833333
4	0.867407	2.094074	2.915802
5	0.940576	2.060198	2.940123
6	0.959975	2.035835	2.9701559
7	0.978108	2.019941	2.980686
8	0.986915	2.012104	2.989379
9	0.992425	2.006865	2.993621
10	0.995585	2.004067	2.996331

إذن النتائج تتقارب نحو الحل $(1,2,3)^t$.

• **الطريقة الثانية:**

باستخدام الشكل المصفوفي التالي: $X^{(k+1)} = JX^{(k)} + K^{-1}b$

نقوم أولا بحساب مصفوفة جاكوبي: $J = D^{-1}(E+F)$

لدينا: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

وبالتالي: $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$,$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

إذن: $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ ولدينا: $E + F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

وبالتالي:

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -5 & 0 & -10 \\ 12 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

من جهة أخرى لدينا: $K^{-1}b = D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{17}{5} \\ -3 \end{pmatrix}$

إذن: $X^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -5 & 0 & -10 \\ 12 & -6 & 0 \end{pmatrix} X^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{17}{5} \\ -3 \end{pmatrix}$

ثم باستخدام هذا الشكل نقوم بإيجاد الحل، بإعطاء قيمة إبتدائية $X^{(0)}$ ونتوقف عن الحساب لما تحقق المتباينة (7.1).

ملاحظة 3.1.1

في طريقة جاكوبي يجب أن تكون المرتكزات a_{ii} غير معدومة وإلا نقوم بتغيير الأسطر ثم إتمام خطوات الحل .

خوارزمية *MATLAB*

```
function x = jacobi(A, b, tol, max_iter)
    % Calcul de la matrice itérative T_jacobi
    [m, n] = size(A);
    D = diag(diag(A));
    L = tril(A, -1);
    U = triu(A, 1);
    T_jacobi = inv(D) * (L + U);
    % Vérification du rayon spectral de T_jacobi
    if max(abs(eig(T_jacobi))) >= 1
    error(['Le rayon spectral de la matrice itérative T_jacobi'
  'est supérieur ou égal à 1, la méthode de Jacobi peut ne pas converger.']);
    end

    % Initialisation de la solution
    x = zeros(size(b));
    % Boucle itérative
    for iter = 1:max_iter
        x_old = x;
        x = T_jacobi * x_old + D \ b; % Formule matricielle itérative
        % Vérification de la convergence
        if norm(x - x_old, inf) < tol
            fprintf('Convergence atteinte après %d itérations.\n', iter);
            return;
        end
    end
  % Si la convergence n'est pas atteinte dans le nombre maximal d'itérations
    warning(['La méthode de Jacobi n''a pas convergé'
    ' dans le nombre maximal d''itérations.']);
end
```

1.3.4 طريقة غوص سايدال

تمثل في وضع $K = D - E$ و $M = F$، حيث: $A = K - M$. إنطلاقا من (8.1) نقوم بالعملية التكرارية التالية:

المرحلة الأولى:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = f(x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = g(x_1^{(1)}, x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = h(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \end{cases} \longrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

المرحلة الثانية:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = f(x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \\ x_2^{(2)} = g(x_1^{(2)}, x_3^{(1)}) \\ x_3^{(2)} = h(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \end{cases} \longrightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

إذن:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(n+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(n)}) \qquad ,1 \leq i \leq N \qquad (11.1)$$

إذا كانت المركبات $(x_i^{(n)})_{1\leq i\leq N}$ من الشعاع $X^{(n)}$ معلومة فإن العلاقة (11.1) تسمح بحساب $x_1^{(n+1)}$، $x_2^{(n+1)}$، $x_3^{(n+1)}$،...، على النحو التالي:

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = \frac{1}{a_{11}}(-\sum_{j=2}^{N} a_{1j}x_j^{(n)} + b_1) \\ x_2^{(n+1)} = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(n+1)} - \sum_{j=3}^{N} a_{2j}x_j^{(n)} + b_2) \\ x_3^{(n+1)} = \frac{1}{a_{33}}(-a_{31}x_1^{(n+1)} - a_{32}x_2^{(n+1)} - \sum_{j=4}^{N} a_{3j}x_j^{(n)} + b_3) \\ \vdots \\ x_n^{(n+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(-\sum_{j=1}^{N-1} a_{nj}x_j^{(n+1)} + b_n) \end{cases}$$

المصفوفة G المعرفة كمايلي:

$$G = K^{-1}M = (D-E)^{-1}F.$$

تسمى مصفوفة غوص سايدال حيث E،F،D معرفة سابقا .

مثال 1.3.2. جد حل جملة المعادلات التالية بطريقتين:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

حيث $X^{(0)} = (0,0,0)^t$ • الطريقة الأولى:

طريقة غوص سايدال في هذه الحالة تكتب على الشكل:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}(2 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(17 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{6}(-18 - 2x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

نلاحظ إختلاف المؤشرات مع طريقة جاكوبي، بداية من $(0,0,0)^t$ نجد أولا :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{3}(2-0-0) = \frac{2}{3} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(17-\frac{2}{3}-0) = \frac{49}{15} \\ x_3^{(1)} = -\frac{1}{6}(-18-2(\frac{2}{3})+\frac{49}{15}) = \frac{241}{90} \end{cases}$$

في التكرار الثاني نجد:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{3}(2-\frac{49}{15}+\frac{241}{90}) = 0.4703704 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(17-0.4703704-2(\frac{241}{90})) = 2.234815 \\ x_3^{(2)} = -\frac{1}{6}(-18-2(0.4703704)+2.234815) = 2.784321 \end{cases}$$

وبالتالي :

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	0.6666667	3.266667	2.677778
2	0.4703704	2.234815	2.784321
3	0.8498354	2.116305	2.930561
4	0.9380855	2.040158	2.972669
5	0.9775034	2.015432	2.989929
6	0.9914991	2.005792	2.996212
7	0.9968277	2.002150	2.998584
8	0.9988115	2.000804	2.999470
9	0.9995553	2.000301	2.999802
10	0.9998335	2.000113	2.999926

إذن النتائج تتقارب نحو الحل $(1,2,3)^t$.

- الطريقة الثانية:

نستخدم الشكل المصفوفي التالي: $X^{(k+1)} = GX^{(k)} + K^{-1}b$

نقوم أولا بحساب مصفوفة غوص سايدال: $G=(D-E)^{-1}F$

لدينا: $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&5&2\\2&-1&-6\end{pmatrix}$

وبالتالي: $F=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\-2&1&0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$

- حساب $(D-E)^{-1}$:

$$(D-E)^{-1}=\frac{1}{det(D-E)}Comt(D-E)^T$$

لدينا: $D-E=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&5&0\\2&-1&-6\end{pmatrix}$

ومنه: $det(D-E)=-90$ و $Comt(D-E)^T=\begin{pmatrix}-30&0&0\\6&-18&0\\-11&3&15\end{pmatrix}$

إذن: $(D-E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{1}{15}&\frac{1}{5}&0\\\frac{11}{90}&-\frac{1}{30}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

وبالتالي:

$$G=(D-E)^{-1}F=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{1}{15}&\frac{1}{5}&0\\\frac{11}{90}&-\frac{1}{30}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{15}&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{11}{90}&\frac{1}{18}\end{pmatrix}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$K^{-1}b=(D-E)^{-1}b=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{1}{15}&\frac{1}{5}&0\\\frac{11}{90}&-\frac{1}{30}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\17\\-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{49}{15}\\\frac{27}{10}\end{pmatrix}$$

إذن:

$$X^{(k+1)}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{15}&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{11}{90}&\frac{1}{18}\end{pmatrix}X^{(k)}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{49}{15}\\\frac{27}{10}\end{pmatrix}$$

ثم باستخدام هذا الشكل نقوم بايجاد الحل بعد إعطاء قيمة إبتدائية $X^{(0)}$ ، ونتوقف عند تحقق المتباينة (7،1).

