الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

المدرسة العليا لاساتذة
التعليم التقني سكيكدة

قسم الفيزياء
و الكيمياء

تمارين و مسائل
في
الميكانيك الكوانتي

الاستـــــــاذ
فيـصلي محمـــــد

المحتويات

قائمة الأشكال

قائمة الجداول

القسم I

" التماريـــــــن"

المقدمــــــة

بسم الله الرحمن الرحيم و الصلاة و السلام على سيدنا محمد و على اله و صحبه اجمعين . ايمانا منا بان التمارين و المسائل ليست مجرد اختبار لمدى الفهم و انما هي وسيلة مكملة للدروس فهي تدعمها و تعمق الفهم . ارتاينا ان نقوم بوضع هذه المجموعة من التمارين و المسائل الخاصة بالميكانيك الكوانتي . لقد تم اختيار هذه التمارين بالكيفية التي تسمح بالتمكن من المفاهيم الاساسية و استخدامها في حل مسائل اكثر تعقيدا . كما انها رتبت و فقا لدرجة الصعوبة . و قد جاءت الحلول مبسطة الى اقصى حد من اجل تمكين المبتدئين من الفهم و تجنبا للنفور . وزعت هذه التمارين على ثمانية فصول بالكيفية التي تطابق بنية مقررات الميكانيك الكوانتي لمرحلة التدرج في اغلب الجامعات و قد راعينا في ذلك التطور الحاصل في فهم هذه النظرية . و قد زودنا هذه التمارين بملحقات تضمنت اهم الثوابت الفيزيائية و جدولا باشهر التكاملات و ذلك لجعل هذا العمل متكاملا قدر المستطاع . في الاخير نرجوا ان يجد فيه الطلاب مبتغاهم و الله هو الموفق .

الفصـــــل 1

الاسس التجريبية للميكانيك الكوانتي

1.1 اشعاع الجسم الاسود

التمريـــــن الاول

جسم صلب مكعب الشكل طول ضلعه $a = 15\ \text{cm}$ درجة حرارته $T = 500\ \text{K}$.باعتبار ان هذا الجسم يشع في الفضاء تماما كجســم اســود اوجــد مايلــي :

1 – الطول الموجي الذي يشع من خلاله اكبر قدر من الطاقة .

2 – الاســتــطاعــة الكليــة لهــذا الجســم .

3 – كمية الطاقة التي يشعها خلال 10 ثواني .

التمريـــــن الثـــاني

كــرة نصــف قطــرها 20 cm و درجــة حرارتــها 800 K . باعتبــار ان هــذه الكــرة تشــع في الهــواء تمــامــا كجســم اســود , اوجــد مــايلي :

1 – الاستطاعــة الكليــة للكــرة .

2 – الطاقة الكلية المشعة من طرف الكرة خلال 5 دقائق .

التمريـــــن الثـــالث

مصباح كهربائي فتيلته من التنجستن تبلغ درجة حرارة فتيله ال 3000 K اثناء التشغيل .

1 – احسب الاستطاعة السطحية للفتيل (اشعاعية الفتيل) معتبرا اياه جسما اســود .

2 – احســب مســاحــة الفتيــل اذا كــانت استــطاعــة المصبــاح هي 75 W.

التمريــــــن الـــرابع

عملية قياس الطول الموجي الذي تكون عنده اشعاعية (الاستطاعة السطحية) احد النجوم اعظمية بينت ان درجة حرارته هي $3000\,\mathrm{K}$ كمــــا تبيــــن ايــضــا ان استطاعــــة هــذا النجــم هي 100 ضعف استطاعـــة الشمـــس $P = 100P_{\odot}$.

– احسب نصف قطر هذا النجم معتبرا اياه و الشمس جسمين اسودين مع الاخذ بالاعتبار ان درجة حرارة الشمس هي $5800\,\mathrm{K}$

التمريــــــن الخـــامس

باعتبار الشمس جسما اسود و بالاخذ بالاعتبار ان درجة حرارة سطحها هي $5700K$.

1 – اوجــد التـــردد الـــذي تبث من خــلالــه الشمـــس اكبر قـــدر من الطاقـــة .

2 – ما هي استطاعـــة الشمـــس بالنسبة لوحـــدة المساحـــة (اشعاعيـــة الشمس) ؟

التمريــــــن الســـادس

معدل التدفق الطاقوي للاشعاع الصادر عن الشمس عند سطح الارض هو $F = 1.4\,\mathrm{kW.m^{-2}}$. باعتبار ان الشمس تشع كجسم اسود وان النسبة بين نصف قطر مدار الارض و نصف قطر الشمس هي 216 :

1 – احسب درجـــة حـــرارة الشمـــس .

2 – احسب طـــول الموجـــة التي تشع من خـــلالها الشمس اكبر قدر من الطاقـــة .

التمريــــــن الســـابع

باعتبـــار ان الشمـــس هي جســـم اســـود درجـــة حرارتـــه $T = 5826\ \mathrm{K}$.

1 – احسب درجة حرارة كوكب المشتري الذي يبعد عن الشمس مسافة قدرها $d = 780 \times 10^{6}\ \mathrm{km}$ معتبرا انه جسم اســـود في حالـــة اتـــزان حـــراري مع الاشعـــاع الشمسي . مع العلـــم ان نصف قطـــره هـــو $R_J = 71400\,\mathrm{km}$.

2 – احسب طول الموجـــة التي يشع من خلالها المشتري اكبر قدر من الطاقـــة .

2.1 المفعول الكهروضوئي

التمريــــــن الاول

صفيحة من البوتاسيوم تقع على بعد $80\ \mathrm{cm}$ من مصباح متوهج استطاعته $75\ \mathrm{W}$. اعتبر ان ذرة البوتاسيوم هي عبارة عن قرص قطره $1\ \mathrm{A}^{\circ}$ و ان الضوء ذو طبيعة موجية .

– احسب الزمن اللازم لكل ذرة حتى تمتص الطاقة الكافية لتحرير الكترونها الخارجي مع العلم ان دالة العمل للبوتاسيوم هي $2\ \mathrm{eV}$.

2 – اذا كان طول موجة الضوء المستخدم هو $400\ \mathrm{nm}$. ما هو عدد الفوتونات التي تسقط على الذرة الواحدة خلال

وحدة الزمن ؟

التمريـــــن الثـــاني

نقوم بتسليط حزمة ضوئية طولها الموجي λ على سطح معدن معين ثم نقوم بقياس توتر الايقاف للالكترونات المتحررة . نكرر التجربة عدة مرات باستخدام اطوال موجية مختلفة . النتائج المتحصل عليها مدونة بالجدول التالي :

– ارسم توتر الايقاف بدلالة التردد ثم حدد من هذا المنحنى :

$V[V]$	$\lambda[10^{-7}m]$	$V[V]$	$\lambda[10^{-7}m]$
0.62	4.92	1.48	3.66
0.36	5.46	1.15	4.05
0.24	5.79	0.93	4.36

1 –دالة العمل .

2 – تردد العتبة .

3 – النسبة $\frac{h}{e}$.

التمريـــــن الثـــالث

باستخدام التركيب التجريبي الموضح بالشكل (1.1ا) نقوم بتسليط شعاعا كهرو مغناطيسيا على صفيحة معدنية ثم نقوم بقياس شدة التيار الكهروضوئي الناتج بدلالة الكمون المطبق . نكرر التجربة عدة مرات حيث نغير في كل مرة تردد الاشعاع المستخدم و شدته . النتائج المتحصل عليها موضحة بالشكل (1.1ب) .

1 – كيف تفسر الجزء المائل من كل منحنى ؟

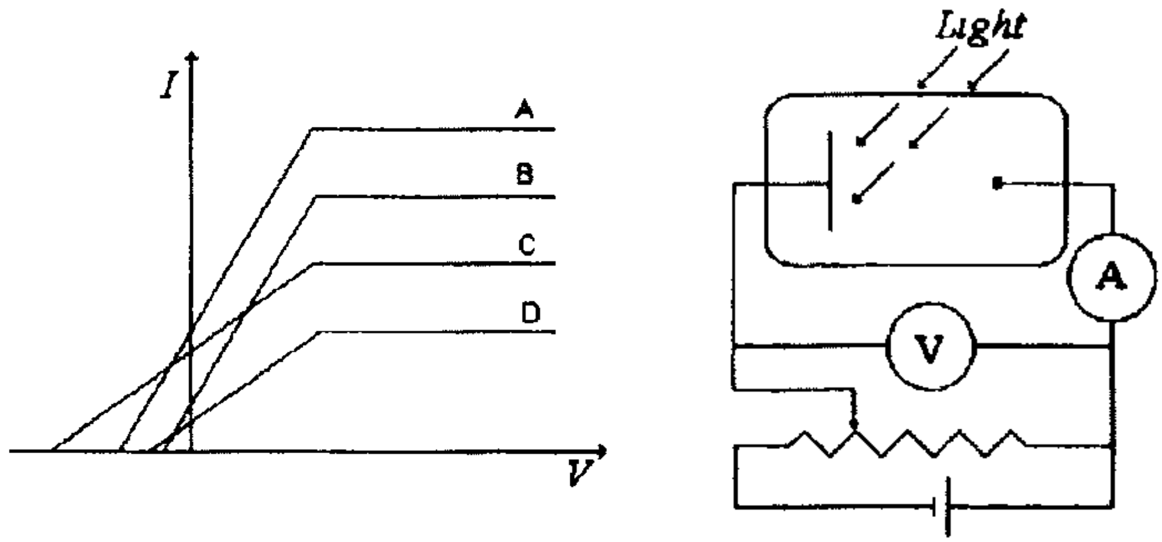
2 – ما هو المنحنى الذي يقابل استخدام الاشعاع الكهرومغناطيسي الاكبر شدة ؟

3 – ما هو المنحنى الذي يقابل استخدام الاشعاع الكهرومغناطيسي الاكبر ترددا ؟

4 – ما هو المنحنى الذي يقابل استخدام الاشعاع الكهرومغناطيسي ذو الطول الموجي الاكبر ؟

التمريـــــن الـــرابع

عتبة المفعول الكهروضوئي للتنجستن هي 2300 A° . حدد طاقة الالكترونات المتحررة من سطح هذا المعدن بواسطة شعاع فوق – بنفسجي طوله الموجي 1800 A°



(ب) (أ)

شكل 1.1

التمريـــــن الخـــامس

عتبة المفعول الكهرضوئي للبوتاسيوم هي 558 nm .

1 – ما هي دالة العمل للبوتاسيوم ؟

2 – ما هو التوتر اللازم لايقاف الالكترونات المتحررة نتيجة تسليط ضوء طوله الموجي 400 nm

التمريـــــن الســـادس

نقوم بتسليط اشعاعا كهرومغناطيسيا طوله الموجي 2537 A° على سطح نحاسي فتتحرر الكترونات يلزم لايقافها جهد قدره 0.24 V . احسب الطول الموجي لعتبة المفعول الكهروضوئي النحاس .

التمريـــــن الســـابع

– في تجربة المفعول الكهروضوئي ، نقوم بتسليط حزمة ضوئية طولها الموجي λ فنلاحظ تحرر الكترونات بطاقة حركية عظمى قدرها 1 eV. باعادة التجربة باستخدام ضوء طوله الموجي $\lambda/2$ لوحظ تحرر الكترونات بطاقة حركية عظمى قدرها 4.28 eV.

– اوجد دالة العمل لهذا المعدن .

التمريـــــن الثـــامن

جهاز ليزر استطاعته $100\,\mathrm{mW}$ يصدر حزمة ضوئية طولها الموجي $488\,\mathrm{nm}$.

1 – ما هو عدد الفوتونات التي يصدرها الجهاز في كل ثانية ؟

2 – ما هي شدة التيار الذي تنتجه الخلية الكهروضوئية عند تعرضها لهذا الشعاع الليزري مع العلم ان 10% فقط من الفوتونات هي التي تقوم بانتزاع الالكترونات .

3 – اذا كان تردد العتبة للمعدن المستخدم في الخلية الكهروضوئية هو $5.2 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}$, اوجد التوتر اللازم تطبيقه لايقاف الالكترونات المتحررة .

3.1 تشتت كومبتون

التمرين الاول

فوتون طاقته $10^4\,\mathrm{eV}$ يصطدم بالكترون حر في حالة سكون فيتشتت منحرفا عن مساره الاصلي بزاوية قدرها $60°$. احسب التغير الحاصل في كل من الطول الموجي لهذا الفوتون ، تردده و طاقته .

التمرين الثاني

الطول الموجي لاشعة اكس البارزة عند الزاوية $60°$, نتيجة تشتتها بواسطة الكترون حر في حالة سكون ، هو $0.300\,\mathrm{A}°$.

1 – ما هو الطول الموجي للفوتون المشتت ؟

2 – ما هي طاقة الالكترون المرتد ؟

التمرين الثالث

في تشتت كومبتون , يصطدم فوتون طول موجته λ_0 بالكترون حر يتحرك باندفاع قدره P في نفس جهة حركة الفوتون الوارد .

1 – اثبت ان معادلة كومبتون للانزياح في الطول الموجي تصبح كمايلي :

$$\lambda - \lambda_0 = 2\lambda_0 \frac{c(p_0 + P)}{E - cP} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

حيث $p_0 = h/\lambda_0$ اندفاع الفوتون الوارد و $E = \left(m_0^2 c^4 + c^2 P^2\right)^{1/2}$ هي طاقة الالكترون الابتدائي .

التمرين الرابع

في تشتت كومبتون كان للفوتون المتشتت طاقة قدرها $120\,\mathrm{KeV}$ اما الالكترون المرتد فقد كانت طاقته الحركية $40\mathrm{KeV}$. اوجد مايلي :

1 – طول موجة الفوتون الاصلي .

2 – زاوية تشتت الفوتون .

3 – زاوية ارتداد الالكترون .

التمريـــــن الخـــامس

في تشـــت كـــومبتـــون ، مـــا هي الزاويــــة التي يظهـــر عندهـــا الفـــوتـــون الاصغـــر طاقـــة ؟

التمريـــــن الســـادس

اذا كان اكبــر قدر من الطاقـــة تم اعطاؤه للالكترون خلال تشتت كومبتـــون هو 40KeV .ما هو طـــول موجـــة الفوتـــون المستخـــدم ؟

التمريـــــن الســـابع

بين ان الفـــوتـــون في تشـــت كـــومبتـــون لا يمكـــن ان يمنـــح كامـــل طاقتــــه للالكتــــرون .

التمريـــــن الثـــامن

يصطدم فوتون تردده ν_0 بالكترون حر في حالة سكون فيرتد الى الخلف بعدما يكون قد منح جزءا من طاقته للالكترون . بين ان الطاقة الحركية للالكترون يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$T = 2h\nu_0 \frac{\alpha}{1+2\alpha}$$

حيث α هي النسبة بين طاقة الفوتون الاصلي و طاقة السكون للالكترون $\left(\alpha = \frac{h\nu_0}{m_e c^2}\right)$.

4.1 امواج دوبروغلي

التمريـــــن الاول

1 – احسب طول موجة دوبروغلي المرفقة بكل من الالكترون و البروتون اذا كان كل منهما يملك طاقة حركية قدرها 1 KeV .

2 – ما هي الطاقة الحركية التي يجب ان يمتلكها اي منهما حتى تكون طول موجة دوبروغلي المرفقة به مساوية ل $1\ A^\circ$.

التمريـــــن الثـــاني

ما هي كمية الطاقة التي يجب اعطاؤها لالكترون غير نسبوي لجعل طول الموجة المرفقة به ينقص من 100 pm الى 50 pm ؟.

التمريـــــن الثـــالث

اذا كانت الزيادة في طاقة الكترون غير نسبوي بمقدار 200 eV تؤدي الى تقليص طول موجة دوبرغلي المرفقة به الى النصف . اوجد طول موجة دوبرغلي الاصلية للالكترون .

التمريـــــن الـــرابع

1 – اشتق عبارة طول موجة دوبروغلي المرفقة بجسيم نسبوي بدلالة طاقته الحركية T .

2 – ما هي الطاقة الحركية لالكترون نسبوي التي يتساوى عندها طول موجة دوبروغلي مع طول موجة كومبتون ؟

الفصـــــل 2

الاسس الرياضياتية للميكانيك الكوانتي

1.2 المصفوفات

التمريـــــن الاول

لتكن المصفوفات A , B و C المعطاة كمايلي :

$$A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}-2&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

اوجد المصفوفة D حيث :

$$D=A+2B-C$$

التمريـــــن الثـــاني

تعطى المصفوفتان A و B :

$$A=\begin{bmatrix}3&2&-1\\0&3&2\\1&-3&4\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}2&-2&3\\1&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$$

– احسب $P=AB$ و $Q=BA$.

التمريـــــن الثـــالث

اوجد منقول المصفوفتان A و B :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1+3i & 2 \\ 0 & 4 & 5i \end{bmatrix}$$

التمريـــــن الـــرابع

اوجد المرافق العقدي للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3i \\ 1+i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

التمريـــــن الخــــامس

اوجد المرافق الهرميتي للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2i & -3i \\ 1-2i & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

التمريـــــن الســـــادس

لتكن المصفوفتان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & i \end{bmatrix}$$

1 – اوجـــد المصفـــوفـــة $P = AB$.

2 – اوجد المرافق الهرميتي للمصفوفة P .

3 – اوجـــد المرافـــق الهرميتي لكل من المصفوفتين A و B .

4 – اوجد المصفوفة $Q = B^\dagger A^\dagger$ و تاكد من ان $Q = P^\dagger$.

التمريـــــن الســـــابع

لتكن المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

1 – احسب محدد هذه المصفوفة .
2 – اوجد مصفوفة المعاملات المتممة .
3 – اوجد مقلوب المصفوفة A .

2.2 الفضاء الشعاعي

التمريـــــن الاول

لنعتبر فضاءا شعاعيا ثلاثي الابعاد اساسه مكون من الاشعة المتعامدة و المقومة : $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. و ليكن $\langle\alpha|$ و $\langle\beta|$ شعاعين من هذا الفضاء معرفين كمايلي :

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - |2\rangle - i|3\rangle$$
$$|\beta\rangle = i|1\rangle + 2|3\rangle$$

1 – اكتب التمثيل المصفوفي للشعاعين $\langle\alpha|$ و $\langle\beta|$.
2 – اكتب الشعـــاعيـــن المرافقيـــن $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$.
3 – اكتب التمثيل المصفوفي للشعاعين $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$.
4 – احسب الجداء السلمي $\langle\alpha|\beta\rangle$ و $\langle\beta|\alpha\rangle$ و تاكد من ان : $\langle\alpha|\beta\rangle = \left(\langle\beta|\alpha\rangle\right)^*$.

التمريـــــن الثـــاني

فضاء شعاعي ثنائي البعد اساسه $\mathcal{A} = \{|a_1>, |a_2>\}$ حيث ان الشعاعين $|a_1>$ و $|a_2>$ متعامدين و مقومين . نختار اساس ثاني $\mathcal{B} = \{|b_1>, |b_2>\}$ حيث :

$$|b_1> = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|a_1> + i|a_2>\Big]$$
$$|b_2> = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|a_1> - i|a_2>\Big]$$

1– اثبت ان الاساس $\mathcal{B}$ متعامد و مقوم .
2 – اكتب التمثيل المصفوفي للاشعة $|a_1>, |a_2>, |b_1>$ و $|b_2>$ في الاساس $\mathcal{A}$.
3 – اوجد مصفوفة التحويل (S) من الاساس $\mathcal{A}$ الى الاساس $\mathcal{B}$.
4 – اكتب التمثيل المصفوفي للاشعة $|a_1>, |a_2>, |b_1>$ و $|b_2>$ في الاساس $\mathcal{B}$.
– لدينا شعاع $|\phi>$ تمثيله المصفوفي في الاساس $\mathcal{A}$ هو :

$$\phi^{(\mathcal{A})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

5 – اكتب التمثيل المصفوفي للشعاع $<\phi|$ في الاساس $\mathcal{B}$.

التمريـــــن الثـــالث

فضاء شعاعي $\mathbb{E}$ ثلاثي الابعاد اساسه مكون من الاشعة المتعامدة و الموحدة $\langle e_1|$, $\langle e_2|$ و $\langle e_3|$. ليكن $\langle \psi|$ و $\langle \phi|$ شعاعان من هذا الفضاء , معرفان كمايلي :

$$|\psi\rangle = i\alpha|e_1\rangle + \alpha|e_2\rangle - \alpha|e_3\rangle$$
$$|\phi\rangle = \beta|e_2\rangle + \beta|e_3\rangle$$

حيث α و β ثابتان حقيقيان .

1 – اثبت ان الجداء السلمي $\langle\psi|\phi\rangle$ معدوم مهما كان الثابتان α و β

2 – حدد الثابتان α و β بحيث يكون :

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\phi|\phi\rangle = 1$$

3 – اوجد شعاعا $\langle \chi|$ بحيث تشكل المجموعة $\Big\{|\psi\rangle, |\phi\rangle, |\chi\rangle\Big\}$ اساسا متعامدا و موحدا للفضاء الشعاعي $\mathbb{E}$.

التمريـــــن الـــرابع

فضاء شعاعي ثلاثي الابعاد اساسه المتعامد و المتجانس هو $\mathcal{A} = \Big\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\Big\}$. نعرف اساسا جديدا لهذا الفضاء $\mathcal{B} = \Big\{|e_1'\rangle, |e_2'\rangle, |e_3'\rangle\Big\}$ كمايلي :

$$|e_1'\rangle = |e_1\rangle$$
$$|e_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|e_2\rangle + |e_3\rangle\Big]$$
$$|e_3'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|e_2\rangle - |e_3\rangle\Big]$$

1 – بين ان الاساس الجديد متعامد و متجانس .

2 – اكتب التمثيل المصفوفي لاشعة الاساس $\mathcal{B}$.

3 – اوجد مصفوفة التحويل (S) من الاساس $\mathcal{A}$ الى الاساس $\mathcal{B}$.

– ليكن $\langle \phi|$ شعاعا من الفضاء المعتبر مركباته في الاساس $\mathcal{A}$ هي $\Big(2, 3i, 2+3i\Big)$.

4 – ما هي مركبات هذا الشعاع في الاساس $\mathcal{B}$ ؟.

3.2 المؤثرات

التمريـــــن الاول

فضاء شعاعي $\mathbb{E}$ ثلاثي الابعاد اساسه $\mathcal{A}$ مكون من الاشعة المتعامدة و المقومة $\langle e_1|$, $\langle e_2|$ و $\langle e_3|$. نعرف في هذا الفضاء المؤثرات $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ بحيث :

$$\begin{array}{lll}\widehat{A}|e_1\rangle = a|e_1\rangle & , \quad \widehat{A}|e_2\rangle = -a|e_2\rangle & , \quad \widehat{A}|e_3\rangle = -a|e_3\rangle \\ \widehat{B}|e_1\rangle = b|e_1\rangle & , \quad \widehat{B}|e_2\rangle = ib|e_3\rangle & , \quad \widehat{B}|e_3\rangle = -ib|e_2\rangle \\ \widehat{C}|e_1\rangle = \frac{c}{\sqrt{2}}|e_2\rangle & , \quad \widehat{C}|e_2\rangle = \frac{c}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{c}{\sqrt{2}}|e_3\rangle & , \quad \widehat{C}|e_3\rangle = \frac{c}{\sqrt{2}}|e_2\rangle\end{array}$$

– اوجد التمثيل المصفوفي للمؤثرات $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ في الاساس $\mathcal{A}$.

التمريـــــــن الثـــاني

فضاء شعاعي ثنائي البعد اساسه $\mathcal{A} = \{|a_1 >, |a_2 >\}$ حيث ان الشعاعين $|a_1 >$ و $|a_2 >$ متعامدين و مقومين . نختار اساس ثاني (متعامد و متجانس) $\mathcal{B} = \{|b_1 >, |b_2 >\}$ حيث :

$$|b_1 >= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|a_1 > +i|a_2 >\Big]$$
$$|b_2 >= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|a_1 > -i|a_2 >\Big]$$

1 – اوجد مصفوفة التحويل من الاساس $\mathcal{A}$ الى الاساس $\mathcal{B}$.

– ليكن $\widehat{T}$ مؤثرا يمثل في الاساس $\mathcal{A}$ بالمصفوفة التالية :

$$T^{(\mathcal{A})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 – اوجد التمثيل المصفوفي للمؤثر $\widehat{T}$ في الاساس $\mathcal{B}$ $\left(T^{(\mathcal{B})}\right)$.

التمريـــــــن الثـــالث

ليكن $\mathcal{A} = \Big\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\Big\}$ اساسا متعامدا و موحدا في الفضاء الشعاعي ثنائي البعد $\mathbb{E}$ و ليكن $\langle\psi|$ و $\langle\phi|$ شعاعان من هذا الفضاء مركباتهما في الاساس $\mathcal{A}$ هما على التوالي $\Big(2, i\Big)$ و $\Big(1+i, 1-i\Big)$.

– باعتبار انه لدينا الشعاعين $|\Psi\rangle = n|\psi\rangle$ و $|\Phi\rangle = m|\phi\rangle$, حيث n و m حقيقيان , و المؤثر الخطي $\widehat{B}$ الذي يمثل في الاساس $\mathcal{A}$ بالمصفوفة التالية

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix}$$

1 – اوجد الثابتان m و n بحيث تكون طويلة كل من $\langle\Psi|$ و $\langle\Phi|$ مساوية للواحد .

2 – تحقق من ان المؤثر $\widehat{B}$ هرميتيا . اكد اجابتك بحساب $\langle\Phi|\widehat{B}|\Psi\rangle$ و $\langle\Psi|\widehat{B}|\Phi\rangle$.

التمريـــــــن الـــرابع

ليكن $\widehat{A}$ مؤثرا يمثل في فضاء ثنائي البعد بالمصفوفة التالية :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix}$$

– اوجد القيم الذاتية a و الاشعة الذاتية $|\phi_a\rangle$ لهذا المؤثر .

التمريــــــن الخـــامس

مؤثر $\widehat{A}$ يمثل في اساس امتعامد و متجانس لفضاء شعاعي ثلاثي الابعاد بالمصفوفة التالية :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1– اوجـــد الاشعـــــة الذاتيـــة و القيـــم الذاتية لهذا المؤثر .

التمريــــــن الســـادس

لدينا فضاء شعاعي ثلاثي الابعاد اساسه الاشعة المتعامدة و الموحدة $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$ و $|e_3\rangle$. نعرف المؤثرين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ على انهما ممثلين بالمصفوفتين التاليتين في الاساس المعتبر :

$$\mathrm{A} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{B} = b \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث ان a و b ثابتان حقيقيان .

1 – هل المؤثرين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ هرميتيان ؟.

2 – اثبت ان هذين المؤثرين متبادلين .

3 – اعط اساسا من الاشعة الذاتية المشتركة بين هذين المؤثرين .

التمريــــــن الســـابع

فضاء شعاعي $\mathbb{E}$ ثلاثي الابعاد اساسه $\mathcal{A}$ مكون من الاشعة المتعامدة و المقومة $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$ و $|e_3\rangle$. نعرف في هذا الفضاء المؤثرات $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ الذين يمثلان في الاساس المعتبر بالمصفوفتين التاليتين :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2i \\ 3 & -2i & 4 \end{bmatrix}$$

– و ليكن $|\phi\rangle$ و $|\psi\rangle$ شعاعان من هذا الفضاء مركباتهما في الاساس المعتبر هي على التوالي : $\big(2,2,2\big)$ و $\big(a,2ai,a\big)$.

1 – اوجد المؤثر المرافق لكل من $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$.

2 – اي منهما يمثل مؤثرا هرميتيا و كيف تؤكد اجابتك ؟.
3 – اوجد الثابت الحقيقي a حتى يكون الشعاع $|\psi\rangle$ مقوما .
4 – اوجد الشعاعين $|\phi'\rangle$ و $|\psi'\rangle$ المعرفين كمايلي :

$$|\phi'\rangle = \widehat{A}|\phi\rangle \quad , \quad |\psi'\rangle = \widehat{A}|\psi\rangle$$

التمريـــــن الثـــامن

تاكد من صحة المعادلات التالية بين المؤثرات :

$$\begin{aligned}
&a. \quad \frac{d}{dx}\cdot x = 1 + x\frac{d}{dx}\\
&b. \quad x^2\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{x} = x\frac{d}{dx} - 1\\
&c. \quad \Big(1+\frac{d}{dx}\Big)^2 = 1 + 2\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\\
&d. \quad \Big(x+\frac{d}{dx}\Big)^2 = 1 + x^2 + 2x\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\\
&e. \quad \Big(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\cdot x\Big)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}
\end{aligned}$$

التمريـــــن التـــاسع

اوجد نتيجة التاثير بكل من المؤثرين $\frac{d^2}{dx^2}\cdot x^2$ و $\left(\frac{d}{dx}\cdot x\right)^2$ على التابعين $\cos x$ و e^x .

التمريـــــن العـــاشر

اوجد القيمة الذاتية للمؤثر $\widehat{A}$ المقابلة للتابع الذاتي ψ_A في الحالات التالية :

$$\begin{aligned}
&1. \quad \widehat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} && , \quad \psi_A(x) = \sin 2x\\
&2. \quad \widehat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 && , \quad \psi_A(x) = e^{-x^2/2}\\
&3. \quad \widehat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx} && , \quad \psi_A = \frac{\sin\alpha x}{x}
\end{aligned}$$

التمريـــــن الحـــادي عشـــر

في الجدول الموالي توجد قائمة من المؤثرات مقابل قائمة بتوابعها الذاتية :

1. $\hat{A} = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}$, $F(x) = 4x^4 - 12x^2 + 3$
2. $\hat{B} = \frac{d^2}{dx^2}$, $G(x) = 5x^4$
3. $\hat{C} = x\frac{d}{dx}$, $H(x) = e^{3x} + e^{-3x}$
4. $\hat{D} = \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$, $R(x) = x^2 - 4x + 2$
5. $\hat{E} = x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx}$, $Q(x) = 4x^3 - 3x$

1 – اربط بين كل مؤثر و تابعه الذاتي و استنتج القيمة الذاتية لكل مؤثر .

التمريـــــن الثـــاني عشـــر

لتكن $\hat{A}$, $\hat{B}$ و $\hat{C}$ ثلاثة مؤثرات و ليكن العدد العقدي λ . اثبت صحة العلاقات التالية :

$$\left[A,B\right] = -\left[A,B\right]$$
$$\left[\lambda A,B\right] = \lambda\left[A,B\right]$$
$$\left[A+B,C\right] = \left[A,C\right] + \left[A,B\right]$$
$$\left[AB,C\right] = \left[A,B\right]C + A\left[B,C\right]$$

التمريـــــن الثـــالث عشـــر

ليكن $\hat{A}$ و $\hat{B}$ مؤثران هرميتيان . اثبت ان :

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]^{\dagger} = -\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

التمريـــــن الـــرابع عشـــر

ليكن $\hat{A}$ و $\hat{B}$ مؤثران متبادلان $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$. اثبت ان :

$(a)-\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2 = \hat{A}^2 + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2$

$(b)-\quad \left(\hat{A}+\hat{B}\right)\left(\hat{A}-\hat{B}\right) = \hat{A}^2 - \hat{B}^2$

$(c)-\quad \left[\left(\hat{A}+\hat{B}\right),\left(\hat{A}-\hat{B}\right)\right] = 0$

التمريـــــن الخـــامس عشــــر

ليكن $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ مؤثران يحققان علاقة التبادل التالية : $\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]=1$. اثبت مايلي :

$$(a)-\quad \left[\widehat{A},\widehat{B}^2\right]=2\widehat{B}$$

$$(b)-\quad \left[\widehat{A},\widehat{B}^3\right]=3\widehat{B}^2$$

$$(c)-\quad \left[\widehat{A}^2,\widehat{B}^2\right]=2\left(\widehat{A}\widehat{B}+\widehat{B}\widehat{A}\right)$$

التمريـــــن الســـادس عشــــر

اثبــــــت ان القيـــــم الذاتيــــة للمؤثـــــر الهرميتـــي هي قيـــم حقيقيـــة .

التمريـــــن الســـابع عشــــر

اثبت ان الاشعة الذاتية للمؤثر الهرميتي المقابلة لقيم ذاتية مختلفة هي اشعـــة متعامدة .

التمريـــــن الثـــامن عشــــر

ليكن $\widehat{Q}$ مؤثرا يحقق المعادلتين التاليتين :

$$\widehat{Q}^\dagger\widehat{Q}^\dagger=0$$
$$\widehat{Q}\widehat{Q}^\dagger+\widehat{Q}^\dagger\widehat{Q}=1$$

و ليكن المؤثر $\widehat{P}$ بحيث :

$$\widehat{P}=\alpha\widehat{Q}\widehat{Q}^\dagger$$

حيث α ثابت حقيقي .

1 – بين ان $\widehat{P}$ مؤثرا هرميتيا .

2– اكتب $\widehat{P}^2$ بدلالة $\widehat{P}$.

3 – اوجد القيم الذاتية للمؤثر $\widehat{P}$.

التمريـــــن التـــاسع عشــــر

ليكن $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ مؤثرين يحققان المعادلتين التاليتين :

$$\widehat{A}=\widehat{B}^\dagger\widehat{B}+3$$
$$\widehat{A}=\widehat{B}\widehat{B}^\dagger+1$$

1 – بين ان $\widehat{A}$ مؤثرا هرميتيا .

2 – اوجد المبدل $\left[\widehat{B}^{\dagger}, \widehat{B}\right]$.

3 – اوجد المبدل $\left[\widehat{A}, \widehat{B}\right]$.

4 – ليكن ψ تابعا ذاتيا للمؤثر $\widehat{A}$ بقيمة ذاتية a :

$$\widehat{A}\psi = a\psi$$

بين انه اذا كان $\widehat{B}\psi \neq 0$ فان $\widehat{B}\psi$ يمثل شعاعا ذاتيا للمؤثر $\widehat{A}$ و اوجد القيمة الذاتية المرفقة به .

الفصـــــل 3

مبادئ الميكانيك الكوانتي

1.3 تابع الحالة و مبدا التركيب

التمريــــــن الاول

جملة فيزيائية تتكون من جسيم كتلته m مجبر على التحرك في بعد واحد (على المحور ox) و في المنطقة المحصورة بين النقطتين $x = 0$ و $x = a$. الحالة الابتدائية لهذه الجملة توصف بالتابع الموجي :

$$\psi_0(x) = A\sin(\frac{\pi}{a}x)$$

حيث A هو ثابت التقويم .

1 – اوجـــد ثابـــــت التقويـــــم A .

2 – ارســـم كثافـــة احتمـــال حضور الجسيم .

3 – في اي نقطة يكون احتمال الحضور اعظميا ؟.

4 – ما هو احتمـــــال تواجــد الجسيـــم في المنطقة $x > a/2$ ؟.

– لنفترض انه لدينا عينة مكونة من $N = 10^8$ جملة مماثلة للجملة السابقة و كلها موجودة في البداية في نفس الحالة

$$\psi_0(x) = A\sin(\frac{\pi}{a}x)$$

.

5 – ما هو عدد الجمل التي يكون جسيمها موجود في المنطقة $x > a/2$ ؟.

التمريــــــن الثـــاني

جملة فيزيائية احادية البعد في حالة مستقرة موصوفة بالتابع التالي :

$$\psi(x)=\begin{cases}0 & : x<-a\\ A\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right) & : -a\le x\le a\\ 0 & : x>a\end{cases}$$

حيث a و A ثابتان حقيقيان .

1 – هل هذا التابع مقبول فيزيايا ؟ اشرح .

2 – قوم هذا التابع .

3 – ارسم كثافة احتمال الحضور .

التمريـــــن الثـــالث

جسيم حالته الفيزيائية عند اللحظة $t=0$ توصف بالتابع الموجي التالي :

$$\psi(x)=\begin{cases}A\frac{x}{a} & : 0\le x\le a\\ A\frac{b-x}{b-a} & : a\le x\le b\\ 0 & : \text{خارج هذا المجال}\end{cases}$$

حيث A يمثل ثابت التقويم .

1 – قـــــوم التابـــــع الموجـــي .

2 – ارسم التابع الموجي بدلالة الموضع .

3 – ارسم كثافـــة احتمــــال الحضور .

4 – ما هو احتمال تواجد الجسيم على يسار النقطة $x=a$ ؟.

– ما هو احتمال تواجـــد الجسيم على يميـــن النقطة $x=a$ ؟.

التمريـــــن الـــرابع

جسيم حالته الفيزيائية عند اللحظة $t=0$ توصف بالتابع الموجي التالي :

$$\psi(x)=\begin{cases}A\left(a^2-x^2\right) & : -a\le x\le a\\ 0 & : \text{خارج هذا المجال}\end{cases}$$

حيث A يمثل ثابت التقويم .

1 – قـــــوم التابـــــع الموجـــي .

2 – ارسم التابع الموجي بدلالة الموضع .

3 – ارســـم كثافـــة احتمـــال الحضور

التمريـــــن الخـــامس

جملة فيزيائية محافظة هاماتونيانها $\widehat{H}$ يحقق معادلة شرودينغر للحالات المستقرة (المستقلة عن الزمن) التالية :

$$\widehat{H}\phi_n(x) = E_n\phi_n(x)$$

حيث ......$n = 1, 2, 3,$ و $\phi_n(x)$ هي التوابع الذاتية للهاملتونيان بقيم ذاتية E_n .

1 – اكتب التوابع $\phi_n(x, t)$.

– الجملة عند اللحظة $t = 0$ كانت موجودة في حالة توصف بالتابع الموجي التالي :

$$\psi(x, 0) = a\phi_2(x, 0) + b\phi_3(x, 0)$$

.

2 – اكتب التابع الموجي $\psi(x, t)$ الذي يصف حالة الجملة عند لحظة زمنية $t > 0$.

3 – بين ان $\psi(x, t)$ يحقق معادلة شرودينغر

$$\widehat{H}\psi(x, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t)$$

التمريـــــــن الســـــادس

جسيم كتلته m يتحرك في بعد واحد (المحور ox) داخل المجال $0 \le x \le a$. هاملتونيان هذا الجسيم يحقق المعادلة التالية :

$$\widehat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

حيث ......$n = 1, 2, 3,$ اما $\psi_n(x)$ فهي تمثل الحالات المستقرة للجسيم و هي تعطى ب :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi}{a}x)$$

1 – تاكـــــد مـــــــن ان التابعيـــــــن $\psi_1(x)$ و $\psi_2(x)$ مقومين و متعامدين .

2 – اكتب التابع $\psi_n(x, t)$ الذي يمثل الحالات الخاصة المتطورة مع الزمن للجسيم .

3 – اكتب الحالات الخاصة $\psi_1(x, t)$ و $\psi_2(x, t)$.

– اذا كان الجسيم عند اللحظة $t = 0$ موجود في حالة توصف بالتابع التالي :

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\sqrt{2}\psi_1(x, 0) + \psi_2(x, 0)\Big]$$

3 – تاكـــــــد مـــــــن ان $\psi(x, 0)$ـــــــــــــ مقوم .

4 – اكتب التابع الموجي $\psi(x, t)$ الذي يصف حالة الجسيم عند اللحظة الزمنية t .

5 – تاكـــــــد مـــــــن ان التابــــــع $\psi(x, t)$ يحقق معادلة التطور لشرودينغر :

$$\widehat{H}\psi(x, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t)$$

التمريـــــن السـابع

جملة فيزيائية S هاملتونيانها $\widehat{H}$ يمتلك اربعة حالات ذاتية $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ و $\psi_4(x)$ بحيث :

$$\widehat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^*(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn}$$

– اذا كانت حالة الجملة عند اي لحظة زمنية t توصف بالتابع التالي :

$$\psi(x,t) = a\psi_1(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + b\psi_2(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}$$

1 – اكتب (باستخدام ترميز ديراك) التابع الموجي الذي يصف حالة الجملة عند اللحظة الزمنية $t = 0$.

2 – ما هو احتمال تواجد الجملة في الحالة الخاصة $\psi_1(x)$ عند اللحظة الزمنية $t = 0$ ؟.

3 – ما هو احتمال تواجد الجملة في الحالة الخاصة $\psi_3(x)$ عند اللحظة الزمنية $t = 0$ ؟.

4 – ما هو احتمال تواجد الجملة عند اللحظة الزمنية الكيفية t في الحالة الخاصة $\psi_1(x,t)$ ؟.

التمريـــــن الثـامن

جسيم كتلته a يتحرك في حقل كموني محافظ $V(x)$ حالته الفيزيائية عند اللحظة t توصف بالتابع :

$$\psi(x,t) = Ae^{-a\left[mx^2/\hbar + it\right]}$$

حيث a و A ثابتان حقيقيان موجبان .

1 – اوجــــــد الثابـــــــت A .

2 – اوجد عبارة الحقل الكموني $V(x)$.

2.3 القياس في الميكانيك الكوانتي

التمريـــــن الاول

لتكن S جملة فيزيائية و ليكن P_1 مقدارا فيزيائيا يمثل في الاساس $A = \left\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\right\}$ (اساس في فضاء الحالات الممكنة للجملة الفيزيائية) بالمصفوفة التالية :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1 – ما هي القيم التي نحصل عليها عند قياس المقدار الفيزيائي P_1 ؟.
1 – اوجد الحالات الذاتية لهذا المؤثر .

التمريـــــن الثــاني

1 – جملة فيزيائية هاملتونيالها $\widehat{H}$ يحقق معادلة الحالات المستقرة التالية :

$$\widehat{H}|\phi_n\rangle = n^2 E_0 |\phi_n\rangle$$

حيث $|\phi_n\rangle$ هي التوابع الذاتية المقومة للهاملتونيان و $n = 0, 1, 2, 3, ...$.
– الجملة الفيزيائية كانت في البداية في حالة توصف بالتابع التالي :

$$|\psi_0\rangle = A\Big[\sqrt{2}|\phi_1\rangle + \sqrt{3}|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle + |\phi_4\rangle\Big]$$

حبث A ثابت حقيقي .
1 – اوجـــــد الثابــــــت A .
2 – اذا قمنـــــا بقياس طاقة الجملة :
ا – ما هي القيـــم التي يمكـــن الحصول عليها ؟.
ب – ما هـــو احتمال الحصول على كل قيمة ؟.
– ليكن المؤثر $\widehat{P}$ المقابل للمقدار الفيزيائي P و الذي يحقق المعادلة التالية :

$$\widehat{P}|\phi_n\rangle = \Big(n+1\Big)\alpha_0|\phi_n\rangle$$

3 – ما هي القيم التي يمكن الحصول عليها عند قياس المقدار الفيزيائي P و باي احتمال ؟.
– لنفترض ان عملية قياس الطاقة اعطت القيمة $4E_0$.
4 – ما هـــــي القيمـــــة التي نحصل عليهــــا عنــــد قيــــاس P بعد ذلك مباشرة ؟.

التمريـــــن الثــالث

لتكن $\psi_n(x)$ مجموعة كاملة من التوابع المتعامدة و المقومة و التي تشكل حلا لمعادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن :

$$\widehat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

اذا كانت الجملة الفيزيائية عند اللحظة $t = 0$ في الحالة التالية :

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_2(x) + \frac{1}{\sqrt{6}}\psi_3(x)$$

1 – اكتــــب التابــــــــع $\Psi(x,t)$.
2 – ماهو احتمال الحصول على القيمة E_2 كنتيجة لعملية قياس الطاقة عند لحظة زمنية t .
3 – اوجد القيمة المتوسطة للطاقة $(\langle\widehat{H}\rangle)$.

التمريـــــن الـــرابع

لنعتبر انه لدينا جملة فيزيائية محافظة , هاملتونيانها $\widehat{H}$ معرف كمايلي :

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1 – ماهي القيـــم الممكنـــــة للطاقة ؟.

– فرضا ان الجملة عند اللحظة الزمنية $t = 0$ كانت في الحالة التالية :

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} i \\ -i \\ i \end{bmatrix}$$

2 – ما هي القيم التي يمكن الحصول عليها عند قياس الطاقة ؟.

3 – ما هو احتمـــــال الحصـــــول على كـــل قيمـــــة ؟.

4 –احســــــب القيمــــــة المتوسطــة لطاقــــة الجملــــــة .

التمريـــــن الخـــــامس

جملة فيزيائية محافظة (S) حالاتها تشكل فضاءا شعاعيا ثلاثي الابعاد , ليكن $\widehat{A}$ مقدارا فيزيائيا لهذه الجملة معرف كمايلي :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{bmatrix}$$

1 – ماهــي القيـــم الممكنـــة لهـــــذا المقـــــدار الفيزيائـــــي ؟.

– فرضا ان الجملة عند اللحظة الزمنية $t = 0$ كانت في الحالة التالية :

$$|\psi_0\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

2 – ما هي القيم التي يمكن الحصول عليها عند قياس المقدار A ؟.

3 – ما هـــــو احتمـــــال الحصـــول علـــى كـــل قيمـــة ؟.