خوارزمية $MATLAB$

```
function x = gauss_seidel(A, b, tol, max_iter)
    % Calcul de la matrice itérative T_gs
    [m, n] = size(A);
    D = diag(diag(A));
    L = tril(A, -1);
    U = triu(A, 1);
    T_gs = inv(D - L) * U ;
    % Vérification du rayon spectral de T_gs
    if max(abs(eig(T_gs))) >= 1
    error(['Le rayon spectral de la matrice itérative T_gs est supérieur ou'
     'égal à 1,la méthode de Gauss-Seidel peut ne pas converger.']);
    else
    % Initialisation de la solution
    x = zeros(size(b));
    % Boucle itérative
    for iter = 1:max_iter
        x_old = x;
        x = T_gs * x + (D - L) \ b; % Formule matricielle itérative
        % Vérification de la convergence
        if norm(x - x_old, inf) < tol
            fprintf('Convergence atteinte après %d itérations.\n', iter);
            return;
        end
    end
% Si la convergence n'est pas atteinte dans le nombre maximal d'itérations
    warning(['La méthode de Gauss-Seidel '
    'n''a pas convergé dans le nombre maximal d''itérations.'])
    end
end
```

1،3،5 تقارب الطرق التكرارية

الشرط الضروري للتقارب

ليكن $E^{(k)} = X^{(k)} - X^*$ شعاع الخطأ للمرحلة K $(K \in \mathbb{N})$ لدينا:

$$X^* = BX^* + M^{-1}b \tag{12،1}$$

$$X^{(k)} = BX^{(k-1)} + M^{-1}b \qquad (13.1)$$

بطرح (12.1) من (13.1) نجد:

$$X^{(k)} - X^* = B(X^{(k-1)} - X^*) = BE^{(K-1)}$$

إذن: $E^{(K)} = BE^{(K-1)} = B^2E^{(K-2)} = ... = B^KE^{(0)}$ حيث: $E^{(0)} = X^{(0)} - X^*$.

وبالتالي: $X^{(k)} - X^* = B^k(X^{(0)} - X^{(n)})$.

بما أن الطريقة تتقارب إذا كان : $\forall X^{(0)}, \lim_{k\to+\infty} X^{(k)} = X^*$، فإن هذا صحيح إذا كان

$$\lim_{k\to+\infty} B^k = 0 \quad (0 \text{ بالمعنى المصفوفي})$$

والتي تعتبر غير عملية لإيجاد التقارب لذا سنتطرق لفاهيم أخرى تساعدنا على إيجاد التقارب.

تعريف 3.1.1

إذا كانت B مصفوفة مربعة ذات قيم ذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_N$ نسمي نصف القطر الطيفي لـ B:

$$\rho(B) = \max_{1\leq j\leq N} |\lambda_J|$$

نظرية 1.3.1

تتقارب الطرق التكرارية إذا وفقط إذا كان:

$$\rho(K^{-1}M) < 1.$$

توطئة 1.3.1. (العلاقة بين $\rho(B)$ و $\| B \|$)

$$\rho(B) \leq \| B \|_i \qquad (i = 1 \vee 2 \vee \infty)$$

برهان لتكن λ قيمة ذاتية لـ B إذن: $\exists X \in (\mathbb{R}^*)^n, BX = \lambda X$ ومنه:

$$\| BX \|_i = \| \lambda X \|_i \Longrightarrow |\lambda| \, \| X \|_i \leq \| B \|_i \| X \|_i, X \in (\mathbb{R}^*)^n : (\| BX \|_i \leq \| B \|_i \| X \|_i)$$

ومنه $;i = 1 \vee 2 \vee \infty \quad |\lambda| \leq \| B \|_i \Longrightarrow \rho(B) \leq \| B \|_i$ ■

إنطلاقا من التوطئة نستنتج أن وجود النظيم $\| . \|_i, (i = 1 \vee 2 \vee \infty)$ لـ B الذي يحقق $\| B \|_i < 1$ شرط كافي لتقارب الطرق التكرارية.

نظرية 1.3.2

لتكن $A \in M(\mathbb{R}^n)$ فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} ||A^n|| = 0 \iff \rho(A) < 1$$

برهان نفرض أن: $\lim_{n\to+\infty} ||A^{(n)}|| = 0$. لتكن λ قيمة ذاتية لـ A و $X \in \mathbb{R}^n/0$ شعاعها الذاتي، أي $AX = \lambda X$ هذا يعطينا $A^nX = \lambda^n X$.
إذن:

$$|\lambda^n|||X||_{\mathbb{R}^n} = ||A^nX||_{\mathbb{R}^n} \leq ||A^n||||X||_{\mathbb{R}^n} \implies |\lambda|^n \leq ||A^n||,$$

$$\implies \lim_{n\to+\infty} |\lambda^n| \leq \lim_{n\to+\infty} ||A^n|| = 0,$$

$$\implies |\lambda| < 1.$$

الآن نفرض أن $\rho(A) < 1$ وبالتالي: $\exists \varepsilon > 0; \rho(A) < 1 - \varepsilon$.
إذن من الفرضية يوجد نظيم ثابت $||.||$ حيث:

$$||A|| \leq \rho(A) + \varepsilon < 1.$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} ||A^n|| \leq \lim_{n\to+\infty} ||A||^n = 0.$$

■

تعريف 3.2.1
نقول عن المصفوفة A أنها ذات قطر مهيمن إذا كان :

$$| a_{ii} |> \sum_{j\neq i} | a_{ij} | \qquad , i = \overline{1:n}$$

توطئة 1.3.2. القيم الذاتية للمصفوفة A موجودة في اتحاد الأقراص :

$$D_i(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} :| \lambda - a_{ii} |\leq \sum_{j\neq i} | a_{ii} |, 1 \leq i \leq n\}$$

التي تسمى أقراص $Gershgorin$.

نظرية 1.3.3

إذا كانت A ذات قطر مهيمن، فإن طريقة جاكوبي و غوص سايدال متقاربة.

برهان : لدينا $G=(D-E)^{-1}F$ $\qquad$ $J=D^{-1}(E+F)$

نبرهن أن $\rho(J)<1$ و $\rho(G)<1$.

في طريقة جاكوبي لدينا:
$$j_{ij}=\begin{cases}0 & ;i=j\\ \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} & ;i\neq j\end{cases}$$

إذن:
$$\| J \|_{\infty}=\max_i\sum_j | J_{ij} |=\max_i\frac{1}{| a_{ii} |}\sum_{j\neq i} | a_{ij} |< 1.$$

بما أن A ذات قطر مهيمن، إذن :
$$\rho(J)\leq \| J \|_{\infty}< 1.$$

ننتقل إلى طريقة غوص سايدال:

نبرهن أن : $| \lambda |< 1$ من أجل كل القيم الذاتية λ لـ G .

إذا كانت $\lambda=0$ فإن : $| \lambda |< 1$ محققة.

نفرض إذن أن $\lambda\neq 0$ ، لدينا: $det((D-E)^{-1}F-\lambda I_n)=0$.

أي أن $det(F-\lambda(D-E))=0$.

هذا يعني أن 0 قيمة ذاتية لـ
$$-F+\lambda(D-E)=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{nn}\end{pmatrix}.$$

وفقا لنظرية $Gershgorin$:
$$\exists i, | 0-\lambda a_{ii} |\leq \sum_{j<i} | \lambda a_{ij} | + \sum_{j>i} | a_{ij} | .$$

وفقا للفرضية لدينا :
$$\sum_{j<i} | \lambda a_{ij} | + \sum_{j>i} | \lambda a_{ij} |<| \lambda a_{ii} |\leq \sum_{j<i} | \lambda a_{ij} | + \sum_{j>i} | a_{ij} | .$$

وبالتالي :

$$\sum_{j>i} \mid \lambda a_{ij} \mid < \sum_{j>i} \mid a_{ij} \mid .$$

إذن $1 >| \lambda |$ و $\rho(G) < 1$.

ملاحظة 3.2.1

بشكل عام، تتقارب طريقة غوص سايدال بشكل أسرع من طريقة جاكوبي، لكن ليس دائما .

مثال 1.3.3. أدرس تقارب طريقة جاكوبي وطريقة غوص سايدل في كل مصفوفة من المصفوفات التالية:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ -0 & -8 & -6 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$J = D^{-1}(E + F)$$
$$G = (D - E)^{-1}F$$

1) المصفوفة A_1:

لدينا :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

أ) حساب نصف القطر الطيفي لـ J_1: $\rho(J_1) = max|det(J_1 - \lambda I)|$

$$J_1 = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(J_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3$$

إذن $\lambda = 0$ هي قيمة ذاتية لـ J_1 ومنه: $\rho(J_1) = 0$
ب) نصف القطر الطيفي لـ G_1 : $\rho(G_1) = max|det(G_1 - \lambda I)|$
لدينا:

$$G_1 = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det|G_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2-\lambda & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(2-\lambda)^2$$

القيم الذاتية لـ G_1 هي: $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = 2$.
إذن :

$$\rho(G_1) = max|\lambda_1, \lambda_2| = 2$$

$\rho(J_1) = 0 < 1$ إذن طريقة جاكوبي متقاربة.
$\rho(G_1) = 2 > 1$ إذن طريقة غوص سايدال ليست متقاربة.
• بنفس الطريقة بالنسبة للمصفوفة A_4, A_3, A_2.
2) المصفوفة A_2:

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(G_2) = \frac{11}{2} < 1 \qquad \rho(J_2) = 1.118 > 1$$

إذن طريقة جاكوبي ليست متقاربة و طريقة غوص سايدال متقاربة.
3) المصفوفة A_3 :

$$G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(G_3) = 0.018 < 1 \qquad \rho(J_3) = 0.44 > 1$$

إذن طريقة جاكوبي و طريقة غوص سايدال متقاربتان، و بما أن $\rho(G_3) < \rho(J_3)$ فإن طريقة غوص سايدال تتقارب أسرع من طريقة جاكوبي.

4) المصفوفة A_4 :

$$G_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & \frac{24}{35} & \frac{64}{35} \\ 0 & -\frac{69}{140} & -\frac{123}{280} \end{pmatrix} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{9}{7} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(G_4) = 0.77 < 1 \qquad \rho(J_4) = 0064 > 1$$

بما أن $\rho(J_4) < \rho(G)$ فإن طريقة جاكوبي تتقارب أسرع من طريقة غوص سايدال.

الفصل 2

بعض الطرق العددية لحل المعادلات غير الخطية

مقدمة

تعلمنا سابقا كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية من الشكل:
$ax^2+bx+c=0$ باستخدام صيغة الجذور $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. ومع ذلك، عندما نتعامل مع معادلات من الدرجة الثالثة أو الرابعة، تصبح صيغة إيجاد الحل أكثر تعقيدا.
أما في حالة f كثير حدود من الدرجة $5 \geq$ ، لقد أثبت الرياضيون أنه لا يوجد صيغ تحليلية لإيجاد جذورها.

في معظم الحالات، عندما تكون f دالة غير خطية، لا توجد طرق تحليلية لحساب الجذور مباشرة، فيستلزم علينا استخدام طرق التقريب حتى في الحالات التي تتوفر فيها صيغ دقيقة، مثل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة و الرابعة، لأن الصيغة الدقيقة معقدة للغاية بحيث لايمكن استخدامها عمليا، بينما الطرق التقريبية توفر حلا تقريبيا وبسرعة.

في هذا الفصل سندرس بعض الطرق لحل المعادلات غير الخطية ذات متغير وحيد وسنتطرق إلى: طريقة ديكوتومي، طريقة النقطة الثابتة، طريقة نيوتن رافسون.

2.1 التقسيم الثنائي

كخطوة أولى يجب تحديد المجال الذي ينتمي إليه الجذر. بشكل عام، نبحث عن المجال الذي يحقق شروط نظرية القيم المتوسطة. فصل الجذور أو التقسيم الثنائي يتمثل في ضمان وجود جذر واحد في المجال المختار. عامة توجد طريقتين لفصل الجذور

عن طريق الرسم البياني

إما نرسم منحنى الدالة f ونبحث عن تقاطع منحناها مع محور الفواصل، أو نكتب الدالة على الشكل $f=f_1-f_2$ حيث تكون الدلتين f_1, f_2 بسيطتين ويمكن دراسة تغيراتهما بسهولة. تقاطع منحني الدالتين f_1, f_2 يمثل نقطة تقاطع منحنى الدالة f مع محور الفواصل.

عن طريق المسح

لتكن المتتالية $\{x_i, i = 0, 1, ..., n\}$ المشكلة من خلال قيم x الموزعة على المجال $[a, b]$.
إذا كانت f مستمرة و $f(x_i)f(x_{i-1}) < 0$ فإنه يوجد بين
x_i, x_{i+1} على الأقل جذر لـ f .

2.2 طريقة ديكوتومي

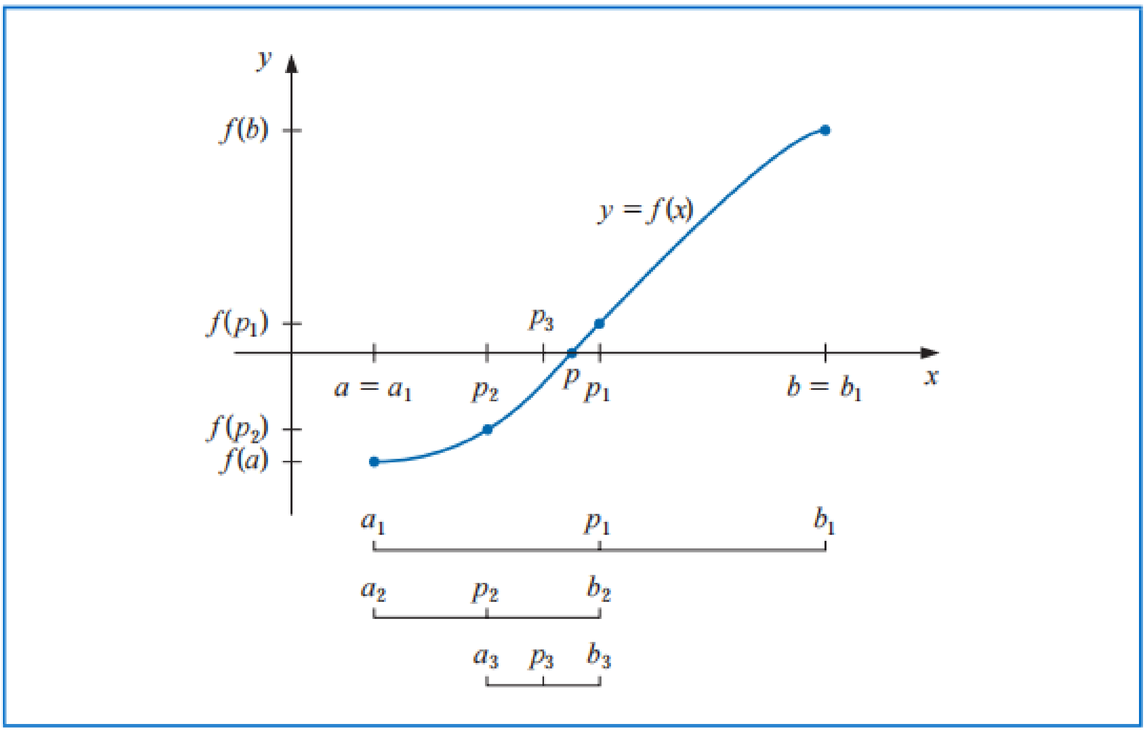
تعتمد طريقة ديكوتومي على بناء سلسلة من المجالات الفرعية المتداخلة $[a_n, b_n]$، والتي تحتوي على جذر المعادلة $f(x) = 0$ ، حيث تعتمد هذه الطريقة على نظرية القيم المتوسطة، التي تنص على أنه إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة على المجال $[a, b]$، و $f(a)f(b) < 0$ فإنه يوجد على الأقل نقطة α من المجال $[a, b]$ حيث $f(\alpha) = 0$.
مبدأ طريقة ديكوتومي كالتالي:
نضع $a_1 = a, b_1 = b$، ولتكن القيمة الأولية $p_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ منتصف المجال $[a_1, b_1]$ ونحسب قيمة f عند هذه النقطة.
a) إذا كان $f(p_1) = 0$ ، فإن p_1 هو الحل α وتنتهي الطريقة.
b) إذا كان $f(a_1)f(p_1) < 0$ ، فإنه يوجد $\alpha \in]a_1, p_1[$ ، حيث $f(\alpha) = 0$ لذلك نضع $a_2 = a_1$ و $b_2 = p_1$. c) إذا كان $f(b_1)f(p_1) < 0$ ، فإنه يوجد $\alpha \in]p_1, b_1[$ ، حيث $f(\alpha) = 0$ لذلك نضع $a_2 = p_1$ و $b_2 = b_1$.
في الحالتين الأخيرتين نكرر العملية إبتداءا من القيمة $p_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ وهكذا حتى نقترب من الحل.
تسمح هذه الطريقة ببناء التسلسل التالي بشكل متكرر :

$$p_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, p_2 = \frac{a_2+b_2}{2}, ..., p_n = \frac{a_n+b_n}{2}, ...$$

الذي يتقارب مع جذر المعادلة $f(x) = 0$.