التمريـــــن الســـادس

لنعتبر انه لدينا جملة فيزيائية محافظة , هاملتونيانها H و حالتها الابتدائية $|\psi_0\rangle$ معرفان كمايلي :

$$H = \mathcal{E}\begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث $\mathcal{E}$ ثابت له وحدة الطاقة .

1 – اوجد القيم الذاتية و الحالات الذاتية للطاقة ؟.

2 – ما هي القيم التي يمكن ان الحصول عليها عند قياس طاقة الجملة ؟.

3 – ما هو احتمال الحصول على كل قيمة ؟.

4 – احسب القيمة المتوسطة للطاقة .

التمريـــــن الســـابع

جملـــة فيزيائيـــــة محافظـــــة هامتونيانهــــا $\widehat{\mathrm{H}}$ (مستقر) يعطى بالمصفوفة التالية :

$$H = \mathcal{E}_0\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حيث $\mathcal{E}_0$ ثابت له وحدة الطاقة . و ليكن A مقدارا فيزيائيا يمثل بالمصفوفة التالية :

$$A = a\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1 – ما هي القيـــم الممكنة لطاقـــة هذه الجملة ؟.

2 – اوجـــــد الاشعـــــة الذاتيـــة للهاملتونيان .

3 – فرضا اننا قمنا بقياس الطاقة فحصلنا على القيمة $(-\mathcal{E}_0)$. ما هي القيم التي يمكن الحصول عليها اذا قمنا بعد ذلك مباشرة بقياس المقدار الفيزيائي A و باي احتمال ؟.

التمريـــــن الثـــامن

المصفوفات الموالية هي عبارة عن تمثيل لبعض المرئيات لجملة فيزيائية :

$$A = a\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = a\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = a\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad D = a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

1 – اوجد القيم التي يمكن ان ياخذها كل مقدار من المقادير السابقة .

2 – اوجد الاشعة الذاتية لكل مقدار .

3 – حدد المرئيات المتوافقة من بين هذه المرئيات و شكل اساسا من الاشعة الذاتية المشتركة لها .
4 – من بين مجموعات المؤثرات $\{\widehat{D}\}, \{\widehat{C}\}, \{\widehat{B}\}, \{\widehat{A}\}$ ما هي التي تشكل جملة كاملة من المرئيات المتبادلة ؟.
5 – من بين التشكيلات التالية $\{\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}\}, \{\widehat{A}, \widehat{D}\}, \{\widehat{B}, \widehat{C}\}, \{\widehat{A}, \widehat{C}\}, \{\widehat{A}, \widehat{B}\}$ ما هي التي تشكل جملة كاملة من المرئيات المتبادلة ؟.

التمريـــــــن التـــاسع

ليكن $\widehat{A}$ مؤثرا له ثلاثة حالات ذاتية متعامدة و مقومة ϕ_1 , ϕ_2 و ϕ_3 بقيم ذاتية a , $2a$ و $3a$ على التوالي .
– عملية قياس المقدار الفيزيائي $\widehat{A}$ لجملة فيزيائية موجودة في حالة موصوفة بالتابع ϕ بينت ان احتمال الحصول على القيمة a هو $0,5$ و ان احتمال الحصول على القيمة $2a$ مساوي لاحتمال الحصول على القيمة $3a$.
1 – احسب القيمة المتوسطة للمقدار A .
2 – اكتب التابع المقوم ϕ بدلالة التوابع الذاتية للمؤثر $\widehat{A}$.

الفصـــــل 4

مسائل بسيطة في الميكانيك الكوانتي

1.4 المسائل احادية البعد –الحالات المرتبطة

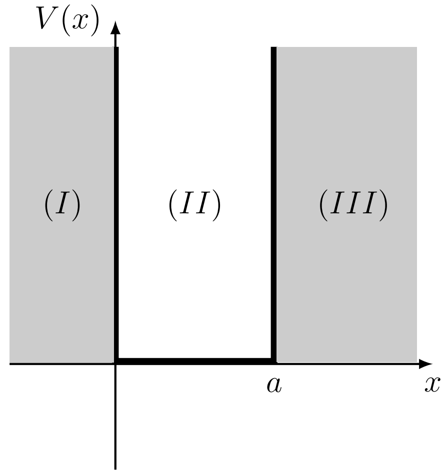
التمريـــــن الاول

جسيم كتلته m يتحرك في حقل كموني معرف كمايلي (الشكل 1.4) :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & : x < 0 \\ 0 & : 0 \leq x \leq a \\ \infty & : x \geq a \end{cases} \tag{1.4}$$

1 – اكتب معادلة شرودينغـــر للحالات المستقرة في المنطقة الثانيـــة .
2 – اوجـــد حلـــول هـــذه المعادلـــة .
3 – اوجـــد القيـــم الممكنـــة للطاقـــة .
4 – تاكد من ان حلول معادلة شرودينغر هـــي توابع متعامـــــدة .
5 – ارســـم التوابـــع الموجيـــــة للحـــالات الثـــلاث الاولـــى .
6 – ارسم كثافة احتمال تواجـــد الجسيم للحالات الثلاث الاولى .

التمريـــــن الثـــاني

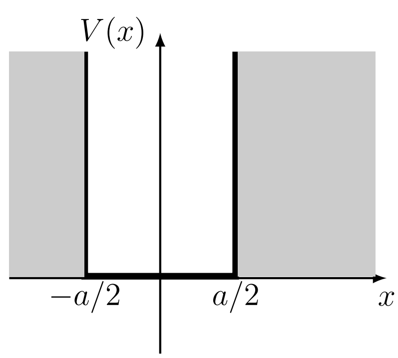


شكل 1.4

جسيم كتلته m يتحرك في بئر كمونية لانهائية متناظرة (الشكل 2.4) :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & : x < -a/2 \\ 0 & : -a/2 \leq x \leq a/2 \\ \infty & : x \geq a/2 \end{cases}$$

1 – اوجد التوابع الموجية لهذا الجسيم و القيم الممكنة للطاقة .



شكل 2.4

التمريـــــن الثـــالث

جسيم كتلته m و طاقته E يتحرك في حوض كمونية متناظرة) الشكل 3.4 (:

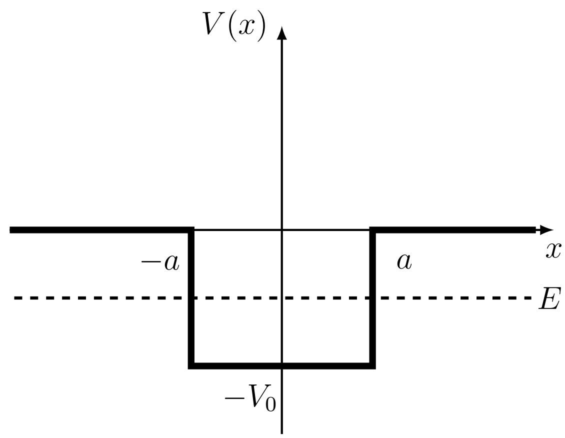
$$V(x) = \begin{cases} 0 & : x < -a \\ -V_0 & : -a \leq x \leq a \\ 0 & : x \geq a \end{cases}$$

– بين ان مستويات الطاقة بالنسبة للحالات المرتبطة $E < 0$ هي الحل البياني للمعادلتين التاليتين :

$$\tan ka = \frac{q}{k} \quad , \quad \cot ka = -\frac{q}{k}$$

حيث:

$$k = \frac{\sqrt{2m\left(V_0 + E\right)}}{\hbar} \quad , \quad q = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$



شكل 3.4

التمريـــــن الـــرابع

جسيم كتلته m يتحرك في حقل كموني احادي البعد (تسمى هذه الجملة الفيزيائية بالهزاز التوافقي) معرف كمايلي :

$$V(x) = kx^2/2$$

حيث (k) ثابت حقيقي موجب .الجملة موجودة في الحالة الاساسية المعرفة بالتابع :

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} exp\left(-\alpha^2 x^2/2\right)$$

حيث $\alpha = \left(mk/\hbar^2\right)^{1/4}$. طاقـــة هذه الجملـــة المقابلـــة لهذه الحالـــة هـــي :

$$E_0 = \hbar w/2$$

$$w = \sqrt{k/m}$$

1 – ارسم الكمون موضحا نقاط الارتداد الكلاسيكية .

2 – احسب احتمال تواجد الجسيم في المنطقة المحرمة كلاسيكيا .

التمريـــــــن الخـــامس

جسيم كتلته m يتحرك في حقل كموني معرف كمايلي (الشكل 4.4):

$$V(x) = -\alpha\delta(x)$$

.

حيث :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & : x \neq 0 \\ \infty & : x = 0 \end{cases}$$

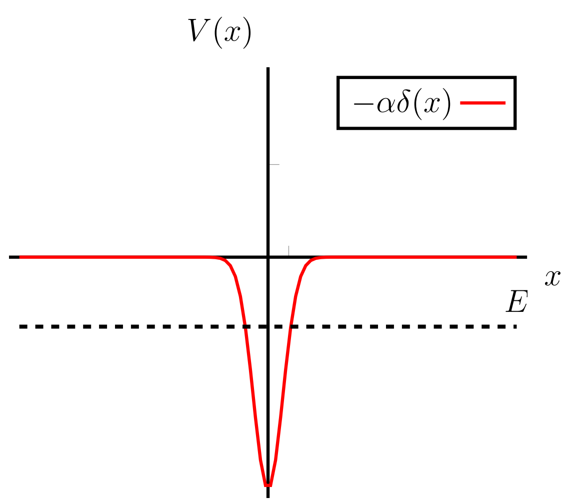
1 – اوجد حلول معادلة شرودينغر في المنطقتين الاولى و الثانية .

2 – بين ان طاقة الجسيم تعطى ب :

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

نذكر ان :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = f(a)$$



شكل 4.4: بئر ديراك

التمريـــــــن الســـادس

جسيم يتحرك داخل بئر كمونية عرضها a و جدرانها عند النقطتين $x=0$ و $x=a$ (الشكل **1.4**) . حالته الابتدائية توصف بالتابع :

$$\psi(x,0) = Ax(a-x)$$

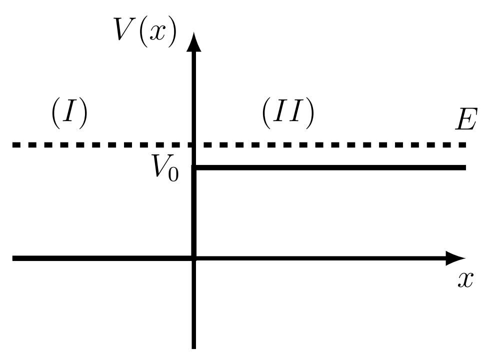
.

1 – اوجد ثابت التقويم A .
2 – ارسم التابع $\psi(x,0)$.
3 – ارسم كثافة احتمال الحضور عند اللحظة الابتدائية .
4 – عند اي نقطة يكون احتمال تواجد الجسيم اعظميا ؟
5 – احسب القيمة المتوسطة لموضع الجسيم .
6 – احسب القيمة المتوسطة لكمية الحركة .
7 – اكتب التابع $\psi(x,0)$ بدلالة التوابع الذاتية للهاملتونيان .
8 – اكتب التابع $\psi(x,t)$.

2.4 المسائل احادية البعد – الحالات الغير مرتبطة

التمريـــــن الاول

جسيم كتلته m و شحنته q يتحرك في حقل كموني احادي البعد يعطى ب (الشكل **5.4**) :



شكل **5.4**

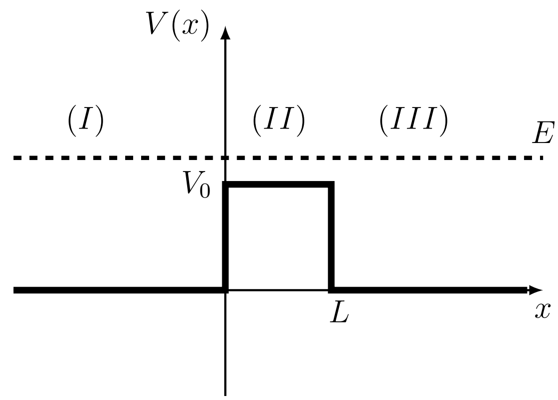
$$V(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ V_0 & : x \geq 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

– اعتبر ان هذا الجسيم انطلق من اليسار متوجها نحو اليمين و ان $E > V_0$.
1 – اكتب معادلة شرودينغر في المنطقة الاولى .

2 – اوجد حلول هذه المعادلة .
3 – اكتب معادلة شرودينغر في المنطقة الثانية .
4 – اوجد حلول هذه المعادلة .
5 – اوجد معامل النفوذ (احتمال النفوذ) و معامل الانعكاس .
6 – تاكد من ان مجموع معامل النفوذ ومعامل الانعكاس مساو للواحد .

التمريـــــن الثـــاني

جسيم كتلته m و طاقته E يتحرك من اليسار نحو اليمين فيواجه عند النقطة $x = 0$ حاجزا كمونيا ارتفاعه V_0 و عرضه



شكل 6.4

L كما هو موضح بالشكل 6.4 .
1 – اوجد احتمال العبور و احتمال الارتداد لجسيم طاقته اكبر من ارتفاع الحاجز .
2 – ارسم تغيرات احتمال النفوذ بدلالة طاقة الجسيم .
3 – بين ان احتمال النفوذ يعطى بالصيغة التالية :

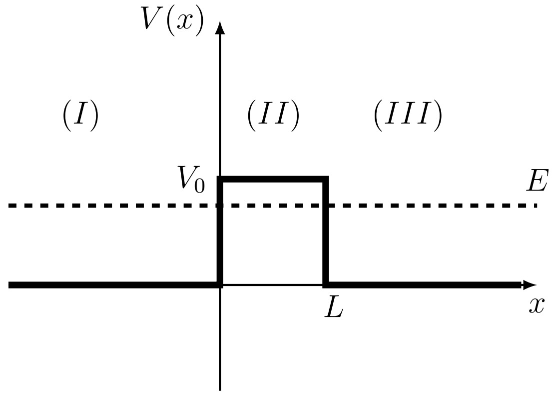
$$T = \left[1 + \frac{ma^2V_0}{2\hbar^2}\right]^{-1}$$

عندما تكون طاقة الجسيم مساوية تقريبا لارتفاع الحاجز .

التمريـــــن الثـــالث

جسيم كتلته m و طاقته E يتحرك من اليسار نحو اليمين فيواجه عند النقطة $x = 0$ حاجزا كمونيا ارتفاعه V_0 و عرضه L كما هو موضح بالشكل 7.4 .
1 – اثبت ان احتمال العبور بالنسبة لجسيم طاقته اقل من ارتفاع الحاجز يعطى بالصيغة التالية :

$$T = \left[1 + \frac{V_0^2}{4E\big(V_0 - E\big)} \sinh^2 qL\right]^{-1}$$



شكل 7.4

حيث :

$$q = \sqrt{2m\Big(V_0 - E\Big)}/\hbar$$

2 – بين ان احتمال النفوذ يعطى بالصيغة التالية :

$$T = \left[1 + \frac{ma^2V_0}{2\hbar^2}\right]^{-1}$$

عندما تكون طاقة الجسيم مساوية تقريبا لارتفاع الحاجز .

التمريـــــن الـــرابع

جسيم كتلته m و طاقته $E > 0$ يتحرك من اليسار نحو اليمين في حقل كموني معرف كمايلي (الشكل 8.4) :

$$V(x) = -\alpha\delta(x)$$

.

– بين ان احتمال الانعكاس R يعطي بالصيغة التالية :

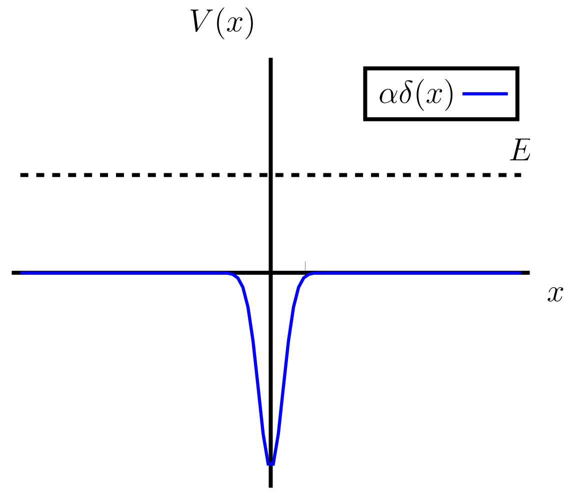
$$R = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$

حيث :

$$\beta = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{2mE}}$$

3.4 المسائل ثلاثية البعد – الحالات المرتبطة

التمريـــــن الاول



شكل 8.4: حاجز ديراك

جسيم كتلته m يتحرك في حقل كموني (يسمى الصندوق الكموني) معرف كمايلي :

$$V(x,y,z)=\begin{cases}0 & : 0\le x\le a\ ,\ 0\le y\le b\\ \infty & \text{خارج هذا المجال :}\end{cases} \tag{3.4}$$

1 – ارسم الحقل الكموني .
2 – بين ان معادلة شرودينغر يمكن ان تتحول الى معادلتين مستقلتين لمتغير واحد .
3 – اوجد حلول هاتين المعادلتين .
4 – اوجد القيم الممكنة للطاقة .
5 – ما هي درجة انحطاط المستويات الطاقوية الاربعة الاولى ؟

التمريـــــن الثـــاني

انطلاقا من معطيات التمرين الاول و باخذ $b=a=2\pi$:
1 – اكتب عبارة الطاقة و حدد درجة انحطاط كل مستوى .
2 – ارسم مخططا لمستويات الطاقة .
3 – ارسم كثافة احتمال الحضور الجسيم اذا كان موجودا في الحالة الاساسية .

التمريـــــن الثـــالث

جسيم كتلته m يتحرك في حقل كموني (يسمى الصندوق الكموني) معرف كمايلي :

$$V(x,y,z)=\begin{cases}0 & : 0\le x\le a\ ,\ 0\le y\le b\ ,\ 0\le z\le c\\ \infty & \text{خارج هذا المجال :}\end{cases} \tag{4.4}$$

– انطلاقا من النتائج المتحصل عليها من التمرين الاول اوجد مايلي :

1 – التابع الموجي لهذا الجسيم .

2 – القيم الممكنة للطاقة .

الفصـــــل 5

العزم الحركي

التمريـــــن الاول

انطلاقا من تعريف العزم الحركي و من علاقات التبادل القانونية اثبت مايلي :

$$\left[\hat{x}, \hat{L}_z\right] = -i\hbar\hat{y}$$
$$\left[\hat{y}, \hat{L}_z\right] = i\hbar\hat{x}$$
$$\left[\hat{z}, \hat{L}_z\right] = 0$$

التمريـــــن الثـــاني

انطلاقا من تعريف العزم الحركي و من علاقات التبادل القانونية اثبت مايلي :

$$\left[\hat{p_x}, \hat{L}_z\right] = -i\hbar\hat{p_y}$$
$$\left[\hat{p_y}, \hat{L}_z\right] = i\hbar\hat{p_x}$$
$$\left[\hat{p_z}, \hat{L}_z\right] = 0$$

التمريـــــن الثـــالث

انطلاقا من تعريف العزم الحركي و من علاقات التبادل القانونية اثبت مايلي :

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = i\hbar\hat{L}_z$$
$$\left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] = i\hbar\hat{L}_x$$
$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] = i\hbar\hat{L}_y$$

التمريـــــن الـــرابع

اثبت ان :

$$\vec{L} \times \vec{L} = i\hbar\vec{L}$$
$$\vec{L}.\vec{r} = 0$$
$$\vec{L}.\vec{p} = 0$$

التمريـــــن الخـــامس

بين ان :

$$\left[\hat{L}_x, r^2\right] = \left[\hat{L}_y, r^2\right] = \left[\hat{L}_z, r^2\right] = 0$$

حيث :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

التمرين السادس

التمريـــــن الســـادس

ليكن التابعين الكرويين التاليين :

$$Y_{0,0}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$
$$Y_{1,-1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}$$

1 – بين انهمـــا مقومـــان .
2 – بين انهمـــا متعامدان .

التمريـــــن الســـابع

حدد قيمة كل من العددين الكميين l و m الخاصين بكل تابع من التوابع الكروية التالية :

$$- Y_a(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$- Y_b(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$$

$$- Y_c(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$- Y_d(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\Big(3\cos^2\theta - 1\Big)$$

التمريـــــن الثـــامن

جملة فيزيائية موجودة في حالة $|\psi\rangle = |l,m\rangle$ حيث $|l,m\rangle$ هي احدى الحالات الذاتية المشتركة بين L^2 و L_z .

– احسب القيمة المتوسطة لكل من L_x و L_x^2 باستخدام مؤثري الرفع و الخفض L_+ و L_-.

التمريـــــن التـــاسع

فضاء شعاعي اساسه هو $\Big\{|1,-1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\Big\}$

حيث $|l,m\rangle$ يمثل ترميز ديراك للتوابع الكروية $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ اي ان : $|l,m\rangle \equiv Y_{l,m}(\theta,\phi)$.

1 – احسب باستخدام مؤثري الرفع و الخفض L_+ و L_- تاثير L_x على اشعة الاساس .

2 – اوجد المصفوفة الممثلة للمؤثر L_x .

3 – اوجد القيم الذاتيـــة للمركبة L_x .

4 – اوجد الاشعة الذاتيـــة للمؤثر L_x .

التمريـــــن العـــاشر

جملة فيزيائية موجودة في حالة توصف بالتابع الموجي التالي :

$$\psi(\theta,\phi) = A\sin\theta e^{i\phi}$$

حيث A ثابت حقيقي .

بين ان هذا التابع هو تابع ذاتي لكل من مربع العزم الحركي و مركبة العزم الحركي وفق المحور (oz) و استنتج القيم الذاتية لكل منهما .

الفصـــــل 6

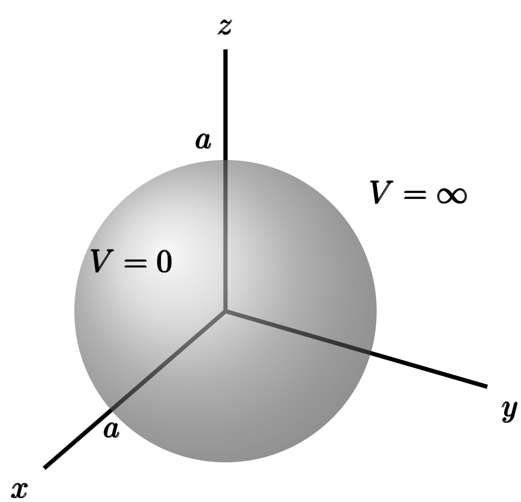
الحركة في حقل مركزي

التمريـــــن الاول

– جسيم كتلته m يتحرك في حقل كموني مركزي (بئر كمونية كروية) معرف كمايلي (الشكل 1.6) :

$$V(r) = \begin{cases} 0 & : r \leq a \\ \infty & : r > a \end{cases} \tag{1.6}$$

1 – اوجـــــد التوابــع الموجية للحالات s .



شكل 1.6: البئر الكمونية الكروية

2 – اوجد طاقة المستوى الاساسي للحالات s .

التمريـــــن الثـــاني

– جسيم كتلته m يتحرك في حقل كموني مركزي معرف كمايلي :

$$V(r)=\begin{cases}0 & : a\le r\le b\\ \infty & : \text{خارج هذا المجال}\end{cases} \tag{2.6}$$

1 – ارسم منحنى الكمون بدلالة المتغير القطري r .

2 – اوجـــــد حلـــول ـــ معادلـــة شرودينغـــر .

3 – اوجـــد طاقـــة المستوى الاساسي للحالات s .

التمريـــــن الثـــالث

جسيم كتلته m يتحرك في حقل كموني مركزي معرف كمايلي :

$$V(r)=\begin{cases}-V_0 & : r\le R_0\\ 0 & : r\ge R_0\end{cases} \tag{3.6}$$

1– اوجـــــد التابـــــع الموجـــــي للحـــــالات (s).

2 – اوجد المعادلة التي تسمح بتحديد طاقة هذه الحالات .

التمريـــــن الـــرابع

جسيم كتلته m يتحرك في حقل كموني مركزي من الشكل

$$V(r)=-\alpha/r$$

حيث α ثابت حقيقي موجب .

– الحالة الاساسية لهذا الجسيم تعطى ب :

$$\psi_1(r,\theta,\phi)=Ae^{\beta r}$$

حيث :

$$H\psi_1(r,\theta,\phi)=E_1\psi_1(r,\theta,\phi)$$

اثبت ان :

1 – :

$$A^2=\beta^3/\pi$$

2 – :

$$\beta=\frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

3 – :

$$E_1=-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

4 – القيمـــة المتوسطـــة للطاقـة الكامنـة هي :

$$\langle V\rangle = 2E_1$$

5 – القيمـــة المتوسطـــة للطاقـة الحركيـة هي :

$$\langle T\rangle = -E_1$$

6 – القيمة المتوسطة لبعد الجسيم عن مركز الحقل هي :

$$\langle r\rangle = \frac{3}{2}\frac{1}{\beta}$$

7 – احتمال تواجد الجسيم يكون اعظميا على بعد قدره :

$$r = \frac{1}{\beta}$$

التمريـــن الخـامس

جسيم يتحرك في حقل مركزي حالته الفيزيائية توصف بالتابع :

$$\psi(r,\theta,\phi) = A\Big(e^{i\phi}\sin\theta + \cos\theta\Big)g(r)$$

حيث :

$$\int_0^\infty |g(r)|^2 r^2 dr = 1$$

1 – اوجـــد ثابـت التقويـــم A.
2 – ما هي القيم التي يمكن الحصول عليها عند قياس L_z؟
3 – ما هـو احتمـال الحصـول على كـل قيمـة ؟.
4 – ما هي القيمـــة المتوسطـــة ل L_z؟

الفصـــــل 7

التشتت بواسطة كمون مركزي

التمريـــــن الاول

نقوم بتوجيه حزمة جسيمات طاقتها E و كتلتها m نحو هدف من الجسيمات كمونها معرف كمايلي ، يسمى الكرة الصلدة ، (الشكل 1.7) :

$$V(r) = \begin{cases} \infty & : r < r_0 \\ 0 & : r \geq r_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

و ندرس تشتت الامواج (s) اي تشتت الجسيمات التي عددها الكمي المداري مساو للواحد $(l = 0)$.

1 – اكتب المعادلة التفاضلية القطرية للامواج (s) في المنطقة $(r > r_0)$.

2 – استخـــدم شـــرط الاستمـــرار لايجـــاد الانزيـــاح الطوري (δ_0).

3 – بين ان المقطع العرضي للجسيمـــات ضعيفـــة الطاقـــة يعطـــى ب:

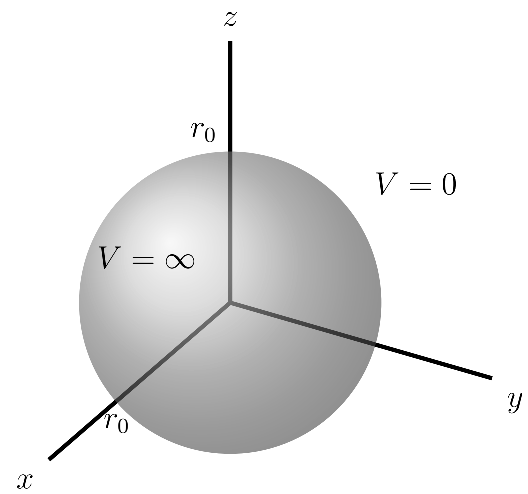
$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k} \sin^2 \delta_0(k)$$

حيث $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

التمريـــــن الثـــاني

نقـــوم بتوجيـــه حزمـــة جسيمـــــــات طاقتهـــــا E و كتلتها m نحو هدف من الجسيمات كمونها معرف كمايلي (يسمى الكرة الصلدة) :

$$V(r) = \begin{cases} \infty & : r < r_0 \\ 0 & : r \geq r_0 \end{cases} \tag{2.7}$$



شكل 1.7: الكرة الصلدة

و ندرس تشتت الامواج (p) اي تشتت الجسيمات التي عددها الكمي المداري مساو للواحد $(l = 1)$.
1 – اكت المعادلـة التفاضلية القطرية للامواج (p) في المنطقة $(r > r_0)$.
2 – بيـن ان حلهـا يمكـن كتابتـه علـى النحـو التالـي :

$$u_1(r) = C\left[\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr + a\left(\frac{\cos kr}{kr} + \sin kr\right)\right]$$

حيث (C) و (a) ثابتان .
3 – بين انطلاقا من تعريف (δ_1) ان :

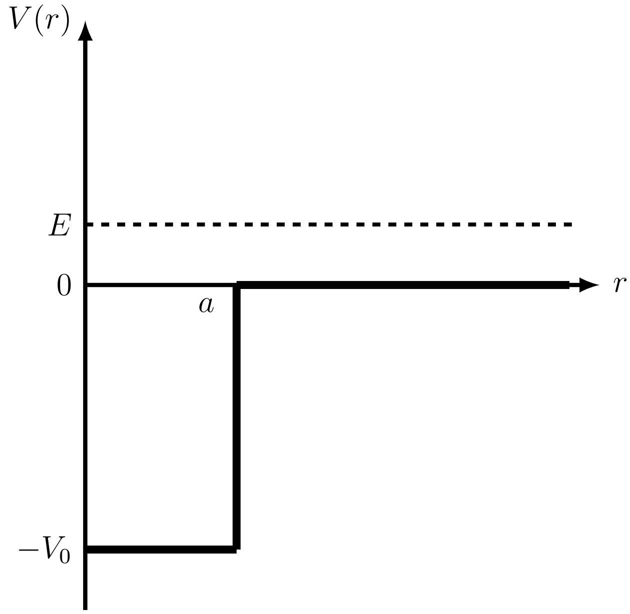
$$a = \tan \delta_1(k)$$

4 – اوجـد الثابـت (a) انطلاقـا من شرط استمـرار التابـع القطـري .
5 – اثبـت ان (δ_1) يسلك سلوك $(kr_0)^3$ بالنسبة للجسيمات ضعيفة الطاقة $(k \ll 1)$.

التمريـــن الثـالـث

نقـوم بتوجيـه حزمـة من الجسيمات النقطية ذات كتلة m و طاقة E نحو بئر كمونية منتهية عمقها V_0 و نصف قطرها a (الشكل 2.7) و ندرس تشتت الامواج (s).
1 – اثبت ان المعادلة التي تحدد الانزياح الطوري الحاصل على التابع الموجي لهذه الامواج تعطى ب :

$$k_1 \cot k_1 a = k \cot(ka + \delta_0)$$



شكل 2.7: بئر كمونية منتهية

حيث :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$
$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

2 – باعتبار ان طاقة هذه الامواج ضعيفة $(ka \ll 1 \implies \delta_0 \ll 1)$. اثبت ان المقطع العرضي لتشتت هذه الامواج يعطى ب :

$$\sigma_0 = 4\pi a^2\Big[\frac{\tan k_1 a}{k_1 a} - 1\Big]^2$$

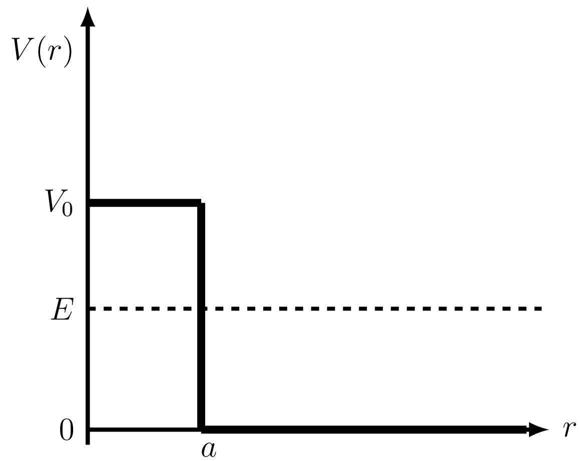
.

التمريـــــن الـــرابع

نقـــوم بتوجيـــه حزمـــة من الجسيمـــات النقطيـــة ذات كتلـــة m و طاقة E نحوحاجزا كمونيا ارتفاعه V_0 و مداه a (الشكل 3.7) و ندرس تشتت الامواج (s).

– باعتبار ان طاقة هذه الامواج ضعيفة $(ka \ll 1 \implies \delta_0 \ll 1)$ اثبت ان المقطع العرضي لتشتت هذه الامواج يعطى ب :

$$\sigma_0 = 4\pi a^2\Big[\frac{\tanh ka}{ka} - 1\Big]^2$$



شكل 3.7: حاجز كموني كروي

حيث :

$$\boldsymbol{k = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}}$$

الفصـــــل 8

الطرق التقريبية

1.8 الاضطرابات المستقرة

التمريــــــن الاول

جسيم كتلته m يتحرك في بئر كمونية لانهائية احادية البعد جدرانها عند النقطتين $x = 0$ و $x = a$. نؤثر على هذه الجملة بكمون ضعيف (الشكل 1.8) من الشكل :

$$W(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ V_0 & : 0 \leq x \leq a \\ 0 & : x \geq a \end{cases}$$

1 – احسب التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى على المستوى الاساسي لهذه الجملة مع العلم ان الحالات الذاتية للهاملتونيان الاساسي هي :

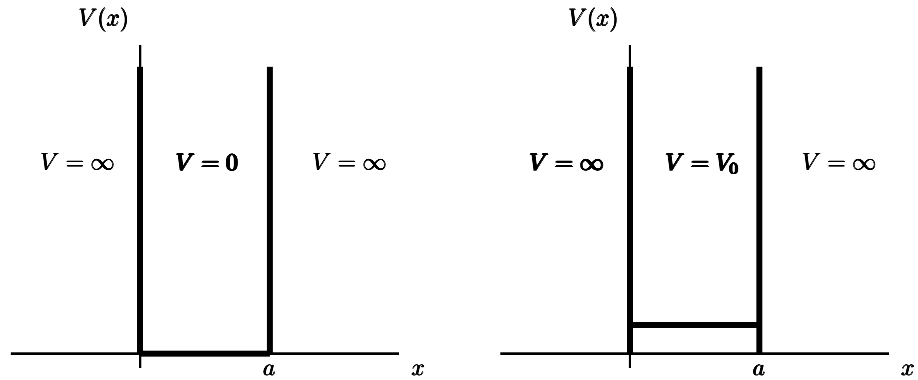
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)x$$

.

2 – بين ان التصحيـــح الطاقـــوي من الرتبــــة الاولى على اي من المستويـــات الطاقوية لهذه الجمة هو نفسه و يعطى ب :

$$\Delta E_n^{(1)} = V_0$$

التمريــــــن الثـــاني



شكل 1.8: بئر كمونية مثارة باظطراب ثابت

نؤثر على جسيم موجود في بئر كمونية احادية البعد باضطراب من الشكل (الشكل 2.8):

$$W(x)=\begin{cases}0 & : x\leq 0\\ V_0 & : 0\leq x\leq a/2\\ 0 & : a/2\leq x\leq a\\ 0 & : x\geq a\end{cases}$$

كما هو موضح بالشكل 2.8 .
– بين ان التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى على اي مستوى طاقوي هو :

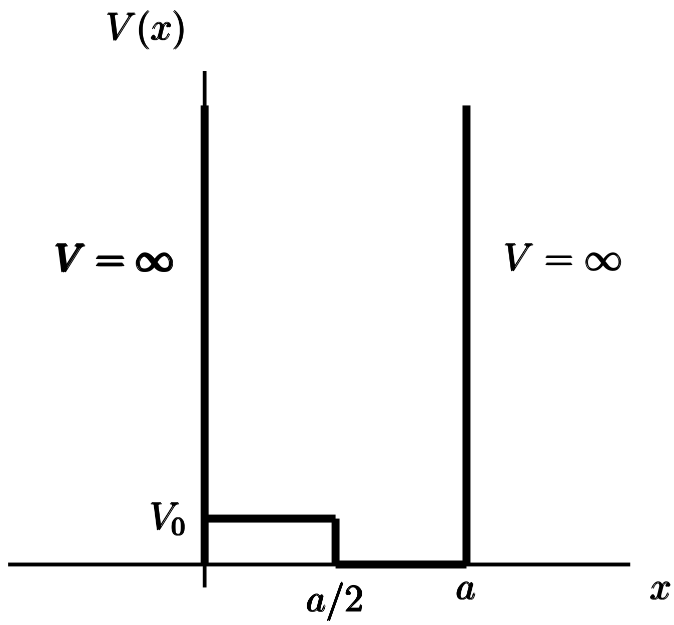
$$\Delta E_n^{(1)}=V_0/2$$

التمرين الثالث

نؤثر على جسيم كتلته m يتحرك في بئر كمونية لا نهائية جدرانها عند $x=0$ و $x=a$ باضطراب من الشكل (الشكل 3.8) $H'=V_0x/a$.
1 – اوجد التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى على المستويات الطاقوية الثلاث الاولى .
2 – بين ان النتيجة المتحصل عليها هي نفسها لكل المستويات الطاقوية .

التمرين الرابع

جسيم كتلته m يتحرك في بئر كمونية لا نهائية جدرانها عند $x=0$ و $x=a$.
– اوجد التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى على المستوى الطاقوي الاول مستخدما طريقة الاضطرابات المستقرة نتيجة التاثير بالكومونات التالية :



شكل 2.8

$$H' = V_0 (x/a)^2$$
$$H' = V_0 \sin(x/a)$$

التمرين الخامس

جسيم كتلته m يتحرك في حقل كموني (هزاز توافقي) معرف ب :

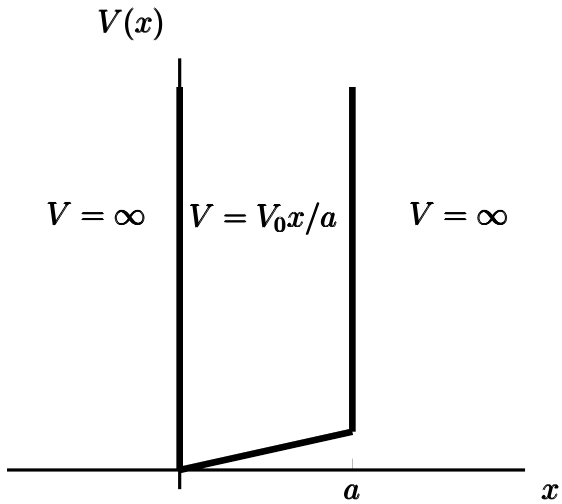
$$V(x) = \frac{k}{2}x^2 \quad , \quad k > 0$$

نطبق عليه كمونا ضعيف من الشكل (الشكل 4.8) $W = ax$ حيث $(a > 0)$
– احسب التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى على المستوى الطاقوي الاساسي لهذه الجملة مع العلم ان الحالة الاساسية للهزاز التوافقي هي :

$$\psi_0(x) = \left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\alpha^2 x^2/2} \quad , \quad \alpha = \sqrt{\frac{mw}{\hbar}} \quad , \quad w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

التمرين السادس

احسب التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى على المستوى الطاقوي الاساسي لهزاز توافقي احادي البعد عندما نطبق عليه



شكل 3.8: نقاط الارتداد الكلاسيكية لهزاز توافقي في الحالة الاساسية

كمونا ضعيف من الشكل (الشكل 5.8) $W=ax^4$

– استخدم النتيجة التالية :

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{(2n)!}{n!2^{2n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}} \quad , \quad \alpha>0 \ \textbf{من اجل}$$

التمريـــــن الســـابع

بين ان التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى على المستويات الطاقوية للهزاز التوافقي احادي البعد عندما نطبق عليه كمونا ضعيف من الشكل $W=bx^4$ يعطى بالعبارة التالية :

$$\Delta E_n^{(1)}=\frac{3b\hbar^2}{4mk}\left(2n^2+2n+1\right)$$

مع العلم ان التوابع الذاتية للهزاز التوافقي تعطى ب :

$$\phi_n(\xi)=\left(\frac{mw}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(\xi)e^{-\xi^2/2} \quad , \quad \xi=\sqrt{\frac{mw}{\hbar}}x \quad , \quad w=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

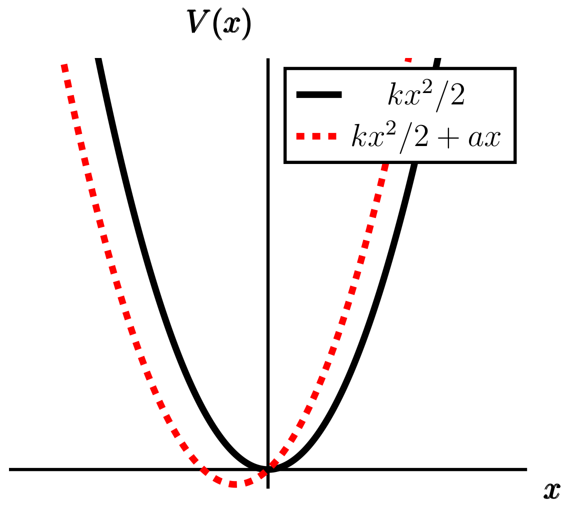
و ان توابع هانكل $H_n(\xi)$ تحقق علاقة التراجع التالية :

$$H_{n+1}(\xi)=2\xi H_n(\xi)-2nH_{n-1}(\xi)$$

كما انها تحقق العلاقة التالية :

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi)d\xi=\begin{cases}0 & : m\neq n\\ \sqrt{\pi}2^n n! & : m=n\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi)d\xi=\sqrt{\pi}\left[2^{n-1}n!\delta_m^{n-1}+2^n(n+1)!\delta_m^{n+1}\right]$$



شكل 4.8

التمريـــــن الثـــامن

انطلاقـــا من معطيـــات التمرين الاول . احسب التصحيح الطاقوي من الرتبة الثانية الحاصل على المستويات الطاقوية E_n .

التمريـــــن التـــاسع

انطلاقا من معطيات التمرين الثاني . احسب التصحيح الطاقوي من الرتبة الثانية الحاصل على المستوى الطاقوي الاساسي E_0 .

التمريـــــن العـــاشر

جسيم يتحرك في بئر كموني لا نهائي ثنائي البعد معرف كمايلي :

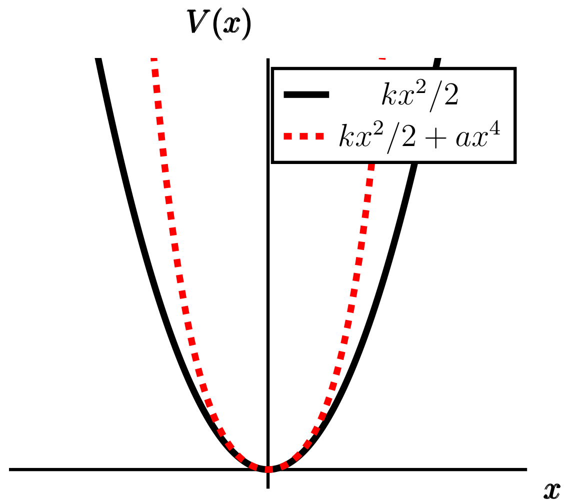
$$V(x)=\begin{cases}0 & : 0\leq x\leq L \quad , \quad 0\leq y\leq L\\ \infty & : \text{خارج هذا المجال}\end{cases}$$

– التوابـــع الذاتيـــة للهاملتونيان هي

$$\psi_{n,m}(x,y)=\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{L}$$

1 – اثبت ان عبارة الطاقة تعطى ب :

$$E_p=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(n^2+m^2\right)$$



شكل 5.8

حيث $p = 1, 2, 3, ...$.

2 – ما هي درجة انحطاط المستوى الطاقوي الثاني ؟.

– نؤثـــــر على هذا الجسيـــم باضطراب معـــرف ب : $H' = \alpha x^2$ حيث $\alpha > 0$ و صغير جدا .

3 – اوجد التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى على المستوى الطاقوي الثاني الناتج عن الاضطراب .

التمريـــــــن الحـــادي عشـــر

لدينا ذرة هيدروجين في الحالة المحرضة الاولى موضوعة في حقل مغناطيسي منتظم شدته (B) و موجه وفق المحور (ox) .
عند اعتبـــار ان كل من النواة و الالكترون بدون سبين نجد ان هاملتونيان التفاعل بين الذرة و الحقل المغناطيسي يعطى ب :

$$H' = \frac{eB}{mc}\hat{L}_x$$

– احسب التصحيـــــح الطاقـــوي من الرتبـــة الاولى الحاصل على المستـــوى الطاقـــوي الثانــــي .

التمريـــــــن الثـــاني عشـــر

التمثيل المصفوفي للحد الاساسي للهاملتونيان H^0 و الاضطراب H' في الاساس المتعامد و المقوم $\mathcal{A} = \{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ هو :

$$H^0 = \begin{pmatrix} E_0+\varepsilon & 0 \\ 0 & E_0-\varepsilon \end{pmatrix} \quad , \quad H' = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

1 – احسب التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى على المستويات الطاقويـــة .

2 – احسب التصحيح الطاقوي من الرتبة الثانية على المستويات الطاقويـــة .

3 – اوجـــــد التصحيـــح مـــن الرتبـــة الاولى على التابـــــع الموجـــي .