2.2.1 معيار التوقف

في طريقة ديكوتومي تنتهي التكرارات في الخطوة m عندما يكون طول المجال الذي يحتوي الحل أقل من الخطأ ε المحدد.



شكل 2.1: التفسير الهندسي لطريقة ديكوتومي

لنضع $L_0 = b - a$ طول المجال في التكرار الأول، من الواضح أن بعد m تكرار يكون طول المجال مساويا لـ $L_m = \frac{L_0}{2^m}$. لاستخراج عدد التكرارات لدينا:

$$|x_m - \alpha| \leq L_m \leq \varepsilon \Longrightarrow \frac{L_0}{2^m} \leq \varepsilon \Longrightarrow ln(\frac{L_0}{2^m}) \leq ln(\varepsilon) \Longrightarrow ln(L_0) - ln(2^m) \leq ln(\varepsilon)$$
$$\Longrightarrow ln(2^m) \geq ln(L_0) - ln(\varepsilon) \Longrightarrow mln(2) \geq ln(L_0) - ln(\varepsilon)$$
$$\Longrightarrow m \geq \frac{ln(L_0) - ln(\varepsilon)}{ln(2)} \Longrightarrow m \geq \frac{ln(\frac{L_0}{\varepsilon})}{ln(2)}$$

إذن: $m = [\frac{ln(\frac{L_0}{\varepsilon})}{ln(2)}] + 1$

2.2.2 تقارب طريقة ديكوتومي

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ تحقق $f(a)f(b) < 0$ و $x \in]a, b[$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$ ، فإن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المبنية بطريقة ديكوتومي تتقارب نحو x و لدينا التقدير التالي :

$$\forall n \in \mathbb{N}; |x - x_n| \leq \frac{b - a}{2^n}.$$

مثال 2.2.1. لتكن المعادلة $f(x) = \frac{cos(x)}{(1 + x^2)} = 0$

1) تحقق من وجود حل في المجال : $[1.5, 2], [5, 6]$.

2) بإستعمال طريقة ديكوتومي أحسب القيمة التقريبية بدقة $\varepsilon = 10^{-1}$ للحل في المجال: $[1.5, 2]$.

3) أحسب عدد التكرارات اللازمة للحصول على الحل بدقة $\varepsilon = 10^{-6}$ في المجال: $[1.5, 2]$.

الحل

1) التحقق من وجود الحل باستعمال نظرية القيم المتوسطة:

بما أن $f(1.5)f(2) = -0.0018 < 0$ إذن يوجد حل في هذا المجال.

بما أن $f(5)f(6) = 0.00028312 > 0$ إذن لايوجد حل في هذا المجال.

2) إستعمال خوارزمية طريقة ديكونومي لإيجاد الحل :

التكرار الأول: المجال $[1.5, 2]$ يحتوي على الحل α حيث:

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$$

$$f(1.5)f(1.75) = -9.54 \times 10^{-4} < 0$$

$$f(1.75)f(2) = 3.65 \times 10^{-3} > 0$$

التكرار الثاني :المجال $[1.5, 1.75]$ يحتوي على الحل α حيث:

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{1.5+1.75}{2} = 1.625$$

$$f(1.5)f(1.625) = -3.23 \times 10^{-4} < 0$$

$$f(1.625)f(1.75) = 6.52 \times 10^{-4} > 0$$

التكرار الثالث:المجال $[1.5, 1.625]$ يحتوي على الحل α حيث:

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{1.5+1.625}{2} = 1.5625$$

$$f(1.5)f(1.5625) = 5.25 \times 10^{-5} > 0$$

$$f(1.5625)f(1.625) = -3.58 \times 10^{-5} < 0$$

التكرار الرابع: المجال $[1.5625, 1.625]$ يحتوي على الحل α حيث:

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{1.5625+1.625}{2} = 1.59375$$

إبتداءا من التكرار الرابع رقم بعد الفاصلة يبقى ثابت و بالتالي الجذر لديه دقة 10^{-1}

أي $\alpha = x \simeq 1.5$

3) إيجاد عدد التكرارات الازمة للحصول على الحل بدقة $\varepsilon = 10^{-6}$ في المجال $[1.5, 2]$:

$$n > \frac{ln(b-a) - ln(\varepsilon)}{ln(2)} \Longrightarrow n > \frac{ln(2-1.5) - ln(10^{-6})}{ln(2)} \Longrightarrow n > 18.93$$

إذن $n = 19$.

2.2.3 محاسن ومساوئ طريقة ديكوتومي

1-محاسن الطريقة:

-تميز طريقة ديكوتومي ببساطة مفهومها وسهولة تطبيقها.

-لا تتطلب طريقة ديكوتومي حساب مشتقات الدالة على عكس بعض الطرق الأخرى لحل المعادلات غير الخطية، مثل طريقة نيوتن.

-تضمن طريقة ديكوتومي التقارب إلى الحل الحقيقي للمعادلة.

2-مساوئ الطريقة:

-تُعد طريقة ديكوتومي بطيئة نسبياً في التقارب إلى الحل الصحيح، خاصةً عندما تكون قيمة الجذر بعيدة عن النقطة الابتدائية.

-قد ينتج عن طريقة ديكوتومي أخطاء تقريبية كبيرة إذا لم يتم اختيار عدد التكرارات بشكل مناسب.

2.2.4 خوارزمية *MATLAB*

```
function [root, iterations] = dichotomy(f,a,b,ep)
% Check if initial interval has opposite signs
if f(a)*f(b)>0
  error('f(a) and f(b) must have opposite signs')
end
% Initialize iteration counter
iterations = 0;
while abs(b - a) > ep
  % Calculate midpoint
  c = (a + b) / 2;
  % Check function value at midpoint
  if f(a) * f(c) < 0
    b = c;
  else
    a = c;
  end
  iterations = iterations + 1;
end
% Root is the midpoint of the final interval
root = (a + b) / 2;
end
```

2.3 طريقة نيوتن رافسون

تسمى أيضا طريقة نيوتن، في هذه الطريقة نستخدم منحنى الدالة f للإقتراب من الجذر.
ليكن x_0 قيمة تقريبية لجذر المعادلة $f(x)=0$ ، و $p(x_0,f_0)$ حيث $f_0=f(x_0)$ نقطة من المنحنى.
نقوم برسم مماس المنحنى عند النقطة p ، ولتكن نقطة تقاطع مماس المنحنى مع حامل محور الفواصل تقريب تال للجذر، ثم يتم تكرار العملية حتى نحصل على الدقة المطلوبة.
معادلة مماس المنحنى $y=f(x)$ في النقطة $p(x_0,f_0)$ معطاة بـ:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

حيث $f'(x_0)$ ميل مماس المنحنى في النقطة p .
نضع $y=0$ ونحل بالنسبة لـ x ، نجد:

$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)};f'(x_0)\neq 0.$$

التقريب التالي للجذر هو:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)};f'(x_0)\neq 0.$$

نكرر هذه العملية وفي كل مرة نحسب قيمة أخرى أكثر دقة x_{i+1} من اخر قيمة محسوبة x_i ، وذلك باستخدام الصيغة التكرارية التالية:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)};f'(x_i)\neq 0. \tag{1.2}$$

نتوقف عن الحساب عند الوصول إلى معيار التوقف $|x_{i+1}-x_i|\leq\varepsilon$.

2.3.1 التفسير الهندسي

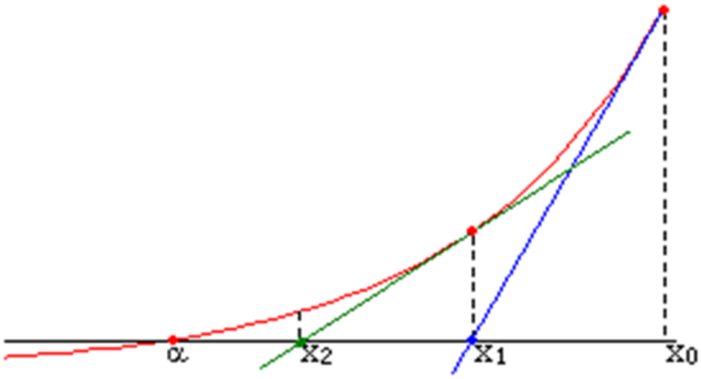
تعمل طريقة نيوتن رافسون على النحو التالي:
إبتداءا من نقطة x_0 مختارة جيدا على المجال $[a,b]$ ، x_1 نقطة تقاطع مماس منحنى الدالة f في النقطة $(x_0,f(x_0))$ مع محور الفواصل، ومنه:

$$f'(x_0)=\frac{0-f(x_0)}{x_1-x_0}=-\frac{f(x_0)}{x_1-x_0}\Rightarrow x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\qquad (f'(x_0)\neq 0)$$

بتكرار العملية على x_1 نتحصل على النقطة x_2 ، وهكذا إلى غاية الوصول إلى الحل.
إذن تحقق النقاط $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ علاقة التكرار التالية:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\qquad n\geq 0$$

وهي صيغة نيوتن رافسون الأكثر إستخداما في البحث عن جذور f.



شكل 2.2: التفسير الهندسي لطريقة نيوتن رافسون

نظرية 2.3.1

لتكن $f\in C^2([a,b])$ تحقق:

1) $f(a).f(b)<0$

2) $\forall x\in[a,b], f'(x)\neq 0$ (f' لا تتغير إشارتها على $[a,b]$)

إذن:

a) f تملك حل وحيد في $[a,b]$.

b) المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو α، إذا كان $\forall x_0\in[a,b], f(x_0)f''(x_0)>0$

بالإضافة، هذا التقارب تربيعي بحيث :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2}=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

برهان a) باستخدام نظرية القيم المتوسطة، الشروط (1) و (2) تبين وجود ووحدانية الجذر $\alpha \in [a,b]$ بحيث $f(\alpha)=0$.
b) إثبات تقارب $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نحو α :

لدينا $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ، إذن:

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha + \frac{f(\alpha) - f(x_n)}{f'(x_n)}; \qquad (f(\alpha)=0) \qquad (2.2)$$

نشر تايلور لـ f عند x_n من الرتبة 2 يعطي:

$$f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{(\alpha - x_n)^2}{2!}f''(\zeta_n); \quad min(x_n,\alpha) \le \zeta_n \le max(x_n,\alpha)$$

بتعويض عبارة $f(\alpha)$ في (2.2) نجد:

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha + \frac{f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + \frac{(\alpha - x_n)^2}{2!}f''(\zeta_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \frac{(\alpha - x_n)^2}{2!}\frac{f''(\zeta_n)}{f'(x_n)}$$

نحصل على الحالتين التاليتين:
1) f' و f'' من نفس الإشارة $\Longleftarrow \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} > \alpha$ ، معناه: (x_n) محدودة من الأسفل بـ α .
2) f' و f'' ليسا من نفس الإشارة $\Longleftarrow \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} < \alpha$ ، معناه: (x_n) محدودة من الأعلى بـ α .
ii) دراسة رتابة المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
نميز أربع حالات:

الحالة الأولى: $f'(x) > 0$ و $f''(x) > 0$ ، $\forall x \in [a,b]$.
الحالة الثانية: $f'(x) > 0$ و $f''(x) < 0$ ، $\forall x \in [a,b]$.
الحالة الثالثة: $f'(x) < 0$ و $f''(x) < 0$ ، $\forall x \in [a,b]$.
الحالة الرابعة: $f'(x) < 0$ و $f''(x) > 0$ ، $\forall x \in [a,b]$.

• بالنسبة للحالة الأولى:
لتكن $f'(x) > 0$ و $f''(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$ ، إذن $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > \alpha$.
نفرض أن x_0 تم إختيارها بحيث $f(x_0).f''(x_0) > 0$ ونبرهن أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة.
نستخدم البرهان بالتراجع:
- من أجل $n = 0$: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < 0$
نختار x_0 بحيث $f(x_0) > 0$ لأن $f''(x_0) > 0$ ، إذن: $x_1 - x_0 < 0 \Rightarrow x_1 < x_0$.
- من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 0$.
وبما أن:

$$\begin{cases} x_n > \alpha, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ f \text{ متزايدة على } [a,b] \end{cases} \Rightarrow f(x_n) > f(\alpha) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

إذن: $x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
بما أن: $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} < x_n$ ، إذن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.
• بالنسبة للحالة الثانية:
لتكن $f'(x) > 0$ و $f''(x) < 0$, $\forall x \in [a,b]$ ، إذن $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > \alpha$.
نفرض أن x_0 تم إختيارها بحيث $f(x_0).f''(x_0) > 0$ ونثبت أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.
نستخدم البرهان بالتراجع:
- من أجل $n = 0$: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > 0$
نختار x_0 بحيث $f(x_0) < 0$ لأن $f''(x_0) < 0$ ، إذن: $x_1 - x_0 > 0 \Rightarrow x_1 > x_0$
- من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$
وبما أن:

$$\begin{cases} x_n < \alpha, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ f \text{ متزايدة على } [a,b] \end{cases} \Rightarrow f(x_n) < f(\alpha) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

إذن: $x_{n+1} - x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
بما أن: $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} < x_n$ ، ومنه المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.
• نبرهن بنفس الطريقة باقي الحالات. ■

ملاحظة 2.1.2
من الضروري إختيار x_0 أقرب مايمكن من α ، وإلا قد لا تتقارب السلسلة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نحو الجذر، يمكن أن تتباعد أيضا.

مثال 2.3.1. باستخدام طريقة نيوتن رافسون أحسب القيمة المقربة لجذر المعادلة $f(x)=\frac{cos(x)}{1+x^2}$ الموجودة في المجال $[1.5,2]$، بأخذ القيمة الإبتدائية المقربة للحل $x_0=1.3$ حيث $\epsilon=10^{-2}$. **الحل**
باستخدام طريقة نيوتن رافسون، لدينا:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

و

$$f(x)=\frac{cos(x)}{(1+x^2)}\Longrightarrow f'(x)=\frac{(-sin(x))(1+x^2)-2xcos(x)}{(1+x^2)^2}$$

إذن:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1.3-\frac{f(1.3)}{f'(1.3)}=1.518119$$
$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.5189-\frac{f(1.5189)}{f'(1.5189)}=1.5685$$
$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=1.5708$$
$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=1.5708$$

دقة الجذر 10^{-2} وهو إذن $\alpha=1.57$ الذي يثبت إبتداءا من التكرار الرابع.

2.3.2 محاسن ومساوئ طريقة نيوتن

1- محاسن الطريقة:
-تميز طريقة نيوتن رافسون بسرعة تقاربها في معظم الحالات، حيث تُمكن من الحصول على حل دقيق مع عدد قليل من التكرارات.
-تُعد طريقة نيوتن رافسون فعالة من حيث الحساب، حيث تتطلب عدداً قليلًا من العمليات الحسابية لكل تكرار.
-تُعدّ طريقة نيوتن رافسون بسيطة نسبياً مقارنةً بطرق أخرى لحل المعادلات، مما يجعلها سهلة الفهم والتنفيذ.
2- عيوب الطريقة:
-على الرغم من سرعة تقاربها، إلا أن طريقة نيوتن رافسون لا تضمن التقارب دائمًا

-قد تنشأ مشكلة القسمة على الصفر أثناء تطبيق الطريقة، مما يتطلب إيجاد حل لمعالجة ذلك.