التمريـــــــن الثـــالث عشـــر

التمثيل المصفوفي للحد الاساسي للهاملتونيان H^0 و الاضطراب H' في الاساس المتعامد و المقوم $\mathcal{A} = \{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$ هو :

$$H^0 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix} \quad , \quad H' = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A & 0 \end{pmatrix}$$

احسب التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى على المستويات الطاقوية .

2.8 الطريقة التغايرية

التمريـــــن الاول

جسيـــــم كتلتـــه m يتحـــرك في حقـــل كموني معرف كمايلي :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & : x \leq 0 \\ \alpha x & : x \geq 0 \end{cases}$$

– استخدم الطريقة التغايرية لتضع حدا علويا لطاقة المستوى الاساسي لهذا الجسيم مستعملا تابع الاختبار التالي :

$$\phi(x) = Axe^{-\beta x}$$

حيث A هـــو ثابـــت التقويـــم اما β فهو يمثـــل الوسيـــط التغايري .

التمريـــــن الثـــاني

جسيـــــم كتلتـــه m يتحـــرك في حقـــل كموني معـــرف كمايـــلي :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & : x \leq 0 \\ \alpha x^n & : x \geq 0 \end{cases}$$

– استخدم الطريقة التغايرية لتضع حدا علويا لطاقة المستوى الاساسي لهذا الجسيم مستعملا تابع الاختبار التالي :

$$\phi(x) = Axe^{-\beta x}$$

حيث A هـــو ثابـــت التقويـــم اما β فهو يمثـــل الوسيـــط التغايـــري .

التمريـــــن الثـــالث

استخدم الطريقة التغايرية لتتوقع طاقة المستوى الاساسي لجملة الهزاز التوافقي $\left(V(x) = kx^2/2\right)$ مستعملا تابع الاختبار التالي :

$$\phi(x) = \begin{cases} A(\lambda^2 - x^2) & : -\lambda \leq x \leq \lambda \\ 0 & : \text{خارج هذا المجال} \end{cases}$$

حيث A هو ثابـــت التقويـــم(حقيقي) و λ هو الوسيط التغايـــري .

التمريـــــن الـــرابع

استخدم الطريقة التغايرية لتتوقع طاقة المستوى الاساسي لجملة الهزاز التوافقي $\left(V(x) = kx^2/2\right)$ مستعملا تابع الاختبار التالي :

$$\phi(x) = Ae^{-bx^2}$$

حيث A هو ثابـــــت التقويـــم و b هو الوسيــــــط التغايــــــــري .

التمريـــــن الخـــامس

اوجد الحـــد الاعلى لطاقـــة المستـــــوى الاساسي للهـــزاز التوافقـــي احـــادي البعـــد مستخدما تابع الاختبار التالي :

$$\phi(x) = \frac{A}{x^2 + b^2}$$

حيث A هو ثابـــــــت التقويـــم و b هو الوسيــــــط التغايــــــري .

القسم II

" الحلــــــول"

الفصـــــل 9

حلول تمارين الفصل الاول

1.9 اشعاع الجسم الاسود

حل التمريــــــن الاول

1 – لحساب الطول الموجي الذي يشع من خلاله الجسم اكبر قدر من الطاقة ننطلق من قانون واين : $T \cdot \lambda_m = 2.898 \times 10^{-3}$ لنجد ان :

$$\lambda_m = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{T} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{500} = 5796 \text{ nm}$$

2 – حساب الاستطاعة الكلية P للمكعب :

$$P = \mathcal{E} \times S$$

حيث S هي مساحة المكعب :

$$S = 6a^2 = 0.135 \text{ m}^2$$

اما $\mathcal{E}$ فهي اشعاعية هذا الجسم (استطاعته السطحية) :

$$\mathcal{E} = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times (500)^4 = 3543.75 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

و عليه فان الاستطاعة الكلية هي :

$$P = 3543.75 \cdot 0.135 = 478.4 \text{ W}$$

3 – كمية الطاقة التي يشعها هذا الجسم خلال 10 ثواني هي :

$$E = P \times t = 4784 \text{ J}$$

حل التمريـــــن الثـــاني

1 – حساب الاستطاعة الكلية للكرة :

$$P = \mathcal{E} \cdot S$$

حيث $\mathcal{E}$ هي الاستطاعة السطحية للكرة و S هي مساحة الكرة . الاستطاعة السطحية للكرة يمكن حسابها باستخدام قانون ستيفان–بو لتزمان :

$$\mathcal{E} = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times (800)^4 = 23224.32 \ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

و منه :

$$P = 23224.32 \times 0.5 = 11612.17 \ \mathrm{W}$$

2 – الطاقة الصادرة عن الكرة خلال 5 دقائق هي :

$$E = P \times t = 11612.17 \times 5 \times 60 = 3483651 \ \mathrm{J}$$

حل التمريـــن الثـــالث

1 – اشعاعية الفتيل هي :

$$\mathcal{E} = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times (3000)^4 = 459.27 \times 10^4 \ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

2 – مساحة الفتيل هي :

$$S = P/\mathcal{E} = 75/(459.27 \times 10^4) = 0.16 \times 10^{-4} \ \mathrm{m^2}$$

حل التمريـــن الـــرابع

انطلاقا من تعريف اشعاعية النجم :

$$\mathcal{E}_{st} = \frac{P_{st}}{S_{st}} = \frac{P_{st}}{4\pi R_{st}^2}$$

$$\mathcal{E} = \frac{P_{st}}{S_{st}} = \frac{100 P_\odot}{4\pi R_{st}^2} = \frac{100 \mathcal{E}_\odot S_\odot}{4\pi R_{st}^2}$$

نجد ان نصف قطر النجم هو :

$$R_{st}^2 = \frac{P_{st}}{4\pi \mathcal{E}_{st}}$$

لدينا :

$$P_{st} = 100P_{\odot} \quad , \quad P_{\odot} = \mathcal{E}_{\odot}S_{\odot} = \sigma T_{\odot}^4 S_{\odot} = 4\pi\sigma T_{\odot}^4 R_{\odot}^2 \quad , \quad \mathcal{E}_{st} = \sigma T_{st}^4$$

و عليه :

$$R_{st}^2 = 100\left(\frac{T_{\odot}}{T_{st}}\right)^4 R_{\odot}^2$$

و منه :

$$R_{st} = 37.4R_{\odot}$$

حل التمريـــــن الخـــامس

1 – لايجاد التردد الذي تبث من خلاله الشمس اكبر قدر من الطاقة نستخدم قانون واين :

$$T\lambda_{max} = 2,898 \times 10^{-3} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{max} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{T}$$

بالتعويض نجد :

$$\lambda_{max} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{5700} = 0.5048 \times 10^{-6}\ \mathrm{m} = 5048\ \mathrm{A^{\circ}}$$

و هو الطول الموجي الذي تبث من خلاله الشمس اكبر قدر من الطاقة . و منه :

$$\nu_{max} = \frac{c}{\lambda_{max}} = \frac{3 \times 10^8}{0.5048 \times 10^{-6}} = 5.94 \times 10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

2 – الاستطاعة السطحية للشمس هي :

$$\mathcal{E}_{\odot} = \sigma T_{\odot}^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times (5700)^4 = 179.402\ \mathrm{MW \cdot m^{-2}}$$

حل التمريـــــن الســـادس

حساب درجة حرارة الشمس يتم انطلاقا من قانون ستيفان – بولتزمان :

$$\mathcal{E} = \sigma T^4 \quad \Longrightarrow \quad T = \left[\frac{\mathcal{E}}{\sigma}\right]^{1/4}$$

حيث $\mathcal{E}$ هي الاستطاعة السطحية (الاشعاعية) . و هي تعطى ب :

$$\mathcal{E} = \frac{P}{S_{\odot}} = \frac{P}{4\pi R_{\odot}^2}$$

حيث P هي الاستطاعة الكلية للشمس , $S_{\odot}$ هي مساحة الشمس و $R_{\odot}$ هو نصف قطر الشمس .الاستطاعة الكلية للشمس يمكن حسابها انطلاقا من التدفق الطاقوي المقاس عند الارض :

$$F = \frac{P}{S}$$

هنا S هي مساحة الكرة التي نصف قطرها بعد الارض عن الشمس $(d_\oplus)$:

$$F = \frac{P}{4\pi d_\oplus^2} \quad \Longrightarrow \quad P = 4\pi d_\oplus^2 F$$

و منه :

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi d_\oplus^2 F}{4\pi R_\odot^2} = \left[\frac{d_\oplus}{R_\odot}\right]^2 F = \left[216\right]^2 F$$
$$\mathcal{E} = 65.3184 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2}$$

بالتعويض في عبارة درجة الحرارة نجد :

$$T = 5826\,\text{K}$$

2 – الطول الموجي الذي تصدر من خلاله الشمس اكبر قدر من الطاقة يحسب انطلاقا من علاقة واين :

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{5826} = 4974 \text{ A}^\circ$$

حل التمريـــــن الســـابع

لحساب درجة حرارة المشتري ننطلق كما في السابق من معادلة ستيفان – بولتزمان :

$$T_J = \left[\frac{\mathcal{E}}{\sigma}\right]^{1/4}$$

D_J يمثل مساحة قرص كوكب المشتري . لايجاد الاستطاعة السطحية للمشتري (الاشعاعية) $\mathcal{E}_J$ ننطلق من كونه في حالة اتزان حراري مع الاشعاع الشمسي اي ان مقدار ما يشعه من طاقة يساوي مقدار ما يمتصه من الاشعاع الشمسي $P_J = P_{abs}$ حيث P_{abs} هي كمية الطاقة التي يمتصها خلال وحدة الزمن :

$$P_{abs} = I_J \cdot D_J = I_J \cdot \pi R_J^2$$

لايجاد شدة الاشعاع الشمسي على سطح المشتري ننطلق من كون :

$$P_\odot = I_\oplus \cdot S_\oplus = I_J \cdot S_J$$

S_J هي مساحة الكرة المحيطة بالشمس و التي نصف قطرها بعد المشتري عن الشمس . و عليه :

$$I_J = \frac{S_\oplus}{S_J} I_\oplus = \frac{1}{(5.2)^2} I_\oplus = 51.7751 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

و منه :

$$P_J = \frac{\pi R_J^2}{(5.2)^2} I_\oplus$$

من جهة اخرى لدينا :

$$P_J = \mathcal{E}_J \cdot S_J = \mathcal{E}_J 4\pi R_J^2$$

و عليه :

$$\mathcal{E}_J = \frac{1}{(5.2)^2}\frac{I_\oplus}{4} = 12.94 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

بالتعويض في المعادلة الاولى نجد :

$$T_J = \left[\frac{12.94}{5.67 \times 10^{-8}}\right]^{1/4} = 129 \text{ K}$$

2.9 المفعول الكهروضوئي

حل التمريـــــن الاول

حساب كثافة الطاقة عند الصفيحة :

$$F = \frac{P}{S} = \frac{75}{4\pi(0.8)^2} = 9.326 W m^{-2}$$

– كمية الطاقة التي تستقبلها الذرة خلال وحدة الزمن هي :

$$E = F \cdot S_{at} = 9.326 \cdot \pi \cdot (0.5 \times 10^{-10})^2 = 7.32 \times 10^{-20} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} = 0.4575 \text{ eV} \cdot \text{s}^{-1}$$

– الزمن اللازم لاكتساب طاقة التحرر هو :

$$t = \frac{2}{0.4575} = 4.37 \text{ s}$$

2 – عدد الفوتونات التي تمر عبر المتر – المربع الواحد خلال الثانية الواحدة N_{ph} هو :

$$N_{ph} = \frac{F}{E_{ph}}$$

حيث :

$$E_{ph} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 4.968 \times 10^{-19} \text{ J}$$

و منه :

$$N_{ph} = \frac{9.326}{4.968 \times 10^{-19}} = 2 \times 10^{19} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

– و هذا يعني ان عدد الفوتونات التي تسقط على الذرة الواحدة في الثانية هو :

$$N_{\frac{ph}{at}} = 2 \times 10^{19} \times 0.8 \times 10^{-20} = 0.16\ \mathrm{s}^{-1}$$

حل التمريـــــن الثـــــاني

1 – نكتب توتر الايقاف بدلالة التردد باستخدام العلاقة $\nu = c/\lambda$. النتائج موضحة بالجدول :

– باختيار سلم الرسم المناسب نحصل على المنحنى البياني الموضح بالشكل . الخط المستقيم هو الخط الذي يشمل اكبر عدد

$V[V]$	$\nu[10^{15}Hz]$	$V[V]$	$\nu[10^{15}Hz]$
0.62	0.6097	1.48	0.8196
0.36	0.5494	1.15	0.7407
0.24	0.5181	0.93	0.688

ممكن من النقاط ميله هو 4.995×10^{-15} و يتقاطع مع محور التراتيب عند النقطة $(0, -2.41)$ و عليه فان معادلته هي :

$$V_s = 4.995 \times 10^{-15}\ \nu - 2.41$$

2 – لاستنتاج دالة العمل نطابق بين الصيغة التجريبية و الصيغة النظرية و التي هي :

$$V_s = \frac{h}{e}\nu - \frac{\phi}{e}$$

فنجد ان :

$$\frac{\phi}{e} = 2.41 \quad \Longrightarrow \quad \phi = 3.8576 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

2 – انطلاقا من الصيغة النظرية نلاحظ ان نقطة تقاطع المستقيم الممثل للعلاقة بين التردد و كمون الكبح مع محور الفواصل هي $(\nu_0, 0)$. اما من البيان فهي $(0\ ,\ 0.48 \times 10^{15})$ و عليه نجد بالمطابقة ان :

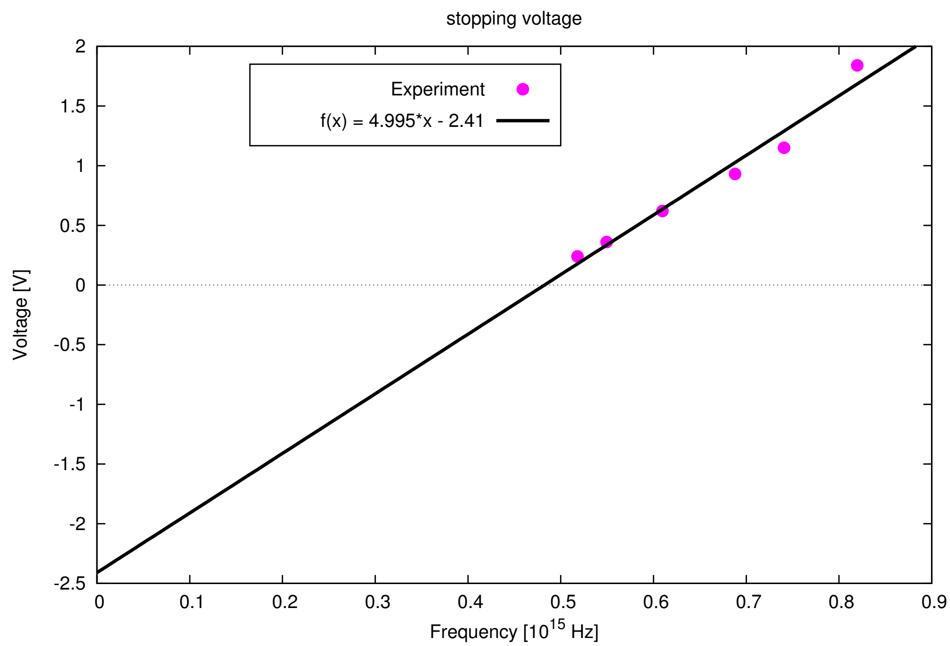
$$\nu_0 = 0.48 \times 10^{15}\ \mathrm{Hz}$$

3 – النسبة $(\frac{h}{e})$ هي ميل المستقيم الممثل للعلاقة بين كمون الكبح و التردد المستخدم لنزع الالكترونات و عليه فهي :

$$\frac{h}{e} = 4.995 \times 10^{-15}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{C}^{-}$$

و القيمة الدقيقة لهذه النسبة هي

$$\frac{h}{e} = 4.14 \times 10^{-15}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{C}^{-}$$



شكل 1.9

حل التمريـــــن الثـــالث

1 – الجزء المائل من كل منحنى يدل على ان الالكترونات المتحررة لا تملك كلها نفس الطاقة الحركية و بالتالي فان اصغرها طاقة يمكن ايقافه بجهد صغير و هكذا .

2 – المنحنى الذي يقابل استخدام الاشعاع الاكبر شدة هو المنحنى (A) .

3 – المنحنى الذي يقابل استخدام الاشعاع الاكبر ترددا هو المنحنى (C) .

4 – المنحنى الذي يقابل استخدام الاشعاع ذو الطول الموجي الاكبر هو المنحنى (B) .

حل التمريـــــن الـــرابع

الطاقة الحركية للالكترونات المتحررة تحسب باستخدام العلاقة التالية :

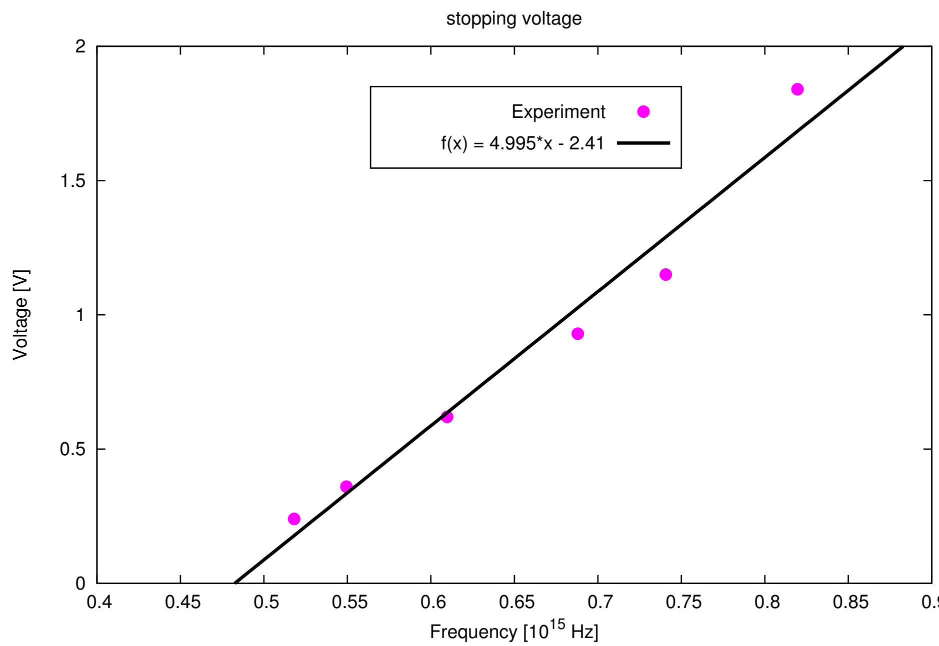
$$\begin{aligned} T &= h\nu - \phi = h\nu - h\nu_0 \\ &= hc\Big(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\Big) \end{aligned}$$

حيث :

$$\lambda = 1800\ \text{A}^\circ = 18 \times 10^{-8}\ \text{m}$$
$$\lambda_0 = 2300\ \text{A}^\circ = 23 \times 10^{-8}\ \text{m}$$

و منه :

$$T = 0.24 \times 10^{-18}\ \text{J} = 1.5\ \text{eV}$$



شكل 2.9

حل التمريـــــــن الخـــامس

حساب دالة العمل :

$$\begin{aligned}\phi = h\nu_0 &= \frac{hc}{\lambda_0}\\ &= \frac{6.625\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{558\times10^{-9}} = 3.56\times10^{-19}\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

2 – لحساب التوتر اللازم لايقاف الالكترونات المتحررة نستخدم العلاقة التالية :

$$V_s = \frac{T}{e}$$

حيث :

$$\begin{aligned}T = h\nu - \phi &= \frac{hc}{\lambda} - \phi\\ &= \frac{6.625\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{400\times10^{-9}} - 3.56\times10^{-19}\\ &= 1.4\times10^{-19}\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

و منه :

$$V_s = 0.875\ \mathrm{V}$$

حل التمريـــــــن الســـادس

لايجاد تردد العتبة ننطلق من العلاقة التي تربط كمون الايقاف بالطاقة الحركية للالكترونات المتحررة :

$$V_s = \frac{T}{e} = \frac{1}{e}\Big(h\nu - \phi\Big)$$
$$\Longrightarrow \quad \phi = h\nu - eV_s = \frac{hc}{\lambda} - eV_s$$

و منه :

$$\phi = \frac{6.625 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{2537 \times 10^{-10}} - 0.24 \times 1.6 \times 10^{-19}$$
$$= 7.446 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

لدينا :

$$\phi = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

اذا :

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\phi} = 2669\ \mathrm{A}^\circ$$

حل التمريـــــن الســـابع

لدينا تجربتين و بالتالي يمكننا الحصول على المعادلتين التاليتين (معادلات اينشتاين) :

$$T_1 = h\nu_1 - \phi = h\frac{c}{\lambda} - \phi$$
$$T_2 = h\nu_2 - \phi = h\frac{c}{\lambda/2} - \phi$$

بضرب المعادلة الاولى في (2) و من ثم طرح المعادلة الناتجة من المعادلة الثانية نحصل على :

$$\phi = T_2 - 2T_1 = 2.28\ \mathrm{eV}$$

حل التمريـــــن الثـــامن

عدد الفوتونات التي ينتجها الجهاز في الثانية يعطى ب :

$$N_{ph} = \frac{P}{\varepsilon}$$

حيث P هي استطاعة الجهاز و ε هي طاقة الفوتون :

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda = 4.07 \times 10^{-19}\mathrm{J}$$

$$N_{ph} = 24 \times 10^{16}\,\mathrm{s}^{-1}$$

2 – شدة التيار الكهربائي الذي تنتجه الخلية الكهروضوئية يساوي عدد الالكترونات المحررة في الثانية(اي يساوي عدد الفوتونات الفعالة التي تسقط عليها في الثانية الواحدة) مضروبا بشحنة الالكترون :

$$I = 10 \times \frac{N_{ph}}{100} \times e = 2.4 \times 10^{16} \times 1.6 \times 10^{-19} = 3.84\,\mathrm{mA}$$

3 – لدينا تردد العتبة و التردد المستخدم اي انه بالامكان ايجاد الطاقة الحركية للالكترونات المتحررة :

$$T = h(\nu - \nu_0)\ ,\ \nu = c/\lambda = 6.147 \times 10^{14}\mathrm{Hz} \implies T = 0.62738 \times 10^{-19}\mathrm{J}$$

و منه :

$$V_s = T/e = 0.39\mathrm{V}$$

3.9 تشتت كومبتون

حل التمريـــــن الاول

1 – لحساب التغير الحاصل في المقادير المعنية يجب ان نحدد اولا طول موجة الفوتون الابتدائي و تردده :

$$\nu_0 = \frac{\varepsilon_0}{h} = \frac{10^4 \times 1.6 \times 10^{-19}}{6.625 \times 10^{-34}} = 2415 \times 10^{15}\ \mathrm{Hz}$$
$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3 \times 10^8}{2415 \times 10^{15}} = 1.242\ \mathrm{A}^\circ$$

اذا التغير في الطول الموجي هو :

$$\begin{aligned}\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 &= \frac{h}{m_e c}\Big(1 - \cos\theta\Big)\\ &= \frac{6.625 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8}\Big(1 - \cos(\pi/3)\Big)\\ &= 0.012133\ \mathrm{A}^\circ\end{aligned}$$

– اذا الطول الموجي للفوتون النهائي هو :

$$\lambda = 1.2543\ \mathrm{A}^\circ$$

2 – تردد الفوتون النهائي هو :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 2391.7 \times 10^{15}\ \mathrm{Hz}$$

و منه مقدار التغير في التردد هو :

$$\Delta\nu = \nu_0 - \nu = 23.3 \times 10^{15}\ \mathrm{Hz}$$

3 – طاقة الفوتون النهائي هي :

$$\begin{aligned}\varepsilon = h\nu &= 6.625\times10^{-34}\times2391.7\times10^{15}\\ &= 15845\times10^{-19}\ \mathrm{J}\\ &= 0.9903\times10^{4}\ \mathrm{eV}\end{aligned}$$

و عليه فان التغير الحاصل في طاقة الفوتون هو :

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_0 - \varepsilon = 96.8671\ \mathrm{eV}$$

حل التمريـــــــن الثـــاني

1 – الطول الموجي للفوتون المشتت (الابتدائي) هو :

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \lambda - \frac{h}{m_e c}\Big(1-\cos\theta\Big)\\ &= 0.3\times10^{-10} - \frac{6.625\times10^{-34}}{9.1\times10^{-31}\times3\times10^{8}}\Big(1-\cos(\pi/3)\Big)\\ &= 0.2878\ \text{Ař}\end{aligned}$$

2 – لحساب طاقة الالكترونت المتشتت (بعد التصادم) نستخدم مبدا انحفاظ الطاقة :

$$E_i = E_f$$

حيث :

$$E_i = h\nu_0 + m_e c^2$$

هي الطاقة الكلية الابتدائية للجملة الكترون– فوتون . واما :

$$E_f = h\nu + E'$$

فهي طاقة الجملة بعد التشتت . هنا (E') هي طاقة الالكترون . و منه :

$$E' = h\Big(\nu_0 - \nu\Big) + m_e c^2$$

لدينا :

$$\begin{aligned}\nu_0 &= \frac{c}{\lambda_0} = 1.042\times10^{19}\ \mathrm{Hz}\\ \nu &= \frac{c}{\lambda} = 10^{19}\ \mathrm{Hz}\end{aligned}$$

بالتعويض نجد :

$$E' = h\Big(\nu_0 - \nu\Big) + m_e c^2 = 82,059\times10^{-15}\ \mathrm{J}$$

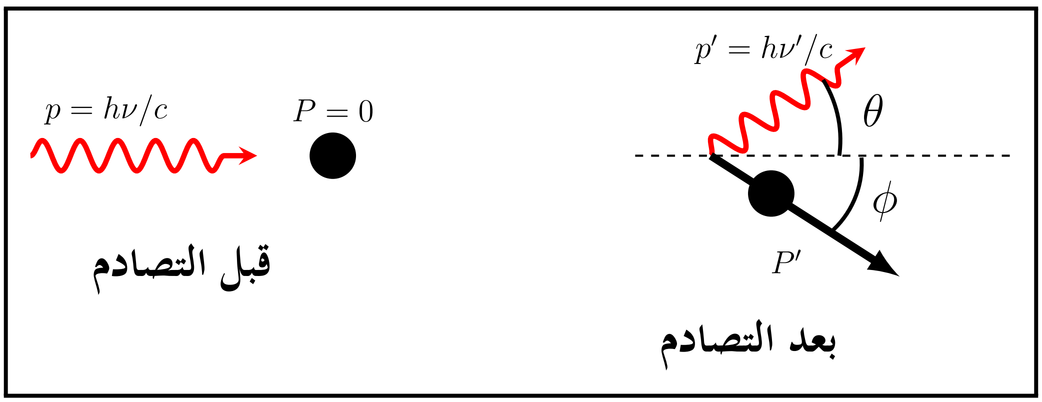
حل التمريـــــن الثـــالث

قبل التصادم لدينا :

$$E_i = h\nu_0 + \sqrt{m_e^2c^4 + P^2c^2} = cp_0 + E$$
$$p_{xi} = h\nu_0/c + P = p_0 + P \quad , \quad p_{yi} = 0$$

– بعد التصادم :

$$E_f = h\acute{\nu} + \sqrt{m_e^2c^4 + \acute{P}^2c^2} = c\acute{p} + \sqrt{m_e^2c^4 + \acute{P}^2c^2}$$
$$p_{xf} = \frac{h\acute{\nu}}{c}\cos\theta + \acute{P}\cos\phi = \acute{p}\cos\theta + \acute{P}\cos\phi$$
$$p_{yf} = \frac{h\acute{\nu}}{c}\sin\theta - \acute{P}\sin\phi = \acute{p}\sin\theta - \acute{P}\sin\phi$$



شكل 3.9: تشتت كومبتون

– نطبق مبدا انحفاظ الطاقة و الاندفاع فنحصل على المعادلتين :

$$\acute{P}^2 = \acute{p}^2\sin^2\theta + \left(P + p_0 - \acute{p}\cos\theta\right)^2 \tag{1.9}$$
$$\acute{P}^2 = \frac{1}{c^2}\left[cp_0 - c\acute{p} + E\right]^2 - m_e^2c^2 \tag{2.9}$$

و منه :

$$\acute{P}^2 = P^2 + p_0^2 + \acute{p}^2 + 2p_0P - 2\acute{p}\left(p_0 + P\right)\cos\theta \tag{3.9}$$
$$\acute{P}^2 = P^2 + p_0^2 + \acute{p}^2 - 2p_0\acute{p} + 2E\frac{p_0 - \acute{p}}{c} \tag{4.9}$$

بطرح هاتين المعادلتين من بعضهما البعض نجد :

$$2p_0P - 2E\frac{p_0 - \acute{p}}{c} = 2\acute{p}\left(p_0 + P\right)\cos\theta - 2p_0\acute{p}$$

نطرح من طرفي المعادلة الحد $2\acute{p}P$:

$$2p_0P - 2E\frac{p_0 - \acute{p}}{c} - 2\acute{p}P = 2\acute{p}\Big(p_0 + P\Big)\cos\theta - 2p_0\acute{p} - 2\acute{p}P$$
$$2cp_0P - 2E(p_0 - \acute{p}) - 2c\acute{p}P = -2c\acute{p}\Big(p_0 + P\Big)\Big(1 - \cos\theta\Big)$$
$$2\acute{p}(cP - E) + 2p_0(E - cP) = 2c\acute{p}\Big(p_0 + P\Big)\Big(1 - \cos\theta\Big)$$
$$(p_0 - \acute{p})(E - cP) = c\acute{p}\Big(p_0 + P\Big)\Big(1 - \cos\theta\Big)$$
$$p_0 - \acute{p} = c\acute{p}\frac{p_0 + P}{E - cP}\Big(1 - \cos\theta\Big)$$

بالقسمة على $p_0\acute{p}$ و التعويض عن p_0 و $\acute{p}$ ب h/λ_0 و $h/\acute{\lambda}$ على التوالي في الطرف الايسر من المعادلة نحصل على :

$$\boxed{\acute{\lambda} - \lambda_0 = c\lambda_0\frac{p_0 + P}{E - cP}\Big(1 - \cos\theta\Big)}$$

حل التمريـــــن الـــرابع

1 – طول موجة الفوتون الاصلي هو :

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\varepsilon_0}$$

حيث ε_0 هي طاقة هذا الفوتون . هذا المقدار يمكن حسابه انطلاقا من معادلة الطاقة الحركية للالكترون المرتد :

$$T = \varepsilon_0 - \varepsilon'$$

حيث ε' هي طاقة الفوتون النهائي . و عليه :

$$\varepsilon_0 = \varepsilon' + T = 160KeV = 256 \times 10^{-16}J$$

و منه :

$$\lambda_0 = 0.0776\ A^\circ$$

2 – لايجاد زاوية تشتت الفوتون نستخدم معادلة كومبتون للتشتت :

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_ec}(1 - \cos\theta)$$

حيث :

$$\lambda' = \frac{hc}{\varepsilon'} = 0.1035\ A^\circ$$

لنجد ان :

$$\theta = 92.8^\circ$$

3 – لايجاد الزاوية ϕ ننطلق من كون :

$$p'_{ph}\sin\theta - p'_e\sin\phi = 0$$

و هي المعادلة التي تعبر عن انحفاظ كمية الحركة وفق المحور الراسي . و منه :

$$\sin\phi = \frac{p'_{ph}}{p'_e}\sin\theta$$

لدينا :

$$p'_{ph} = \frac{\varepsilon'}{c} = 64\times 10^{-24} kg\ m/s$$

لايجاد كمية حركة الالكترون p'_e ننطلق ممايلي :

$$E'_e = m_e c^2 + T$$

و

$$E'_e = \sqrt{p'^2_e c^2 + m_e^2 c^4}$$

لنجد :

$$p'_e = \frac{1}{c}\sqrt{(m_e c^2 + T)^2 - m_e^2 c^4} = 110\times 10^{-24} kg\ m/s$$

و منه :

$$\phi = 35.6^\circ$$

حل التمريـــــن الخـــامس

الفوتون الاصغر طاقة من بين الفوتونات البارزة في تشتت كومبتون هو الفوتون ذو الطول الموجي الاكبر . و لان طول الموجة يتعلق بزاوية التشتت فقط فانه بالامكان ايجاد الزاوية التي يتشتت عندها الفوتون الاصغر طاقة .ننطلق من معادلة كومتون للتشتت :

$$\lambda' = \lambda_0 + \frac{h}{m_e c}\Big(1-\cos\theta\Big)$$

نشتق بالنسبة ل θ لايجاد عند اي قيمة لها يكون λ' قيمة عظمى :

$$\frac{d\lambda'}{d\theta} = \frac{h}{m_e c}\sin\theta$$

$$\frac{d\lambda'}{d\theta} = 0 \Longrightarrow \theta = 0,\pi$$

عند $\theta = 0$ تكون λ' اصغرية $(\lambda' = \lambda_0)$ اما عند $\theta = \pi$ فان λ' تكون اعظمية $(\lambda' = \lambda_0 + 2\frac{h}{m_e c})$ و عليه فان اضعف الفوتونات طاقة يظهر عند الزاوية $\theta = \pi$ اي انه يرتد الى الخلف .

حل التمريـــــن الســـادس

بالرمز ب (ε_0) لطاقة الفوتونات الابتدائية و ب (ε') لطاقة الفوتون الناتج عن اكبر تبادل للطاقة في هذا التشتت نجد ان :

$$\varepsilon_0 - \varepsilon' = 4 \times 10^4 \times 1.6 \times 10^{-19} = 6.4 \times 10^{-15}$$

يلزم هنا معادلة ثانية . للحصول عليها ننطلق من كون الفوتون الذي يفقد اكبر قدر من الطاقة من بين كل الفوتونات المتصادمة مع الكترونات المعدن هو الالكترون الذي ينحرف عن مساره الاصلي بزاوية قدرها (π) و عليه فان معادلة كومبتون تاخذ الشكل التالي :

$$\lambda' - \lambda = 2\frac{h}{m_e c}$$

و منه :

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{2}{m_e c^2}$$

من المعادلتين السابقتين نحصل على المعادلة التالية :

$$\alpha\varepsilon_0^2 - \alpha\beta\varepsilon_0 - \beta = 0$$

حيث :

$$\alpha = \frac{2}{m_e c^2} = 0.02439 \times 10^{15} \qquad , \qquad \beta = 6.4 \times 10^{-15}$$

بحل المعادلة السابقة نجد ان :

$$\varepsilon_0 = 19.7109 \times 10^{-15}\ J$$

و منه :

$$\lambda_0 = 10.08 \times 10^{-10}\ m$$

حل التمريـــــن الســـابع

باستخدام قوانين الانحفاظ (الطاقة و كمية الحركة) نجد ان كمية الحركة الخاصة بالالكترون بعد التصادم $p'_e = 0$ و هذا يعني ان طاقته بعد التصادم هي $E'_e = m_e c^2$ في حين يجب ان تكون $E'_e = m_e c^2 + h\nu_0$. هذا التناقض يجعل عملية الامتصاص الكلي للفوتون امرا غير ممكن .

حل التمريـــــن الشـــامن

الطاقة الحركية للالكترون المرتد هي :

$$T = \varepsilon_0 - \varepsilon'$$

حيث ε_0 و ε' هما طاقة الفوتون الابتدائي و النهائي على التوالي . معادلة الانزياح لكومبتون تكتب كمايلي :

$$\lambda' - \lambda = 2\frac{h}{m_e c}$$

و منها نجد :

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{2}{m_e c^2}$$

بضرب طرفي هذه المعادلة ب $\varepsilon_0\varepsilon'$ نحصل على :

$$\varepsilon_0 - \varepsilon' = 2\frac{1}{m_e c^2}\varepsilon_0\varepsilon'$$

و منه :

$$\varepsilon' = \frac{m_e c^2 \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + m_e c^2}$$

نعوض في عبارة الطاقة الحركية عن ε' فنجد :

$$T = 2\varepsilon_0 \frac{\frac{\varepsilon_0}{m_e c^2}}{1 + \frac{2\varepsilon_0}{m_e c^2}} = 2h\nu_0 \frac{\alpha}{1+2\alpha}$$

و هو المطلوب .

4.9 امواج دوبروغلي

حل التمريـــــــن الاول

1 – طول موجة دوبروغلي المرفقة بالالكترون هو :

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e}$$

لدينا :

$$T_e = \frac{p_e^2}{2m_e} \Longrightarrow p_e = \sqrt{2m_e T}$$

بالتعويض نجد ان :

$$p_e = 1.7 \times 10^{-23}\ \mathrm{J}$$

و :

$$\lambda_e = 0.39\ \mathrm{A}^\circ$$

– بنفس الكيفية نجد ان طول موجة دوبروغلي المرفقة بالبروتون هو :

$$\lambda_p = 0.0091\ \mathrm{A}^\circ$$

2 –

– لحساب الطاقة الحركية التي يجب ان يمتلكها اي جسيم (غير نسبوي) حتى يكون طول الموجة المرفقة به $1\ \mathrm{A}^\circ$ نحدد اولا العلاقة التي تربط بين الطول الموجي و الطاقة الحركية :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mT}} \Longrightarrow T = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

بالتعويض بالنسبة للالكترون و البروتون نجد ان :

$$T_e = 0.15 \text{ KeV}$$

$$T_p = 0.082 \text{ eV}$$

حل التمريـــــــن الثـــاني

اولا نجد طاقة الالكترون المقابلة للاطوال الموجية المعطاة باستخدام الصيغة التالية $T = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$:

$$T_1 = \frac{h^2}{2m\lambda_1^2} = \frac{(6.625 \times 10^{-34})^2}{2 \cdot 9.11 \times 10^{-31}(10^{-10})^2} = 2.4 \times 10^{-17} \text{ J}$$
$$T_2 = \frac{h^2}{2m\lambda_2^2} = \frac{(6.625 \times 10^{-34})^2}{2 \cdot 9.11 \times 10^{-31}(50 \times 10^{-12})^2} = 9.635 \times 10^{-17} \text{ J}$$

الفرق بين القيمتين يمثل الزيادة اللازمة :

$$\delta E = T_2 - T_1 = 7.235 \times 10^{-17} \text{ J} = 0.45 \text{ keV}$$

حل التمريـــــــن الثـــالث

طول موجة دوبروغلي المرفقة بجسيم طاقته الحركية T في الحالة الغير نسبوية يعطى ب :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}}$$

اذا قمنا بزيادة ما في طاقة هذا الجسيم δE فان هذه الزيادة تكون على شكل طاقة حركية . و عليه فان طول موجة دوبروغلي في هذه الحالة هو :

$$\lambda' = \frac{h}{\sqrt{2m(T + \delta E)}}$$

بالاخذ بالاعتبار معطيات التمرين $(\lambda' = \lambda/2)$ و $(\delta E = 200 \text{ eV})$ نجد ان :

$$T = \frac{\delta E}{3} = 200/3 \text{ eV}$$

بالتعويض في المعادلة الاولى نجد ان طول الموجة الاصلية هو :

$$\lambda = 1.5 \text{ A}^\circ$$

حل التمريـــــــن الـــرابع

1 – العلاقة بين كمية الحركة و الطاقة الحركية في الميكانيك الكلاسيكي (اللانسبوي) هي :

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

اما في الميكانيك النسبوي فهي :

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(mc^2 + T)^2 - m^2c^4}$$

يمكن اشتقاق هذه العلاقة انطلاقا من تعريف الطاقة الكلية في الميكانيك النسبوي . حيث تعرف بالصيغتين التاليتين:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$E = T + mc^2$$

و عليه فانه عند حساب طول موجة دوبروغلي المرفقة بالجسيمات ذات الطاقات العالية يجب استعمال العلاقة النسبوية التي تربط بين اندفاع الجسيم و طاقته الحركية . اذا :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{(mc^2 + T)^2 - m^2c^4}}$$

2 – انطلاقا من الصيغة السابقة نجد :

$$T = \sqrt{m^2c^4 + h^2c^2/\lambda^2} - mc^2$$

طول موجة كومبتون بالنسبة للالكترون هو :

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$$

بالتعويض نجد :

$$T = (\sqrt{2} - 1)m_e c^2 = 0.212 \text{ MeV}$$

الفصـــــل 10

حلول تمارين الفصل الثاني

حل التمرين الاول

حل التمريـــــن الاول

الجواب :

$$D = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

حل التمريـــــن الثـــاني

الجواب:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 8 \\ 9 & 7 & 2 \\ 11 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 9 & -11 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 10 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

حل التمريـــــن الثـــالث

الجواب :

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1+3i & 4 \\ 2 & 5i \end{bmatrix}$$

حل التمريـــــن الـــرابع

الجواب :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3i\\ 1-i & 1 & 0\end{bmatrix}$$

حل التمريـــــن الخـــامس

الجواب :

$$A^{\dagger}=\left(\widetilde{A}\right)^{*}=\begin{bmatrix}4 & 1-2i\\ 2i & 6\\ -3i & 8\end{bmatrix}^{*}=\begin{bmatrix}4 & 1+2i\\ -2i & 6\\ 3i & 8\end{bmatrix}$$

حل التمريـــــن الســـادس

1 – ايجاد المصفوفة P :

$$P=AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & i\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & 2 & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 6 & 3+3i\\ 1+3i & 2i & 2\\ 6 & 4 & -2+2i\end{bmatrix}$$

2 – ايجاد المرافق الهرميتي للمصفوفة P :

$$P^{\dagger}=\left(\widetilde{P}\right)^{*}=\begin{bmatrix}10 & 1-3i & 6\\ 6 & -2i & 4\\ 3-3i & 2 & -2-2i\end{bmatrix}$$

3 – ايجاد المرافق الهرميتي للمصفوفتين A و B :

$$A^{\dagger}=\left(\widetilde{A}\right)^{*}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 3 & -i & 2\end{bmatrix}$$

$$B^{\dagger}=\left(\widetilde{B}\right)^{*}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & 2 & -i\end{bmatrix}$$

4 – حساب المصفوفة Q :

$$Q = B^{\dagger}A^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1-3i & 6 \\ 6 & -2i & 4 \\ 3-3i & 2 & -2-2i \end{bmatrix}$$

– نلاحظ ان $Q = P^{\dagger}$ و هو المتوقع .

حل التمريـــــن الســـابع

1 – حساب المحدد :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

2 – ايجاد مصفوفة المعاملات المتممة :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 13 & -18 \\ -2 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

3 – ايجاد مقلوب المصفوفة A :

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{C}}{|A|} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 13 & 7 \\ -3 & -18 & -8 \end{bmatrix}$$

1.10 الفضاء الشعاعي

حل التمريـــــن الاول

1 – التمثيل المصفوفي لاي شعاع في فضاء ثلاثي الابعاد هو مصفوفة من الرتبة 3×1 (عمود) عناصرها هي مركبات الشعاع وفق المحاور الفضائية . و عليه فان التمثيل المصفوفي للشعاعين $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ هو :

$$|\alpha\rangle = \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \quad , \quad |\beta\rangle = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2 – كتابة الشعاعين المرافقين $\langle\alpha|$ و $\langle\beta|$:

$$\langle\alpha| = -i\langle 1| - \langle 2| + i\langle 3|$$
$$\langle\beta| = -i\langle 1| + 2\langle 3|$$

3 – التمثيل المصفوفي لشعاع من الفضاء المرافق ثلاثي الابعاد هو عبارة عن مصفوفة من الرتبة 3×1 (سطر) عناصرها هي مركبات الشعاع المرافق . و عليه :

$$\langle\alpha| = \begin{bmatrix}-i & -1 & i\end{bmatrix} \quad , \quad \langle\beta| = \begin{bmatrix}-i & 0 & 2\end{bmatrix}$$

4 – حساب الجداءات السلمية : $\langle\alpha|\beta\rangle$:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \begin{bmatrix}-i & -1 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\\0\\2\end{bmatrix} = 1+2i$$

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \begin{bmatrix}-i & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\\-1\\-i\end{bmatrix} = 1-2i$$

– بالفعل نلاحظ ان :

$$\Big(\langle\beta|\alpha\rangle\Big)^* = \Big(1-2i\Big)^* = 1+2i = \langle\alpha|\beta\rangle$$

حل التمريـــــن الثـــــاني

1 – يكون الاساس متعامدا اذا كان الجدا السلمي لاي شعاعين مختلفين معدوما :

$$\begin{aligned}
\langle b_1|b_2\rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle a_1| - i\langle a_2|\Big)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|a_1\rangle - i|a_2\rangle\Big)\right]\\
&= \frac{1}{2}\Big[\langle a_1|a_1\rangle - i\langle a_1|a_2\rangle - i\langle a_2|a_1\rangle - \langle a_2|a_2\rangle\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[1-0-0-1\Big]\\
&= 0
\end{aligned}$$

و عليه فان اشعة هذا الاساس متعامدة .