- حساب $f'(x_n)$ في كل خطوة بالإضافة إلى $f(x_n)$.

2.3.3 خوارزمية $MATLAB$

```
function [x,N]=mynewtonraphson(f, f_prime,a,b, x0, eps)
if f(a)*f(b)>0
  error('f(a) and f(b) must have opposite signs')
else
x=x0;
N=0;
x1=x-f(x0)/f_prime(x0);
while abs(x1-x)>eps
x=x1;
x1=x-f(x)/f_prime(x);
N=N+1;
end
end
```

2.4 طريقة النقطة الصامدة

تعتمد هذه الطريقة على تحويل المشكلة $f(x)=0$ إلى مشكلة مكافئة من الشكل $g(x)-x=0$.

نظرية 2.4.1

ليكن $[a,b]$ مجال غير خالي من $\mathbb{R}$ ، و g دالة مستمرة على $[a,b]$. إذن، يوجد ζ من $[a,b]$ ، تسمى النقطة الثابتة للدالة g ، تحقق:

$$g(\zeta)=\zeta$$

برهان لتكن $f(x)=g(x)-x$ ، لدينا إذن $f(a)=g(a)-a\geq 0$ و $f(b)=g(b)-b\leq 0$ ، حيث $g(x)$ معرفة على $[a,b]$ من أجل كل x من $[a,b]$. وبالتالي نستنتج أن f مستمرة على $[a,b]$ ، وبما أن $f(a).f(b)\leq 0$ فإنه حسب نظرية القيم المتوسطة يتحقق

إذن وجود النقطة ζ في $[a,b]$ ، حيث: $0 = f(\zeta) = g(\zeta) - \zeta$ إذن $g(\zeta) = \zeta$. ■

ملاحظة 3.1.2
من الواضح أنه يمكن كتابة أي معادلة من الشكل $f(x) = 0$ على الشكل $x = g(x)$ بوضع $g(x) = x + f(x)$ ولكن هذا لا يضمن بأي حال من الأحوال أن الدالة المساعدة g المحددة بهذه الطريقة تلبي فرضيات النظرية السابقة، ومع ذلك يوجد العديد من الطرق لبناء g من f ، كما يوضح المثال التالي :

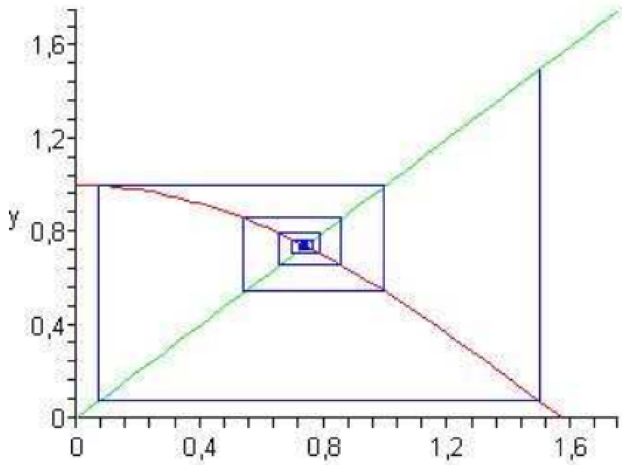
مثال 2.4.1. لتكن الدالة $f(x) = e^x - 2x - 1$ ، المستمرة على المجال $[1,2]$ ، لدينا $f(1) < 0$ و $f(2) > 0$ وبما أن $f(1).f(2) < 0$ ، إذن يوجد جذر لـ f على المجال $[1,2]$.
لتكن $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - 1)$ ، المعادلة $x = g(x)$ تكافئ $f(x) = 0$ ، لكن g مستمرة، وليست لها قيم على المجال $[1,2]$ ، إذن نفترض $g(x) = ln(2x+1)$ هذه الدالة مستمرة ومتزايدة وذات قيم على المجال $[1,2]$ تحقق إذن النظرية.

التفسير الهندسي

إيجاد تقاطع منحنى الدالة $g(x)$ مع منصف الربع الأول يتمثل في إيجاد حل المعادلة $x - g(x) = 0$.
مبدأ هذه الطريقة يتمثل في البدء بنقطة x_0 ، المستقيم $y = g(x_0)$ يقطع منصف المحور الأول في النقطة (x_1, x_1) ، ثم نقوم بإسقاط عمودي للحصول على $g(x_1)$. وهكذا نقوم بنفس الخطوات لنصل إلى النقطة الصامدة.
الآن نحن بصدد إثبات أنه تحت شروط معينة، فإن الإقتراب من جذور الدالة f يعادل الإقتراب من النقاط الثابتة للدالة g ، دون الحاجة لمعالجة هذه المسألة الجديدة. الطريقة الشائعة لتحديد النقطة الثابتة هي بناء متتالية $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ، من خلال العملية التكرارية التالية: بعد إعطاء قيمة ابتدائية $x^{(0)}$ (تنتمي إلى $[a,b]$) نفترض:

$$\forall k \in \mathbb{N}, x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \qquad (3.2)$$

نقول أن العلاقة (3.2) هي تكرار النقطة الثابتة، الطريقة الناتجة عن التقريب تسمى طريقة النقطة الثابتة أو طريقة التقريبات المتتالية. إذا كانت المتتالية $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ المعرفة بواسطة (3.2) متقاربة، فإنه لايمكن أن تتقارب إلا نحو نقطة ثابتة لـ g



شكل 2،3: التفسير الهندسي لطريقة النقطة الصامدة من أجل $g(x) = cos(x), x_0 = 1.5$

أي بوضع: $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} x^{(k)} = \zeta$
لدينا:

$$\zeta = \lim_{k \longrightarrow +\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \longrightarrow +\infty} g(x^{(k)}) = g(\lim_{k \longrightarrow +\infty} x^{(k)}) = g(\zeta)$$

المساواة الثانية ناتجة عن العلاقة (3،2) للمتتالية التكرارية والثالثة نتيجة لاستمرارية g.

2،4،1 الشروط الكافية للتقارب

إن إختيار الدالة g لتنفيذ هذه الطريقة ليس فريدا، وإنما يتم تحديده بناءً على متطلبات النظرية 2،3،1، التي تقدم شروطا كافية لـ g لضمان تقارب طريقة النقطة الثابتة المحددة بواسطة 2،3،1 . قبل ذكرها، دعونا نتذكر أولا مفهوم الدالة المقلصة:

تعريف 3،1،2

ليكن $[a, b]$ مجال عشوائي من $\mathbb{R}$ ، نقول عن الدالة $g : [a, b] \to [a, b]$ أنها مقلصة، إذا وجد ثابت $0 < c < 1$ حيث:

$$\forall x', x'' \in [a, b] : |g(x') - g(x'')| \leq c|x' - x''|.$$

نظرية 2،4،2

ليكن I مجال مغلق من $\mathbb{R}$ و g دالة حيث $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ بفرض أن g تحقق الخاصيتين التاليتين:

i) g مقلصة على I.

ii) $g(I) \subset I$ ، معناه من أجل كل $x \in I$ لدينا $g(x) \in I$.
إذن g تملك نقطة ثابتة وحيدة α في I ، من أجل كل $x_0 \in I$ ، المتتالية $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ المعطاة بـ $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$ حيث $n \in \mathbb{N}$ ، تتقارب نحو α لما n يؤول إلى مالانهاية بالإضافة التقارب خطي.

برهان نفرض إذن أن g تحقق الخاصيتين i) و ii).
إذا كان $x^{(0)} \in I$ و $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$ الخاصية ii) تضمن أن جميع $x^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots$ في المجال المغلق I.
الخاصية i) تسمح بكتابة:

$$\forall n \in \mathbb{N}, | x^{(n+1)} - x^{(n)} |=| g(x^{(n)}) - g(x^{(n-1)}) |\leq \chi | x^{(n)} - x^{(n-1)} |$$

حيث $\chi < 1$ ثابت التقلص.
بتكرار هذه العلاقة n مرة نحصل على :

$$\forall n \in \mathbb{N}, | x^{(n+1)} - x^{(n)} |\leq \chi^n | x^{(1)} - x^{(0)} | \quad (4.2)$$

ليكن الان m عدد طبيعي موجب:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m > 2,$$

$$\begin{aligned} | x^{(n+m)}-x^{(n)} | &=| x^{(n+m)}-x^{(n+m-1)}+x^{(n+m-1)}-x^{(n+m-2)}+x^{(n+m-2)}-\dots+x^{(n+1)}-x^{(n)} | \\ &\leq| x^{(n+m)} - x^{(n+m-1)} | + | x^{(n+m-1)} - x^{(n+m-2)} | +\dots+ | x^{(n+1)} - x^{(n)} | \end{aligned}$$

باستعمال (4.2) نحصل على:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m > 2, | x^{(n+m)} - x^{(n)} | &\leq (\chi^{n+m-1} + \chi^{n+m-2} + \dots + \chi^n) | x^{(1)} - x^{(0)} | \\ &\leq \chi^n(1 + \chi + \chi^2 + \dots + \chi^{m-1}) | x^{(1)} - x^{(0)} | \end{aligned}$$

ومنه:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m > 2, | x^{(n+m)} - x^{(n)} |\leq \chi^n \frac{1 - \chi^m}{1 - \chi} | x^{(1)} - x^{(0)} | \quad (5.2)$$

بما أن $\chi < 1$ ، نستنتج من (5.2) أن المتتالية $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي إذن فهي متقاربة. ولتكن α نهايتها، أي $\lim_{n\longrightarrow\infty} x^{(n)} = \alpha$.
إذن α بالضرورة في I لأننا فرضنا أن I مجال مغلق.
بما أن g مستمرة، إذن α نقطة ثابتة لـ g ، ولإثبات ذلك نحسب النهاية لما n يؤول إلى مالانهاية في العلاقة $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$.
التقارب خطي لأنه من أجل كل n :

$$| \alpha - x^{(n+1)} |=| g(\alpha) - g(x^{(n)}) |\leq \chi | \alpha - x^{(n)} | .$$

بالإضافة α نقطة ثابتة وحيدة في g لأنه إذا فرضنا أنه توجد نقطة أخرى β في I ، لدينا:

$$| \alpha - \beta |=| g(\alpha) - g(\beta) |\leq \chi | \alpha - \beta |$$

مما نستنتج أن $\alpha = \beta$ (لأن $\chi < 1$) . ■

تعريف 3.2.2
نقول عن نقطة صامدة r لدالة g أنها جاذبة إذا وجد جوار $V(r)$ حيث أنه من أجل x_0 من $V(r)$ ، المتتالية التي حدها الأول x_0 وحدها العام $x_{n+1} = g(x_n)$ تؤول إلى النقطة الصامدة r .
مجموعة العناصر x_0 التي تضمن التقارب تسمى حوض الجذب.
نقول عن نقطة صامدة أنها طاردة إذا لم تكن جاذبة.

مثال 2.4.2. لتكن الدالة $g(x) = x^2$ التي تقبل نقطتين صامدتين 0 و 1 . من خلال العلاقة التراجعية $x_{n+1} = g(x_n) = (x_n)^2$ ، نحصل على:

$$x_1 = x_0^2 \Rightarrow x_2 = x_1^2 = (x_0^2)^2 = x_0^4 \Rightarrow x_3 = x_2^2 = (x_0^4)^2 = x_0^8$$

بصفة عامة نحصل على $x_n = (x_0)^{2n}$ ، التي تمثل متتالية مستخرجة من المتتالية الهندسية $x_n = (x_0)^n$.
ومنه إذا كان $-1 < x_0 < 1$ المتتالية تؤول إلى 0، نستنتج إذن أن النقطة الصامدة 0 جاذبة وأن المجال $]-1,1[$ محتوى في حوض الجذب.
إذا كان $x_0 > 1$ أو $x_0 < 1$ ، المتتالية تؤول إلى ما لا نهاية لأن الأس زوجي.

إذا كان $x_0 = 1$ أو $x_0 = -1$ المتتالية تؤول إلى 1، وبما أنه لا يوجد أي جوار تؤول فيه النقاط إلى 1، نستنتج أن النقطة الصامدة طاردة.

نظرية 2.4.3

لتكن g دالة قابلة للإشتقاق على المجال $[a,b]$ الذي يقبل نقطة صامدة r ، لدينا:
1/إذا كانت $|g'(r)| < 1$ فإن r نقطة صامدة جاذبة.
2/إذا كانت $|g'(r)| > 1$ فإن r نقطة صامدة طاردة.
3/إذا كانت $|g'(r)| = 1$ فإنه لا يمكننا استنتاج طبيعة النقطة الصامدة.

مثال 2.4.3. نأخذ المثال السابق الدالة $g(x) = x^2$ التي تقبل نقطتين صامدتين 0 و 1 مشتقتها معطاة كالتالي: $g'(x) = 2x$.
من أجل النقطة الصامدة 0 لدينا: $|g'(0)| = 0 < 1$ ، إذن فإن النقطة الصامدة 0 جاذبة.
من أجل النقطة الصامدة 1 لدينا: $|g'(1)| = 2 > 1$ ومنه فإن 1 نقطة صامدة طاردة.

نظرية 2.4.4

لتكن g دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ والتي تحقق:
1/ $\forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b]$
2/ يوجد ثابت $\rho < 1$ حيث $|g'(x)| < \rho, \forall x \in [a,b]$ ومنه :
أ/ الدالة g تقبل نقطة صامدة على المجال $[a,b]$.
ب/ النقطة الصامدة جاذبة والمجال $[a,b]$ محتويان في حوض الجذب للنقاط الصامدة.
جـ/ $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} = g'(r)$.

برهان أ/ ليكن x و y عددان حقيقيان من المجال $[a,b]$ ، حسب نظرية التزايدات المنتهية نستطيع كتابة:

$$g(x) - g(y) = g'(\xi)(x-y), \quad \xi \in]x,y[.$$

ومنه تحصل على:

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)(x-y)| < \rho|x-y|.$$

والذي يثبت أن g مقلصة تماما على المجال $[a,b]$ ومنه g تقبل نقطة صامدة وحيدة.
بـ/ لدينا:

$$x_n = g(x_{n-1}) \Rightarrow x_n - r = g(x_{n-1}) - r$$

$$\Rightarrow x_n - r = \frac{g(x_{n-1}) - r}{x_{n-1} - r}(x_{n-1} - r)$$

حسب نظرية التزايدات المنتهية $\exists \xi \in]a,b[: \frac{g(x_{n-1})-r}{x_{n-1}-r} = g'(\xi)$
نحصل على:

$$x_n - r = g'(\xi)(x_{n-1} - r)$$

بما أن $\forall x \in [a,b] : |g'(x)| < \rho$ فإن:

$$|x_n - r| \le \rho|x_{n-1} - r| \le \rho^2|x_{n-2} - r| .... \le \rho^n|x_0 - r|.$$

$$|x_n - r| \le \rho^n|b - a|$$

ومنه من أجل كل نقطة x_0 على المجال $[a,b]$ ، المتتالية x_n تتقارب نحو الجذر.
المجال $[a,b]$ محتوي في حوض الجذب والنقطة الصامدة إذن جاذبة للجذر.
جـ/ الدالة g قابلة للإشتقاق عند النقطة r ، لدينا $g'(r) = \lim_{x \to r} \frac{g(x) - g(r)}{x - r}$.
من جهة أخرى لدينا:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} = \lim_{n \to \infty} \frac{g(x_n) - g(r)}{x_n - r} = \lim_{x \to r} \frac{g(x) - g(r)}{x - r} = g'(r)$$

المساواة الأخيرة محققة بخاصية وحدانية النهاية. ■

2.4.2 عدد العمليات اللازمة للحصول على الدقة المطلوبة

البرهان السابق يسمح لنا بتقدير عدد العمليات اللازمة للوصول إلى دقة معينة ε .