– يكون الاساس موحدا اذا كانت طويلة اي شعاع منه مساوية للواحد . و عليه :

$$\begin{aligned}
|||b_1\rangle||^2 &= \langle b_1|b_1\rangle\\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle a_1| - i\langle a_2|\Big)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|a_1\rangle + i|a_2\rangle\Big)\right]\\
&= \frac{1}{2}\Big[\langle a_1|a_1\rangle + i\langle a_1|a_2\rangle - i\langle a_2|a_1\rangle + \langle a_2|a_2\rangle\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[1+0-0+1\Big]\\
&= 1
\end{aligned}$$

اذا الشعاع $|b_1\rangle$ مقوم . بنفس الكيفية نحسب طويلة $|b_1\rangle$:

$$\begin{aligned}
|||b_2\rangle||^2 &= \langle b_2|b_2\rangle \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle a_1| + i\langle a_2|\Big)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|a_1\rangle - i|a_2\rangle\Big)\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\langle a_1|a_1\rangle - i\langle a_1|a_2\rangle + i\langle a_2|a_1\rangle + \langle a_2|a_2\rangle\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[1 - 0 + 0 + 1\Big] \\
&= 1
\end{aligned}$$

اي ان طويلة $|b_2\rangle$ تساوي الواحد . و بهذا نكون قد اثبتنا ان الاساس المكون من $|b_1\rangle$ و $|b_2\rangle$ هو اساس متعامد و موحد .

2 – ا – التمثيل المصفوفي للاشعة المعنية في الاساس $\mathcal{A}$:

$$|a_1\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad , \quad |a_2\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix} \quad , \quad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$$

ب – التمثيل المصفوفي للاشعة المعنية في الاساس $\mathcal{B}$:

– التمثيل المصفوفي للشعاعين $|b_1\rangle$ و $|b_2\rangle$ هو :

$$|b_1\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad , \quad |b_2\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

– لايجاد التمثيل المصفوفي للشعاعين $|a_1\rangle$ و $|a_2\rangle$ في الاساس $\mathcal{B}$ يجب كتابة هذين الشعاعين في هذا الاساس . ننطلق من المعادلتين :

$$|b_1 >= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|a_1 > +i|a_2 >\Big]$$
$$|b_2 >= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|a_1 > -i|a_2 >\Big]$$

بجمعهما نجد :

$$|a_1 >= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big[|b_1 > +|b_2 >\Big]$$

و بطرحهما نجد :

$$|a_2 >= -i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[|b_1 > -|b_2 >\Big]$$

و عليه :

$$|a_1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad , \quad |a_2\rangle = -i\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

3 – لايجاد التمثيل المصفوفي لهذا الشعاع نقوم بكتابته بدلالة اشعة الوحدة للاساس $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}|\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle \\ |\phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[|b_1\rangle + |b_2\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[|b_1\rangle + |b_2\rangle\Big]\end{aligned}$$

و عليه فان :

$$\phi^{(\mathcal{B})} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

– الطريقة الثانية و فيها نستخدم مصفوفة التحويل من الاساس $\mathcal{A}$ الى الاساس $\mathcal{B}$. و هي مصفوفة من الرتبة 2×2 . بالرمز لها ب R نجد انها :

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix}$$

حيث :

$$\begin{aligned}R_{11} &= \langle a_1|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ R_{12} &= \langle a_1|b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ R_{21} &= \langle a_2|b_1\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \\ R_{22} &= \langle a_2|b_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

و عليه :

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}$$

– لايجاد الشعاع $|\phi\rangle$ في الاساس $\mathcal{B}$ نستخدم المعادلة التالية :

$$|\phi^{(\mathcal{B})}\rangle = R^{-1}|\phi^{(\mathcal{A})}\rangle$$

و التي تكتب مصفوفيا كمايلي :

$$\begin{bmatrix}\phi'_1\\ \phi'_2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix}$$

حيث ϕ'_1 و ϕ'_2 هـــــما مركبات الشعـــــاع $|\phi\rangle$ في الاســــــاس $\mathcal{B}$ اما ϕ_1 و ϕ_2 فهما مركباته في الاساس $\mathcal{A}$ و هما : $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\phi_2 = 0$. و منه نجد ان :

$$\begin{bmatrix}\phi'_1\\ \phi'_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}\phi'_1\\ \phi'_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

اي ان :

$$\phi^{(\mathcal{B})} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

و هي نفس النتيجة التي تحصلنا عليها سابقا .

حل التمرين الثالث

1 – اثبات ان الجداء السلمي $\langle\psi|\phi\rangle$ معدوم :

$$\begin{aligned}\langle\psi|\phi\rangle &= \Big[-i\alpha^*\langle e_1| + \alpha^*\langle e_2| - \alpha^*\langle e_3|\Big]\Big[\beta|e_2\rangle + \beta|e_3\rangle\Big]\\ &= \alpha^*\beta - \alpha^*\beta\\ &= 0\end{aligned}$$

– انجاز العملية باستخدام المصفوفات يتم كمايلي :

$$\begin{aligned}\langle\psi|\phi\rangle &= \begin{bmatrix}-i\alpha^* & \alpha^* & -\alpha^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\beta\\\beta\end{bmatrix}\\ &= \alpha^*\beta^* - \alpha^*\beta^*\\ &= 0\end{aligned}$$

2 – تحديد الثابتان α و β لكي يتحقق الشرط $1 = \langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= \begin{bmatrix}-i\alpha^* & \alpha^* & -\alpha^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\alpha\\\alpha\\-\alpha\end{bmatrix}\\ &= 3\alpha\alpha^*\end{aligned}$$

و عليه حتى يكون $1 = \langle\psi|\psi\rangle$ فان :

$$3\alpha\alpha^* = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{3}}$$

حيث γ هو اي عدد حقيقي .

– بنفس الكيفية نجد ان الشرط $1 = \langle\phi|\phi\rangle$ يؤدي الى : $\beta = \frac{e^{i\omega}}{\sqrt{2}}$ حيث ω هو اي عدد حقيقي .و عليه :

$$|\psi\rangle = \frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}i\\1\\-1\end{bmatrix} \quad , \quad |\phi\rangle = \frac{e^{i\omega}}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

3 – الشعاع $|\chi\rangle$ الذي يشكل مع الشعاعين $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ اساسا للفضاء المعتبر يجب ان يكون متعامدا مع كلاهما كما يجب ان تكون طويلته مساوية للواحد . هذا الشعاع يكتب في الاساس المعطى كمايلي :

$$|\chi\rangle = a|e_1\rangle + b|e_2\rangle + c|e_3\rangle$$

حيث a , b و c هي مركباته وفق المحاور $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$ و $|e_3\rangle$ على الترتيب و المطلوب تعيينها . لايجادها نستخدم الشروط المفرضة على الشعاع $|\chi\rangle$ للحصول على المعادلات التي تسمح بذلك كمايلي :

$$\langle\psi|\chi\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{e^{-i\gamma}}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-i & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -ia + b - c = 0$$

$$\langle\phi|\chi\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{e^{-i\omega}}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad b + c = 0$$

$$\langle\chi|\chi\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix}a^* & b^* & c^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad aa^* + bb^* + cc^* = 0$$

و بهذا نكون قد حصلنا على ثلاث معادلات :

$$\begin{aligned}
&-ia + b - c = 0\\
&b + c = 0\\
&aa^* + bb^* + cc^* = 0
\end{aligned}$$

بحل هذه الجملة نجد ان :

$$a = \frac{2ie^{i\delta}}{\sqrt{6}} \quad , \quad b = \frac{-e^{i\delta}}{\sqrt{6}} \quad , \quad c = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{6}}$$

حيث δ هو اي عدد حقيقي .

حل التمريـــــن الـــرابع

1 – اثبات تعامد و تجانس الاساس الجديد . لكي تكون اشعة هذا الاساس متعامدة يجب ان يكون الجداء السلمي لاي

شعاعين منها معدوما . و عليه :

$$\langle e_1'|e_2'\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 0$$

$$\langle e_1'|e_3'\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 0$$

$$\langle e_2'|e_3'\rangle = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 0$$

– لكي يكون هذا الاساس متجانس يجب ان تكون طويلة كل شعاع من اشعته مساوية للواحد :

$$|e_1'|^2 = \langle e_1'|e_1'\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = 1$$

$$|e_2'|^2 = \langle e_2'|e_2'\rangle = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 1$$

$$|e_3'|^2 = \langle e_3'|e_3'\rangle = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = 1$$

اي ان الاساس الجديد متعامد و متجانس .

2 – التمثيل المصفوفي لاشعة الاساس $\mathcal{B}$ هو :

$$|e_1'\rangle = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$|e_1'\rangle = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$|e_1'\rangle = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$$

3 – مصفوفة التحويل من الاساس القديم الى الاساس الجديد هي مصفوفة من الرتبة 3×3 :

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

و عناصرها تتحدد كمايلي :

$$\begin{aligned} s_{11} &= \langle e_1|e_1'\rangle = 1 \quad , \quad s_{12} = \langle e_1|e_2'\rangle = 0 \quad , \quad s_{13} = \langle e_1|e_3'\rangle = 0 \\ s_{21} &= \langle e_2|e_1'\rangle = 0 \quad , \quad s_{22} = \langle e_2|e_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad s_{23} = \langle e_2|e_3'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ s_{31} &= \langle e_3|e_1'\rangle = 0 \quad , \quad s_{32} = \langle e_3|e_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad s_{33} = \langle e_3|e_3'\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

و منه :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

4 – مركبات الشعاع ϕ في الاساس $\mathcal{B}$ (نرمز لها ب ϕ_1' , ϕ_2' و ϕ_3') تتحدد بالمعادلة التالية :

$$\phi^{(\mathcal{B})} = S^{-1}\phi^{(\mathcal{A})}$$

و التي تكتب مصفوفيا كمايلي :

$$\begin{bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3i \\ 2+3i \end{bmatrix}$$

و منه :

$$|\phi^{(\mathcal{B})}\rangle = |e_1'\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\big(6i+2\big)|e_2'\rangle - \frac{2}{\sqrt{2}}|e_3'\rangle$$

2.10 المؤثرات

حل التمريـــــن الاول

1 – التمثيل المصفوفي لاي مؤثر في اي اساس يتحدد من خلال تاثير هذا المؤثر على اشعة الاساس المعتبر . فاذا كانت اشعة الاساس هي $\{|e_i\rangle\}$ و عددها (n) فان الشكل العام لتاثير اي مؤثر $\widehat{S}$ يكون كمايلي :

$$\widehat{S}|e_j\rangle = s_{1j}|e_1\rangle + s_{2j}|e_2\rangle + s_{3j}|e_3\rangle + ... + s_{nj}|e_n\rangle$$

حيث s_{ij} هي عناصر المصفوفة الممثلة للمؤثر $\widehat{S}$. و عليه لايجاد المصفوفة الممثلة للمؤثر $\widehat{A}$ نقوم بكتابة تاثيره على اشعة الاساس :

$$\widehat{A}|e_1\rangle = a|e_1\rangle + 0|e_2\rangle + 0|e_3\rangle$$
$$\widehat{A}|e_2\rangle = 0|e_1\rangle - a|e_2\rangle + 0|e_3\rangle$$
$$\widehat{A}|e_3\rangle = 0|e_1\rangle + 0|e_2\rangle - a|e_3\rangle$$

و من ثم المطابقة مع الشكل العام لتاثيره و الذي هو :

$$\widehat{A}|e_1\rangle = a_{11}|e_1\rangle + a_{21}|e_2\rangle + a_{31}|e_3\rangle$$
$$\widehat{A}|e_2\rangle = a_{12}|e_1\rangle + a_{22}|e_2\rangle + a_{32}|e_3\rangle$$
$$\widehat{A}|e_3\rangle = a_{13}|e_1\rangle + a_{23}|e_2\rangle + a_{33}|e_3\rangle$$

فنجد :

$$a_{11} = a \quad , \quad a_{21} = 0 \quad , \quad a_{31} = 0$$
$$a_{12} = 0 \quad , \quad a_{22} = -a \quad , \quad a_{32} = 0$$
$$a_{13} = 0 \quad , \quad a_{23} = 0 \quad , \quad a_{33} = -a$$

و منه :

$$\widehat{A} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

– لايجاد التمثيل المصفوفي للمؤثر $\widehat{B}$ نكتب تاثيره على شعة الاساس :

$$\widehat{B}|e_1\rangle = b|e_1\rangle + 0|e_2\rangle + 0|e_3\rangle$$
$$\widehat{B}|e_2\rangle = 0|e_1\rangle + 0|e_2\rangle + ib|e_3\rangle$$
$$\widehat{B}|e_3\rangle = 0|e_1\rangle - ib|e_2\rangle + 0|e_3\rangle$$

ثم نطابق مع الشكل العام لتاثيره على هذه الاشعة :

$$\widehat{B}|e_1\rangle = b_{11}|e_1\rangle + b_{21}|e_2\rangle + b_{31}|e_3\rangle$$
$$\widehat{B}|e_2\rangle = b_{12}|e_1\rangle + b_{22}|e_2\rangle + b_{32}|e_3\rangle$$
$$\widehat{B}|e_3\rangle = b_{13}|e_1\rangle + b_{23}|e_2\rangle + b_{33}|e_3\rangle$$

فنجد ان :

$$\widehat{B} = b \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

– باتباع نفس الخطوات نجد التمثيل المصفوفي للمؤثر $\widehat{C}$ و هو :

$$\widehat{C}=\frac{c}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

حل التمريـــــن الثـــاني

5 – ايجاد التمثيل المصفوفي للمؤثر T في الاساس $\mathcal{B}$:

$$T^{(\mathcal{B})}=R^{-1}T^{(\mathcal{A})}R$$

حيث R^{-1} هي المصفوفة العكسية لمصفوفة التحويل :

$$\begin{aligned}T^{(\mathcal{B})}&=RT^{(\mathcal{A})}R^{\dagger}\\&=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-i}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{i}{\sqrt{2}}&\frac{-i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

حل التمريـــــن الثـــالث

1 – ايجاد الثابتان m و n :

ا – حساب طويلة الشعاع Ψ :

$$\begin{aligned}||\Psi||^2&=\langle\Psi|\Psi\rangle\\&=\begin{bmatrix}2n&-in\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2n\\in\end{bmatrix}\\&=5n^2\\&\Longrightarrow||\Psi||=\sqrt{5}n\end{aligned}$$

و عليه لكي تساوي طويلة هذا الشعاع الواحد يجب ان : $n=1/\sqrt{5}$.

ب – حساب طويلة الشعاع Φ :

$$\begin{aligned}
||\Phi||^2 &= \langle\Phi|\Phi\rangle \\
&= \begin{bmatrix}(1-i)m & (1+i)m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1+i)m\\(1-i)m\end{bmatrix} \\
&= 4m^2 \\
&\Longrightarrow ||\Phi|| = 2m
\end{aligned}$$

و عليه لكي تساوي طويلة هذا الشعاع الواحد يجب ان : $m = 1/2$.

2 – ايجاد المرافق الهرميتي للمؤثر $\widehat{B}$:

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{B}\right)^\dagger &= \left(\widehat{B}^T\right)^* \\
&= \begin{bmatrix}0 & -2i\\ 2i & 3\end{bmatrix}^* \\
&= \begin{bmatrix}0 & 2i\\ -2i & 3\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

نلاحظ ان $\widehat{B} = \left(\widehat{B}\right)^\dagger$ و هذا يعني انه مؤثر هرميتي .

– بما ان المؤثر $\widehat{B}$ فان العلاقة التالية يجب ان تكون محققة :

$$\langle\Psi|\widehat{B}|\Phi\rangle = \left(\langle\Phi|\widehat{B}|\Psi\rangle\right)^*$$

حساب $\langle\Psi|\widehat{B}|\Phi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle\Psi|\widehat{B}|\Phi\rangle &= \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-i}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2i\\ -2i & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+i}{2}\\ \frac{1-i}{2}\end{bmatrix} \\
&= -\frac{1+i}{2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

حساب $\langle\Phi|\widehat{B}|\Psi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle\Phi|\widehat{B}|\Psi\rangle &= \begin{bmatrix}\frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2i\\ -2i & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{i}{\sqrt{5}}\end{bmatrix} \\
&= -\frac{1-i}{2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

اذا العلاقة $\left(\langle\Phi|\widehat{B}|\Psi\rangle\right)^{*} = \langle\Psi|\widehat{B}|\Phi\rangle$ محققة و المؤثر $\widehat{B}$ هو مؤثر هرميتي .

حل التمريـــــن الـــرابع

لايجاد القيم الذاتية و الاشعة الذاتية ننطلق من كون الاشعة الذاتية تحقق المعادلة التالية :

$$\widehat{A}|\phi\rangle = a|\phi\rangle$$

حيث $|\phi\rangle$ هو الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية a . طبعا عدد القيم الذاتية هنا هو اثنان (a_1 و a_2) لان المؤثر هو مصفوفة من الرتبة 2×2 . بالرمز ب α و β لمركبتي الشعاع ϕ فان معادلة القيم الذاتية تكتب مصفوفيا كمايلي :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

و منه نحصل على جملة معادتين للمجهولين α و β :

$$a\alpha - 2i\beta = 0$$
$$2i\alpha + (a-3)\beta = 0$$

لكي يكون لهذه الجملة حل يجب ان يكون محددها معدوم :

$$\begin{vmatrix} a & -2i \\ 2i & a-3 \end{vmatrix} = 0$$

و منه نجد المعادلة المميزة التي تسمح بايجاد القيم الذاتية للمؤثر $\widehat{A}$:

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

و عليه فان القيم الذاتية هي :

$$a_1 = -1 \quad , \quad a_2 = 4$$

– نرمز ب ϕ_1 للشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $a_1 = -1$ و لمركباته ب α_1 و β_1 و من ثم نعوض في جملة المعادلتين السابقة فنجد :

$$-\alpha_1 - 2i\beta_1 = 0$$
$$2i\alpha_1 - 4\beta_1 = 0$$

المعادلتان مرتبطتان خطيا و هذا يعني انه لدينا معادلة واحدة ، حلها يعطينا :

$$\alpha_1 = -2i\beta_1$$

و عليه فان الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية $a_1 = -1$ هو :

$$|\phi_1\rangle = \beta_1\Big[-2i|e_1\rangle + |e_2\rangle\Big]$$

في المسائل الفيزيائية يشترط ان يكون التابع الذاتي مقوما (طويلته تساوي الواحد) و هذا الشرط يسمح بتحديد الثابت β_1 .

– لايجاد التابع الذاتي ϕ_2 المرفق بالقيمة الذاتية $a_2 = 4$ نتبع نفس الخطوات فنجد :

$$|\phi_2\rangle = \frac{i\beta_2}{2}\Big[|e_1\rangle - 2i|e_2\rangle\Big]$$

حل التمريــــــن الخـــامس

1 – الاشعة الذاتية تحقق المعادلة التالية :

$$\hat{A}|\phi\rangle = \alpha|\phi\rangle$$

و التي تكتب مصفوفيا كمايلي :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$$

a , b و c هي مركبات الشعاع الذاتي في الاساس المعتبر . من هذه المعادلة نحصل على جملة ثلاث معادلات بالمتغيرات a , b و c :

$$-\alpha a + \frac{1}{\sqrt{2}}b = 0$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}a - \alpha b + \frac{1}{\sqrt{2}}c = 0$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}b - \alpha c = 0$$

لكي يكون لهذه الجملة حل يجب ان يكون المحدد المشكل من معاملات المجاهيل معدوما :

$$\begin{vmatrix}-\alpha & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\alpha & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\alpha\end{vmatrix} = 0$$

بصفة عامة هذا الشرط يكتب كمايلي :

$$det\Big(\mathrm{A} - \alpha\mathrm{I}\Big) = 0$$

حيث I هي مصفوفة الوحدة و هي من نفس رتبة المصفوفة A . و منه نجد المعادلة المميزة التي تسمح بايجاد القيم الذاتية :

$$\alpha\Big(1+\alpha\Big)\Big(1-\alpha\Big) = 0$$

اذا القيم الذاتية هي :

$$\alpha_1 = -1 \quad , \quad \alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_3 = 1$$

– لايجـــاد الشعـــاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتيـــة $\alpha_1 = -1$ (نرمز له ب ϕ_1) نعوض في جملة المعادلات عن α بقيمتها ($\alpha_1 = -1$) فنحصل على جملة المعادلات التي تسمح لنا بايجاد المركبات a , b و c :

$$a + \frac{1}{\sqrt{2}}b = 0$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}a + b + \frac{1}{\sqrt{2}}c = 0$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}b + c = 0$$

من المعادلة الاولى نجد :

$$a = -b/\sqrt{2}$$

و من المعادلة الثانية نجد :

$$c = -b/\sqrt{2}$$

بالتعويض عن a و b في المعادلة الثانية نجد ان :

$$b - b = 0$$

و هي محققة مهما كانت قيمة b التي تختلف عن الصفر و منه :

$$|\phi_1\rangle = -b/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

– بنفس الكيفية نجد الشعاعين ϕ_2 و ϕ_3 المرفقين بالقيمتين الذاتيتين $\alpha_2 = 0$ و $\alpha_3 = 1$ على التوالي و هما :

$$|\phi_2\rangle = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad |\phi_3\rangle = b/\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

حل التمريـــــن الســـادس

1 – نعم المؤثرين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$:

$$\widehat{A}^{\dagger} = \left(\widehat{A}^{*}\right)^{T}$$

$$\widehat{A}^{*} = a\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\left(\widehat{A}^{*}\right)^{T} = a\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \widehat{A} = \widehat{A}^{\dagger}$$

بنفس الكيفية يتم اثبات كون $\widehat{B}$ هرميتي .

2 – لكي يكون هذين المؤثرين متبادلين لابد ان يتحقق الشرط التالي :

$$\widehat{A}\widehat{B} = \widehat{B}\widehat{A}$$

– حساب $\widehat{A}\widehat{B}$:

$$\widehat{A}\widehat{B} = a\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} b\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= ab\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

– حساب $\widehat{B}\widehat{A}$:

$$\widehat{B}\widehat{A} = b\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} a\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$= ab\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

– اذا الشرط $\widehat{A}\widehat{B} = \widehat{B}\widehat{A}$ محقق و عليه فالمؤثرين متبادلان .

حل التمريـــــــن الســـابع

1 –

$$\mathrm{A}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -i & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{B}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2i \\ 3 & -2i & 4 \end{bmatrix}$$

2 – المؤثر $\widehat{\boldsymbol{B}}$ هو مؤثر هرميتي لان $\widehat{B}^{\dagger} = \widehat{B}$.
يمكن التاكد من ذلك باستخدام التعريف الاساسي للمرافق الهرميتي . لذلك نقوم بحساب المقدارين $\langle\phi|\widehat{B}|\psi\rangle$ و $\langle\psi|\widehat{B}|\phi\rangle$ ثم نقارن بين $\langle\phi|\widehat{B}|\psi\rangle$ و $\Big(\langle\psi|\widehat{B}|\phi\rangle\Big)^*$ فاذا كانا متساويان فان المؤثر $\widehat{B}$ هرميتي و الا فالعكس صحيح :

$$\langle\psi|\widehat{B}|\phi\rangle = 30a - 4ai$$
$$\langle\phi|\widehat{B}|\psi\rangle = 30a + 4ai$$

نلاحظ ان

$$\langle\psi|\widehat{B}|\phi\rangle^* = \langle\phi|\widehat{B}|\psi\rangle$$

و هذا يعني ان المؤثر $\widehat{B}$ مؤثر هرميتي .
3 – مربع طويلة الشعاع $|\psi\rangle$ هي :

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= \langle\psi|\psi\rangle \\ &= \begin{bmatrix} a & -2ai & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 2ai \\ a \end{bmatrix} \\ &= 6a^2 \end{aligned}$$

لكي يكون مقوما يجب ان تكون طويلته مساوية للواحد . اذا :

$$a = 1/\sqrt{6}$$

4 – ايجاد الشعاع $|\psi'\rangle$ يعني ايجاد مركباته . بالرمز لهذه المركبات ب a , b و c و اعادة كتابة معادلة التحويل :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

نجد ان :

$$a = \frac{4}{\sqrt{6}} \quad , \quad b = \frac{(1+i)}{\sqrt{6}} \quad , \quad c = \frac{2(i-1)}{\sqrt{6}}$$

و منه :

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[4|e_1\rangle + (1+i)|e_1\rangle + 2(i-1)|e_3\rangle\Big]$$

– بنفس الكيفية نجد مركبات الشعاع $|\phi'\rangle$:

$$|\phi'\rangle = 7|e_1\rangle + 2(1+i)|e_1\rangle + 2|e_3\rangle$$

حل التمريـــــن الثـــامن

1 –للتاكد من صحة العلاقة :

$$\frac{d}{dx}x = 1 + x\frac{d}{dx}$$

نقوم بالتاثير بالمؤثر $\frac{d}{dx}x$ على اي تابع للمتغير x و ليكن $F(x)$:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d}{dx}x\Big)F(x) &= \frac{d}{dx}xF(x)\\ &= \frac{dx}{dx}F(x) + x\frac{dF(x)}{dx}\\ &= F(x) + x\frac{dF(x)}{dx}\\ &= \Big(1 + x\frac{d}{dx}\Big)F(x)\end{aligned}$$

بالمطابقة بين الطرفين الايسر و الايمن نجد ان :

$$\frac{d}{dx}x = 1 + x\frac{d}{dx}$$

2 –لاثبات صحة العلاقة :

$$x^2\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = x\frac{d}{dx} - 1$$

نقوم بالتاثير بالمؤثر $x^2\frac{d}{dx}\frac{1}{x}$ على اي تابع للمتغير x و ليكن $F(x)$:

$$\begin{aligned}\Big(x^2\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\Big)F(x) &= x^2\frac{d}{dx}\frac{F(x)}{x}\\ &= x^2\Big[-\frac{1}{x^2}F(x) + \frac{1}{x}\frac{dF(x)}{dx}\Big]\\ &= -F(x) + x\frac{dF(x)}{dx}\\ &= \Big[x\frac{d}{dx} - 1\Big]F(x)\end{aligned}$$

بالمطابقة بين الطرفين الايسر و الايمن نجد ان :

$$x^2\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = x\frac{d}{dx} - 1$$

باقي العلاقات يمكن اثباتها بنفس الكيفية .

حل التمريـــــن التـــاسع

1 – حساب تاثير المؤثر $\frac{d^2}{dx^2}x^2$ على التابع $\cos x$:

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^2}{dx^2}x^2\right]\cos x &= \frac{d^2}{dx^2}\left[x^2\cos x\right]\\ &= \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left[x^2\cos x\right]\\ &= \frac{d}{dx}\left[2x\cos x - x^2\sin x\right]\\ &= 2\cos x - 2x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x\\ &= \left(2-x^2\right)\cos x - 4x\sin x\end{aligned}$$

و هذا يعني ان التابع $\cos x$ ليس تابعا ذاتيا للمؤثر $\frac{d^2}{dx^2}x^2$.

2 – حساب تاثير المؤثر $\left(\frac{d}{dx}x\right)^2$ على التابع $\cos x$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}x\right)^2\cos x &= \frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}x\left[\cos x\right]\\ &= \frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\left[x\cos x\right]\\ &= \frac{d}{dx}x\left[\cos x - x\sin x\right]\\ &= \frac{d}{dx}\left[x\cos x - x^2\sin x\right]\\ &= \cos x - x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x\\ &= \left(1-x^2\right)\cos x - 3x\sin x\end{aligned}$$

3 – حساب تاثير المؤثر $\frac{d^2}{dx^2}x^2$ على التابع e^x :

$$\frac{d^2}{dx^2}x^2e^x = \left(x^2+4x+2\right)e^x$$

4 – حساب تاثير المؤثر $\left(\frac{d}{dx}x\right)^2$ على التابع e^x :

$$\left(\frac{d}{dx}x\right)^2e^x = \left(x^2+3x+1\right)e^x$$

حل التمريـــن العـــاشر

1 – ايجاد القيمة الذاتية للمؤثر $\widehat{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$ المقابلة للتابع الذاتي $\psi_A(x) = \sin 2x$:

$$\begin{aligned}\widehat{A}\psi_A(x) &= -\frac{d^2}{dx^2}\sin 2x\\ &= -\frac{d}{dx}\Big[2\cos 2x\Big]\\ &= 4\sin 2x\\ &= 4\psi_A(x)\end{aligned}$$

اذا التابع $\psi_A(x) = \sin 2x$ هو تابع ذاتي للمؤثر $\widehat{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$ بقيمة ذاتية $a = 4$.

2 – ايجاد القيمة الذاتية للمؤثر $\widehat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ المقابلة للتابع الذاتي $\psi_A(x) = e^{-x^2/2}$:

$$\begin{aligned}\widehat{A}\psi_A(x) &= \Big[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\Big]e^{-x^2/2}\\ &= -\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2/2} + x^2e^{-x^2/2}\\ &= e^{-x^2/2} - x^2e^{-x^2/2} + x^2e^{-x^2/2}\\ &= e^{-x^2/2}\\ &= \psi_A(x)\end{aligned}$$

اذا التابع $\psi_A(x) = e^{-x^2/2}$ هو تابع ذاتي للمؤثر $\widehat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ بقيمة ذاتية $a = 1$.

3 – القيمة الذاتية للمؤثر $\widehat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}$ المقابلة للتابع الذاتي $\psi_A(x) = \frac{\sin\alpha x}{x}$ هي $a = -\alpha^2$.

حل التمرين الحادي عشر

1 – في الجدول الموالي وضع كل مؤثر مقابل تابعه الذاتي :

	المؤثر	التابع الذاتي
1.	$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}$	$4x^3 - 3x$
2.	$\frac{d^2}{dx^2}$	$e^{3x} + e^{-3x}$
3.	$x\frac{d}{dx}$	$5x^4$
4.	$\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$	$4x^4 - 12x^2 + 3$
5.	$x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx}$	$x^2 - 4x + 2$

القيم الذاتية هي : -9 , 9 , 4 , -8 و -2 على التوالي حسب الجدول اعلاه .

حل التمريـــن الثاني عشر

اثبات صحة العلاقة $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=-\left[\hat{B},\hat{A}\right]$:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}=-\left(\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}\right)=-\left[\hat{B},\hat{A}\right]$$

- اثبات صحة العلاقة $\left[\lambda\hat{A},\hat{B}\right]=\lambda\left[\hat{A},\hat{B}\right]$:

$$\left[\lambda\hat{A},\hat{B}\right]=\lambda\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\lambda\hat{A}$$

لدينا :

$$\hat{B}\lambda=\lambda\hat{B}$$

و عليه :

$$\left[\lambda\hat{A},\hat{B}\right]=\lambda\hat{A}\hat{B}-\lambda\hat{B}\hat{A}=\lambda\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)=\lambda\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

- اثبات صحة العلاقة $\left[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}\right]=\left[\hat{A},\hat{C}\right]+\left[\hat{B},\hat{C}\right]$:

$$\begin{aligned}\left[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}\right]&=\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\hat{C}-\hat{C}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\\&=\hat{A}\hat{C}+\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{A}-\hat{C}\hat{B}\\&=\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A}+\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B}\\&=\left[\hat{A},\hat{C}\right]+\left[\hat{B},\hat{C}\right]\end{aligned}$$

- اثبات صحة العلاقة

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right]=\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right]+\left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right]&=\left(\hat{A}\hat{B}\right)\hat{C}-\hat{C}\left(\hat{A}\hat{B}\right)\\&=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{A}\hat{B}+\hat{A}\hat{C}\hat{B}-\hat{A}\hat{C}\hat{B}\\&=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{A}\hat{C}\hat{B}+\hat{A}\hat{C}\hat{B}-\hat{C}\hat{A}\hat{B}\\&=\hat{A}\left(\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B}\right)+\left(\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A}\right)\hat{B}\\&=\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right]+\left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}\end{aligned}$$

حل التمريـــن الثالث عشر

اثبات ان $\left[\hat{A},\hat{B}\right]^{\dagger} = -\left[\hat{A},\hat{B}\right]$:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{A},\hat{B}\right]^{\dagger} &= \left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)^{\dagger} = \left(\hat{A}\hat{B}\right)^{\dagger} - \left(\hat{B}\hat{A}\right)^{\dagger} \\
&= \hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger} - \hat{A}^{\dagger}\hat{B}^{\dagger} = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} \\
&= \left[\hat{B},\hat{A}\right] = -\left[\hat{A},\hat{B}\right]
\end{aligned}$$

حل التمريـــن الرابع عشر

1 – اثبات صحة العلاقة الاولى :

$$\begin{aligned}
\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{2} &= \left(\hat{A}+\hat{B}\right)\left(\hat{A}+\hat{B}\right) \\
&= \hat{A}^{2} + \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} + \hat{B}^{2}
\end{aligned}$$

لدينا

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

و عليه :

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}\hat{A}^{2} + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^{2}$$

2 – اثبات صحة العلاقة الثانية :

$$\begin{aligned}
\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\left(\hat{A}-\hat{B}\right) &= \hat{A}^{2} - \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} - \hat{B}^{2} \\
&= \hat{A}^{2} - \hat{B}^{2}
\end{aligned}$$

لان

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

3 – اثبات صحة العلاقة الثالثة :

$$\begin{aligned}
\left[\left(\hat{A}+\hat{B}\right),\left(\hat{A}-\hat{B}\right)\right] &= \left(\hat{A}+\hat{B}\right)\left(\hat{A}-\hat{B}\right) - \left(\hat{A}-\hat{B}\right)\left(\hat{A}+\hat{B}\right) \\
&= \left(\hat{A}^{2}-\hat{B}^{2}\right) - \left(\hat{A}^{2}-\hat{B}^{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

حل التمريـــن الخامس عشر

1 – اثبات صحة العلاقة الاولى :

$$
\begin{aligned}
\left[\widehat{A}, \widehat{B}^2\right] &= \widehat{A}\widehat{B}^2 - \widehat{B}^2\widehat{A} \\
&= \widehat{A}\widehat{B}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{B}\widehat{A} \\
&= \left(1 + \widehat{B}\widehat{A}\right)\widehat{B} - \widehat{B}\left(\widehat{A}\widehat{B} - 1\right) \\
&= \widehat{B} + \widehat{B}\widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B} \\
&= 2\widehat{B}
\end{aligned}
$$

2 – اثبات صحة العلاقة الثانية :

$$
\begin{aligned}
\left[\widehat{A}, \widehat{B}^3\right] &= \left[\widehat{A}, \widehat{B}\widehat{B}^2\right] \\
&= \widehat{B}\left[\widehat{A}, \widehat{B}^2\right] + \left[\widehat{A}, \widehat{B}\right]\widehat{B}^2 \\
&= \widehat{B}\left(2\widehat{B}\right) + \widehat{B}^2 \\
&= 3\widehat{B}^2
\end{aligned}
$$

3 – اثبات صحة العلاقة الثالثة :

$$
\begin{aligned}
\left[\widehat{A}^2, \widehat{B}^2\right] &= \left[\widehat{A}\widehat{A}, \widehat{B}^2\right] \\
&= \widehat{A}\left[\widehat{A}, \widehat{B}^2\right] + \left[\widehat{A}, \widehat{B}^2\right]\widehat{A} \\
&= \widehat{A}\left(2\widehat{B}\right) + \left(2\widehat{B}\right)\widehat{A} \\
&= 2\left(\widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B}\widehat{A}\right)
\end{aligned}
$$

حل التمريـــن السادس عشر

ليكن $\widehat{A}$ مؤثرا هرميتيا و ليكن $|\phi\rangle$ شعاعا ذاتيا لهذا المؤثر بقيمة ذاتية a . اي ان المعادلة التالية محققة :

$$\widehat{A}|\phi\rangle = a|\phi\rangle$$

باخذ المرافق الهرميتي لهذه المعادلة نجد :

$$\langle\phi|\widehat{A}^{\dagger} = \langle\phi|a^* \Longrightarrow \langle\phi|\widehat{A} = a^*\langle\phi|$$

نقوم بضرب طرفي المعادلة الاولى من اليسار ب $\langle\phi|$ و ضرب طرفي المعادلة الثانية من اليمين ب $|\phi\rangle$ فنحصل على المعادلتين التاليتين :

$$
\begin{aligned}
\langle\phi|\widehat{A}|\phi\rangle &= a\langle\phi|\phi\rangle \\
\langle\phi|\widehat{A}|\phi\rangle &= a^*\langle\phi|\phi\rangle
\end{aligned}
$$

بطرح هاتين المعادلتين من بعضهما البعض نجد :

$$\left(a-a^*\right)\langle\phi|\phi\rangle=0$$

بما ان المقدار $\langle\phi|\phi\rangle$ يمثل مربع طويلة الشعاع الذاتي فهو ليس معدوم و عليه فان : $a=a^*$ و هذا يعني ان القيم الذاتية للمؤثر الهرميتي هي قيم حقيقة .

حل التمريـــن السابع عشر

ليكن $\widehat{A}$ مؤثرا هرميتيا و ليكن $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ شعاعان ذاتيان له بالقيمتين الذاتيتين a و b على التوالي . هذا يعني ان المعادلتين التاليتين محققتين :

$$\widehat{A}|\alpha\rangle=a|\alpha\rangle$$
$$\widehat{A}|\beta\rangle=b|\beta\rangle$$

نقوم بضرب المعادلة الاولى من اليسار ب $\langle\beta|$ و ضرب المعادلة الثانية من اليسار ب $\langle\alpha|$ فنحصل على المعادلتين التاليتين :

$$\langle\beta|\widehat{A}|\alpha\rangle=a\langle\beta|\alpha\rangle$$
$$\langle\alpha|\widehat{A}|\beta\rangle=b\langle\alpha|\beta\rangle$$

ناخذ المرافق الهرميتي للمعادلة الاخيرة مع مراعاة ان المؤثر $\widehat{A}$ هرميتي و ان قيمه الذاتية حقيقية فنجد :

$$\langle\beta|\widehat{A}|\alpha\rangle=b\langle\beta|\alpha\rangle$$

الان لدينا مايلي :

$$\langle\beta|\widehat{A}|\alpha\rangle=a\langle\beta|\alpha\rangle$$
$$\langle\beta|\widehat{A}|\alpha\rangle=b\langle\beta|\alpha\rangle$$

بطرح هاتين المعادلتين من بعضهما البعض نجد :

$$\left(a-b\right)\langle\beta|\alpha\rangle=0$$

نظرا لكون $a\neq b$ فان المقدار $\langle\beta|\alpha\rangle$ الذي يمثل الجداء السلمي للشعاعين هو مقدار معدوم . اي ان الشعاعين متعامدين .

حل التمريـــن الثامن عشر

1 – اثبات ان المؤثر $\widehat{P}$ هرميتي :

$$\begin{aligned}\widehat{P}^\dagger&=\left(\alpha\widehat{Q}\widehat{Q}^\dagger\right)^\dagger\\&=\alpha^*\left(\widehat{Q}^\dagger\right)^\dagger\left(\widehat{Q}\right)^\dagger\\&=\alpha\widehat{Q}\widehat{Q}^\dagger\\&=\widehat{P}\end{aligned}$$

و هو المطلوب .

2 – كتابة $\widehat{P}^2$ بدلالة $\widehat{P}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{P}^2 &= \widehat{P}\widehat{P} \\
&= \alpha\widehat{Q}\widehat{Q}^\dagger\alpha\widehat{Q}\widehat{Q}^\dagger \\
&= \alpha^2\widehat{Q}\widehat{Q}^\dagger\widehat{Q}\widehat{Q}^\dagger \\
&= \alpha^2\widehat{Q}\left[1-\widehat{Q}\widehat{Q}^\dagger\right]\widehat{Q}^\dagger \\
&= \alpha^2\widehat{Q}\widehat{Q}^\dagger - \alpha^2\widehat{Q}\widehat{Q}\widehat{Q}^\dagger\widehat{Q}^\dagger \\
&= \alpha\widehat{P}
\end{aligned}$$

اي ان :

$$\widehat{P}^2 = \alpha\widehat{P}$$

1 – ايجاد القيم الذاتية للمؤثر $\widehat{P}$: – ليكن $|\phi\rangle$ تابعا ذاتيا للمؤثر $\widehat{P}$ بقيمة ذاتية λ :

$$\widehat{P}|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle$$

نؤثر على طرفي هذه المعادلة ب $\widehat{P}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{P}^2|\phi\rangle &= \widehat{P}\widehat{P}|\phi\rangle \\
&= \widehat{P}\lambda|\phi\rangle \\
&= \lambda\widehat{P}|\phi\rangle \\
&= \lambda^2|\phi\rangle
\end{aligned}$$

الان نؤثر ب $\widehat{P}^2$ على التابع الذاتي اخذين بعين الاعتبار النتيجة التي تحصلنا عليها سابقا $\widehat{P}^2 = \alpha\widehat{P}$:

$$\widehat{P}^2|\phi\rangle = \alpha\widehat{P}|\phi\rangle = \alpha\lambda|\phi\rangle$$

لقد حصلنا اذا على المعادلتين التاليتين :

$$\begin{aligned}
\widehat{P}^2|\phi\rangle &= \lambda^2|\phi\rangle \\
\widehat{P}^2|\phi\rangle &= \alpha\lambda|\phi\rangle
\end{aligned}$$

بالمطابقة بين المعادلتين نجد ان :

$$\lambda = \alpha$$

حل التمريـــن التاسع عشر

1 – اثبات ان المؤثر $\widehat{A}$ هرميتي : هذا المؤثر معرف بشكلين مختلفين و عليه يجب ان نثبت انه هرميتي انطلاقا من كلا التعريفين :

– انطلاقا من التعريف الاول :

$$\begin{aligned}\widehat{A}^{\dagger} &= \left[\widehat{B}^{\dagger}\widehat{B}+3\right]^{\dagger}\\ &= \left[\widehat{B}^{\dagger}\widehat{B}\right]^{\dagger}+3\\ &= \left[\widehat{B}\right]^{\dagger}\left[\widehat{B}^{\dagger}\right]^{\dagger}+3\\ &= \widehat{B}^{\dagger}\widehat{B}+3\end{aligned}$$

و عليه فهو هرميتي .

– انطلاقا من التعريف الثاني :

$$\begin{aligned}\widehat{A}^{\dagger} &= \left[\widehat{B}\widehat{B}^{\dagger}+1\right]^{\dagger}\\ &= \left[\widehat{B}\widehat{B}^{\dagger}\right]^{\dagger}+1\\ &= \left[\widehat{B}^{\dagger}\right]^{\dagger}\left[\widehat{B}\right]^{\dagger}+1\\ &= \widehat{B}\widehat{B}^{\dagger}+1\end{aligned}$$

و هو هرميتي . اذا المؤثر $\widehat{A}$ هو مؤثر هرميتي .

2 – لايجاد المبدل $\left[\widehat{B}^{\dagger},\widehat{B}\right]$ ننطلق من تعريف المؤثر $\widehat{A}$:

$$\begin{aligned}\widehat{A}^{\dagger} &= \widehat{B}^{\dagger}\widehat{B}+3\\ \widehat{A}^{\dagger} &= \widehat{B}\widehat{B}^{\dagger}+1\end{aligned}$$

نطرح المعادلة الثانية من الاولى فنجد :

$$\widehat{B}^{\dagger}\widehat{B}-\widehat{B}\widehat{B}^{\dagger}+2=0$$

و منه :

$$\widehat{B}^{\dagger}\widehat{B}-\widehat{B}\widehat{B}^{\dagger}=-2$$

الطرف الايسر للمعادلة الاخيرة يمثل المبدل $\left[\widehat{B}^{\dagger},\widehat{B}\right]$ و عليه :

$$\left[\widehat{B}^{\dagger},\widehat{B}\right]=-2$$

3 – لحساب المبدل $\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]$ ننطلق من تعريف المؤثر $\widehat{A}$:

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \widehat{B}^{\dagger}\widehat{B}+3\\ \widehat{A} &= \widehat{B}\widehat{B}^{\dagger}+1\end{aligned}$$

نضرب المعادلة الاولى من اليمين في $\widehat{B}$ و نضرب المعادلة الثانية من اليسار في $\widehat{B}$ فنحصل على :

$$\widehat{B}\widehat{A} = \widehat{B}\widehat{B}^{\dagger}\widehat{B} + 3\widehat{B}$$
$$\widehat{A}\widehat{B} = \widehat{B}\widehat{B}^{\dagger}\widehat{B} + \widehat{B}$$

نقوم الان بطرح المعادلة الاولى من الثانية :

$$\widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A} = -2\widehat{B}$$

الطرف الايسر هو المبدل $\left[\widehat{A}, \widehat{B}\right]$ و عليه :

$$\left[\widehat{A}, \widehat{B}\right] = -2\widehat{B}$$

4 – لاثبات ان التابع $\widehat{B}\psi$ يمثل تابع ذاتي للمؤثر $\widehat{A}$ ننطلق من معادلة القيم الذاتية التالية :

$$\widehat{A}\psi = a\psi$$

بالتاثير من اليسار على طرفيها بالمؤثر $\widehat{B}$ نحصل على :

$$\widehat{B}\widehat{A}\psi = a\widehat{B}\psi$$

من الجواب السابق لدينا :

$$\widehat{B}\widehat{A} + 2\widehat{B}$$

بالتعويض عن $\widehat{B}\widehat{A}$ في المعادلة السابقة نحصل على :

$$\widehat{A}\widehat{B}\psi + 2\widehat{B}\psi = a\widehat{B}\psi$$

و منه :

$$\widehat{A}\widehat{B}\psi = (a-2)\widehat{B}\psi$$

و هي معادلة قيم ذاتية للمؤثر $\widehat{A}$ حيث ان التابع الذاتي هنا هو $\widehat{B}\psi$ و القيمة الذاتية هي $a-2$ و هو المطلوب .

الفصـــــل 11

حلول تمارين الفصل الثالث

1.11 تابع الحالة و مبدا التركيب

حل التمريـــــن الاول

1 – ايجاد ثابت التقويم . يكون التابع الموجي مقوما اذا كان يحقق الشرط التالي :

$$\int_0^a \psi_0^*(x)\psi_0(x)dx = 1$$

اذا لايجاد ثابت التقويم نقوم بحساب التكامل السابق و من ثم مساوته للواحد :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \psi_0^*(x)\psi_0(x)dx \\ &= \int_0^a A^* \sin(\pi x/a) A \sin(\pi x/a) dx \\ &= A^2 \int_0^a \sin^2(\pi x/a) dx \end{aligned}$$

لقد اعتبرنا ان ثابت التقويم حقيقي ($A^* = A$) . للقيام بهذا التكامل نستخدم القاعدة المثلثية التالية :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

:

$$\begin{aligned} I &= \frac{A^2}{2} \int_0^a \Big(1 - \cos(2\pi x/a)\Big) dx \\ &= \frac{aA^2}{2} \end{aligned}$$

نطبق شرط التقويم فنجد ان :

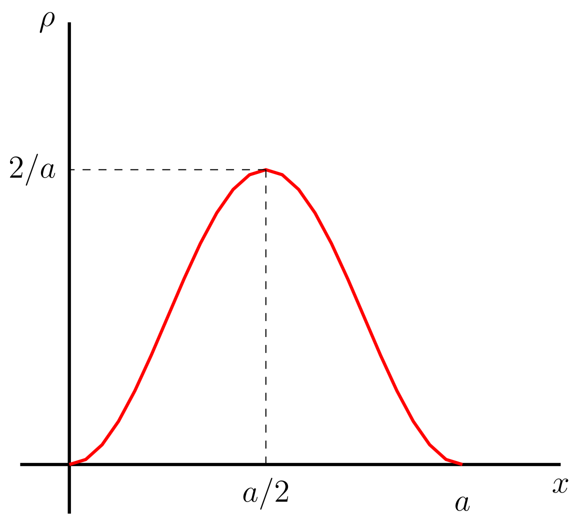
$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

ومنه :

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\pi x/a)$$

2 – كثافة احتمال الحضور عند اي نقطة هو :

$$\rho = |\psi|^2 = \psi_0^*(x)\psi_0(x) = \frac{2}{a}\sin^2(\pi x/a)$$



شكل 1.11: كثافة احتمال الحضور

3 – النقطة التي يكون احتمال تواجد الجسيم فيها اكبر ما يمكن هي النقطة التي تاخذ عندها الدالة ρ قيمتها العظمى :

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{4\pi}{a^2}\sin(\pi x/a)\cos(\pi x/a)$$

هذا المشتق ينعدم من اجل :

$$\sin(\pi x/a) = 0 \Longrightarrow x = 0, a$$

عند هاتين النقطتين تكون كثافة الاحتمال اصغرية :

$$\rho(0) = \rho(a) = 0$$

المشتق ينعدم ايضا من اجل :

$$\cos(\pi x/a) = 0 \Longrightarrow x = a/2$$

عند هذه النقطة تكون كثافة الاحتمال اعظمية :

$$\rho(a/2) = 2/a$$

4 – احتمال تواجد الجسيم في المنطقة $x > a/2$ هو :

$$P = \int_{a/2}^{a} \rho(x)dx = \int_{a/2}^{a} \frac{2}{a}\sin^2(\pi x/a)dx = \frac{1}{2}$$

5 – عدد الجمل التي يكون جسيمها في المنطقة $x > a/2$ هو :

$$N_+ = P \times N = 0.5 \times 10^8$$

حل التمريـــــن الثـــــاني

1 – نعم هذا التابع مقبول فيزيائيا لانه يحقق كل الشروط الواجب تفرها في التابع الموجي و هي : الاستمرارية , استمرارية المشتق الاول , قابليته للمكاملة (مربعه قابل للمكاملة فهو مقدار منته) و له قيمة واحدة في كل نقطة .

2 – تقويم هذا التابع يعني ايجاد قيمة الثابت A التي تجعل طويلة هذا التابع مساوية للواحد :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-a}^{a} \psi^*(x)\psi(x)dx \\
&= \int_{-a}^{a} A^2\Big[1 + \cos\frac{\pi x}{a}\Big]^2 dx \\
&= A^2 \int_{-a}^{a} \Big[1 + 2\cos\frac{\pi x}{a} + \cos^2\frac{\pi x}{a}\Big]dx \\
&= \frac{A^2}{2}\int_{-a}^{a} \Big[3 + 4\cos(\pi x/a) + \cos(2\pi x/a)\Big]dx \\
&= 3aA^2
\end{aligned}$$

و منه :

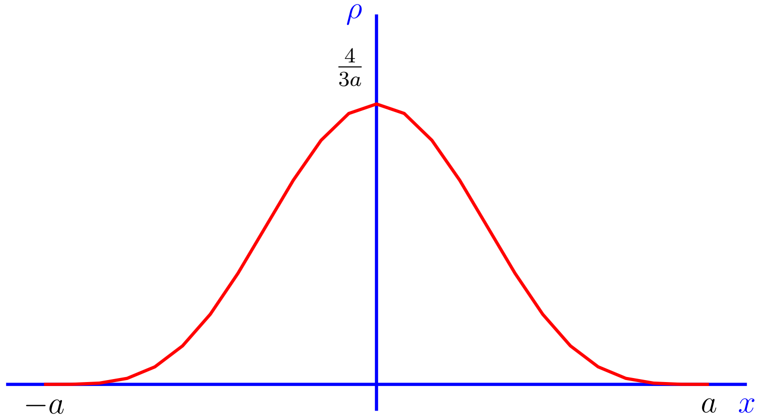
$$3aA^2 = 1 \Longrightarrow A = \sqrt{\frac{1}{3a}}$$

التابع المقوم هو :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & : x < -a \\ \sqrt{\frac{1}{3a}}\Big(1 + \cos\frac{\pi x}{a}\Big) & : -a \le x \le a \\ 0 & : x > a \end{cases}$$

3 – كثافة احتمال الحضور هي $\rho = |\psi(x)|^2$:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & : x < -a \\ \frac{1}{3a}\Big(1 + 2\cos(\pi x/a) + \cos^2(\pi x/a)\Big) & : -a \le x \le a \\ 0 & : x > a \end{cases}$$



شكل 2.11: كثافة احتمال الحضور

حل التمريـــــن الثـــالث

1 – تقويم التابع الموجي يعني جعل التكامل التالي مساو للواحد :

$$I=\int_0^b \psi^*(x)\psi(x)dx$$

و هذا يعني ايجاد الثابت A الذي من اجله يتحقق الشرط السابق :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^b \psi^*(x)\psi(x)dx \\
&= \int_0^a \frac{A^2}{a^2}x^2dx + \int_a^b \frac{A^2}{(b-a)^2}(b-x)^2dx \\
&= \frac{aA^2}{3} + \frac{(b-a)A^2}{3} \\
&= \frac{bA^2}{3}
\end{aligned}$$

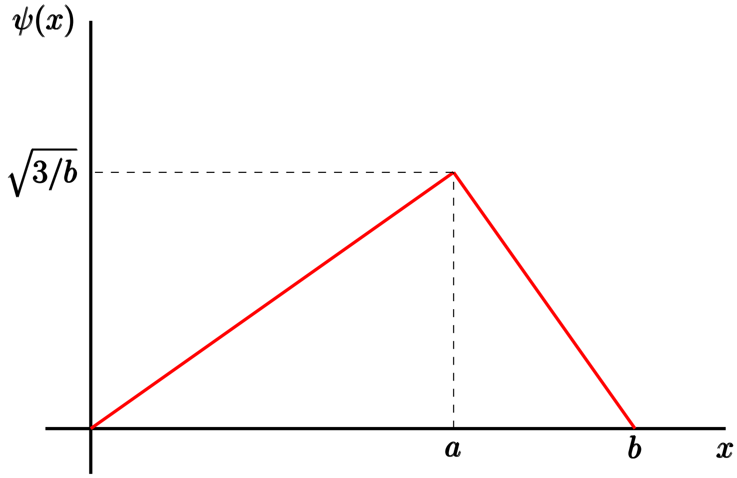
و منه :

$$\frac{bA^2}{3}=1 \Longrightarrow A=\sqrt{\frac{3}{b}}$$

اذا التابع المقوم هو :

$$\psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{3}{b}}\frac{x}{a} & : 0\le x\le a\\ \sqrt{\frac{3}{b}}\frac{b-x}{b-a} & : a\le x\le b\\ 0 & : \text{خارج هذا المجال}\end{cases}$$

2 – رسم تابع الحالة (التابع الموجي) بدلالة الموضع :

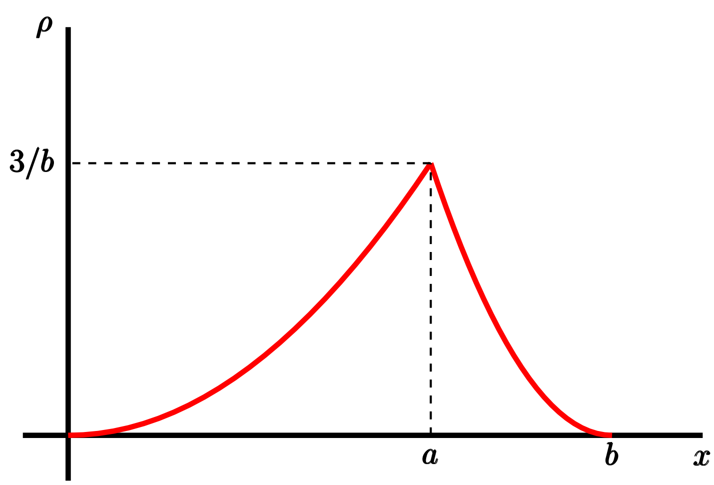


شكل 3.11

3 – احتمال تواجد الجسيم عند نقطة ما (كثافة احتمال الحضور) هو :

$$\rho(x) = \psi^*(x)\psi(x)$$

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{3}{b}\frac{x^2}{a^2} & : 0 \leq x \leq a \\ \frac{3}{b}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 & : a \leq x \leq b \\ 0 & : \text{خارج هذا المجال} \end{cases}$$



شكل 4.11: كثافة احتمال الحضور

4 – حساب احتمال تواجد الجسيم في المنطقة $x < a$:

$$P_1 = \int_0^a \rho(x)dx = \int_0^a \frac{3}{b}\frac{x^2}{a^2}dx = a/b$$

5 –حساب احتمال تواجد الجسيم في المنطقة $x > a$:

$$P_2 = \int_a^b \rho(x)dx = \int_a^b \frac{3}{b}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 dx = (b-a)/b$$

نلاحظ ان :

$$P_1 + P_2 = 1$$

و هو امر متوقع .

حل التمريـــــــن الـــرابع

1 – ثابت التقويم هو :

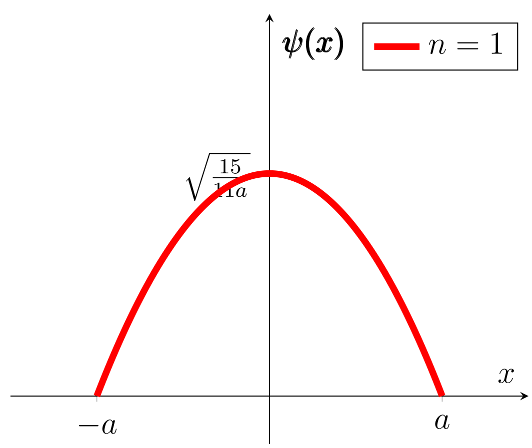
$$A = \sqrt{\frac{15}{11a^5}}$$

و التابع الموجي المقوم هو :

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{15}{11a^5}}\left(a^2 - x^2\right)$$

2 – رسم التابع الموجي :

3 – كثافة احتمال الحضور هي :



شكل 5.11: تابع الحالة

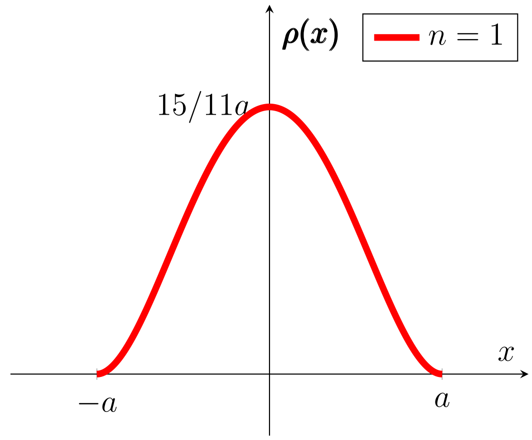
$$\rho(x) = \frac{15}{11a^5}\left(a^2 - x^2\right)^2$$

تغيراتها بدلالة الموضع موضحة بالشكل الموالي :

حل التمريـــــــن الخـــامس

1 – التوابع $\phi_n(x,t)$ التي تمثل تطور التوابع الخاصة مع الزمن تكتب كمايلي (بالنسبة للجمل المحافظة) :

$$\phi_n(x,t) = \phi_n(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$



شكل 6.11: كثافة احتمال الحضور

2 – التابع الموجي $\psi(x,t)$ الذي يمثل حالة الجملة عند لحظة زمنية $t>0$ يكتب كمايلي :

$$\psi(x,t) = a\phi_2(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} + b\phi_3(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}$$

3 – معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن . هي معادلة خطية و بالتالي فان اي تركيب خطي لمجموعة من الحلول هو ايضا . التابع $\psi(x,t)$ هو تركيب خطي لحلين لمعادلة التطور لشرودينغر و بالتالي فهو ايضا حل لهذه المعادلة و يمكن اثبات ذلك بطريقتين :

ا – الطريقة الاولى : التابعين $\phi_2(x,t)$ و $\phi_3(x,t)$ هما حلين مختلفين لمعادلة التطور لشرودينغر و عليه فهما يحققانها :

$$\widehat{H}\phi_2(x,t) = i\hbar\frac{\partial\phi_2(x,t)}{\partial t}$$
$$\widehat{H}\phi_3(x,t) = i\hbar\frac{\partial\phi_3(x,t)}{\partial t}$$

نضرب طرفي المعادلة الاولى ب العدد a و نضرب طرفي المعادلة الثانية بالعدد b فنحصل على :

$$\widehat{H}a\phi_2(x,t) = i\hbar\frac{\partial a\phi_2(x,t)}{\partial t}$$
$$\widehat{H}b\phi_3(x,t) = i\hbar\frac{\partial b\phi_3(x,t)}{\partial t}$$

بجمع هاتين المعادلتين نحصل على :

$$\widehat{H}\Big[a\phi_2(x,t) + b\phi_3(x,t)\Big] = i\hbar\frac{\partial\Big[a\phi_2(x,t) + b\phi_3(x,t)\Big]}{\partial t}$$

و التي هي :

$$\widehat{H}\Big[\psi(x,t)\Big] = i\hbar\frac{\partial\Big[\psi(x,t)\Big]}{\partial t}$$

و هو المطلوب .

ب – الطريقة الثانية : – ننطلق من كون التابع الموجي $\psi(x,t)$ يحقق معادلة التطور لشرودينغر :

$$\widehat{H}\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

نعيد كتابة هذه المعادلة بالشكل التالي :

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} - \widehat{H}\psi(x,t) = 0$$

بالتعويض عن $\psi(x,t)$ و القيام بالعمليات اللازمة نجد :

$$\begin{aligned}
&i\hbar\frac{\partial\Big[a\phi_2(x,t)+b\phi_3(x,t)\Big]}{\partial t} - \widehat{H}\Big[a\phi_2(x,t)+b\phi_3(x,t)\Big] = 0\\
&i\hbar\Big[a\phi_2(x)\frac{\partial e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}}{\partial t} + b\phi_3(x)\frac{\partial e^{-\frac{i}{\hbar}E_3t}}{\partial t}\Big] - \Big[a\widehat{H}\phi_2(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t} + b\widehat{H}\phi_3(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_3t}\Big] = 0\\
&i\hbar\Big[-\frac{i}{\hbar}E_2a\phi_2(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t} - \frac{i}{\hbar}E_3b\phi_3(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_3t}\Big] - \Big[aE_2\phi_2(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t} + bE_3\phi_3(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_3t}\Big] = 0\\
&0 = 0
\end{aligned}$$

و هو المطلوب .

حل التمريـــــن الســـادس

1 – يكون هذين التابعين متعامدين اذا كان جدائهما السلمي ($\langle\psi_2|\psi_1\rangle$) معدوم :

$$\begin{aligned}
\langle\psi_2|\psi_1\rangle &= \int_0^a \psi_2^*(x)\psi_1(x)dx\\
&= \frac{2}{a}\int_0^a \sin(2\pi x/a)\sin(\pi x/a)dx\\
&= \frac{4}{a}\int_0^a \sin^2(\pi x/a)\cos(\pi x/a)dx\\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 y\cos y dy\\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^0 u^2du\\
&= 0
\end{aligned}$$

و عليه فان التابعين متعامدان .

– حساب طويلة $\psi_2(x)$:

$$\begin{aligned}
|\psi_2|^2 &= \int_0^a \psi_2^*(x)\psi_2(x)dx \\
&= \frac{2}{a}\int_0^a \sin^2(2\pi x/a)dx \\
&= \frac{1}{a}\int_0^a \Big(1-\cos(4\pi x/a)\Big)dx \\
&= 1
\end{aligned}$$

طويلة هذا التابع تساوي الواحد و هذا يعني انه مقوم .

2 – الشكل العام للتوابع الخاصة المتطورة مع الزمن بالنسبة للجمل المحافظة (الهاملتونيان لا يتعلق صراحة بالزمن) هو :

$$\psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

و عليه :

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi}{a}x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

اذا $\psi_1(x,t)$ و $\psi_2(x,t)$ يكتبان كمايلي :

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,t) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} \\
\psi_2(x,t) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi}{a}x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}
\end{aligned}$$

3 – كتابة تابع الحالة للجسيم عند اللحظة الزمنية t :

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\sqrt{2}\psi_1(x,t)+\psi_2(x,t)\Big] \\
&= \sqrt{\frac{2}{3a}}\left[\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}+\sin(\frac{2\pi}{a}x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right]
\end{aligned}$$

4 – لكي يكون التابع مقوما يجب ان تكون طويلته تساوي الواحد . و عليه :

$$\begin{aligned}
|\psi(x,0)|^2 &= \int_0^a \psi^*(x,0)\psi(x,0)dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^a \left[\sqrt{2}\psi_1^*(x,0)+\psi_2^*(x,0)\right]\left[\sqrt{2}\psi_1(x,0)+\psi_2(x,0)\right]dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^a \left[2\psi_1^*(x,0)\psi_1(x,0)+\sqrt{2}\psi_1^*(x,0)\psi_2(x,0)+\sqrt{2}\psi_2^*(x,0)\psi_1(x,0)+\psi_2^*(x,0)\psi_2(x,0)\right]dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^a \left[2+0+0+1\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

حل التمريـــــــن الســـابع

1 – تابع الحالة عند اللحظة الزمنية $t = 0$ هو :

$$\psi(x,t) = a\psi_1(x) + b\psi_2(x)$$

و يكتب باستخدام ترميز ديراك كمايلي :

$$\big|\psi\big\rangle = a\big|\psi_1\big\rangle + b\big|\psi_2\big\rangle$$

2 – احتمال تواجد الجملة عند اللحظة الزمنية $t = 0$ في الحالة $\psi_1(x)$ هو : $P_1 = |c_1|^2$ حيث c_1 هي سعة الاحتمال و تعطى ب : $c_1 = \big\langle\psi_1\big|\psi\big\rangle$ و عليه :

$$\begin{aligned}
c_1 &= \big\langle\psi_1\big|\psi\big\rangle \\
&= \big\langle\psi_1\big|\Big[a\big|\psi_1\big\rangle + b\big|\psi_2\big\rangle\Big] \\
&= a\big\langle\psi_1\big|\psi_1\big\rangle + b\big\langle\psi_1\big|\psi_2\big\rangle \\
&= a\big[1+0\big] \\
&= a
\end{aligned}$$

و منه :

$$P_1 = c_1^* c_1 = |a|^2$$

4 – احتمال تواجد الجملة عند اللحظة $t = 0$ في الحالة $\psi_3(x)$ هو : $P_3 = |c_3|^2$ حيث c_3 هي سعة الاحتمال و تعطى ب : $c_3 = \big\langle\psi_3\big|\psi\big\rangle$ و عليه :

$$\begin{aligned}
c_3 &= \big\langle\psi_3\big|\psi\big\rangle \\
&= \big\langle\psi_3\big|\Big[a\big|\psi_1\big\rangle + b\big|\psi_2\big\rangle\Big] \\
&= a\big\langle\psi_3\big|\psi_1\big\rangle + b\big\langle\psi_3\big|\psi_2\big\rangle \\
&= a\big[0+0\big] \\
&= 0
\end{aligned}$$

اي ان : $P_3 = 0$.

4 – احتمال تواجد الجملة عند اللحظة الزمنية الكيفية t في الحالة $\psi_1(x,t)$ هو : $P_1 = |c_1|^2$ حيث c_1 هي سعة الاحتمال

و تعطى ب : $c_1 = \Big\langle \psi_1(x,t) \Big| \psi(x,t) \Big\rangle$ و عليه :

$$\begin{aligned} c_1 &= \Big\langle \psi_1 \Big| \psi \Big\rangle \\ &= \Big\langle \psi_1 \Big| \Big[a \Big| \psi_1 \Big\rangle + b \Big| \psi_2 \Big\rangle \Big] \\ &= a \Big\langle \psi_1 \Big| \psi_1 \Big\rangle + b \Big\langle \psi_1 \Big| \psi_2 \Big\rangle \\ &= a \Big[1 + 0 \Big] \\ &= a \end{aligned}$$

و منه :

$$P_1 = c_1^* c_1 = |a|^2$$

اي ان هذا المقدار لا يتعلق بالزمن بالنسبة للجمل المستقرة .

حل التمريـــــن الثـــامن

1 – لايجاد ثابت التقويم نقوم بحساب طويلة تابع الحالة :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) \psi^*(x,t) dx \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} exp\Big[-2max^2/\hbar^2 \Big] dx \end{aligned}$$

لحساب هذا التكامل نستخدم القاعدة التالية :

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp\Big[-ax^2 + bx + c \Big] dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} exp\Big[\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Big]$$

و عليه :

$$I = A^2 \sqrt{\frac{\pi \hbar^2}{2ma}}$$

اي ان :

$$A = \sqrt{\frac{2ma}{\pi \hbar^2}}$$

2 – لايجاد عبارة الحقل الكموني $V(x)$ نعوض عن التابع الموجي بعبارته في معادلة شرودينغر المتعلق بالزمن لانه يمثل حلا لهذه المعادلة :

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \Big] \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t)$$

بالتعويض عن التابع الموجي و الاشتقاق بالنسبة للزمن و المتغير المكاني نجد :

$$\Big[a\hbar - 2ma^2x^2 + V(x) \Big] e^{(-2max^2/\hbar^2)} = a\hbar e^{(-2max^2/\hbar^2)}$$

بالمطابقة نجد ان :

$$\boxed{V(x) = 2ma^2x^2}$$

2.11 القياس في الميكانيك الكوانتي

حل التمريـــــن الاول

– مادامت حالة الجملة غير معروفة فان القيم التي يمكن الحصول عليها كنتيجة لعملية قياس المقدار الفيزيائي P_1 هي اي قيمة من القيم الممكنة لهذا المقدار ة و التي هي القيم الذاتية للمؤثر المرفق به . لايجاد هذه القيم (λ) نستخدم الشرط التالي :

$$det\Big(P_1 - \lambda I_{3\times3}\Big) = 0$$

لدينا :

$$P_1 - \lambda I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

و منه :

$$det\Big(P_1 - \lambda I_{3\times3}\Big) = \begin{vmatrix} -\lambda & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

بتطبيق الشرط المذكور اعلاه نحصل على المعادلة التالية :

$$\Big(1-\lambda\Big)\Big(\lambda^2 + 2\lambda - 3\Big) = 0$$

جذور هذه المعادلة هما :

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -3$$

الجذر الاول مضاعف . اذا القيم التي يمكن الحصول عليها عند قياس المقدار الفيزيائي P_1 هي : 1 و -3 .

حل التمريـــــن الثـــــاني

1 – ايجاد ثابت التقويم . من اجل ذلك نحسب طويلة شعاع الحالة :

$$\begin{aligned} |\psi_0|^2 &= \big\langle \psi_0 \big| \psi_0 \big\rangle \\ &= A^2 \Big[\sqrt{2}\langle\phi_1| + \sqrt{3}\langle\phi_2| + \langle\phi_3| + \langle\phi_4|\Big]\Big[\sqrt{2}|\phi_1\rangle + \sqrt{3}|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle + |\phi_4\rangle\Big] \\ &= 7A^2 \end{aligned}$$

وعليه :

$$A = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

و التابع المقوم هو :

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{7}}\Big[\sqrt{2}|\phi_1\rangle + \sqrt{3}|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle + |\phi_4\rangle\Big]$$

2 – القيم الممكنة للطاقة هي القيم الذاتية للهاملتونيان . نلاحظ ان حالة الجملة هي تركيب خطي لاربع حالات ذاتية للهاملتونيان و عليه فان القيم التي يمكن الحصول عليها هي القيم الذاتية المرفقة بهذه الحالات :

$$E_1 = \mathcal{E}_0 \quad , \quad E_2 = 4\mathcal{E}_0$$
$$E_3 = 9\mathcal{E}_0 \quad , \quad E_4 = 16\mathcal{E}_0$$

2 – احتمال الحصول على اي قيمة يساوي احتمال تواجد الجملة في الحالة الذاتية المرفقة بتلك القيمة . و عليه :

$$P(E_1) = |\langle\psi_1|\psi_0\rangle|^2 = 2/7$$
$$P(E_2) = |\langle\psi_2|\psi_0\rangle|^2 = 3/7$$
$$P(E_3) = |\langle\psi_3|\psi_0\rangle|^2 = 1/7$$
$$P(E_4) = |\langle\psi_4|\psi_0\rangle|^2 = 1/7$$

3 – التوابع الذاتية $|\phi_n\rangle$ للهاملتونيان هي ايضا توابع ذاتية للمؤثر $\hat{A}$ بقيم ذاتية $\alpha_n = (n+1)a_0$ و لان تابع الحالة هو تركيب خطي للحالات $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ و $|\psi_4\rangle$ فان القيم التي يمكن الحصول عليها عند قياس المقدار الفيزيائي A هي قيمه الذاتية المرفقة بهذه التوابع و هي :

$$a_1 = 2\alpha_0 \quad , \quad a_2 = 3\alpha_0$$
$$a_3 = 4\alpha_0 \quad , \quad a_4 = 5\alpha_0$$

احتمال الحصول على اي قيمة من هذه القيم يساوي احتمال تواجد الجملة في الحالة الذاتية المرفقة بتلك القيمة :

$$P(a_1) = |\langle\psi_1|\psi_0\rangle|^2 = 2/7$$
$$P(a_2) = |\langle\psi_2|\psi_0\rangle|^2 = 3/7$$
$$P(a_3) = |\langle\psi_3|\psi_0\rangle|^2 = 1/7$$
$$P(a_4) = |\langle\psi_4|\psi_0\rangle|^2 = 1/7$$

4 – قيمة الطاقة التي تم الحصول عليها هي القيمة المرفقة بالحالة الذاتية $|\psi_2\rangle$ و هذا يعني ان الجملة بعد عملية القياس مباشرة ستكون في هذه الحالة . و عليه فان قياس المقدار الفيزيائي A ستعطي القيمة الذاتية للمؤثر الخاص به و المرفقة بالحالة الذاتية $|\psi_2\rangle$ اي : $a_2 = 3\alpha_0$.

حل التمريـــــــن الثـــالث

1 – كتابة التابع $\Psi(x,t)$:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_2(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t} + \frac{1}{\sqrt{6}}\psi_3(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}$$

2 – احتمال الحصول على القيمة E_2 كنتيجة لعملية قياس الطاقة هو :

$$P(E_2) = |c_2|^2$$

حيث :

$$\begin{aligned} c_2 &= \langle \psi_2(x,t)|\Psi(x,t)\rangle \\ &= \langle \psi_2(x,t)|\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_1(x,t)\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\psi_2(x,t)\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|\psi_3(x,t)\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

و منه :

$$P(E_2) = 1/3$$

3 – القيمة المتوسطةلطاقة الجملة هي :

$$\begin{aligned} \langle E\rangle &= \langle \Psi(x,t)|\widehat{H}|\Psi(x,t)\rangle \\ &= \Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\langle \psi_1(x,t)| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle \psi_2(x,t)| + \frac{1}{\sqrt{6}}\langle \psi_3(x,t)|\Big]\widehat{H}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_1(x,t)\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\psi_2(x,t)\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|\psi_3(x,t)\rangle\Big] \\ &= \Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\langle \psi_1(x,t)| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle \psi_2(x,t)| + \frac{1}{\sqrt{6}}\langle \psi_3(x,t)|\Big]\Big[\frac{E_1}{\sqrt{2}}|\psi_1(x,t)\rangle + \frac{E_2}{\sqrt{3}}|\psi_2(x,t)\rangle + \frac{E_3}{\sqrt{6}}|\psi_3(x,t)\rangle\Big] \\ &= \frac{E_1}{2} + \frac{E_2}{3} + \frac{E_3}{6} \end{aligned}$$

حل التمريـــــن الــرابع

1 القيم الممكنة للطاقة هي القيم الذاتية للهاملتونيان و يمكن الحصول عليها بحل المعادلة الناتجة عن الشرط التالي :

$$det\Big(\mathrm{H} - \lambda \mathrm{I}\Big) = 0$$

حيث λ هي القيم الذاتية .لدينا :

$$det\Big(\mathrm{H} - \lambda \mathrm{I}\Big) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \Big(1-\lambda\Big)\Big(3-\lambda\Big)^2$$

من الشرط السابق نحصل على المعادلة التالية :

$$\Big(1-\lambda\Big)\Big(3-\lambda\Big)^2 = 0$$

هذه المعادلة لها جذران هما : $\lambda = 1$ و $\lambda = 3$ اي ان القيم الممكنة للطاقة هي : $E_1 = 1$ و $E_2 = 3$.

2 – قيم الطاقة التي يمكن الحصول عليها كنتيجة لعملية القياس تتعلق بحالة الجملة . لايجاد هاته القيم يجب كتابة تابع الحالة $|\psi_0\rangle$ بدلالة الاشعة الذاتية للهاملتونيان . لايجاد هاته الاشعة نستخدم معادلة القيم الذاتية :

$$\widehat{\mathrm{H}}|u\rangle = E|u\rangle$$

فنجد ان الاشعة الذاتية للهاملتونيان هي :

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad |u_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$$

الشعاع الذاتي $|u_1\rangle$ هو الشعاع المقابل للقيمة الذاتية $E_1 = 1$ و الشعاع الذاتي $|u_2\rangle$ هو الشعاع المقابل للقيمة الذاتية $E_2 = 3$:

$$\widehat{\mathrm{H}}|u_1\rangle = |u_1\rangle \quad , \quad \widehat{\mathrm{H}}|u_2\rangle = 3|u_2\rangle$$

نقوم الان بكتابة تابع الحالة بدلالة الشعاعين $|u_1\rangle$ و $|u_2\rangle$ كمايلي :

$$|\psi_0\rangle = \alpha|u_1\rangle + \beta|u_2\rangle$$

و الهدف طبعا هو ايجاد المعاملين α و β . من اجل ذلك نعيد كتابة المعادلة السابقة بالشكل المصفوفي :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} i \\ -i \\ i \end{bmatrix} = \alpha\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$$

فنجد ان $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ و $\beta = \sqrt{\frac{1}{3}}$ و منه :

$$|\psi_0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|u_1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|u_2\rangle$$

مادامت حالة الجملة هي تركيب خطي لحالتين ذاتيتين للهاملتونيان فان القيم التي يمكن الحصول عليها كنتيجة لقياس الطاقة هي القيم الذاتية للهاملتونيان المقابلة لهاتين الحالتين اي $E_1 = 1$ و $E_2 = 3$.

3 – احتمال الحصول على القيمة $E_1 = 1$ كنتيجة لعملية قياس الطاقة هو :

$$P(E_1) = |\langle u_1|\psi_0\rangle|^2 = \langle u_1|\psi_0\rangle\langle u_1|\psi_0\rangle^* = \langle u_1|\psi_0\rangle\langle\psi_0|u_1\rangle = 2/3$$

– احتمال الحصول على القيمة $E_1 = 1$ كنتيجة لعملية قياس الطاقة هو :

$$P(E_2) = |\langle u_2|\psi_0\rangle|^2 = \langle u_2|\psi_0\rangle\langle u_2|\psi_0\rangle^* = \langle u_2|\psi_0\rangle\langle\psi_0|u_2\rangle = 1/3$$

.

4 – القيمة المتوسطة لطاقة الجملة هي القيمة المتوسطة للهاملتونيان :

$$\begin{aligned}
\langle\widehat{\mathrm{H}}\rangle &= \langle\psi_0|\widehat{\mathrm{H}}|\psi_0\rangle \\
&= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle u_1| + \sqrt{\frac{1}{3}}\langle u_2|\right)\widehat{\mathrm{H}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}|u_1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|u_2\rangle\right) \\
&= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle u_1| + \sqrt{\frac{1}{3}}\langle u_2|\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\widehat{\mathrm{H}}|u_1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\widehat{\mathrm{H}}|u_2\rangle\right) \\
&= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle u_1| + \sqrt{\frac{1}{3}}\langle u_2|\right)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}E_1|u_1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}E_2|u_2\rangle\right) \\
&= \frac{2}{3}E_1\langle u_1|u_1\rangle + \frac{1}{3}E_2\langle u_2|u_2\rangle \\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

حل التمريـــــــن الخـــامس

1 – القيم الممكنة للمقدار الفيزيائي A هي القيم الذاتية للمؤثر المرفق به . و عليه :

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 3 \quad , \quad a_3 = 5$$

2 – لايجاد القيم التي يمكن الحصول عليها عند قياس المقدار A في الحالة المعطاة يجب كتابة هذه الحالة بدلالة الاشعة الذاتية للمؤثر المرفق بهذا المقدار . هذه الاشعة هي : الشعاع المقابل للقيمة الذاتية $a_1 = 1$ هو

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\i\end{bmatrix}$$

الشعاع المقابل للقيمة الذاتية $a_2 = 3$ هو

$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-i\end{bmatrix}$$

الشعاع المقابل للقيمة الذاتية $a_3 = 5$ هو

$$|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

و منه نجد ان شعاع الحالة يكتب بدلالة هذه الاشعة كمايلي :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|\phi_1\rangle + |\phi_3\rangle\Big]$$

نلاحظ انه تركيب خطي لحالتين ذاتيتين للمقدار الفيزيائي A و هما $|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ و عليه فان قياس هذا المقدار قد يعطي احدى القيمتين المقابلتين للحالتين $|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ اي انه يمكن الحصول اما على $a_1 = 1$ او $a_3 = 5$.

3 – احتمال الحصول على القيمة $a_1 = 1$ هو :

$$P(a_1) = |\langle\phi_1|\psi\rangle|^2 = 1/2$$

– احتمال الحصول على القيمة $a_3 = 5$ هو :

$$P(a_3) = |\langle\phi_3|\psi\rangle|^2 = 1/2$$

حل التمريـــــن الســـادس

1 – القيم الذاتية او الخاصة للطاقة هي القيم الذاتية للهاملتونيان و هي :

$$E_1 = \mathcal{E} \quad , \quad E_2 = -\mathcal{E} \quad , \quad E_3 = -\mathcal{E}$$

الاشعة الذاتية المقابلة للقيم الذاتية على التوالي هي :

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad |\phi_3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2 – لايجاد القيم التي يمكن الحصول عليها عند قياس طاقة الجملة علينا اولا كتابة حالة الجملة بدلالة الحالات الذاتية للطاقة . يمكن التاكد من ان :

$$|\psi_0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\sqrt{2}|\phi_1\rangle + \sqrt{2}|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle\Big]$$

و هذا يعني ان القيم التي يمكن الحصول عليها عند قياس طاقة الجملة هي $E_1 = \mathcal{E}$, $E_2 = -\mathcal{E}$ و $E_3 = -\mathcal{E}$.

3 – احتمال الحصول على القيمة E_1 هو $P(E_1) = 2/5$, E_2 هو $P(E_2) = 2/5$ و احتمال الحصول على القيمة E_3 هو $P(E_3) = 1/5$. و بما ان $E_2 = E_3 = -\mathcal{E}$ متساويتان فانه يمكننا القول اننا سنحصل على القيمة $-\mathcal{E}$ باحتمال $P(-\mathcal{E}) = P(E_2) + P(E_3) = 2/5 + 1/5 = 3/5$.

4 – القيمة المتوسطة للطاقة هي :

$$\langle E\rangle = P(E_1)\times E_1 + P(E_2)\times E_2 + P(E_3)\times E_3 = -\frac{1}{5}\mathcal{E}$$

حل التمريـــــن الســـابع

1 – القيم الممكنة لطاقة الجملة هي القيم الذاتية للهاملتونيان و هي :

$$E_1 = 0 \quad , \quad E_2 = -\mathcal{E}_0 \quad , \quad E_3 = 2\mathcal{E}_0$$

2 – الاشعة الذاتية للهاملتونيان (مرتبة وفق ترتيب القيم الذاتية المقابلة لها المعطاة سابقا):

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad , \quad |\phi_2\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad , \quad |\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

3 – بما ان عملية قياس الطاقة اعطت القيمة $\mathcal{E}_0$– فهذا يعني ان الجملة بعد عملية القياس تكون في الحالة ϕ_2 و عليه فان التعرف على نتيجة قياس المقدار A يتطلب تحديد قيمه الذاتية و كذلك اشعته الذاتية .

– القيم الذاتية هي :

$$a_1 = -\sqrt{17}a \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \quad a_3 = \sqrt{17}a$$

– الاشعة الذاتية المقابلة لها على الترتيب هي :

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{bmatrix}4\\-\sqrt{17}\\1\end{bmatrix} \quad , \quad |a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}1\\0\\-4\end{bmatrix} \quad , \quad |a_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}4\\\sqrt{17}\\1\end{bmatrix}$$

– احتمال الحصول على القيمة a_1 كنتيجة لقياس المقدار A هو :

$$P(a_1) = |\langle a_1|\phi_2\rangle|^2$$

لدينا :

$$\langle a_1|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{bmatrix}4 & -\sqrt{17} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{34}}$$

و منه :

$$P(a_1) = \frac{1}{34}$$

– احتمال الحصول على القيمة a_2 كنتيجة لقياس المقدار A هو :

$$P(a_2) = |\langle a_2|\phi_2\rangle|^2$$

لدينا :

$$\langle a_2|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \sqrt{\frac{16}{17}}$$

و منه :

$$P(a_2) = \frac{16}{17}$$

– احتمال الحصول على القيمة a_3 كنتيجة لقياس المقدار A هو :

$$P(a_3) = |\langle a_3|\phi_2\rangle|^2$$

لدينا :

$$\langle a_3|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{bmatrix}4 & \sqrt{17} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{34}}$$

و منه :

$$P(a_3) = \frac{1}{34}$$

حل التمريـــــــن االثـــامن

1 – القيم التي يمكن الحصول عليها كنتيجة لقياس اي مقدار فيزيائي هي القيم الذاتية للمؤثر المرفق به . و عليه :
ا – القيم الذاتية للمقدار A هي :

$$a_1 = -1 \quad , \quad a_2 = 3 \quad , \quad a_3 = 5$$

ب – القيم الذاتية للمقدار B هي :

$$b_1 = -3 \quad , \quad b_2 = 1 \quad , \quad b_3 = 3$$

ج – القيم الذاتية للمقدار C هي :

$$c_1 = -1/\sqrt{2} \quad , \quad c_2 = 0 \quad , \quad c_3 = 1/\sqrt{2}$$

ا – القيم الذاتية للمقدار D هي :

$$d_1 = -1 \quad , \quad d_2 = 1 \quad , \quad d_3 = 1$$

2 – ايجاد الاشعة الذاتية : ا – الاشعة الذاتية للمقدار A المقابلة للقيم الذاتية المحددة اعلاه على التوالي هي :

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} \quad , \quad |a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \quad , \quad |a_3\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

ب – الاشعة الذاتية للمقدار B المقابلة للقيم الذاتية المحددة اعلاه على التوالي هي :

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} \quad , \quad |b_2\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad , \quad |b_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

ج – الاشعة الذاتية للمقدار C المقابلة للقيم الذاتية المحددة اعلاه على التوالي هي :

$$|c_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{bmatrix}3\\-\sqrt{13}\\2\end{bmatrix} \quad , \quad |c_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}2\\0\\-3\end{bmatrix} \quad , \quad |c_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{bmatrix}3\\\sqrt{13}\\2\end{bmatrix}$$

د – الاشعة الذاتية للمقدار D المقابلة للقيم الذاتية المحددة اعلاه على التوالي هي :

$$|d_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\i\\1\end{bmatrix} \quad , \quad |d_2\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad , \quad |d_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\i\end{bmatrix}$$

3 – هناك مقدارين فقط متوافقين و هما A و B لان مصفوفتهما متبادلتان و عليه فهما يملكان اشعة ذاتية مشتركة و هي :

$$|ab_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} \quad , \quad |ab_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \quad , \quad |ab_3\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

4 – المجموعة $\{\widehat{D}\}$ هي المجموعة الوحيدة التي لا تشكل جملة كاملة من المرئيات المتبادلة لانها تمتلك قيمة ذاتية منحطة مرتين . اما باقي المجموعات فكل واحدة منها تشكل لوحدها جملة كاملة من المرئيات المتبادلة .

5 – المجموعة الوحيدة التي تشكل جملة كاملة من المرئيات المتبادلة هي $\{\widehat{A}, \widehat{B}\}$ لان المؤثرين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ متبادلين و لا يملك اي منهما قيما ذاتية منحطة .