نظرية 2.4.5

لتكن g دالة مستمرة وقابلة للإشتقاق على المجال $[a,b]$ ، التي تحقق

$$\forall x \in [a,b] : g(x) \in [a,b]$$

$$\forall x \in [a,b] : |g'(x)| \le \rho, \quad \rho < 1.$$

إذن عدد العمليات اللازمة للحصول على دقة معينة ϵ معطى كمايلي:

$$[\frac{ln(\varepsilon)-ln(b-a)}{ln(\rho)}]+1.$$

حيث $[.]$ يمثل الجزء الصحيح للعدد الحقيقي.

برهان يكفي استخدام المتراجحة المتحصل عليها من البرهان السابق. لدينا:

$$\rho^n|b-a|\leq\varepsilon\Rightarrow\rho^n\leq\frac{\varepsilon}{|b-a|}\Rightarrow nln(\rho)\leq ln(\varepsilon)-ln\mid b-a\mid$$

$$n\geq\frac{ln(\varepsilon)-ln\mid b-a\mid}{ln(\rho)}.$$

■

2.4.3 محاسن ومساوئ طريقة النقطة الصامدة

1-محاسن الطريقة:

-تميز طريقة النقطة الثابتة بسهولة تطبيقها وفهمها، حيث لا تتطلب أي معارف رياضية معقدة.

-لا تتطلب طريقة النقطة الثابتة حساب اشتقاقات الدالة، مما يجعلها مناسبة لحل المعادلات التي يصعب أو يستحيل اشتقاقها.

2-مساوئ الطريقة:

-لا تضمن طريقة النقطة الثابتة التقارب إلى الحل الصحيح في جميع الحالات.

-لا يمكن تطبيق طريقة النقطة الثابتة على جميع أنواع المعادلات غير الخطية.

2.4.4 خوارزمية $MATLAB$

```
function [x,N]=myfixepoint(g,x0,eps,maxIter)
N=0;
x=x0;
x1=g(x);
while abs(x1-x)>eps && N < maxIter
x1=x;
x=g(x1);
N=N+1;
end
end
```

خاتمة

تعد الحلول العددية لجمل المعادلات الخطية والمعادلات غير الخطية جزءاً لا يتجزأ من الرياضيات التطبيقية والهندسة الحديثة. لقد أظهرت هذه الدراسة كيف يمكن للأساليب العددية أن تقدم حلولاً عملية ودقيقة لمشكلات معقدة، مما يساهم في دفع عجلة التقدم في العديد من المجالات العلمية. إن تطوير هذه الحلول وتحسينها مستقبلاً سيعزز من قدراتها ويوسع من نطاق تطبيقاتها، مما يجعلها أداة أساسية في البحث العلمي والتطبيقات العملية.

في هذا البحث تم استعراض العديد من الطرق العددية لحل جمل المعادلات الخطية والمعادلات غير الخطية، قدمنا أولا طرق حل جمل المعادلات الخطية بداية ببعض الطرق المباشرة للحل موضحين الشروط والخصائص التي تجعل كل طريقة مناسبة لمشكلة معينة. منتقلين بعدها لدراسة الطرق غير المباشرة (التكرارية) وشروط تطبيقها وتقاربها. ثم تطرقنا لبعض الطرق لحل المعادلات غير الخطية وشروط تطبيقها وكذا شروط تقاربها .بالإضافة إلى خوارزمية $MATLAB$ الخاصة بكل طريقة .

ختاماً، من خلال جل ما تطرقنا له نرجو أن نكون قد قطفنا الثمرة المبتغاة من هذا البحث المتواضع، وأن يعود هذا العمل علينا وعلى كل الطلبة والباحثين في هذا الموضوع بالمنفعة، وأن يكون مرجعا مفيدا لهم، ونسأل الله التوفيق لما يحبه ويرضاه.

المراجع

[1] **Allaire, G. (2005). Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Editions Ecole Polytechnique.**

[2] **Amodei, L., Dedieu, J. P. (2008). Analyse numérique matricielle: cours et exercices corrigés (pp. 316-p). Dunod.**

[3] **Atkinson, K. (1991). Une introduction à l'analyse numérique . John Wiley et ses fils.**

[4] **Burden, R. L., Faires, J. D. (2010). Numerical analysis (nineth edition). Thomson Brooks/Cole, 57-58.**

[5] **Dahlquist, G., Björck, Å. (2003). Numerical methods. Courier Corporation.**

[6] **Durand, É. (1960). Solutions numeriques des equations algebriques Tom 1: equation du tupe F (X)= 0. Racines d'um Polnome Masson.**

[7] **Faires, J. D., Burden, R. (2002). Numerical Methods: Brooks Cole. CA USA.**

[8] **Fortin, A. (2008). Analyse numérique pour ingénieurs. Presses inter Polytechnique.**

[9] **Gautschi, W. (2011). Analyse numérique . Médias scientifiques et commerciaux Springer.**

[10] Iyengar, S. R., Jain, R. K. (2009). Numerical Methods (As Per Anna University). New Age International.

[11] Jedrzejewski, F. (2005). Introduction aux méthodes numériques. Springer Science Business Media.

[12] Kharab, A. et Guenther, R. (2018). Une introduction aux méthodes numériques : une approche MATLAB® . Presse CRC.

[13] Kiusalaas, J. (2010). Méthodes numériques en ingénierie avec Python . La presse de l'Universite de Cambridge.

[14] Moser, J. K. (1968). A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 23(4), 179-238.

[15] Rappaz, J., Picasso, M. (1998). Introduction à l'analyse numérique. Presses polytechniques et universitaires romandes.

[16] Rheinboldt, WC (1986). Analyse numérique d'équations non linéaires paramétrées . Wiley-Interscience.

[17] Stoer, J., Bulirsch, R., Bartels, R., Gautschi, W., Witzgall, C. (1980). Introduction to numerical analysis (Vol. 2). New York: springer-verlag.

[18] Süli, E., Mayers, D. F. (2003). An introduction to numerical analysis. Cambridge university press.

[19] Timmy Siauw, Alexandre M. Bayen,An Introduction to MATLAB ® Programming and Numerical Methods for Engineers , Academic Press is an imprint of Elsevier, 2015.

الملخص :

خلال هذه المذكرة، تمت دراسة الأساليب العددية لحل جمل المعادلات الخطية والمعادلات غير الخطية، بهدف استكشاف الطرق المختلفة وتقييم دقتها وكفاءتها في إيجاد الحلول. في الفصل الأول، تم التركيز على الطرق المباشرة مثل غوص جوردن وتفكيك LU ، بالإضافة إلى الطرق غير المباشرة مثل طريقة جاكوبي وغوص سايدال، مع تحليل شروط تطبيق كل طريقة وتقاربها. أما في الفصل الثاني، تم استعراض الطرق لحل المعادلات غير الخطية مثل طريقة ديكوتومي ونيوتن رافسون والنقطة الصامدة، مع تحليل شروط التقارب لكل طريقة.

كما تم استخدام برنامج "MATLAB" لتوضيح كيفية برمجة هذه الطرق والحصول على الحل العددي بكفاءة وسهولة، مما يعزز دور الحوسبة في البحوث العلمية.

الكلمات المفتاحية :

جمل المعادلات الخطية، المعادلات غير الخطية، طرق الحل المباشرة، طرق الحل غير المباشرة.

Abstrac :

this dissertation examines numerical methods for solving systems of linear and nonlinear equations, aiming to explore various approaches and evaluate their accuracy and efficiency in finding solutions. The first chapter focuses on direct methods such as Gauss elimination and LU decomposition, as well as indirect methods like Jacobi's method and Sidel's method, analyzing the conditions for applying each method and their convergence.

In the second chapter, methods for solving nonlinear equations such as the bisection method, Newton-Raphson method, and fixed-point iteration are reviewed, along with an analysis of the convergence conditions for each method.

The "MATLAB" software was utilized to illustrate how to program these methods and obtain numerical solutions efficiently and easily, thus enhancing the role of computation in scientific research.

key words :

Linear equations system, Nonlinear equations, Direct solution methods, Indirect solution methods.