حل التمريـــــن التـــاسع

1 – القيمة المتوسطة للمقدار A هي :

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= \sum_{i=1}^{3} a_i P(a_i)\\ &= a \times 0.5 + 2a \times 0.25 + 3a \times 0.25\\ &= 1.75a\end{aligned}$$

2 – التابع ϕ يكتب بدلالة التوابع الذاتية للمؤثر $\widehat{A}$ كمايلي :

$$\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3$$

المعاملات c_i تمثل سعة احتمال تواجد الجملة في الحالة ϕ_i و هي نفسها سعة احتمال الحصول على القيمة الذاتية a_i المقابلة لها :

$$c_i = \langle\phi_i|\phi\rangle = \sqrt{P(a_i)}$$

و منه :

$$c_1 = 1/\sqrt{2} \quad , \quad c_2 = 1/2 \quad , \quad c_3 = 1/2$$

و عليه :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2 + \frac{1}{2}\phi_3$$

الفصـــــل 12

حلول تمارين الفصل الرابع

1.12 المسائل احادية البعد – الحالات المرتبطة

حل التمريـــــن الاول

هاملتونيان هذه الجملة هو :

$$\widehat{\mathrm{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

معادلة شرودينغر للحالات المستقرة هي :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x)$$

بوضع :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

تاخذ معادلة شرودينغر الشكل التالي :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0$$

2 – المعادلة السابقة هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية حلها هو :

$$\psi(x) = \mathrm{N}\sin(kx + A)$$

لايجاد الثابت A نطبق شرط الاستمرار عند النقطة $x = 0$ حيث $\psi(x = 0) = 0$ و منه :

$$\mathrm{N}\sin(A) = 0 \Longrightarrow A = 0$$

اذا :

$$\psi(x) = \mathrm{N}\sin(kx)$$

شرط الاستمرار عند النقطة $x = a$ هو $\psi(x = a) = 0$ و منه :

$$\mathrm{N}\sin(ka) = 0 \rightarrow ka = n\pi$$

لايجاد الثابت N نستخدم شرط التقويم $\int_0^a \psi(x)^*\psi(x)dx = 1$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^a \psi(x)^*\psi(x)dx \\
&= \mathrm{N}^2\int_0^a \sin^2(n\pi x/a)dx \\
&= \mathrm{N}^2\int_0^a \frac{\big(1-\cos(2n\pi x/a)\big)}{2}dx \\
&= \frac{\mathrm{N}^2}{2}\left[x - \frac{a}{2n\pi}\sin(2n\pi x/a)\right]_0^a \\
&= \frac{a\mathrm{N}^2}{2}
\end{aligned}$$

و منه :

$$\frac{a\mathrm{N}^2}{2} = 1 \rightarrow \mathrm{N} = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

و عليه فان العبارة النهائية للتابع الموجي هي :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi}{a}x)$$

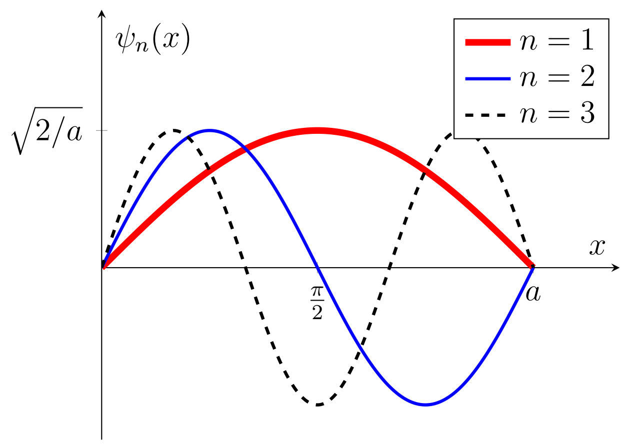
3 – لايجاد القيم الممكنة للطاقة نستخدم الشرط $ka = n\pi$ الذي تحصلنا عليه سابقا وبالاخذ بالحسبان ان $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ نجد :

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$$

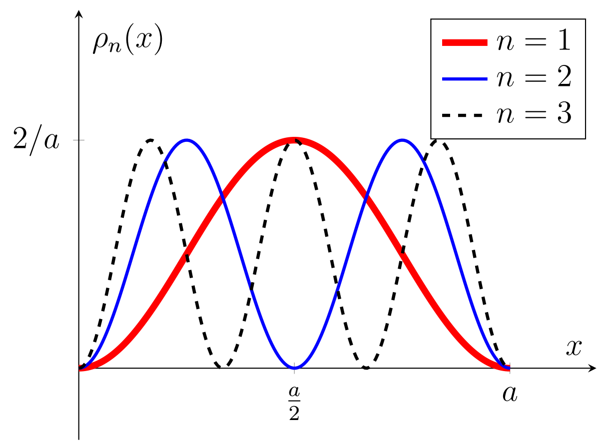
5 – رسم التوابع الثلاث الاولى :

6 – رسم كثافة احتمال الحضور الخاصة بالحالات الثلاث الاولى : 4 – لاثبات ان التوابع الموجية متعامدة يجب اثبات ان جدائها السلمي المعرف ب

$$I = \int_0^a \psi_n^*(x)\psi_m(x)dx$$



شكل 1.12: توابع الحالة للبئر الكمونية الغير متناظرة



شكل 2.12: كثافة احتمال الحضور للحالات الثلاث الاولى

معدوما :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^a \psi_n^*(x)\psi_m(x)dx \\
&= \int_0^a \frac{2}{a}\sin(n\pi x/a)\sin(m\pi x/a)dx \\
&= \frac{1}{a}\int_0^a \left[\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right]dx \\
&= \left[\frac{1}{(m-n)\pi}\sin\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \frac{1}{(m+n)\pi}\sin\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right]\Bigg|_0^a \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\pi}{m+n}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

هذه المحاكمة صالحة فقط من اجل $m \neq n$.

حل التمريــــــن الثــــاني

معادلة شرودينغر في المنطقة $-a/2 \leq x \leq a/2$ هي :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0 \quad , \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

نلاحظ ان الكمون $V(x)$ هو كمون زوجي $V(x) = V(-x)$ و هذا يعني ان حلول معادلة شرودينغر يجب ان تمتلك زوجية محددة اي ان التابع الموجي يجب ان يكون زوجيا $(\psi(x) = \psi(-x))$ او فرديا $(\psi(x) = -\psi(-x))$ و هي احدى ميزات معادلة شرودينغر .

– الحل الفردي هو :

$$\psi(x) = \mathrm{N}\sin(kx)$$

بتطبيق شروط الاستمرار نجد ان :

$$\mathrm{N} = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad , \quad k = n\pi/a \ , \ n = 2, 4, 6, 8......$$

و منه :

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi}{a}x) \quad , \quad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$$

– الحل الزوجي هو :

$$\psi(x) = \mathrm{N}\cos(kx)$$

بتطبيق شروط الاستمرار عند الحدود نجد ان :

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(\frac{n\pi}{a}x) \quad , \quad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(2n+1)^2 \ , \ n = 0, 1, 3, 5, 7, ...$$

حل التمريــــــن الثــــالث

معادلة شرودينغر في المنطقة الاولى هي :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + q^2\psi(x) = 0 \quad , \quad q = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

الثابت q هو ثابت حقيقي موجب . حل هذه المعادلة هو :

$$\psi_1(x) = Ae^{qx} + Be^{-qx}$$

يجب اخذ $B = 0$ لان e^{-qx} يصبح غير منته لما $(x \longrightarrow -\infty)$ و عليه فان الحل المقبول فيزيائيا في المنطقة الاولى هو :

$$\psi_1(x) = Ae^{qx}$$

– معادلة شرودينغر في المنطقة الثانية هي :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k_2^2\psi(x) = 0 \quad , \quad k = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$$

الثابت k_2 هو ثابت حقيقي موجب . حل هذه المعادلة هو :

$$\psi_2(x) = C\sin kx + D\cos kx$$

بما ان الكمون في هذه المنطقة هو تابع زوجي فان الحل يجب ان يكون ذو زوجية محددة اي اما فرديا و اما زوجيا . سنختار الحل في المرحلة الاولى فرديا :

$$\psi_2(x) = C\sin kx$$

– معادلة شرودينغر في المنطقة الثالثة هي :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + q^2\psi(x) = 0$$

الثابت k هو ثابت حقيقي موجب . حل هذه المعادلة هو :

$$\psi_3(x) = Ge^{qx} + Fe^{-qx}$$

يجب اخذ $G = 0$ لان e^{qx} يصبح غير منته لما $(x \longrightarrow \infty)$ و عليه فان الحل المقبول فيزيائيا في المنطقة الاولى هو :

$$\psi_3(x) = Fe^{-qx}$$

اذا الحلول المقبولة فيزيائيا هي :

$$\psi_1(x) = Ae^{qx} \qquad \text{المنطقة } x < -a$$

$$\psi_2(x) = C\sin kx \qquad \text{المنطقة } -a \leq x \leq a$$

$$\psi_3(x) = Fe^{-qx} \qquad \text{المنطقة } x > a$$

نطبق شرط الاستمرار على كل من التابع و مشتقته الاولى عند النقطة $x = a$ فنحصل على مايلي :

$$\psi_2(x=a) = \psi_3(x=a) \qquad \Longrightarrow \qquad C\sin(ka) = Fe^{-qa}$$

$$\frac{d\psi_2(x=a)}{dx} = \frac{d\psi_3(x=a)}{dx} \qquad \Longrightarrow \qquad kC\cos(ka) = -qFe^{-qa}$$

بقسمة المعادلة الثانية على الاولى من المعادلتين المتحصل عليهما نجد :

$$\cot ka = -q/k$$

الحل البياني لهذه المعادلة يسمح بتحديد القيم الممكنة للطاقة .

لايجاد الحلول بيانيا سنعيد كتابة المعادلة السابقة بشكل اكثر بساطة . لدينا :

$$k^2 + q^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

و منه :

$$q=\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}-k^2}$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد :

$$\tan ka=\frac{\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}-k^2}}{k}=\frac{\sqrt{\frac{2ma^2V_0}{\hbar^2}-a^2k^2}}{ak}$$

ندخل الرمزين التاليين :

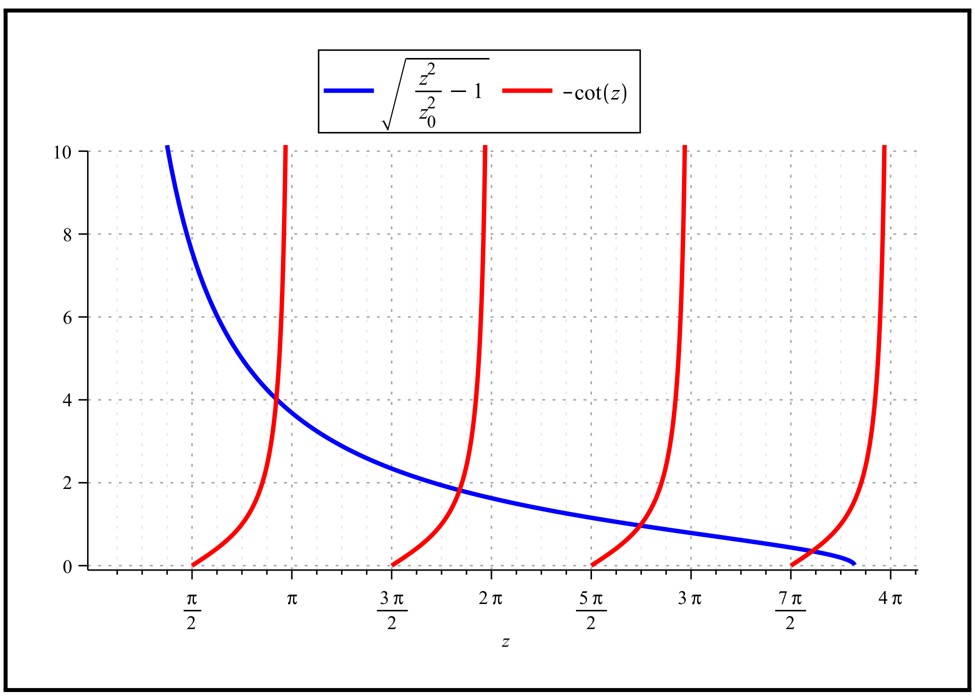
$$z=ak$$

$$z_0=\frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$$

فنجد ان المعادلة المميزة تاخذ الشكل التالي :

$$\tan z=\frac{\sqrt{z_0^2-z^2}}{z}=\sqrt{\frac{z_0^2}{z^2}-1}$$

برسم التابعين $\tan z$ و $\sqrt{\frac{z_0^2}{z^2}-1}$ و تحديد نقاط التقاطع بينهما يمكننا تحديد القيم الممكنة للطاقة كما هو موضح بالشكل الموالي . – الحل الزوجي في المنطقة الثانية هو :



شكل 3.12: مستويات الطاقة في حوض كمومي للحالات الفردية($z_0=12$)

$$\psi_2(x)=C\cos kx$$

في هذه الحالة شروط الاستمرار تعطينا مايلي :

$$\psi_2(x=a)=\psi_3(x=a) \qquad \Longrightarrow \qquad C\cos(ka)=Fe^{-qa}$$
$$\frac{d\psi_2(x=a)}{dx}=\frac{d\psi_3(x=a)}{dx} \qquad \Longrightarrow \qquad -kC\sin(ka)=-qFe^{-qa}$$

بقسمة المعادلة الثانية على الاولى نحصل على :

$$\tan ka = q/k$$

الحل البياني لهذه المعادلة يسمح بايجاد القيم الممكنة للطاقة في حالة الحلول الزوجية .
لايجاد الحلول بيانيا سنعيد كتابة المعادلة السابقة بشكل اكثر بساطة . لدينا :

$$k^2+q^2=\frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

و منه :

$$q=\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}-k^2}$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد :

$$\tan ka=\frac{\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}-k^2}}{k}=\frac{\sqrt{\frac{2ma^2V_0}{\hbar^2}-a^2k^2}}{ak}$$

ندخل الرمزين التاليين :

$$z=ak$$
$$z_0=\frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$$

فنجد ان المعادلة المميزة تاخذ الشكل التالي :

$$\tan z=\frac{\sqrt{z_0^2-z^2}}{z}=\sqrt{\frac{z_0^2}{z^2}-1}$$

برسم التابعين $\tan z$ و $\sqrt{\frac{z_0^2}{z^2}-1}$ و تحديد نقاط التقاطع بينهما يمكننا تحديد القيم الممكنة للطاقة كما هو موضح بالشكل الموالي .

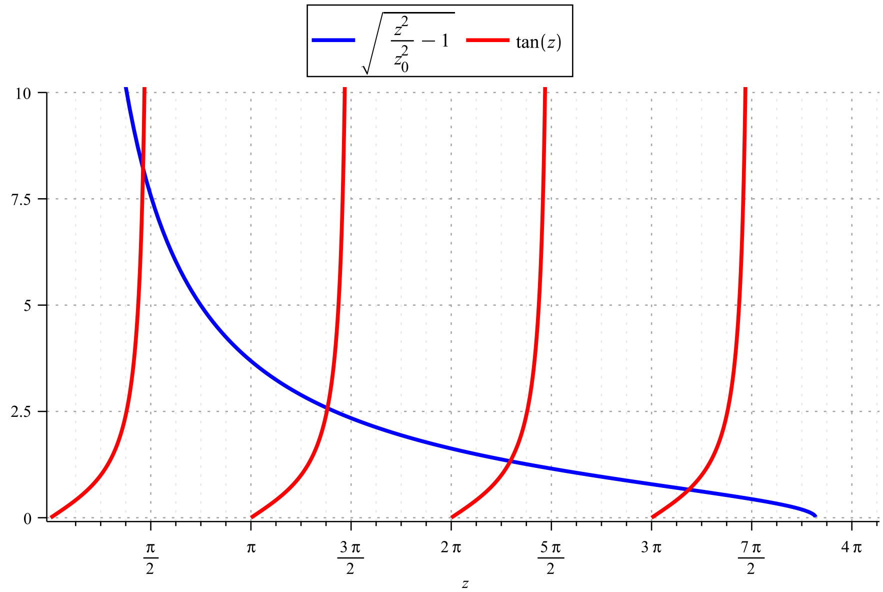
حل التمريـــــــن الـــرابع

1 – نقاط الارتداد الكلاسيكية هي النقاط التي تتساوى فيها الطاقة الكلية للجسيم و طاقته الكامنة :

$$kx^2/2=\hbar w/2$$

و عليه فان نقطتي الارتداد هما :

$$x_1=-\left(\hbar^2/mk\right)^{1/4}=-1/\alpha\ ,\ x_2=\left(\hbar^2/mk\right)^{1/4}=1/\alpha$$



شكل 4.12: مستويات الطاقة في حوض كموني للحالات الزوجية($z_0 = 12$)

3 – احتمال التواجد في المنطقة المحرمة كلاسيكيا هو :

$$P_1 = \int_{-\infty}^{x_1} \psi_0^*(x)\psi_0(x)dx + \int_{x_2}^{\infty} \psi_0^*(x)\psi_0(x)dx = 2\int_{x_2}^{\infty} \psi_0^*(x)\psi_0(x)dx$$

– احتمال تواجد الجسيم في المنطقة المسموحة كلاسيكيا هو :

$$P_2 = \int_{x_1}^{x_2} \psi_0^*(x)\psi_0(x)dx = 2\int_{0}^{x_2} \psi_0^*(x)\psi_0(x)dx$$

لدينا :

$$P_1 + P_2 = 1 \Longrightarrow P_1 = 1 - P_2$$

و منه :

$$P_1 = 1 - 2\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_2} e^{-\alpha^2 x^2}dx = 0.1578$$

ندخل متغير جديد :

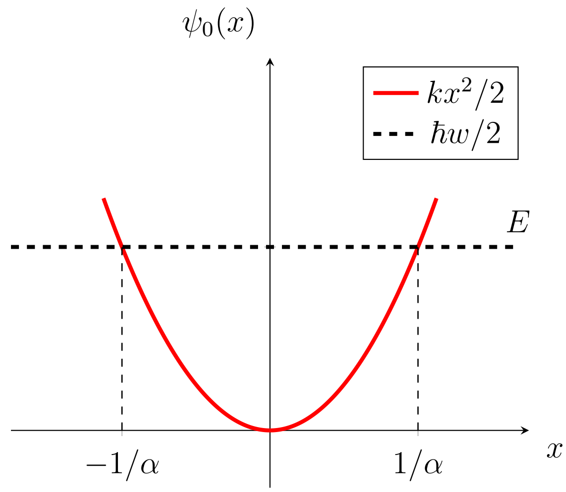
$$z = \alpha x$$

فنجد :

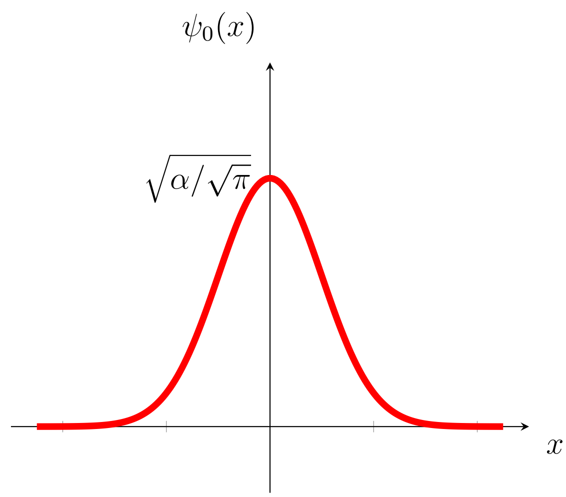
$$P_1 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1} e^{-z^2}dz = 0.1578$$

هذا التكامل غير ممكن تحليليا و يتم حسابه عدديا فقط و النتيجة هي :

$$P_1 = 0.1578$$



شكل 5.12: نقاط الارتداد الكلاسيكية لهزاز توافقي في الحالة الاساسية



شكل 6.12: الحالة الاساسية للهزاز التوافقي

حل التمريـــــــن الخــــامس

معادلة شرودينغر في المنطقتين الاولى و الثانية هي :

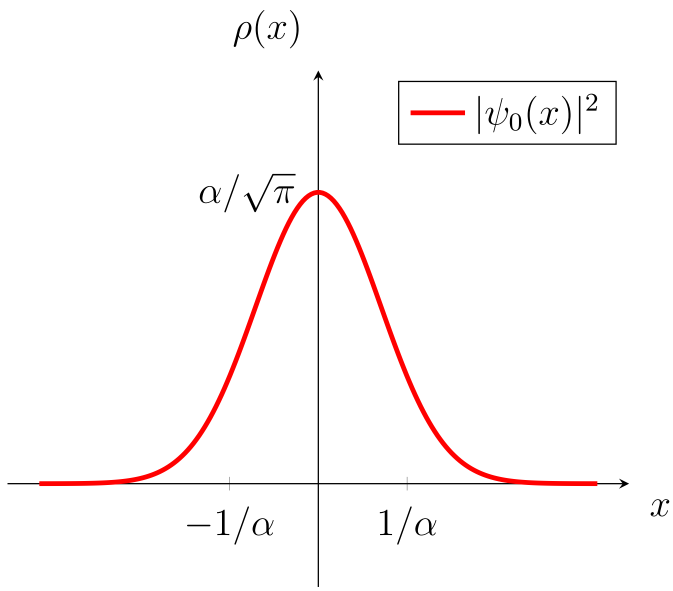
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$$

حيث :

$$k = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

الحل في المنطقة الاولى $(x < 0)$ هو :

$$\psi_I(x) = Ae^{-kx}$$



شكل 7.12: كثافة احتمال الحضور

الحل في المنطقة الثانية $(x > 0)$ هو :

$$\psi_{II}(x) = Be^{kx}$$

شرط الاستمرار عند النقطة $(x = 0)$ يفضي الى $(A = B)$ و عليه :

$$\psi_I(x) = Ae^{kx}$$

$$\psi_{II}(x) = Ae^{-kx}$$

باستخدام شرط التقويم نجد ان :

$$A = \sqrt{k}$$

و منه :

$$\psi_I(x) = \sqrt{k}e^{kx}$$

$$\psi_{II}(x) = \sqrt{k}e^{-kx}$$

2 – لايجاد مستويات الطاقة الممكنة نقوم بمكاملة معادلة شرودينغر على مجال صغير بجوار النقطة $(x = 0)$:

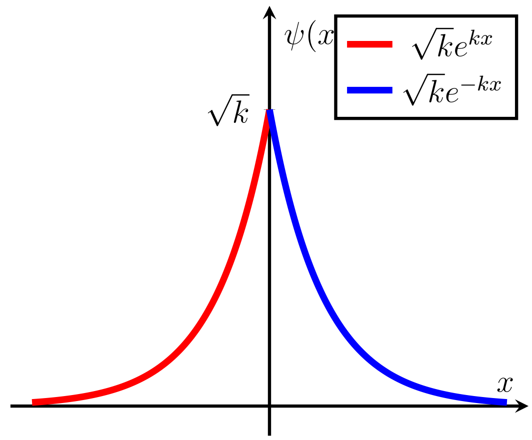
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d^2\psi}{dx^2}dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}V(x)\psi(x)dx = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)dx$$

نلاحظ ان :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}dx = d(\frac{d\psi}{dx}) = d\psi'(x)$$

و عليه فان المعادلة السابقة تصبح كمايلي :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}d\psi'(x) - \alpha\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\psi(x)dx = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)dx$$



شكل 8.12: توابع الحالة لبئر ديراك

الطرف الايسر مكاملته ممكنة :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\psi'(\varepsilon)-\psi'(-\varepsilon)\Big]-\alpha\psi(0)=E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)dx$$

لدينا مايلي :

$$\psi'(\varepsilon)=-k\sqrt{k}e^{-k\varepsilon}\quad,\quad\psi'(-\varepsilon)=k\sqrt{k}e^{-k\varepsilon}\quad,\quad\psi(0)=\sqrt{k}$$

و عليه :

$$\frac{k\sqrt{k}\hbar^2}{2m}\Big[e^{-k\varepsilon}+e^{-k\varepsilon}\Big]-\alpha\sqrt{k}=E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)dx$$

بجعل مجال التكامل يؤول الى الصفر $(\varepsilon\longrightarrow 0)$ نجد ان الطرف الايسر يؤول الى الصفر لانه في الاصل يمثل المساحة التي يحددها التابع الموجي . و عليه :

$$\frac{k\sqrt{k}\hbar^2}{m}=\alpha\sqrt{k}$$

و منه :

$$k=\frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

و لان $k=\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$ نجد ان :

$$\boxed{E=-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}}$$

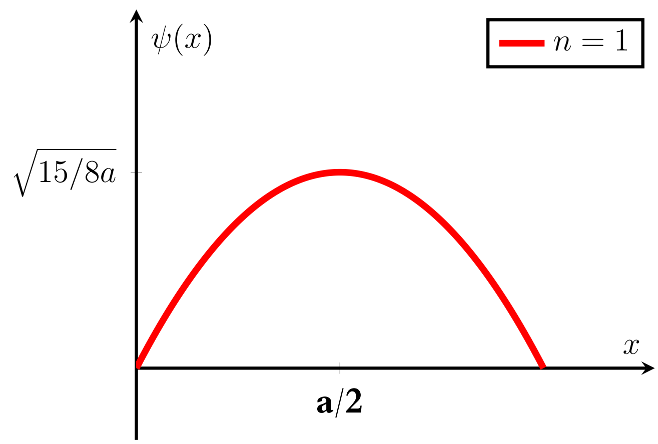
و هو المطلوب .

حل التمريـــــــن الســـادس

1 – ثابت التقويم

$$A=\sqrt{\frac{30}{a^5}}$$

2 – رسم التابع الموجي :



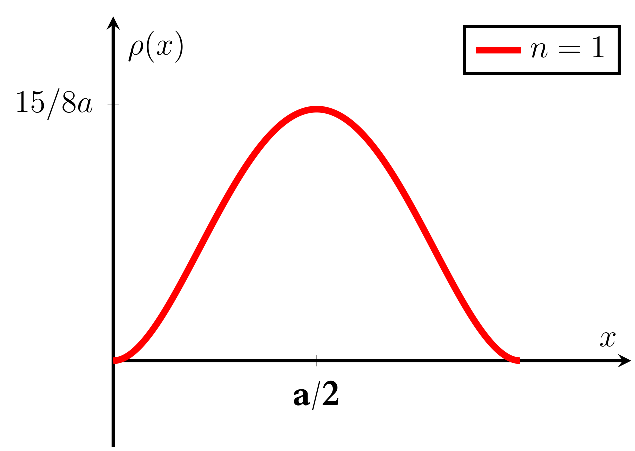
شكل 9.12: توابع الحالة للبئر الكمونية الغير متناظرة

3 – كثافة احتمال الحضور هي :

$$\rho(x) = |\psi(x,0)|^2 = \frac{30}{a^5}x^2\big(a-x\big)^2$$

و شكلها هو :

4 – احتمال تواجد الجسيم يكون اعظميا عند احدى النقاط التي ينعدم عندها المشتق الاول لكثافة احتمال الحضور .



شكل 10.12: توابع الحالة للبئر الكمونية الغير متناظرة

المشتق الاول هو :

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{30}{a^5}2x\big(a-x\big)\big(a-2x\big)$$

و هو ينعدم عند كل من :

$$x_1 = 0\ ,\ x_2 = a\ ,\ x_3 = a/2$$

النقطة التي يكون عندها احتمال الحضور اعظميا هي النقطة $x_3 = 2a$ و عندها تكون $\rho(2a) = \frac{15}{8a}$

5 – حساب القيمة المتوسطة لموضع الجسيم :

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \int_0^a \psi^*(x,0)x\psi(x,0)dx\\ &= \int_0^a \frac{30}{a^5}x\big(a-x\big)x^2\big(a-x\big)dx\\ &= a/2\end{aligned}$$

6 – حساب القيمة المتوسطة لكمية الحركة :

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= \int_0^a \psi^*(x,0)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,0)dx\\ &= \int_0^a \frac{30}{a^5}x\big(a-x\big)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}x\big(a-x\big)dx\\ &= \frac{30}{a^5}\frac{\hbar}{i}\int_0^a x\big(a-x\big)\big(a-2x\big)dx\\ &= 0\end{aligned}$$

7 – كتابة التابع الموجي بدلالة التوابع الخاصة :

$$\psi(x,0) = \sum_0^\infty c_n\psi_n(x)$$

معاملات النشر c_n تحسب كمايلي :

$$\begin{aligned}c_n &= \int_0^\infty \psi_n^*(x)\psi(x,0)dx\\ &= \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\sqrt{\frac{30}{a^5}}x(a-x)dx\\ &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3}\Big[a\int_0^a x\sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)dx - \int_0^a x^2\sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)dx\Big]\\ &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3}a\Bigg\{\Big[\Big(\frac{a}{n\pi}\Big)^2\sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) - \frac{ax}{n\pi}\cos\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\Big]\Big|_0^a\\ &\quad -\Big[2\Big(\frac{a}{n\pi}\Big)^2 x\sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) - \frac{(n\pi x/a)^2-2}{(n\pi/a)^3}\cos\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\Big]\Big|_0^a\Bigg\}\\ &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3}\Big[-\frac{a^3}{n\pi}\cos(n\pi) + a^3\frac{(n\pi)^2-2}{(n\pi)^3}\cos(n\pi) + a^3\frac{2}{(n\pi)^3}\cos(0)\Big]\\ &= \frac{4\sqrt{15}}{(n\pi)^3}\Big[1-\cos(n\pi)\Big]\end{aligned}$$

و منه نجد ان :

$$c_n = \begin{cases} 0 & : \text{n زوجي} \\ \frac{8\sqrt{15}}{(n\pi)^3} & : \text{n فردي} \end{cases} \qquad (1.12)$$

و عليه :

$$\boxed{\psi(x,0)=\sqrt{\frac{30}{a}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\sum_{n=1,3,5,}\frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$$

2.12 المسائل احادية البعد – الحالات الغير المرتبطة

حل التمريـــــــن الاول

1 – معادلة شرودينغر في المنطقة الاولى هي :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+k_1^2\psi(x)=0$$

حيث :

$$k_1=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

2 – حل هذه المعادلة هو :

$$\psi_I(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x}$$

الحد Ae^{ik_1x} يمثل تابع الحالة للجسيمات المتحركة من اليسار نحو اليمين (الجسيمات الواردة) يرمز له ب ψ_i . اما الحد Be^{-ik_1x} فهو تابع الحالة للجسيمات المتحركة من اليمين نحو اليسار و هي جسيمات مرتدة عن الحاجز الكموني يرمز له ب ψ_r .

3 – معادلة شرودينغر في المنطقة الثانية هي :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+k_2^2\psi(x)=0$$

حيث

$$k_2=\frac{\sqrt{2m\left(E-V_0\right)}}{\hbar}$$

حل هذه المعادلة هو :

$$\psi_{II}(x)=Ce^{ik_2x}+De^{-ik_2x}$$

هنا يجب اخذ $D=0$ لانه ليس هناك جسيمات مرتدة في المنطقة الثانية و عليه :

$$\psi_{II}(x)=Ce^{ik_2x}$$

هذا التابع اذا يمثل الجسيمات النافذة و يرمز له ب ψ_t .

4 – معاملا النفوذ و الانعكاس معرفان على التوالي ب :

$$T=\frac{\mathcal{J}_t}{\mathcal{J}_i}$$

$$R = \frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_i}$$

حيث $\mathcal{J}_t$, $\mathcal{J}_r$ و $\mathcal{J}_i$ هي كثافة تيار الجسيمات النافذة , المنعكسة و الواردة على التوالي . كثافة التيار تعطى ب :

$$\vec{\mathcal{J}} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right]$$

بالنسبة للمسائل احادية البعد تاخذ هذه المعادلة الشكل التالي :

$$\vec{\mathcal{J}} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\frac{d\psi}{dx} - \psi\frac{d\psi^*}{dx}\right]\vec{i}$$

كثافة تيار الجسيمات الواردة هي :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{J}}_i &= \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi_i^*(x)\frac{d\psi_i(x)}{dx} - \psi_i(x)\frac{d\psi_i^*(x)}{dx}\right]\vec{i}\\
&= \frac{\hbar|A|^2}{2mi}\left[e^{-ik_1x}\frac{de^{ik_1x}}{dx} - e^{ik_1x}\frac{de^{-ik_1x}}{dx}\right]\vec{i}\\
&= \frac{\hbar k_1|A|^2}{2m}\vec{i}
\end{aligned}$$

كثافة تيار الجسيمات المرتدة (المنعكسة) هي :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{J}}_r &= \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi_r^*(x)\frac{d\psi_r(x)}{dx} - \psi_r(x)\frac{d\psi_r^*(x)}{dx}\right]\vec{i}\\
&= \frac{\hbar|B|^2}{2mi}\left[e^{ik_1x}\frac{de^{-ik_1x}}{dx} - e^{-ik_1x}\frac{de^{ik_1x}}{dx}\right]\vec{i}\\
&= -\frac{\hbar k_1|B|^2}{2m}\vec{i}
\end{aligned}$$

كثافة تيار الجسيمات النافذة هي :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{J}}_t &= \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi_i^*(x)\frac{d\psi_t(x)}{dx} - \psi_t(x)\frac{d\psi_t^*(x)}{dx}\right]\vec{i}\\
&= \frac{\hbar|C|^2}{2mi}\left[e^{-ik_2x}\frac{de^{ik_2x}}{dx} - e^{ik_2x}\frac{de^{-ik_2x}}{dx}\right]\vec{i}\\
&= \frac{\hbar k_2|C|^2}{2m}\vec{i}
\end{aligned}$$

اذا قيمة كثافة التيار للتيارات الجسيمية الثلاث هي :

$$\boxed{\mathcal{J}_i = \frac{\hbar k_1|A|^2}{2m} \quad , \quad \mathcal{J}_r = \frac{\hbar k_1|B|^2}{2m} \quad , \quad \mathcal{J}_t = \frac{\hbar k_2|C|^2}{2m}}$$

و منه :

$$\mathcal{T} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad , \quad \mathcal{R} = \frac{k_2}{k_1}\frac{|C|^2}{|A|^2}$$

المعاملين k_1 و k_2 معروفين اما الثوابت A , B و C لتحديدها سنستخدم شرط الاستمرار الذي يجب ان يحققه كل من التابع الموجي و مشتقه الاول :

$$\psi_I(x=0) = \psi_{II}(x=0) \Rightarrow A + B = C$$
$$\psi'_I(x=0) = \psi'_{II}(x=0) \Rightarrow A - B = \frac{k_2}{k_1}C$$

من المعادلتين الاخيرتين نستخرج مايلي :

$$B = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}A$$
$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A$$

بالتعويض في عبارة كل من معاملي الانعكاس و النفوذ نجد :

$$\mathcal{R} = \frac{(k-q)^2}{(k+q)^2}$$
$$\mathcal{T} = \frac{4kq}{(k+q)^2}$$

نلاحظ ان :

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$$

حل التمريـــــن الثـــــاني

احتمال النفوذ واحتمال الانعكاس معرفين كمايلي :

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{J}_t}{\mathcal{J}_i}$$

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_i}$$

حيث $\mathcal{J}_t$, $\mathcal{J}_r$ و $\mathcal{J}_i$ هي كثافة تيار الجسيمات النافذة , المنعكسة و الواردة على التوالي . ايجاد هذه المقادير يتطلب حل معادلة شرودينغر في مختلف المناطق.
معادلات شرودينغر في المناطق الثلاث هي :

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{d^2x} + k_1^2\psi_1(x) = 0 \quad , \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$
$$\frac{d^2\psi_2(x)}{d^2x} + k_2^2\psi_2(x) = 0 \quad , \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$
$$\frac{d^2\psi_3(x)}{d^2x} + k_3^2\psi_3(x) = 0 \quad , \quad k_3 = \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

الحلول المقبولة فيزيائيا لهذه المعادلات هي :

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \\
\psi_2(x) &= Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \\
\psi_3(x) &= Fe^{ik_1x}
\end{aligned}$$

التابع الذي يصف الجسيمات الواردة هو الحد Ae^{ik_1x} و سنرمز له ب $\psi_i(x)$, التابع الذي يصف الجسيمات المرتدة هو الحد Be^{-ik_1x} و سنرمز له ب $\psi_r(x)$ اما التابع الذي يصف الجسيمات النافذة فهو التابع $\psi_3(x)$ و سنرمز له ب $\psi_t(x)$. اذا و انطلاقا من تعريف كثافة التيار نجد :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{J}}_i &= \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi_i^*(x)\frac{d\psi_i(x)}{dx} - \psi_i(x)\frac{d\psi_i^*(x)}{dx}\right]\vec{i} \\
&= \frac{\hbar|A|^2}{2mi}\left[e^{-ik_1x}\frac{de^{ik_1x}}{dx} - e^{ik_1x}\frac{de^{-ik_1x}}{dx}\right]\vec{i} \\
&= \frac{\hbar k_1|A|^2}{2m}\vec{i} \\
\vec{\mathcal{J}}_r &= \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi_r^*(x)\frac{d\psi_r(x)}{dx} - \psi_r(x)\frac{d\psi_r^*(x)}{dx}\right]\vec{i} \\
&= \frac{\hbar|B|^2}{2mi}\left[e^{ik_1x}\frac{de^{-ik_1x}}{dx} - e^{-ik_1x}\frac{de^{ik_1x}}{dx}\right]\vec{i} \\
&= -\frac{\hbar k_1|B|^2}{2m}\vec{i} \\
\vec{\mathcal{J}}_t &= \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi_t^*(x)\frac{d\psi_t(x)}{dx} - \psi_t(x)\frac{d\psi_t^*(x)}{dx}\right]\vec{i} \\
&= \frac{\hbar|C|^2}{2mi}\left[e^{-ik_1x}\frac{de^{ik_1x}}{dx} - e^{ik_1x}\frac{de^{-ik_1x}}{dx}\right]\vec{i} \\
&= \frac{\hbar k_1|C|^2}{2m}\vec{i}
\end{aligned}$$

و منه :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \frac{\mathcal{J}_t}{\mathcal{J}_i} = \frac{|F|^2}{|A|^2} \\
\mathcal{R} &= \frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_i} = \frac{|B|^2}{|A|^2}
\end{aligned}$$

اذا علينا ايجاد الثابتين F و B بدلالة الثابت A . من اجل ذلك نستخدم شروط الاستمرار و التي هي :

$$\begin{aligned}
&\psi_1(0) = \psi_2(0) \\
&\frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx} \\
&\psi_2(L) = \psi_3(L) \\
&\frac{d\psi_2(L)}{dx} = \frac{d\psi_3(L)}{dx}
\end{aligned}$$

و التي تعطينا المعادلات التالية :

$$\begin{aligned}
&A + B = C + D \\
&k_1\Big(A - B\Big) = k_2\Big(C - D\Big) \\
&Ce^{ik_2L} + De^{-ik_2L} = Fe^{ik_1L} \\
&k_2\Big(Ce^{ik_2L} - De^{-ik_2L}\Big) = k_1Fe^{ik_1L}
\end{aligned}$$

من المعادلتين الاولى و الثانية نحصل على :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{k_1}{k_2}\Big)A + \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{k_1}{k_2}\Big)B \\
D &= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{k_1}{k_2}\Big)A + \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{k_1}{k_2}\Big)B
\end{aligned}$$

و من المعادلتين الثالثة و الرابعة نحصل على :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{k_1}{k_2}\Big)e^{ik_1L}e^{-ik_2L}F \\
D &= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{k_1}{k_2}\Big)e^{ik_1L}e^{ik_2L}F
\end{aligned}$$

بالتخلص من الثابتين C و D في المعادلات الاخيرة نحصل على المعادلتين :

$$\begin{aligned}
\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}e^{ik_1L}e^{-k_2L}F &= \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}A + B \\
\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}e^{ik_1L}e^{ik_2L}F &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A + B
\end{aligned}$$

و منه نجد :

$$\begin{aligned}
F &= \frac{4k_1k_2e^{-ik_1L}}{\Big(k_1 + k_2\Big)^2e^{ik_2L} - \Big(k_1 - k_2\Big)^2e^{-ik_2L}}A \\
&= \frac{4k_1k_2e^{-ik_1L}}{4k_1k_2\cos(k_2L) - 2i\Big(k_1^2 + k_2^2\Big)\sin(k_2L)}A
\end{aligned}$$

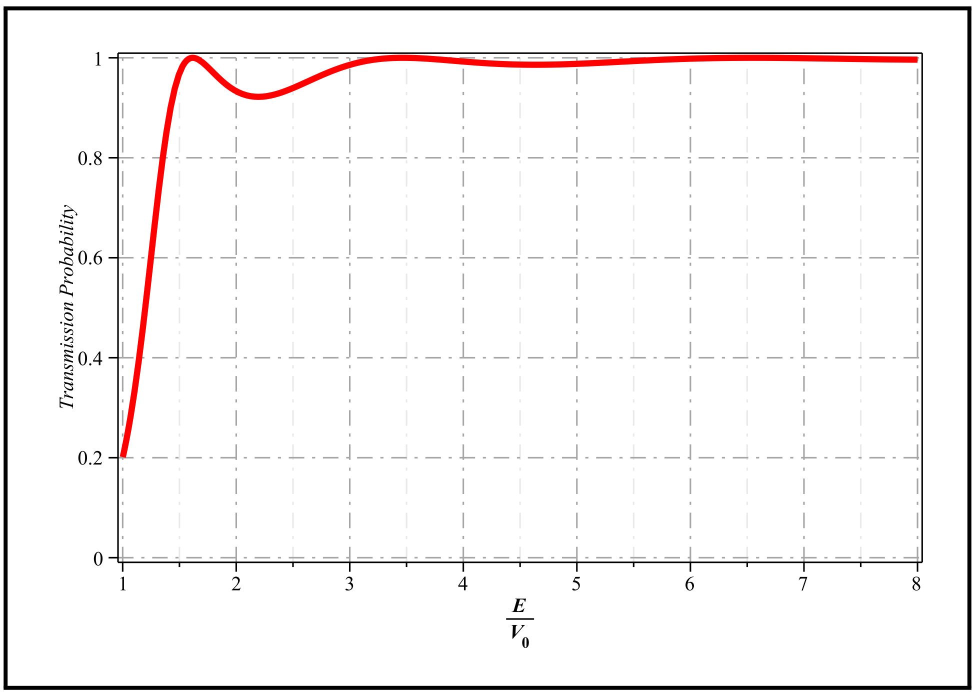
$$\begin{aligned} B &= -\frac{\left(k_1^2-k_2^2\right)\left(e^{ik_2L}-e^{-ik_2L}\right)}{\left(k_1+k_2\right)^2 e^{ik_2L}-\left(k_1-k_2\right)^2 e^{-ik_2L}}A \\ &= -\frac{2i\left(k_1^2-k_2^2\right)\sin(k_2L)}{4k_1k_2\cos(k_2L)-2i\left(k_1^2+k_2^2\right)\sin(k_2L)}A \end{aligned}$$

$$|B|^2 = \left[1+\frac{4k^2q^2}{(k^2-q^2)^2\sin^2 qa}\right]^{-1}|A|^2 = \left[1+\frac{4E(E-V_0)}{V_0^2\sin^2 qa}\right]^{-1}|A|^2$$
$$|F|^2 = \left[1+\frac{(k^2-q^2)^2\sin^2 qa}{4k^2q^2}\right]^{-1}|A|^2 = \left[1+\frac{V_0^2\sin^2 qa}{4E(E-V_0)}\right]^{-1}|A|^2$$

نعوض في عبارتي معامل النفوذ و الانعكاس فنجد :

$$\mathcal{T} = \left[1+\frac{1}{4}\frac{(k_1^2-k_2^2)^2}{k_1^2k_2^2}\sin^2 k_2L\right]^{-1} = \left[1+\frac{V_0^2\sin^2 qa}{4E(E-V_0)}\right]^{-1}$$
$$\mathcal{R} = \left[1+\frac{4k_1^2k_2^2}{(k_1^2-k_2^2)^2\sin^2 k_2L}\right]^{-1} = \left[1+\frac{4E(E-V_0)}{V_0^2\sin^2 qa}\right]^{-1}$$

2 – لايجاد نهاية احتمال النفوذ عندما تكون طاقة الجسيم مساوية تقريبا لارتفاع الحاجز نقوم اولا باعادة كتابة صيغته على



شكل 11.12: احتمال النفوذ فوق حاجز كمومي

النحو التالي :

$$\mathcal{T} = \left[1+\frac{\sin^2(\beta\sqrt{x-1})}{4x(x-1)}\right]^{-1}$$

حيث :

$$x = \frac{E}{V_0}$$

و

$$\beta = \frac{L}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$$

عندما $E \to V_0$ فان $x \to 1$ و بالتالي فان : $\beta\sqrt{x-1} \to 0$ و عليه : $\sin^2(\beta\sqrt{x-1}) \approx \beta^2(x-1)$ و منه نجد ان :

$$\mathcal{T} \approx \left[1 + \frac{\beta^2}{4x}\right]^{-1}$$

و لان $x \to 1$

$$\mathcal{T} \to \left[1 + \frac{\beta^2}{4}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{mL^2V_0}{2\hbar^2}\right]^{-1}$$

و هو المطلوب .

حل التمريـــــن الثـــالث

1 – معادلة شرودينغر في المنطقة الاولى هي :

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0 \quad , \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

حلها هو :

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

– معادلة شرودينغر في المنطقة الثانية هي :

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - q^2\psi(x) = 0 \quad , \quad q = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

حلها هو :

$$\psi_{II}(x) = Ce^{qx} + De^{-qx}$$

– معادلة شرودينغر في المنطقة الثالثة هي :

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0 \quad , \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

حلها هو :

$$\psi_{III}(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

هنا يجب اخذ $G = 0$ لانه ليس هناك جسيمات مرتدة في هذه المنطقة . و عليه :

$$\psi_{III}(x) = Fe^{ikx}$$

معاملا النفوذ و الارتداد هما (انظر التمرين السابق) :

$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{J}_t}{\mathcal{J}_i} = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$
$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_i} = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

ما يهمنا اذا هو ايجاد الثابتان F و B بدلالة الثابت A من اجل ذلك نستخدم شرط استمرار التابع الموجي و مشتقه الاول عند النقطتين $x = 0$ و $x = a$ فنجد :

$$\begin{cases} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) & : A + B = C + D \\ \psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) & : ik\big(A - B\big) = q\big(C - D\big) \\ \psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) & : Ce^{qa} + De^{-qa} = Fe^{ika} \\ \psi'_{II}(a) = \psi'_{III}(a) & : q\big(Ce^{qa} - De^{-qa}\big) = kFe^{ika} \end{cases}$$

انطلاقا من المعادلات السابقة نجد :

$$F = \frac{4ikqe^{-ika}e^{-qa}}{\big(k + iq\big)^2 - \big(k - iq\big)^2 e^{-2qa}} A$$
$$B = \frac{\big(k^2 + q^2\big)\big(1 - e^{2iqa}\big)}{\big(k + iq\big)^2 - \big(k - iq\big)^2 e^{-2qa}} A$$

و منه :

$$\mathcal{T} = \left[1 + \frac{V_0^2 \sinh^2 qa}{4E(V_0 - E)}\right]^{-1}$$

2 – لايجاد نهاية احتمال النفوذ عندما تكون طاقة الجسيم قريبة جدا من ارتفاع الحاجز نقوم بايجاد سلوكه في هذه الحالة . من اجل ذلك نعيد كتابة عبارته كمايلي :

$$\mathcal{T} = \left[1 + \frac{\sinh^2(\beta\sqrt{1 - x})}{4x(1 - x)}\right]^{-1}$$

حيث :

$$x = \frac{E}{V_0}$$

و

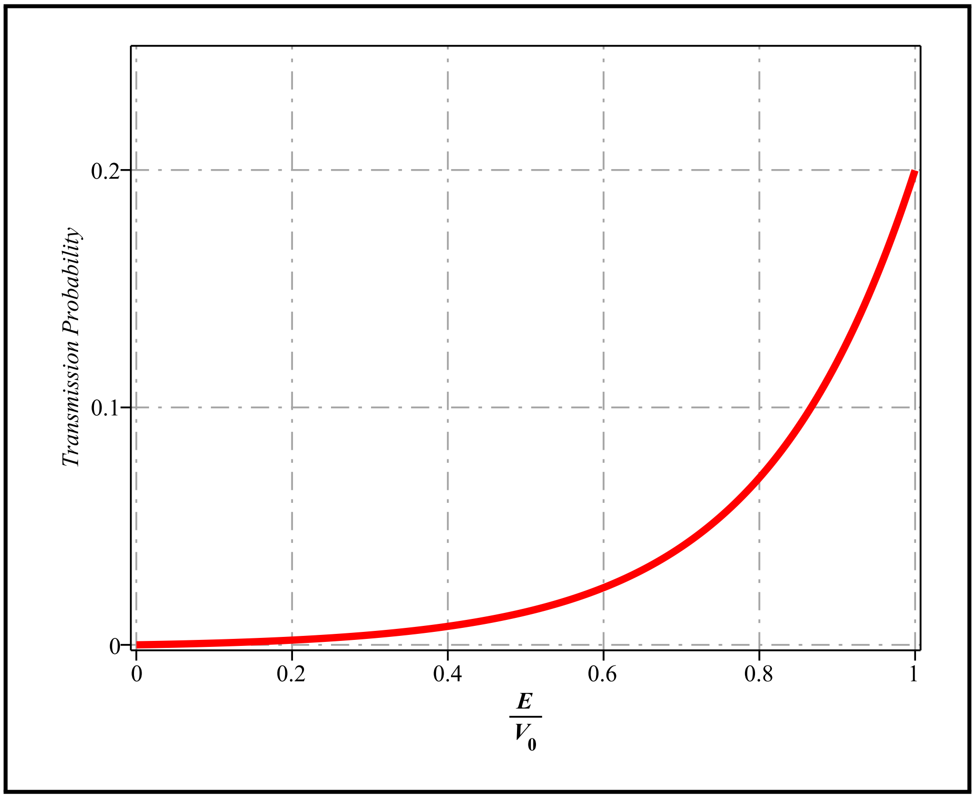
$$\beta = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$$

لما $E \to V_0$ فان :

$$x \to 1$$

و بالتالي :

$$\beta\sqrt{1 - x} \to 0$$



شكل 12.12: احتمال اختراق حاجز كموني

و عليه فان :

$$\sinh^2(\beta\sqrt{1-x}) \approx \beta^2(1-x)$$

و منه :

$$\mathcal{T} \approx \left[1+\frac{\beta^2(1-x)}{4x(1-x)}\right]^{-1} = \left[1+\frac{\beta^2}{4x}\right]^{-1}$$

و لان $x \to 1$ فان :

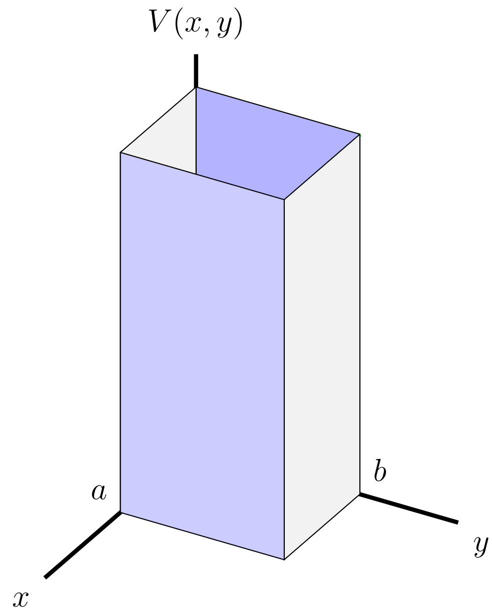
$$\mathcal{T} \to \left[1+\frac{\beta^2}{4}\right]^{-1} = \left[1+\frac{ma^2V_0}{2\hbar^2}\right]^{-1}$$

و هو المطلوب .

3.12 المسائل ثلاثية البعد – الحالات مرتبطة

حل التمريــــــن الاول

1 – رسم الحقل الكموني :



شكل 12.13: البئر الكمونية ثنائية البعد

2 – كتابة معادلة شرودينغر :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\psi(x,y)=E\psi(x,y)$$

3 – نعيد كتابة المعادلة السابقة على النحو التالي :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2}=E\psi(x,y)$$

نعتبر ان الحل يكون من الشكل التالي $\psi(x,y)=F(x)G(y)$. بالتعويض نجد :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}G(y)\frac{\partial^2F(x)}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2}{2m}F(x)\frac{\partial^2G(y)}{\partial y^2}=EF(x)G(y)$$

بالقسمة على $F(x)G(y)$ نجد :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{F(x)}\frac{\partial^2F(x)}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{G(y)}\frac{\partial^2G(y)}{\partial y^2}=E$$

و هذا يعني ان الحد $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2F(x)}{F(x)\partial x^2}$ عبارة عن ثابت (نرمز له ب E_x) و الحد $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2G(y)}{G(y)\partial y^2}$ ايضا ثابت (نرمز له ب E_y)
و منه :

$$E=E_x+E_y$$

و :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2F(x)}{F(x)dx^2} = E_x \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2F(x)}{dx^2} = E_xF(x)$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2G(y)}{G(y)dy^2} = E_y \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2G(y)}{dy^2} = E_yG(y)$$

و هما معادلتين تفاضليتين من الرتبة الثانية في متغير واحد .

3 – المعادلتين السابقتين مطابقتين تماما لمعادلة جسيم يتحرك في بعد واحد داخل بئر كمونية . و بالتالي فان حلهما يكون كمايلي :

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(p\pi x/a) \quad , \quad p = 1, 2, 3, ...$$
$$G(y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\sin(q\pi y/b) \quad , \quad q = 1, 2, 3, ...$$

و الحل الكامل هو :

$$\boxed{\psi_{p,q}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{b}}\sin(p\pi x/a)\sin(q\pi y/b)}$$

4 – لايجاد القيم الممكنة للطاقة نطابق مع حالة البئر الكمونية احادية البعد فنجد :

$$E_x = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}p^2$$
$$E_y = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mb^2}q^2$$

و منه :

$$\boxed{E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left[\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right]}$$

حل التمريـــــن الثـــــاني

1 – باخذ $(a = b = 2\pi)$ مستويات الطاقة تكتب كمايلي :

$$\boxed{E = \mathcal{E}_0\left[p^2 + q^2\right]}$$

حيث :

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar^2}{8m}$$

2 – تحديد درجة انحطاط المستويات الطاقوية الثلاث الاولى :

– المستوى الطاقوي الاول هو $E_1 = 2\mathcal{E}_0$ محدد بالعددين الكميين $p = q = 1$ و يقابله التابع الموجي :

$$\psi_{1,1}(x,y) = \frac{1}{\pi}\sin(x/2)\sin(y/2)$$

– المستوى الطاقوي الثاني هو $E_2 = 5\mathcal{E}_0$ و يتحدد بتشكيلتين للعددين الكميين p و q هما $(p=1, q=2)$ و $(p=2, q=1)$ كل تشكيلة يقابلها تابع موجي مختلف و هما :

$$\psi_{1,2}(x,y) = \frac{1}{\pi}\sin(x/2)\sin(y)$$
$$\psi_{2,1}(x,y) = \frac{1}{\pi}\sin(x)\sin(y/2)$$

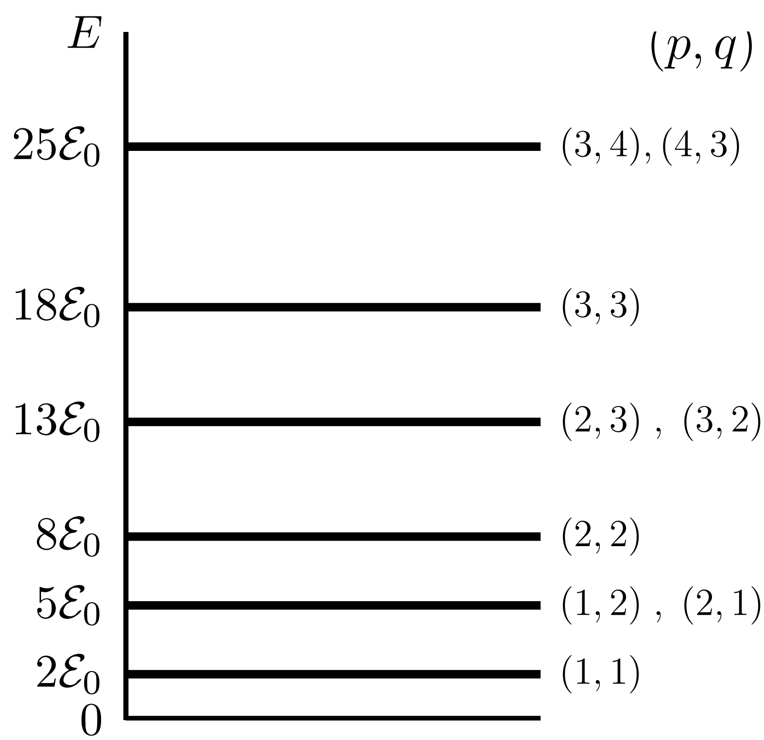
و هذا يعني ان المستوى الطاقوي الثاني منحط مرتين .

– المستوى الطاقوي الثالث هو $E_3 = 8\mathcal{E}_0$ يتحدد بتشكيلة واحدة للعددين الكميين p و q هي $(p=2, q=2)$ يقابله تابع موجي واحد هو :

$$\psi_{2,2}(x,y) = \frac{1}{\pi}\sin(x)\sin(y)$$

و هذا يعني ان المستوى الطاقوي الثالث غير منحط .

3 – رسم مخطط للمستويات الطاقوية :

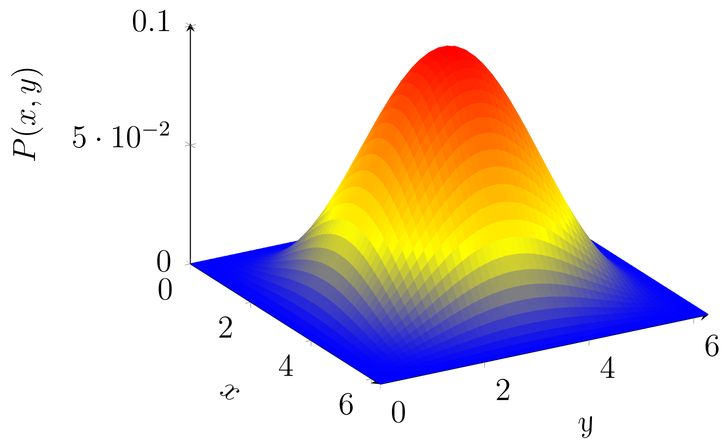


شكل 14.12: المستويات الطاقوية للبئر الكمونية ثنائية البعد

3 – رسم كثافة احتمال حضور الجسيم عندما يكون في الحالة الاساسية :

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\pi}\sin^2(x/2)\sin^2(y/2)$$

الجسيم في الحالة الاساسية



شكل 15.12: احتمال تواجد جسيم في البئر الكمونية ثنائية البعد

حل التمريــــــن الثـــالث

1 – التابع الموجي في هذه الحالة هو جداء ثلاثة توابع موجية هي حلول معادلة شرودينغر لجسيم في بئر كموني احادي البعد :

$$\boxed{\psi_{p,q,n}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{b}}\sqrt{\frac{2}{c}}\sin(p\pi x/a)\sin(q\pi y/b)\sin(n\pi z/b)}$$

2 – القيم الممكنة للطاقة هي :

$$\boxed{E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left[\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right]}$$

الفصـــــل 13

حلول تمارين الفصل الخامس

حل التمريـــــن الاول

اثبات صحة العلاقة $\left[\hat{x},\hat{L}_z\right]=-i\hbar\hat{y}$:

$$\begin{aligned}\left[\hat{x},\hat{L}_z\right]&=\hat{x}\hat{L}_z-\hat{L}_z\hat{x}\\&=\hat{x}\left(\hat{x}\hat{p_y}-\hat{y}\hat{p_x}\right)-\left(\hat{x}\hat{p_y}-\hat{y}\hat{p_x}\right)\hat{x}\\&=\hat{x}\hat{x}\hat{p_y}-\hat{x}\hat{y}\hat{p_x}-\hat{x}\hat{p_y}\hat{x}+\hat{y}\hat{p_x}\hat{x}\end{aligned}$$

لدينا : $\hat{x}\hat{p_y}=\hat{p_y}\hat{x}$ و عليه فان الحدان الاول و الثالث يلغيان بعضهما . لدينا ايضا $\hat{x}\hat{y}=\hat{y}\hat{x}$ و منه :

$$\begin{aligned}\left[\hat{x},\hat{L}_z\right]&=\hat{y}\hat{p_x}\hat{x}-\hat{x}\hat{y}\hat{p_x}\\&=\hat{y}\hat{p_x}\hat{x}-\hat{y}\hat{x}\hat{p_x}\\&=\hat{y}\left(\hat{p_x}\hat{x}-\hat{x}\hat{p_x}\right)\\&=\hat{y}\left[\hat{p_x},\hat{x}\right]\end{aligned}$$

وفقا لعلاقات التبادل القانونية : $\hat{x}\hat{p_x}-\hat{p_x}\hat{x}=i\hbar$ و عليه :

$$\left[\hat{x},\hat{L}_z\right]=-i\hbar\hat{y}$$

و هو المطلوب . باقي العلاقات يتم اثباتها بنفس الطريقة .

حل التمريـــــن الثـــــاني

اثبات صحة العلاقة $\left[\hat{p}_x, \hat{L}_z\right] = -i\hbar\hat{p}_y$:

$$\begin{aligned}\left[\hat{p}_x, \hat{L}_z\right] &= \hat{p}_x\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{p}_x \\ &= \hat{p}_x\left(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\right) - \left(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\right)\hat{p}_x \\ &= \hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_y - \hat{p}_x\hat{y}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_y\hat{p}_x + \hat{y}\hat{p}_x\hat{p}_x\end{aligned}$$

لدينا $\hat{p}_x\hat{y} = \hat{y}\hat{p}_x$ و عليه فان الحدان الثاني و الرابع يلغيان بعضهما . و لدينا ايضا $\hat{p}_x\hat{p}_y = \hat{p}_y\hat{p}_x$ و منه :

$$\begin{aligned}\left[\hat{p}_x, \hat{L}_z\right] &= \hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_y - \hat{x}\hat{p}_y\hat{p}_x \\ &= \hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_y - \hat{x}\hat{p}_x\hat{p}_y \\ &= \left(\hat{p}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x\right)\hat{p}_y \\ &= -\left(\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x}\right)\hat{p}_y\end{aligned}$$

حسب علاقات التبادل القانونية : $\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar$ و عليه :

$$\left[\hat{p}_x, \hat{L}_z\right] = -i\hbar\hat{p}_y$$

و هو المطلوب .

– يمكن اثبات باقي العلاقات بنفس الكيفية .

حل التمريـــــن الثـــالث

1 – اثبات صحة العلاقة $\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = i\hbar\hat{L}_z$:

$$\begin{aligned}\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] &= \left[yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\right] \\ &= \left[yp_z, zp_x\right] - \left[yp_z, xp_z\right] - \left[zp_y, zp_x\right] + \left[zp_y, xp_z\right]\end{aligned}$$

نقوم بحساب المبدل الاول :

$$\begin{aligned}\left[yp_z, zp_x\right] &= y\left[p_z, zp_x\right] + \left[y, zp_x\right]p_z \\ &= y\left(z\left[p_z, p_x\right] + \left[p_z, z\right]p_x\right) + \left(z\left[y, p_x\right] + \left[y, z\right]p_x\right)p_z \\ &= y\left(z \times 0 - i\hbar p_x\right) + \left(z \times 0 + 0 \times p_x\right)p_z \\ &= -i\hbar y p_x\end{aligned}$$

حساب باقي المبدلات يتم بنفس الكيفية لنجد :

$$\left[yp_z, xp_z\right] = 0$$
$$\left[zp_y, zp_x\right] = 0$$
$$\left[zp_y, xp_z\right] = i\hbar p_y x$$

و منه :

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = -i\hbar y p_x + i\hbar p_y x = i\hbar\left(xp_y - yp_x\right) = i\hbar\hat{L}_z$$

و هو المطلوب .

– باقي العلاقات يتم اثباتها بنفس الكيفية .

حل التمريـــــن الـــرابع

1 – اثبات صحة العلاقة $\vec{L}\times\vec{L} = i\hbar\vec{L}$:

$$\begin{aligned}
\vec{L}\times\vec{L} &= \left[L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k}\right]\cdot\left[L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k}\right] \\
&= L_xL_y\vec{k} - L_xL_z\vec{j} - L_yL_x\vec{k} + L_yL_z\vec{i} + L_zL_x\vec{j} - L_zL_y\vec{i} \\
&= \left(L_yL_z - L_zL_y\right)\vec{i} + \left(L_zL_x - L_xL_z\right)\vec{j} + \left(L_xL_y - L_yL_x\right)\vec{k} \\
&= i\hbar L_x\vec{i} + i\hbar L_y\vec{j} + i\hbar L_z\vec{k} \\
&= i\hbar\vec{L}
\end{aligned}$$

2 – اثبات صحة العلاقة

$$\vec{L}.\vec{r} = 0$$

:

$$\begin{aligned}
\vec{L}.\vec{r} &= \left[L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k}\right]\times\left[x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right] \\
&= L_xx + L_yy + L_zz \\
&= \left(yp_z - zp_y\right)x + \left(zp_x - xp_z\right)y + \left(xp_y - yp_x\right)z \\
&= yp_zx - zp_yx + zp_xy - xp_zy + xp_yz - yp_xz \\
&= yp_zx - zp_yx + zp_xy - yp_zx + zp_yx - zp_xy \\
&= 0
\end{aligned}$$

كل الحدود تتكون من مؤثرات متبادلة و بالتالي يمكن تغيير وضعها بالنسبة لبعضها البعض .

– العلاقة الاخيرة يمكن اثباتها بنفس الكيفية التي اثبتنا بها العلاقة السابقة .

حل التمريـــــن الخـــامس

اثبات صحة العلاقة

$$\left[L_x, r^2\right] = 0$$

:

$$\begin{aligned}
\left[L_x, r^2\right] &= \left[L_x, x^2 + y^2 + z^2\right] \\
&= \left[L_x, x^2\right] + \left[L_x, y^2\right] + \left[L_x, z^2\right] \\
&= x\left[L_x, x\right] + \left[L_x, x\right]x + y\left[L_x, y\right] + \left[L_x, y\right]y + z\left[L_x, z\right] + \left[L_x, z\right]z \\
&= 0 + 0 + i\hbar yz + i\hbar zy - i\hbar zy - i\hbar yz \\
&= 0
\end{aligned}$$

باقي العلاقات يتم اثباتها بنفس الكيفية .

حل التمريـــــن الســـادس

1 – يكون التابع الكروي $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ مقوما اذا كان يحقق الشرط التالي :

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{l,m}^*(\theta, \phi) Y_{l,m}(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = 1$$

و عليه , بالنسبة للتابع $Y_{0,0}(\theta, \phi)$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{0,0}^*(\theta, \phi) Y_{0,0}(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \sin\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 1
\end{aligned}$$

اذا التابع $Y_{0,0}(\theta, \phi)$ مقوم .

– بالنسبة للتابع $Y_{1,-1}(\theta,\phi)$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{1,-1}^*(\theta,\phi)Y_{1,-1}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}\sin\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{3}{8\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{3}{4}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta \\
&= \frac{3}{4}\int_0^{\pi}\Big(1-\cos^2\theta\Big)\sin\theta d\theta \\
&= 1
\end{aligned}$$

اذا التابع $Y_{1,-1}(\theta,\phi)$ مقوم .

2 – يكون التابعان الكرويان $Y_{0,0}(\theta,\phi)$ و $Y_{1,-1}(\theta,\phi)$ متعامدان اذا حققا الشرط التالي :

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{0,0}^*(\theta,\phi)Y_{1,-1}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = 0$$

و عليه :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{0,0}^*(\theta,\phi)Y_{1,-1}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}\sin\theta d\theta d\phi \\
&= \sqrt{\frac{3}{32\pi}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\phi}\sin^2\theta d\theta d\phi \\
&= \sqrt{\frac{3}{32\pi^2}}\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^{2\pi} e^{-i\phi}d\phi \\
&= \sqrt{\frac{3}{64}}\int_0^{2\pi} e^{-i\phi}d\phi \\
&= \sqrt{\frac{3}{64}}\int_0^{2\pi}\Big(\cos\phi - i\sin\phi\Big)d\phi \\
&= 0
\end{aligned}$$

اي ان التابعين $Y_{0,0}(\theta,\phi)$ و $Y_{1,-1}(\theta,\phi)$ متعامدين .

حل التمريـــــن الســـابع

التوابع الكروية هي توابع ذاتية لكل من L_z بقيمة ذاتية $m\hbar$ و L^2 بقيمة ذاتية $l(l+1)\hbar^2$ اي انها تحقق العلاقات التالية :

$$\begin{aligned}
L_z Y_l^m(\theta,\phi) &= m\hbar Y_l^m(\theta,\phi) \\
L^2 Y_a(\theta,\phi) &= l(l+1)\hbar^2 Y(\theta,\phi)
\end{aligned}$$

لذلك فان ايجاد قيمة كل من m و l المقابلتين لكل تابع كروي يتطلب التاثير بكل من L_z و L^2 على هذا التابع حيث :

$$
\begin{aligned}
L_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \\
L^2 &= -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]
\end{aligned}
$$

1 – تحديد قيمة m المقابلة للتابع $Y_a(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$$
\begin{aligned}
L_z Y_a(\theta,\phi) &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\Big) \\
&= 0 \times \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
&= 0 \times Y_a(\theta,\phi)
\end{aligned}
$$

اي ان $m = 0$

– تحديد قيمة l المقابلة للتابع $Y_a(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$$
\begin{aligned}
L^2 Y_a(\theta,\phi) &= -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]\Big[\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\Big] \\
&= 0 \times \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
&= 0 \times Y_a(\theta,\phi)
\end{aligned}
$$

اي ان $l = 0$

2 – ايجاد القيم المقابلة للتابع $Y_b(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$:

$$
\begin{aligned}
L_z Y_b(\theta,\phi) &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}\Big] \\
&= \hbar\Big[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}\Big] \\
&= \hbar Y_b(\theta,\phi)
\end{aligned}
$$

اي ان $m = 1$

$$
\begin{aligned}
L^2 Y_b(\theta,\phi) &= -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]\Big[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}\Big]\\
&= \hbar^2\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\Big[\frac{e^{i\phi}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\cos\theta\Big)-\frac{e^{i\phi}}{\sin\theta}\Big]\\
&= \hbar^2\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\Big[\frac{e^{i\phi}}{\sin\theta}\Big(1-2\sin^2\theta\Big)-\frac{e^{i\phi}}{\sin\theta}\Big]\\
&= 2\hbar^2\Big[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}\Big]\\
&= 2\hbar^2 Y_b(\theta,\phi)
\end{aligned}
$$

و هذا يعني ان $l(l+1)=2$ و منه $l=1$

3 – ايجاد القيم المقابلة للتابع $Y_c(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$:

$$
\begin{aligned}
L_z Y_b(\theta,\phi) &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big[\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\Big]\\
&= 0\times\Big[\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\Big]\\
&= 0\times Y_c(\theta,\phi)
\end{aligned}
$$

اي ان $m=0$

$$
\begin{aligned}
L^2 Y_c(\theta,\phi) &= -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]\Big[\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\Big]\\
&= \hbar^2\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin^2\theta\Big)\Big]\\
&= 2\hbar^2\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\\
&= 2\hbar^2 Y_c(\theta,\phi)
\end{aligned}
$$

و هذا يعني ان $l(l+1)=2$ و منه $l=1$

4 – القيم المقابلة للتابع $Y_c(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\Big(3\cos^2\theta-1\Big)$ هي $m=0$ و $l=2$

حل التمرين الثامن

القيمة المتوسطة للمركبة L_x في الحالة $|l,m\rangle$ هي :

$$
\langle L_x\rangle = \langle l,m|L_x|l,m\rangle
$$

لدينا :

$$L_x = \frac{1}{2}\Big(L_+ + L_-\Big)$$

و

$$L_+|l,m\rangle = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\hbar|l,m+1\rangle$$
$$L_-|l,m\rangle = \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\hbar|l,m-1\rangle$$

و عليه :

$$\begin{aligned}\langle l,m|L_x|l,m\rangle &= \langle l,m|\frac{L_+ + L_-}{2}|l,m\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle l,m|L_+|l,m\rangle + \frac{1}{2}\langle l,m|L_-|l,m\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\hbar\langle l,m|l,m+1\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\hbar\langle l,m|l,m-1\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

لان الحالات الذاتية المختلفة تكون متعامدة اي : $\langle l,m|l,m-1\rangle = \langle l,m|l,m+1\rangle = 0$

– حساب القيمة المتوسطة ل L_x^2 :

$$\begin{aligned}\langle l,m|L_x^2|l,m\rangle &= \frac{1}{4}\langle l,m|\Big(L_+ + L_-\Big)\Big(L_+ + L_-\Big)|l,m\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle l,m|\Big(L_+^2 + L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+\Big)|l,m\rangle \\ &= \frac{1}{4}\Big[\langle l,m|L_+^2|l,m\rangle + \langle l,m|L_-^2|l,m\rangle + \langle l,m|\Big(L_+L_- + L_-L_+\Big)|l,m\rangle\Big]\end{aligned}$$

يمكن التاكد بكل بساطة من ان :

$$\langle l,m|L_+^2|l,m\rangle = \langle l,m|L_-^2|l,m\rangle = 0$$

و ان :

$$L_+L_- + L_-L = 2\Big(L^2 - L_z^2\Big)$$

و عليه :

$$\begin{aligned}\langle l,m|L_x^2|l,m\rangle &= \frac{1}{2}\Big[\langle l,m|\Big(L^2 - L_z^2\Big)|l,m\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\langle l,m|L^2|l,m\rangle - \langle l,m|L_z^2|l,m\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[l(l+1)\hbar^2\langle l,m|l,m\rangle - m^2\hbar^2\langle l,m|l,m\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[l(l+1) - m^2\Big]\hbar^2\end{aligned}$$

حل التمريـــــن التـــاسع

1 – لحساب تاثير المؤثر L_x على اشعة الاساس ننطلق من كون $L_x = (L_+ + L_-)/2$ و عليه فاننا سنحدد اولا تاثير مؤثري الخفض و الرفع على اشعة الاساس :

$$L_+|1,-1\rangle = \sqrt{2}\hbar|1,0\rangle \quad , \quad L_+|1,0\rangle = \sqrt{2}\hbar|1,+1\rangle \quad , \quad L_+|1,+1\rangle = 0$$
$$L_-|1,+1\rangle = \sqrt{2}\hbar|1,0\rangle \quad , \quad L_-|1,0\rangle = \sqrt{2}\hbar|1,-1\rangle \quad , \quad L_-|1,-1\rangle = 0$$

و منه :

$$\begin{aligned} L_x|1,+1\rangle &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|1,0\rangle \\ L_x|1,0\rangle &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\Big[|1,-1\rangle + |1,+1\rangle\Big] \\ L_x|1,-1\rangle &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|1,0\rangle \end{aligned}$$

2 – المصفوفة الممثلة للمؤثر L_x في الاساس المعتبر هي مصفوفة 3×3 .وهي تكتب كمايلي (نرمز لها ب A) :

$$A = \begin{bmatrix} \langle 1,-1|L_x|1,-1\rangle & \langle 1,-1|L_x|1,0\rangle & \langle 1,-1|L_x|1,1\rangle \\ \langle 1,0|L_x|1,-1\rangle & \langle 1,0|L_x|1,0\rangle & \langle 1,0|L_x|1,1\rangle \\ \langle 1,1|L_x|1,-1\rangle & \langle 1,1|L_x|1,0\rangle & \langle 1,1|L_x|1,1\rangle \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3 – الشعاع الذاتي $|\alpha\rangle$ للمؤثر L_x يجب ان يحقق معادلة القيم الذاتية التالية :

$$L_x|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$$

حيث λ هي القيمة الذاتية المقابلة لهذا الشعاع . الشعاع الذاتي $|\alpha\rangle$ يمكن كتابته على شكل تركيب خطي لاشعة الاساس :

$$|\alpha\rangle = a|1,-1\rangle + b|1,0\rangle + c|1,1\rangle$$

و المطلوب هو تحديد المركبات a , b و c . من اجل ذلك نعوض عن الشعاع $|\alpha\rangle$ في معادلة القيم الذاتية . الطرف الايسر هو :

$$\begin{aligned} L_x|\alpha\rangle &= L_x\Big[a|1,-1\rangle + b|1,0\rangle + c|1,1\rangle\Big] \\ &= aL_x|1,-1\rangle + bL_x|1,0\rangle + cL_x|1,1\rangle \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}b|1,-1\rangle + \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\big(a+c\big)|1,0\rangle + \frac{\hbar}{\sqrt{2}}b|1,1\rangle \end{aligned}$$

و الطرف الايمن هو :

$$\lambda|\alpha\rangle = a\lambda|1,-1\rangle + b\lambda|1,0\rangle + c\lambda|1,1\rangle$$

بالمساواة بين الطرفين نحصل على المعادلة التالية :

$$\Big[\frac{\hbar}{2}b-\lambda a\Big]|1,-1\rangle+\Big[\frac{\hbar}{2}\big(a+c\big)-\lambda b\Big]|1,0\rangle+\Big[\frac{\hbar}{2}b-\lambda c\Big]|1,1\rangle=0$$

هذا الشعاع يكون معدوم اذا كانت معاملات اشعة الاساس معدومة معا :

$$\begin{aligned}
&\lambda a-\frac{\hbar}{\sqrt{2}}b=0\\
&\frac{\hbar}{\sqrt{2}}a-\lambda b+\frac{\hbar}{\sqrt{2}}c=0\\
&\frac{\hbar}{\sqrt{2}}b-\lambda c=0
\end{aligned}$$

هذه الجملة تمتلك حلا اذا كان محددها معدوم و هو الشرط الذي يسمح لنا بايجاد القيم الذاتية الممكنة :

$$\lambda\Big[\lambda^2-\hbar^2\Big]=0$$

لدينا اذا ثلاثة قيم ذاتية هي :

$$\lambda_1=\hbar \quad , \quad \lambda_2=0 \quad , \quad \lambda_3=-\hbar$$

لايجاد الشعاع الذاتي المقابل لاي قيمة ذاتية نعوض بتلك القيمة في جملة المعادلات للحصول على مركبات الشعاع . و منه :

$$\begin{aligned}
|\alpha_1\rangle&=\frac{1}{2}\Big[|1,-1\rangle+\sqrt{2}|1,0\rangle+|1,1\rangle\Big]\\
|\alpha_2\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|1,1\rangle-|1,-1\rangle\Big]\\
|\alpha_3\rangle&=\frac{1}{2}\Big[|1,-1\rangle-\sqrt{2}|1,0\rangle+|1,1\rangle\Big]
\end{aligned}$$

حل التمريـــــن العـــاشر

لاثبات ان التابع الموجي $\psi(\theta,\phi)=A\sin\theta e^{i\phi}$ هو تابع ذاتي لمربع العزم الحركي يكفي اثبات ان المعادلة التالية محققة :

$$L^2\psi(\theta,\phi)=C\psi(\theta,\phi)$$

حيث C ثابت حقيقي يمثل القيمة الذاتية ل L^2 .اذا بالتاثير على هذا التابع بالمؤثر المقابل ل L^2 و الذي هو :

$$L^2=-\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]$$

نجد ان :

$$\begin{aligned}
L^2\psi(\theta,\phi) &= -\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]A\sin\theta e^{i\phi}\\
&= -A\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\cos\theta\Big)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]e^{i\phi}\\
&= -A\hbar^2\Big[\frac{1}{\sin\theta}\Big(1-2\sin^2\theta\Big)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Big]e^{i\phi}\\
&= -A\hbar^2e^{i\phi}\Big[\frac{1}{\sin\theta}\Big(1-2\sin^2\theta\Big)-\frac{1}{\sin\theta}\Big]\\
&= 2\hbar^2A\sin\theta e^{i\phi}\\
&= 2\hbar^2\psi(\theta,\phi)
\end{aligned}$$

اي ان التابع $\psi(\theta,\phi)$ هو تابع ذاتي ل L^2 بقيمة ذاتية هي $2\hbar^2$.

لاثبات ان التابع الموجي $\psi(\theta,\phi)=A\sin\theta e^{i\phi}$ هو تابع ذاتي ل L_z يكفي اثبات ان المعادلة التالية محققة :

$$L_z\psi(\theta,\phi)=C\psi(\theta,\phi)$$

حيث C ثابت حقيقي يمثل القيمة الذاتية ل L_z . انطلاقا من كون $L_z=\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ نجد ان :

$$\begin{aligned}
L_z\psi(\theta,\phi) &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}A\sin\theta e^{i\phi}\\
&= \hbar A\sin\theta e^{i\phi}\\
&= \hbar\psi(\theta,\phi)
\end{aligned}$$

اي ان التابع $\psi(\theta,\phi)=A\sin\theta e^{i\phi}$ هو تابع ذاتي ل L_z بقيمة ذاتية $\hbar$.

الفصـــــل 14

حلول تمارين الفصل السادس

حل التمريـــــن الاول

1 – التابع الموجي في المنطقة $r > a$ يكون معدوم لان الجسيم لا يمكنه التواجد في هذه المنطقة اما في المنطقة $r < a$ فان التابع الموجي ياخذ الشكل التالي :

$$\psi(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

التابع $R_{nl}(r)$ هو حل معادلة شرودينغر القطرية :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r) + \frac{2m}{\hbar^2}\Big[E - V(r)\Big]R(r) = 0$$

اما التوابع $Y_{lm}(\theta,\phi)$ فهي التوابع الكروية و هي مستقلة عن شكل الكمون .

– بما اننا مهتمون بالحالة s اي الحالة التي يكون فيها العزم الحركي المداري للجسيم معدوم $(l = 0)$ فان التابع الموجي ياخذ الشكل :

$$\psi(r,\theta,\phi) = R_{n0}(r)Y_{00}(\theta,\phi)$$

حيث $Y_{00}(\theta,\phi) = 1/\sqrt{4\pi}$ اما المعادلة التفاضلية القطرية فتصبح كمايلي (مع الاخذ بالاعتبار ان $V(r) = 0$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{2mE}{\hbar^2}R(r) = 0$$

بادخال التغيير التالي :

$$u(r) = rR(r)$$

تاخذ المعادلة القطرية الشكل البسيط التالي :

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}u(r) = 0$$

و هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية في المتغير القطري . حلها هو :

$$u(r) = A\sin(kr + B)$$

حيث $k = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$ اما A و B فهما ثابتان عقديان بصفة عامة . لتحديد الثابت B نستخدم الشرط الحدودي $u(r = 0) = 0$ فنجد :

$$\sin(B) = 0 \Longrightarrow B = 0$$

و منه :

$$u(r) = A\sin(kr)$$

و :

$$R(r) = \frac{1}{r}A\sin(kr)$$

ان تحديد الثابت A يتطلب معرفة القيم الممكنة للمقدار k من اجل ذلك نستخدم الشرط الحدودي $R(r = a) = 0$ و منه نجد :

$$\sin ka = 0 \Longrightarrow ka = n\pi \Longrightarrow k = n\pi/a$$

و منه :

$$R_{n0}(r) = A\frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{a}$$

الان نطبق شرط التقويم لايجاد الثابت A . شرط التقويم هو :

$$\int_0^a R^*(r)R(r)r^2dr = 1$$

نقوم اولا بحساب التكامل :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^a R^2(r)r^2dr \\
&= \int_0^a A^2\sin^2(n\pi r/a)dr \\
&= A^2\int_0^a \sin^2(n\pi r/a)dr \\
&= A^2\int_0^a \frac{1}{2}\Big[1 - \cos 2(n\pi r/a)\Big]dr \\
&= A^2\frac{a}{2}
\end{aligned}$$

و عليه :

$$I = 1 \Longrightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

و منه :

$$R_{n0}(r) = \sqrt{\frac{2}{a}}\frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{a}$$

$$\psi_{n00}(r,\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{a}$$

2 – لحساب طاقة الحالات s ننطلق من القيم الممكنة للمقدار k :

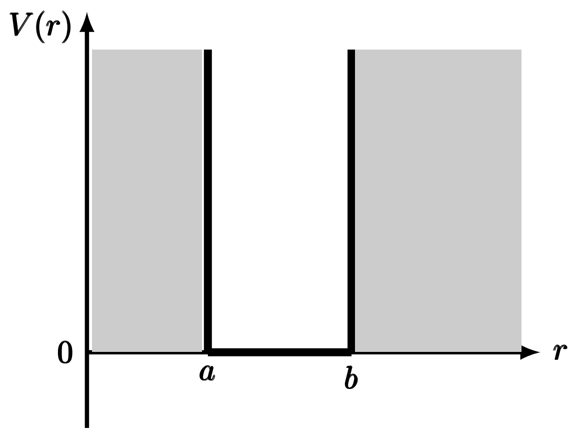
$$\frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}=n\pi\Longrightarrow E_n(l=0)=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$$

و منه طاقة الحالة الاساسية $(n=1)$:

$$E_1(l=0)=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

حل التمريـــــن الثـــــاني

1 – رسم الحقل الكموني :



شكل 1.14: صندوق كمونية كروية متمركزة

2 – معادلة شرودينغر القطرية لجسيم يتحرك في حقل مركزي هي :

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\Big[E-V(r)\Big]-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u(r)=0$$

حيث :

$$u(r)=rR(r)$$

بالنسبة للجسيمات التي عزمها الحركي معدوم $(l=0)$ تاخذ هذه المعادلة الشكل التالي :

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\Big[E-V(r)\Big]u(r)=0$$

في المنطقة $(a<r<b)$ الكمون معدوم وعليه :

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}u(r)=0$$

و هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية في المتغير القطري (r) حلها من الشكل :

$$u(r) = C\sin(kr + D)$$

حيث :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

اما C و D فهما ثابتان عقديان بصفة عامة و سنختارهما حقيقيان هنا . التابع القطري للحالات s هو :

$$R_{n0}(r) = \frac{C\sin(kr + D)}{r}$$

لتحديد الثابت D نستخدم الشرط الحدودي $R(a) = 0$ فنجد :

$$C\sin(ka + D) = 0 \Longrightarrow ka + D = 0 \Longrightarrow D = -ka$$

و منه :

$$R_{n0}(r) = \frac{C\sin\left[k(r-a)\right]}{r}$$

قبل ايجاد الثابت C علينا اولا ايجاد القيم الممكنة للمقدار k من اجل ذلك نستخدم الشرط الحدودي $R(b) = 0$ فنجد :

$$\sin\left[k(b-a)\right] = 0 \Longrightarrow k(b-a) = n\pi \Longrightarrow k = \frac{n\pi}{b-a}$$

اذا :

$$R_{n0}(r) = \frac{1}{r}C\sin\left[\frac{n\pi}{b-a}(r-a)\right]$$

و لايجاد الثابت C نستخدم شرط التقويم $\int_a^b R^2(r)r^2dr = 1$. اذا علينا حساب التكامل $I = \int_a^b R^2(r)r^2dr$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b R^2(r)r^2dr \\
&= \int_a^b C^2\sin^2(n\pi\frac{r-a}{b-a})dr \\
&= C^2\int_a^b \sin^2(n\pi\frac{r-a}{b-a})dr \\
&= C^2\int_a^b \frac{1}{2}\Big[1-\cos 2(n\pi\frac{r-a}{b-a})\Big]dr \\
&= C^2\frac{b-a}{2}
\end{aligned}$$

و منه :

$$C^2\frac{b-a}{2} = 1 \Longrightarrow C = \sqrt{\frac{2}{b-a}}$$

الصيغة النهائية للتابع القطري هي :

$$R_{n0}(r) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin[n\pi\frac{r-a}{b-a}]$$

اما التابع الموجي للجسيمات s فهو :

$$\boxed{\psi_{n00}(r,\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\left(n\pi\frac{r-a}{b-a}\right)}$$

3 – لايجاد قيمة المستوى الطاقوي الاساسي ننطلق من الصيغة التي تحدد المقدار k :

$$k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\Longrightarrow E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

و منه :

$$\boxed{E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m(b-a)^2}n^2}$$

اي ان طاقة المستوى الاساسي $n=1$ هي :

$$\boxed{E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m(b-a)^2}}$$

حل التمرين الثالث

حل التمريـــــن الثـــالث

1 – معادلة شرودينغر في المنطقتين الاولى و الثانية هما :

$$\begin{aligned}
&\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\Big(V_0+E\Big)u(r)=0 &&, \quad r\leq a\\
&\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(r)}{dr^2}+Eu(r)=0 &&, \quad r\geq a
\end{aligned}$$

حلهما على التوالي هو :

$$\begin{aligned}
&u_I(r)=A\sin\alpha r+B\cos\alpha r &&, \quad \alpha=\frac{\sqrt{2m\Big(V_0+E\Big)}}{\hbar}\\
&u_{II}(r)=Ce^{-\beta r} &&, \quad \beta=\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}
\end{aligned}$$

2 – لايجاد العلاقة التي تحدد القيم الممكنة لطاقة الجسيم نطبق الشروط الحدودية و شروط الاستمرار على التوابع الموجية و مشتقاتها الاولى . الشرط الحدودي :

$$u_I(r=0)=0\Longrightarrow B=0$$

اي ان :

$$u_I(r) = A \sin \alpha r$$

شرط الاستمرار عند النقطة $r = a$:

$$u_I(a) = u_{II}(a) \Longrightarrow A \sin \alpha a = Ce^{-\beta a}$$

$$\frac{du_I(r)}{dr} = \frac{du_{II}(r)}{dr} \Longrightarrow \alpha A \cos \alpha a = -\beta Ce^{-\beta a}$$

بقسمة المعادلة الثانية على المعادلة الاولى نحصل على المعادلة التالية :

$$\boxed{\alpha \cot \alpha a = -\beta}$$

و هي المعادلة التي تسمح بتحديد القيم الممكنة لطاقة الجسيم . لا يمكن حل هذه المعادلة تحليليا لذلك فان الحلول الممكنة يتم تحديدها بيانيا فقط .

حل التمريـــــن الـــرابع

1 – لاثبات ان

$$\mathrm{A}^2 = \frac{\beta^3}{\pi}$$

ننطلق من شرط التقويم :

$$\int_V \psi^*(r,\theta,\phi)\psi(r,\theta,\phi)dV = 1$$

لاجل ذلك نقوم بحساب التكامل $I = \int_V \psi^*(r,\theta,\phi)\psi(r,\theta,\phi)dV$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A^* A e^{-2\beta r} r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi |A|^2 \int_0^\infty e^{-2\beta r} r^2 dr \\ &= 4\pi |A|^2 \frac{2}{8\beta^3} \end{aligned}$$

– باختيار الثابت A حقيقي نجد ان

$$A^2 = \frac{\beta^3}{\pi}$$

و منه :

$$\psi(r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \beta e^{-\beta r}$$

2 – لايجاد الثابت β ننطلق من كون التابع $\psi(r,\theta,\phi)$ يمثل حلا لمعادلة شرودينغر :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{\alpha}{r}\right]\psi(r,\theta,\phi) = E_1 \psi(r,\theta,\phi)$$

– لدينا :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

– التابع المعطى يتعلق بالمتغير القطري فقط و عليه فان تاثير الجزء الزاوي من الهاملتونيان سيعطي صفر . و منه :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\alpha}{r}\right]\psi(r,\theta,\phi) = E_1\psi(r,\theta,\phi)$$

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\alpha}{r}\right]\frac{\beta^3}{\pi}e^{-\beta r} = E_1\frac{\beta^3}{\pi}e^{-\beta r}$$

لدينا :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)e^{-\beta r} = \beta r\left(\beta r - 2\right)e^{-\beta r}$$

نعوض في معادلة شرودينغر فنحصل على المعادلة التالية :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2mr^2}\left(\beta^2 r^2 - 2\beta r\right) - \frac{\alpha}{r}\right]e^{-\beta r} = E_1 e^{-\beta r}$$

بحذف التابع الاسي و الضرب في r^2 و اعادة ترتيب الحدود نحصل على المعادلة التالية :

$$\left(\beta^2 + \frac{2mE_1}{\hbar^2}\right)r^2 + \left(\frac{2m\alpha}{\hbar^2} - 2\beta\right)r = 0$$

و هي محققة اذا كانت معاملات كل الحدود معدومة و منه:

$$\frac{2m\alpha}{\hbar^2} - 2\beta = 0 \Longrightarrow \beta = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

و هو المطلوب .

3 – لايجاد قيمة الطاقة (طاقة الحالة الاساسية) ننطلق من نتيجة السؤال السابق حيث وجدنا ان : $\beta^2 + \frac{2mE_1}{\hbar^2} = 0$ و منه :

$$E_1 = -\frac{\hbar^2\beta^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

و هو المطلوب .

4 – اثبات ان : $\langle V\rangle = 2E_1$:

$$\begin{aligned}\langle V\rangle &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \psi^*(r,\theta,\phi)V(r)\psi(r,\theta,\phi)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi\\ &= -\frac{\alpha\beta^3}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi re^{-2\beta r}\sin\theta dr d\theta d\phi\\ &= -4\alpha\beta^3\int_0^\infty re^{-2\beta r}dr\end{aligned}$$

لتقييم التكامل الاخير نستخدم العلاقة التالية :

$$\int_0^{\infty} r^k e^{-ar} = \frac{k!}{a^{k+1}}$$

و منه نجد :

$$\langle V \rangle = -\alpha\beta = -\frac{m\alpha^2}{\hbar^2} = 2E_1$$

و هو المطلوب .

5 – اثبات ان : $\langle T \rangle = -E_1$:

$$\begin{aligned}
\langle T \rangle &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[\psi^*(r,\theta,\phi)T\psi(r,\theta,\phi)\Big]r^2\sin\theta drd\theta d\phi \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[\psi^*(r,\theta,\phi)\frac{p^2}{2m}\psi(r,\theta,\phi)\Big]r^2\sin\theta drd\theta d\phi \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[\psi^*(r,\theta,\phi)\frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(r,\theta,\phi)\Big]r^2\sin\theta drd\theta d\phi \\
&= \frac{-\hbar^2\beta^3}{2m\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[e^{-\beta r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2)\frac{\partial}{\partial r}e^{-\beta r}\Big]r^2\sin\theta drd\theta d\phi \\
&= \frac{-\hbar^2\beta^3}{2m\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[e^{-\beta r}\frac{1}{r^2}\Big[\beta^2r^2-2\beta r\Big]e^{-\beta r}\Big]r^2\sin\theta drd\theta d\phi \\
&= \frac{-\hbar^2\beta^3}{2m\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[\beta^2r^2-2\beta r\Big]e^{-2\beta r}\sin\theta drd\theta d\phi \\
&= \frac{-2\hbar^2\beta^3}{m}\int_0^{\infty}\Big[\beta^2r^2-2\beta r\Big]e^{-2\beta r}dr \\
&= \frac{-2\hbar^2\beta^3}{m}\Big[\frac{1}{4\beta}-\frac{1}{2\beta}\Big] \\
&= -E_1
\end{aligned}$$

و هو المطلوب .

6 – اثبات ان القيمة المتوسطة لبعد الجسيم عن مركز الحقل تعطى ب : $\langle r\rangle = \frac{3}{2}\frac{1}{\beta}$:

$$\begin{aligned}
\langle r\rangle &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Big[\psi_1^*(r,\theta,\phi) r \psi_1(r,\theta,\phi)\Big] r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
&= \frac{\beta^3}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^3 e^{-2\beta r} \sin\theta dr d\theta d\phi \\
&= 4\beta^3 \int_0^\infty r^3 e^{-2\beta r} dr \\
&= \frac{3}{2}\frac{1}{\beta}
\end{aligned}$$

و هو المطلوب .

7 – اثبات ان احتمال تواجد الجسيم يكون اعظميا على مسافة من المركز تعطى ب $r = \frac{1}{\beta}$:

احتمال تواجد الجسيم على مسافة r من مركز الحقل (يسمى ايضا بكثافة احتمال الحضور القطرية) يعرف كمايلي :

$$P(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\psi(r,\theta,\phi)|^2 r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

اذا :

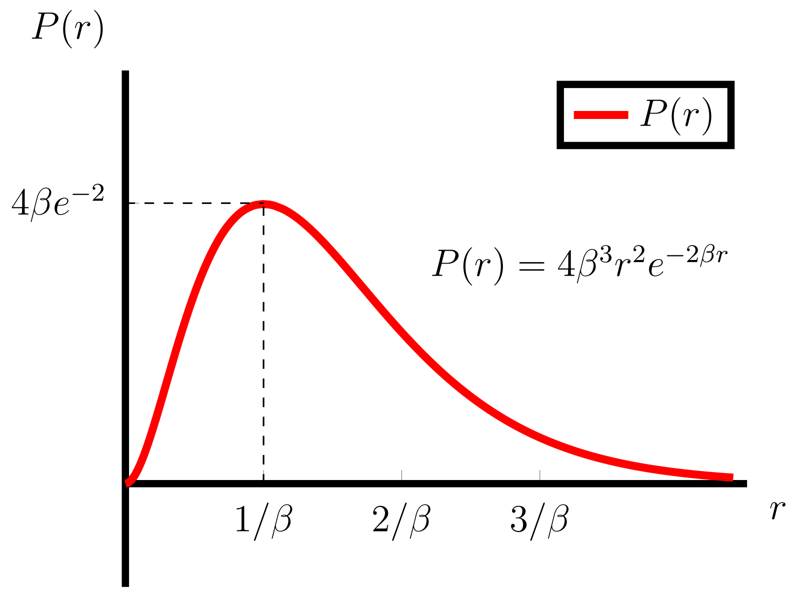
$$\begin{aligned}
P(r) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\beta^3}{\pi} r^2 e^{-2\beta r} \sin\theta d\theta d\phi \\
&= 4\beta^3 r^2 e^{-2\beta r}
\end{aligned}$$

هذا المقدار يكون اعظميا عند النقطة التي ينعدم عندها المشتق الاول :

$$\frac{dP(r)}{dr} = 8\beta^3 r\Big[1 - \beta r\Big] e^{-2\beta r}$$

نلاحظ ان المشتق الاول ينعدم من اجل $r = \frac{1}{\beta}$ و هو المطلوب .

حل التمريـــــن الخــامس



شكل **2.14**: احتمال تواجد الجسيم للحالة الاساسية

1 – ايجاد ثابت التقويم . يمكن كتابة الحالة الفيزيائية للجسيم كمايلي (باستخدام المعطيات) :

$$\psi(r,\theta,\phi) = A\Big[-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_1^1(\theta,\phi) + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0(\theta,\phi)\Big]g(r)$$
$$= A\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\Big[-\sqrt{2}Y_1^1(\theta,\phi) + Y_1^0(\theta,\phi)\Big]g(r)$$

$$I = \int \psi^*(r,\theta,\phi)\psi(r,\theta,\phi)dV$$
$$= \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \psi^*(r,\theta,\phi)\psi(r,\theta,\phi)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$
$$= A^2\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\Big[-\sqrt{2}Y_1^{1*}(\theta,\phi) + Y_1^{0*}(\theta,\phi)\Big]\Big[-\sqrt{2}Y_1^1(\theta,\phi) + Y_1^0(\theta,\phi)\Big]g(r)^2r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$
$$= 4\pi A^2$$

و منه : $A = 1/\sqrt{4\pi}$. التابع الموجي يكتب كمايلي :

$$\psi(r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{3}}g(r)Y_1^0(\theta,\phi) - \sqrt{\frac{2}{3}}g(r)Y_1^1(\theta,\phi)$$

2 – نلاحظ ان التابع الموجي هو تركيب خطي لتابعين ذاتيين للعزم الحركي وهما $g(r)Y_1^0(\theta,\phi)$ و $g(r)Y_1^1(\theta,\phi)$. و عليه فان القيم الممكنة ل l_z هي : 0 و $\hbar$.

3 – احتمال الحصول على القيمة (0) كنتيجة لقياس l_z هو $\frac{1}{3}$ و احتمال الحصول على القيمة ($\hbar$) هو $\frac{2}{3}$.

4 – حساب القيمة المتوسطة ل l_z:

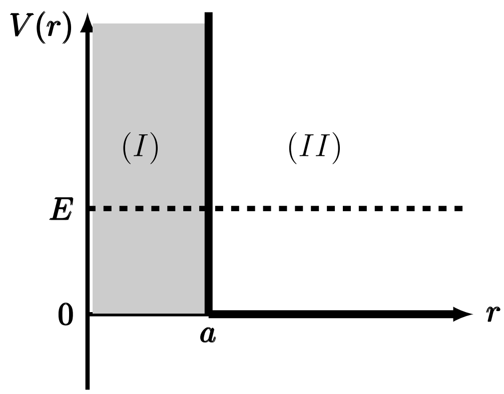
$$
\begin{aligned}
< l_z > &= \int \psi^*(r,\theta,\phi)\Big(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big)\psi(r,\theta,\phi)r^2\sin\theta drd\theta d\phi \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\Big[-\sqrt{2}Y_1^{1*}+Y_1^{0*}\Big]\Big[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]\Big[-\sqrt{2}Y_1^1+Y_1^0\Big]g(r)^2r^2\sin\theta drd\theta d\phi \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\infty g(r)^2r^2dr\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\Big[-\sqrt{2}Y_1^{1*}(\theta,\phi)+Y_1^{0*}(\theta,\phi)\Big]\Big[-\sqrt{2}Y_1^1(\theta,\phi)\Big]\sin\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{2}{3}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\Big[Y_1^{1*}(\theta,\phi)Y_1^1(\theta,\phi)\Big]\sin\theta d\theta d\phi \\
&= 2/3
\end{aligned}
$$

الفصـــــل 15

حلول تمارين الفصل السابع

حل التمريـــــن الاول

1 – في المنطقة الثانية لدينا $(V(r)=0)$ و عليه فان المعادلة التفاضلية القطرية للامواج (s) هي :



شكل 1.15: بئر كمونية منتهية

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+k^2\right]u(r)=0$$

و هي معادلة بيسل من الرتبة صفر . حلها هو :

$$u_{II}(r)=A_0 r j_0(kr)+B_0 r \eta_0(kr)$$

حيث :

$$j_0(kr)=\frac{\sin kr}{kr} \quad , \quad \eta_0(kr)=-\frac{\cos kr}{kr}$$

و منه :

$$u_{II}(r) = A_0\frac{\sin kr}{k} - B_0\frac{\cos kr}{k}$$

2 – التابع الموجي يجب ان يكون مستمرا عند النقطة $(r = r_0)$. هذا التابع معدوم في المنطقة الاولى حيث لا يمكن للجسيم التواجد هناك و عليه :

$$u_{II}(r_0) = 0 \Longrightarrow A_0\frac{\sin kr_0}{k} - B_0\frac{\cos kr_0}{k} = 0$$

و منه :

$$\frac{B_0}{A_0} = \frac{\sin kr_0}{\cos kr_0} = \tan kr_0$$

لدينا $(\tan\delta_0 = -\frac{B_0}{A_0})$ اي ان :

$$\tan\delta_0 = -\tan kr_0 \Longrightarrow \delta_0 = -kr_0$$

3 – المقطع العرضي التفاضلي للامواج (s) هو :

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 = 4\pi r_0^2$$

حل التمريـــــن الثــــاني

1 – المعادلة التفاضلية القطرية للامواج (p) في المنطقة الثانية هي :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right]u(r) = 0$$

و هي معادلة بيسل من الرتبة الاولى .

2 – حل هذه المعادلة هو :

$$u_{II}(r) = A_1 r j_1(kr) + B_1 r \eta_1(kr)$$

حيث : $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ و :

$$j_1(kr) = \frac{\sin kr}{(kr)^2} - \frac{\cos kr}{kr}$$
$$\eta_1(kr) = -\frac{\cos kr}{(kr)^2} - \frac{\sin kr}{kr}$$

و منه :

$$\begin{aligned} u_{II}(r) &= A_1 r\left[\frac{\sin kr}{(kr)^2} - \frac{\cos kr}{kr}\right] - B_1 r\left[\frac{\cos kr}{(kr)^2} + \frac{\sin kr}{kr}\right] \\ &= \frac{A_1}{k}\left[\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr - \frac{B_1}{A_1}\left(\frac{\cos kr}{kr} + \sin kr\right)\right] \end{aligned}$$

و هو من الشكل :

$$u_{II}(r)=C\left[\frac{\sin kr}{kr}-\cos kr+a\left(\frac{\cos kr}{kr}+\sin kr\right)\right]$$

حيث :

$$C=\frac{A_1}{k} \quad , \quad a=-\frac{B_1}{A_1}$$

3 – لدينا بالتعريف ($\tan\delta_1=-\frac{B_1}{A_1}$) و هذا يعني ان :

$$a=\tan\delta_1$$

4 – لايجا الثابت (a) نستخدم شرط استمرار التابع ($u(r)$) عند النقطة ($r=r_0$)

$$u_I(r=r_0)=u_{II}(r=r_0)$$

. بالاخذ بالاعتبار ان التابع ($u(r)$) معدوم في المنطقة الاولى ($u_I(r=r_0)=0$) نحصل على المعادلة التالية :

$$C\left[\frac{\sin kr_0}{kr_0}-\cos kr_0+a\left(\frac{\cos kr_0}{kr_0}+\sin kr_0\right)\right]=0$$

و منه:

$$a=\frac{kr_0\cos kr_0-\sin kr_0}{kr_0\sin kr_0+\cos kr_0}$$

5 – سنثبت ان هذا السلوك للمقطع العرضي هو سمة لكل الامواج ضعيفة الطاقة المتشتتة بواسطة كرة صلدة . الحل خارج مجال التاثير هو :

$$u_l(r)=A_lrj_l(kr)+B_lr\eta_l(kr_0)$$

شرط الاستمرار :

$$u_l(r=r_0)=0\Longrightarrow A_lr_0j_l(kr_0)+B_lr_0\eta_l(kr_0)=0$$
$$\Longrightarrow-\frac{B_l}{A_l}=\frac{j_l(kr_0)}{\eta_l(kr_0)}\Longrightarrow\tan\delta_l=\frac{j_l(kr_0)}{\eta_l(kr_0)}$$

سلوك الانزياح الطوري للامواج ضعيفة الطاقة يحدده سلوك تابعي بيسل و نومان :

$$j_i(kr_0)\underset{k\to0}{\sim}\frac{(kr_0)^l}{(2l+1)!!}$$
$$\eta_l(kr_0)\underset{k\to0}{\sim}\frac{(2l-1)!!}{(kr_0)^{l+1}}$$

و منه :

$$\tan\delta_l\underset{k\to0}{\sim}\frac{(2l+1)(kr_0)^{2l+1}}{\left[(2l+1)!!\right]^2}$$

من اجل الامواج (p) نجد :

$$\tan\delta_1 \underset{k\to 0}{\sim} (kr_0)^3$$

حل التمريـــــن الثـــالث

1 – لايجاد معادلة الانزياح الطوري للامواج (s) نقوم بحل معادلة شرودينغر القطرية في المنطقتين $(r<a)$ و $(r>a)$ ثم نطبق شرط استمرار كل من التابع و مشتقته الاولى . معادلة شرودينغر للامواج (s) يعني ان $(l=0)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}\right]u(r)=0$$

– في المنطقة الاولى $(r<a)$ لدينا $(V(r)=-V_0)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}+\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right]u(r)=0$$

بوضع $k_1=\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$ تاخذ هذه المعادلة الشكل التالي :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+k_1^2\right]u(r)=0$$

و هي معادلة بيسل من الرتبة (0) حلها هو :

$$u_I(r)=A_0rj_0(k_1r)+B_0r\eta_0(k_1r)$$

تابع نومام غير منته عند الصفر لذلك ناخذ $(B_0=0)$ و عليه :

$$u_I(r)=A_0rj_0(k_1r)=A_0\frac{\sin k_1r}{k_1}$$

– في المنطقة الثانية $(r>a)$ لدينا $(V(r)=0)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right]u(r)=0$$

بوضع $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ تاخذ هذه المعادلة الشكل التالي :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+k^2\right]u(r)=0$$

و هي معادلة بيسل من الرتبة (0) حلها هو :

$$u_{II}(r)=C_0rj_0(kr)+D_0r\eta_0(kr)=C_0\frac{\sin kr}{k}-D_0\frac{\cos kr}{k}$$

$$\tan\delta_0 = -B_0/A_0$$

$$u_{II}(r) = \frac{C_0}{k\cos\delta_0}\Big[\cos\delta_0\sin kr + \sin\delta_0\cos kr\Big] = \frac{C_0}{k\cos\delta_0}\sin\Big(kr+\delta_0\Big)$$

شرط استمرار التابع يعطي :

$$A_0\frac{\sin k_1 a}{k_1} = \frac{C_0}{k\cos\delta_0}\sin\Big(ka+\delta_0\Big)$$

شرط استمرار المشتق يعطي :

$$A_0\cos k_1 a = \frac{C_0}{\cos\delta_0}\cos\Big(ka+\delta_0\Big)$$

$$k_1\cot k_1 a = k\cot\Big(ka+\delta_0\Big)$$

– عندما تكون طاقة الجسيمات ضعيفة يمكننا التعبير عن هذا الشرط كما يلي : $(ka \ll 1)$ و منه :

$$\sin\Big(ka+\delta_0\Big) \approx ka+\delta_0$$

$$k_1\cot k_1 a = \frac{k}{ka+\delta_0} \Longrightarrow \delta_0 = ka\Big[\frac{\tan k_1 a}{k_1 a} - 1\Big]$$

المقطع العرضي لاي موجة جزئية (l) يعطى ب

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}\Big(2l+1\Big)\sin^2\delta_l$$

و عليه :

$$\sigma_0 = 4\pi a^2\Big[\frac{\tan k_1 a}{k_1 a} - 1\Big]^2$$

حل التمريـــــن الـــرابع

المعادلة القطرية للامواج (s) هي :

$$\Big[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2mV(r)}{\hbar^2}\Big]u(r) = 0$$

– في المنطقة الاولى $r < a$ لدينا $V(r) = V_0$:

$$\Big[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\Big]u(r) = 0$$

$$k = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

$$\Big[\frac{d^2}{dr^2} - k^2\Big]u(r) = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية تقبل حل من الشكل :

$$u_I(r) = Ae^{kr} + Be^{-kr}$$

هذا التابع ينعدم عند المبدا $u(0) = 0$ و عليه فان $(A = -B)$:

$$u(r) = A\Big[e^{kr} - e^{-kr}\Big] = 2A\sinh kr$$

– في المنطقة الثانية $r > a$ لدينا $V(r) = 0$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2mE}{\hbar^2}\right]u(r) = 0$$

بوضع :

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

المعادلة التفاضلية تاخذ الشكل التالي :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - k_1^2\right]u(r) = 0$$

و هي معادلة بيسل من الرتبة (0) حلها هو :

$$u_{II}(r) = C_0 r j_0(k_1 r) + D_0 r \eta_0(k_1 r) = C_0\frac{\sin(k_1 r)}{k_1} - D_0\frac{\cos(k_1 r)}{k_1}$$

لدينا $\tan\delta_0 = -D_0/C_0$ و منه :

$$u_{II}(r) = \frac{C_0}{k_1\cos\delta_0}\Big[\cos\delta_0\sin(k_1 r) + \sin\delta_0\cos(k_1 r)\Big]$$

و التي يمكن اعادة كتابتها كمايلي :

$$u_{II}(r) = \frac{C_0}{k_1\cos\delta_0}\sin(k_1 r + \delta_0)$$

– التابع الموجي و مشتقه يجب ان يكونا مستمر ين عند النقطة $r = a$ و منه نحصل على المعادلتين التاليتين :

$$2A\sinh ka = \frac{C_0}{k_1\cos\delta_0}\sin(k_1 a + \delta_0)$$
$$2Ak\cosh ka = \frac{C_0}{\cos\delta_0}\cos(k_1 a + \delta_0)$$

– بقسمة المعادلة الثانية على الاولى نجد :

$$k\coth ka = k_1\cot(k_1 a + \delta_0)$$

و هي المعادلة التي تسمح لنا بايجاد الانزياح الطوري δ_0 الحاصل على الامواج (s) نتيجة تشتتها بالكمون . اذا كانت طاقة الجسيمات ضعيفة :

$$\cot(k_1 a + \delta_0) \approx \frac{1}{k_1 a + \delta_0}$$

ومنه :

$$\delta_0 = \frac{k_1}{k} \tanh ka - k_1 a$$

المقطع العرضي للامواج (s) يعطى ب :

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k_1^2} \sin^2 \delta_0$$

و اذا كانت طاقة الجسيمات ضعيفة فانها تصبح :

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k_1^2} \delta_0^2$$

و منه :

$$\sigma_0 = 4\pi a^2 \left[\frac{\tanh ka}{ka} - 1\right]^2$$

الفصـــــل 16

حلول تمارين الفصل الثامن

حل التمريـــــن الاول

1 – حساب التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى الحاصل على المستوى الاساسي :

$$\begin{aligned}
\Delta E_1^{(1)} &= \int_0^a \psi_1^{(0)*}(x) W(x) \psi_1^{(0)}(x) dx \\
&= \frac{2}{a} \int_0^a \sin(\frac{\pi x}{a}) V_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) dx \\
&= \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin^2(\frac{\pi x}{a}) dx \\
&= \frac{V_0}{a} \int_0^a \left[1 - \cos(\frac{2\pi x}{a})\right] dx \\
&= V_0
\end{aligned}$$

2 – حساب التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى الناتج عن الاضطراب بالنسبة لمستوى طاقوي كيفي :

$$\begin{aligned}
\Delta E_n^{(0)} &= \int_0^a \psi_1^{(0)*}(x) W(x) \psi_n^{(0)}(x) dx \\
&= \frac{2}{a} \int_0^a \sin(\frac{n\pi x}{a}) V_0 \sin(\frac{n\pi x}{a}) dx \\
&= \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin^2(\frac{n\pi x}{a}) dx \\
&= \frac{V_0}{a} \int_0^a \left[1 - \cos(\frac{2n\pi x}{a})\right] dx \\
&= V_0
\end{aligned}$$

حل التمريـــــن الثـــــاني

$$\begin{aligned}\Delta E_n^{(1)} &= \int_0^a \psi_1^{(0)*}(x) W(x) \psi_n^{(0)}(x) dx \\ &= \frac{2}{a}\int_0^{a/2} \sin(\frac{n\pi x}{a}) V_0 \sin(\frac{n\pi x}{a}) dx \\ &= \frac{2V_0}{a}\int_0^{a/2} \sin^2(\frac{n\pi x}{a}) dx \\ &= \frac{V_0}{a}\int_0^{a/2} \left[1-\cos(\frac{2n\pi x}{a})\right] dx \\ &= V_0/2\end{aligned}$$

حل التمريـــــن الثـــالث

1 – ايجاد التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى :

– التوابع الذاتية الغير مضطربة التي تصف الحالات الثلاث الاولى و الطاقات المقابلة لها هي :

$$\psi_1^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi}{a}x \qquad E_1^{(0)} = \frac{\pi\hbar^2}{2ma^2}$$

$$\psi_2^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi}{a}x \qquad E_2^{(0)} = \frac{4\pi\hbar^2}{2ma^2}$$

$$\psi_3^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi}{a}x \qquad E_3^{(0)} = \frac{9\pi\hbar^2}{2ma^2}$$

– القيم الطاقوية لجسيم في بئر كموني لانهائي غير منحطة اي انه لا توجد عدة حالات لها نفس القيمة الطاقوية . و عليه فان ايجاد التصحيح الطاقوي الناتج عن الاضطراب يتطلب استخدام طريقة الاضطرابات المستقرة للحالات الغير منحطة .

– التصحيح من الرتبة الاولى على المستوى الطاقوي الاول هو :

$$\Delta E_1^{(1)} = \int_0^a \psi_1^{(0)*}(x) H'(x) \psi_1^{(0)}(x) dx = \frac{2V_0}{a^2}\int_0^a x\sin^2(\frac{\pi}{a}x) dx$$

لاجراء هذا التكامل علينا تخفيض درجة التابع المثلثي و ذلك باستخدام التحويل التالي :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\Big(1-\cos(2x)\Big)$$

و منه :

$$\Delta E_1^{(1)} = \frac{V_0}{a^2}\int_0^a \Big(x - \cos\frac{2\pi}{a}x\Big) dx = V_0/2$$

– التصحيح من الرتبة الاولى على المستوى الطاقوي الثاني هو :

$$\Delta E_2^{(1)} = \int_0^a \psi_2^{(0)*}(x) H'(x) \psi_2^{(0)}(x) dx = \frac{2V_0}{a^2}\int_0^a x\sin^2(\frac{2\pi}{a}x) dx$$

لاجراء هذا التكامل نخفض درجة التابع المثلثي كما فعلنا سابقا و منه :

$$\Delta E_2^{(1)} = V_0/2$$

– بنفس الكيفية نحسب التصحيح الطاقوي على المستوى الثالث و نجد نفس النتيجة :

$$\Delta E_3^{(1)} = \frac{V_0}{a^2}\int_0^a \Big(x - \cos\frac{4\pi}{a}x\Big)dx = V_0/2$$

و منه المستويات الطاقوية الثلاث الاولى تصبح كمايلي :

$$\psi_1^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi}{a}x \qquad E_1 = E_1^{(0)} + \Delta E_1^{(1)} = \frac{\pi\hbar^2}{2ma^2} + V_0/2$$

$$\psi_2^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi}{a}x \qquad E_2 = E_2^{(0)} + \Delta E_2^{(1)} = \frac{4\pi\hbar^2}{2ma^2} + V_0/2$$

$$\psi_3^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi}{a}x \qquad E_3 = E_3^{(0)} + \Delta E_3^{(1)} = \frac{9\pi\hbar^2}{2ma^2} + V_0/2$$

2 – اثبات ان التصحيح الطاقوي هو نفسه بالنسبة لكل المستويات الطاقوية :

$$\begin{aligned}
\Delta E_n^{(1)} &= \int_0^a \psi_n^{(0)*}(x)H'(x)\psi_n(x)dx \\
&= \frac{2V_0}{a^2}\int_0^a x\sin^2\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big)dx \\
&= \frac{V_0}{a^2}\int_0^a \Big[x - x\cos\Big(\frac{2n\pi x}{a}\Big)\Big]dx \\
&= \frac{V_0}{a^2}\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{a}{2n\pi}x\sin\Big(\frac{2n\pi x}{a}\Big) - \Big(\frac{a}{2n\pi}\Big)^2\cos\Big(\frac{2n\pi x}{a}\Big)\Big]\Big|_0^a \\
&= \frac{V_0}{2}
\end{aligned}$$

حل التمريـــــن الـــرابع

التابع الذي يصف الحالة الاساسية هو :

$$\psi_1^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi}{a}x$$

التصحيح الطاقوي على المستوى الاساسي نتيجة الاضطراب هو :

$$\Delta E_1^{(1)} = \int_0^a \psi_1^{(0)*}(x)H'(x)\psi_1^{(0)}(x)dx = \frac{2V_0}{a^3}\int_0^a x^2\sin^2(\frac{\pi x}{a})dx$$

لاجراء هذا التكامل نستخدم التحويل المثلثي التالي :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos(2x)\Big)$$

فنجد :

$$\Delta E_1^{(1)} = \frac{V_0}{a^3}\int_0^a \left[x^2 - x^2\cos\frac{2\pi x}{a}\right]dx$$

بالرمز ب I_1 للحد الاول و ب I_2 للحد الثاني :

$$I_1 = \frac{V_0}{a^3}\int_0^a x^2 dx = \frac{V_0}{3}$$

$$I_2 = -\frac{V_0}{a^3}\int_0^a x^2\cos\frac{2\pi x}{a}dx$$

للقيام بهذا التكامل ندخل متغير جديد : $y = \frac{2\pi x}{a}$ فنجد ان :

$$I_2 = -\frac{V_0}{8\pi^3}\int_0^\pi y^2\cos y dy = -\frac{V_0}{2\pi^2}$$

و منه :

$$\Delta E_1^{(1)} = V_0\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}\Big)$$

حل التمريـــــن الخـــامس

لدينا :

$$\psi_0^{(0)}(x) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha^2x^2/2} \quad , \quad \alpha = \sqrt{mw/\hbar}$$

و منه :

$$\begin{aligned}\Delta E_0^{(1)} &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_0^{(0)*}(x)W(x)\psi_0^{(0)}(x)dx \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\alpha^2x^2}dx \\ &= 0\end{aligned}$$

لان التابع $xe^{-\alpha^2x^2}$ هو تابع فردي .

حل التمريـــــن الســـادس

$$\begin{aligned}\Delta E_0^{(1)} &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_0^{(0)*}(x)W(x)\psi_0^{(0)}(x)dx \\ &= \frac{a\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-\alpha^2x^2}dx \\ &= \frac{2a\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} x^4e^{-\alpha^2x^2}dx\end{aligned}$$

لتقييم هذا التكامل نستخدم النتيجة التالية :

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{(2n)!}{n!2^{2n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$$

فنجد :

$$\begin{aligned}\Delta E_0^{(1)} &= \frac{3}{4}\frac{a}{\alpha^4}\\ &= \frac{3}{4}\frac{a\hbar^2}{mk}\end{aligned}$$

حل التمريـــــن الســـابع

$$\begin{aligned}\Delta E_n^{(1)} &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_0^{(0)*}(x)W(x)\psi_0^{(0)}(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^{(0)*}(x)bx^4\psi_n^{(0)}(x)dx\end{aligned}$$

للاستفادة من خصائص توابع هارميت نقوم بادخال المتغير ξ بحيث :

$$\xi = \sqrt{\frac{mw}{\hbar}}x$$

$$W(\xi) = \frac{b\hbar^2}{m^2w^2}\xi^4$$

$$\Delta E_n^{(1)} = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\frac{b\hbar^2}{m^2w^2}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^4 e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_n(\xi)d\xi$$

للقيام بهذا التكامل لا بد من تحويله الى مجموع تكاملات من الشكل $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi)d\xi$ لان هذا النوع من التكاملات معروف . من اجل ذلك نستخدم علاقة التراجع التالية :

$$2\xi H_n(\xi) = H_{n+1}(\xi) + 2nH_{n-1}(\xi)$$

بضرب الطرفين ب ξ نحصل على :

$$2\xi^2 H_n(\xi) = \xi H_{n+1}(\xi) + 2n\xi H_{n-1}(\xi)$$

نستخدم علاقة التراجع من جديد في الطرف الايمن لهذه المعادلة فنجد :

$$\xi H_{n+1}(\xi) = \frac{1}{2}H_{n+2}(\xi) + (n+1)H_n(\xi)$$

$$2\xi H_{n-1}(\xi) = H_n(\xi) + 2(n-1)H_{n-2}(\xi)$$

و منه :

$$\xi^2 H_n(\xi) = \frac{1}{4}H_{n+2}(\xi) + (n+1/2)H_n(\xi) + n(n-1)H_{n-2}(\xi)$$

بهذا نكون قد حصلنا على عبارة ل $\xi^2 H_n(\xi)$ بدلالة كثيرات حدود هارميت بمعاملات ثابتة . نقوم الان بتربيع طرفي هذه العبارة فنحصل على $\xi^4 H_n^2(\xi)$ بدلالة كثيرات حدود هارميت بمعاملات ثابتة :

$$\begin{aligned}\xi^4 H_n^2(\xi) =& \frac{1}{16}H_{n+2}^2(\xi) + (n+1/2)^2 H_n^2(\xi) + n^2(n-1)^2 H_{n-2}^2(\xi) + \frac{1}{2}(n+1/2)H_n(\xi)H_{n+2}(\xi)\\ &+n(n-1)(2n+1)H_{n-2}(\xi)H_n(\xi) + \frac{1}{2}n(n-1)H_{n-2}(\xi)H_{n+2}(\xi)\end{aligned}$$

و هو ما يسمح لنا عند التعويض في عبارة $\Delta E_n^{(1)}$ بالتعبير عن التكامل بدلالة مجموع تكاملات من الشكل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi)H_m(\xi)d\xi = \begin{cases} 0 & : m \neq n \\ \sqrt{\pi}2^n n! & : m = n \end{cases}$$

نلاحظ ان :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi)H_{n-2}(\xi)dx = 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi)H_{n+2}(\xi)dx = 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_{n+2}(\xi)H_{n-2}(\xi)dx = 0$$

و عليه :

$$\begin{aligned}\Delta E_n^{(1)} &= \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\frac{b\hbar^2}{m^2 w^2}\Bigg[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{16}e^{-\xi^2}H_{n+2}^2(\xi)dx + \int_{-\infty}^{\infty}(n+1/2)^2 e^{-\xi^2}H_n^2(\xi)dx\\ &\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} n^2(n-1)^2 e^{-\xi^2}H_{n-2}^2(\xi)dx\Bigg]\\ &= \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\frac{b\hbar^2}{m^2 w^2}\left[\frac{1}{16}\sqrt{\pi}2^{n+2}(n+2)! + (n+1/2)^2\sqrt{\pi}2^n n! + n^2(n-1)^2\sqrt{\pi}2^{n-2}(n-2)!\right]\\ &= \frac{b\hbar^2}{m^2 w^2}\left[\frac{(n+2)(n+1)}{4} + \frac{(2n+1)^2}{4} + \frac{n(n-1)}{4}\right]\\ &= \frac{3b\hbar^2}{4mk}\Big[2n^2 + 2n + 1\Big]\end{aligned}$$

و هكذا نجد ان :

$$\boxed{\Delta E_n^{(1)} = \frac{3b\hbar^2}{4mk}\Big(2n^2 + 2n + 1\Big)}$$

حل التمريـــــن الثـــامن

حساب التصحيح الطاقوي من الرتبة الثانية الحاصل على المستويات الطاقوية لجسيم يتحرك في بئر كمونية مضطربة بالكمون $H' = V_0$:

$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle|^2}{E_m^0 - E_n^0} = V_0 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_m^{(0)} | \psi_n^{(0)} \rangle|^2}{E_m^0 - E_n^0} = 0$$

حل التمريـــــن التـــاسع

الجواب هو :

$$\Delta E_n^{(2)} = 0$$

حل التمريـــــن العـــاشر

1 – لايجاد عبارة الطاقة ننطلق من معادلة القيم الذاتية للهاملتونيان :

$$H\,\psi(x,y) \;=\; E\,\psi(x,y)$$

حيث :

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \;+\; \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]$$

و منه :

$$\begin{aligned} H\,\psi(x,y) \;&= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \;+\; \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\left[\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{L}\right] \\ &= \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left[n^2 \;+ m^2\right]\left[\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{L}\right] \end{aligned}$$

اي ان :

$$E \;= \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left[n^2 \;+ m^2\right]$$

2 – المستوى الطاقوي الثاني يقابل اقل قيمة ممكنة لاحد العددين الكميين (n, m) و ثاني قيمة للعدد الكمي الاخر . اي من اجل $(n = 1, m = 2$ او $n = 2, m = 1)$, و عليه :

$$E_2 \;= \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left[1^2 \;+ 2^2\right] \;= \frac{5\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

و هذا يعني انه منحط مرتين لانه هناك تابعان لهما نفس القيمة الطاقوية و هما :

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}(x,y) \;&= \frac{2}{L}\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi y}{L} \\ \psi_{2,1}(x,y) \;&= \frac{2}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L} \end{aligned}$$

3 – بما ان المستوى الطاقوي الثاني منحط مرتين فان ايجاد التصحيحات الطاقوية على هذا المستوى نتيجة الاضطراب المسلط على النظام الفيزيائي يتطلب ايجاد مصفوفة الاضطراب و من ثم ايجاد قيمها الذاتية و التي تمثل التصحيحات المطلوبة :

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$$

حيث :

$$\begin{aligned} w_{11} = \langle\psi_{12}|H'|\psi_{12}\rangle &= \int_0^L\int_0^L \frac{4}{L^2}\alpha x^2 \sin^2\frac{\pi x}{L}\sin^2\frac{2\pi y}{L}dxdy \\ w_{12} = \langle\psi_{12}|H'|\psi_{21}\rangle &= \int_0^L\int_0^L \frac{4}{L^2}\alpha x^2 \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}\sin\frac{2\pi y}{L}dxdy \\ w_{21} = \langle\psi_{21}|H'|\psi_{12}\rangle &= \int_0^L\int_0^L \frac{4}{L^2}\alpha x^2 \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}\sin\frac{2\pi y}{L}dxdy \\ w_{11} = \langle\psi_{21}|H'|\psi_{21}\rangle &= \int_0^L\int_0^L \frac{4}{L^2}\alpha x^2 \sin^2\frac{2\pi x}{L}\sin^2\frac{\pi y}{L}dxdy \end{aligned}$$

– تقييم التكاملات الخاصة بالعنصرين w_{21} و w_{12} يتطلب استخدام العلاقة المثلثية $\sin^2 x = 1/2(1-\cos 2x)$ و التكامل بالتجزئة :

$$w_{12} = w_{12} = \frac{\alpha L^2}{3}$$

العنصرين w_{22} و w_{11} متساويان و هما معدومين , لان:

$$\int_0^L \sin\frac{\pi y}{L}\sin 2\frac{\pi y}{L}dy = \int_0^L 2\sin^2\frac{\pi y}{L}\cos\frac{\pi y}{L}dy = 2/3\sin^3\frac{\pi y}{L}\bigg|_0^L = 0$$

و عليه فان مصفوفة الاضطراب هي :

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\alpha L^2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha L^2}{3} \end{pmatrix}$$

و هي مصفوفة قطرية عنصراها متساويان و عليه فان التصحيحات الطاقوية هي $\Delta E - 2^{(1)} = \frac{\alpha L^2}{3}$. و هذا يعني ان الاضطراب ادى الى زيادة قيمة طاقة المستوى الطاقوي فقط و لم يؤدي الى رفع (ازالة) الانحطاط .

حل التمرين الحادي عشر

المقصود بالحالة المحرضة الاولى هو الحالة التي تكون فيها طاقة الذرة مساوية ل (E_2) . هذا المستوى الطاقوي منحط $(2^2 = 4)$ مرة (في حالة اهمال السبين) اي انه هناك اربع حالات مختلفة للذرة بطاقة قدرها (E_2) و هذه التوابع هي :

$$\Big\{|200\rangle, |21-1\rangle, |210\rangle, |211\rangle\Big\}$$

لذلك فان ايجاد التصحيح الطاقوي الناتج عن الاضطراب يتطلب استخدام نظرية الاضطرابات المستقرة للحالات المنحطة .
و عليه سنقوم بايجاد مصفوفة الاضطراب اولا , و هي مصفوفة (4×4) , بعد ذلك نقوم بايجاد قيمها الذاتية التي تشكل

التصحيحات :

$$W = \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,4} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{4,1} & a_{m,2} & \cdots & w_{4,4} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

حيث :

$$w_{1,1} = \langle 200|H'|200\rangle\ ,\ w_{1,2} = \langle 200|H'|21-1\rangle\ ,\ w_{1,3} = \langle 200|H'|210\rangle\ ,\ w_{1,4} = \langle 200|H'|211\rangle$$
$$w_{2,1} = \langle 21-1|H'|200\rangle\ ,\ w_{2,2} = \langle 21-1|H'|21-1\rangle\ ,\ w_{2,3} = \langle 21-1|H'|210\rangle$$
$$w_{2,4} = \langle 21-1|H'|211\rangle$$
$$w_{3,1} = \langle 210|H'|200\rangle\ ,\ w_{3,2} = \langle 210|H'|21-1\rangle\ ,\ w_{3,3} = \langle 210|H'|210\rangle\ ,\ w_{3,4} = \langle 210|H'|211\rangle$$
$$w_{4,1} = \langle 211|H'|200\rangle\ ,\ w_{4,2} = \langle 211|H'|21-1\rangle\ ,\ w_{4,3} = \langle 211|H'|210\rangle\ ,\ w_{4,4} = \langle 211|H'|211\rangle$$

لتقييم هذه العناصر نكتب الاضطراب بدلالة مؤثري الزيادة و النقصان :

$$H' = \frac{eB}{mc}L_x = \frac{eB}{2mc}\Big(L_+ + L_-\Big)$$

و بالاخذ بالحسبان ان :

$$L_+|nlm\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\hbar\Big|n, l, m+1\Big\rangle$$
$$L_-|nlm\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\hbar\Big|n, l, m-1\Big\rangle$$

نجد :

$$W = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{eB}{mc}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

القيم الذاتية لهذه المصفوفة هي :

$$\lambda_{1,2} = 0 \qquad , \qquad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2}$$

حل التمرين الثاني عشر

1 – الحد الاساسي للهاملتونيان يمتلك قيمتين ذاتيتين غير منحطيتن هما $E_1 = E_0 + \varepsilon$ و $E_2 = E_0 - \varepsilon$ المقابلتين للحالتين $|\phi_1\rangle$ و $|\phi_2\rangle$ على التوالي . و عليه فان التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى على المستوى الطاقوي الاول هو :

$$\Delta E_1^{(1)} = \langle\phi_1|H'|\phi_1\rangle = H'_{11} = 0$$

و التصحيح الطاقوي من الرتبة الاولى على المستوى الطاقوي الثاني هو :

$$\Delta E_2^{(1)} = \langle \phi_2 | H' | \phi_2 \rangle = H'_{22} = 0$$

2 – التصحيح الطاقوي من الرتبة الثانية على المستوى الطاقوي الاول هو :

$$\Delta E_1^{(2)} = \sum_{m \neq 1} \frac{|\langle \phi_1 | H' | \phi_m \rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_m^{(0)}} = \frac{|\langle \phi_1 | H' | \phi_2 \rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} = \frac{|H'_{12}|^2}{2\varepsilon} = \frac{A^2}{2\varepsilon}$$

التصحيح الطاقوي من الرتبة الثانية على المستوى الطاقوي الثاني هو :

$$\Delta E_2^{(2)} = \sum_{m \neq 2} \frac{|\langle \phi_2 | H' | \phi_m \rangle|^2}{E_2^{(0)} - E_m^{(0)}} = \frac{|\langle \phi_2 | H' | \phi_1 \rangle|^2}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} = \frac{|H'_{21}|^2}{-2\varepsilon} = -\frac{A^2}{2\varepsilon}$$

3 – التصحيح من الرتبة الاولى على التابع الذاتي الاول هو :

$$\begin{aligned}
|\phi_1^{(1)}\rangle &= \sum_{m \neq 1} \frac{\langle \phi_m^{(0)} | H' | \phi_1^{(0)} \rangle}{E_1^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m^{(0)}\rangle \\
&= \frac{\langle \phi_2^{(0)} | H' | \phi_1^{(0)} \rangle}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} |\phi_2^{(0)}\rangle \\
&= \frac{\langle \phi_2 | H' | \phi_1 \rangle}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} |\phi_2\rangle \\
&= \frac{A}{2\varepsilon} |\phi_2\rangle
\end{aligned}$$

اذا التابع الموجي للحالة الاولى مصححا حتى الرتبة الاولى هو :

$$|\psi_1\rangle = |\phi_1\rangle + \frac{A}{2\varepsilon} |\phi_2\rangle$$

التصحيح من الرتبة الاولى على التابع الذاتي الثاني هو :

$$\begin{aligned}
|\phi_2^{(1)}\rangle &= \sum_{m \neq 2} \frac{\langle \phi_m^{(0)} | H' | \phi_2^{(0)} \rangle}{E_2^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m^{(0)}\rangle \\
&= \frac{\langle \phi_1^{(0)} | H' | \phi_2^{(0)} \rangle}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} |\phi_1^{(0)}\rangle \\
&= \frac{\langle \phi_2 | H' | \phi_1 \rangle}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} |\phi_1\rangle \\
&= -\frac{A}{2\varepsilon} |\phi_1\rangle
\end{aligned}$$

اذا التابع الموجي للحالة الثانية مصححا حتى الرتبة الاولى هو :

$$|\psi_2\rangle = |\phi_2\rangle - \frac{A}{2\varepsilon} |\phi_1\rangle$$

حل التمرين الثالث عشر

الحد الاساسي للهاملتونيان له قيمة ذاتية هي E_0 و هي منحطة مرتين (الحالتان $\langle\alpha|$ و $\langle\beta|$ لهما نفس قيمة الطاقة) و عليه فان التصحيحات من الرتبة الاولى على هذا المستوى هي القيم الذاتية (λ) لمصفوفة الاضطراب اي المصفوفة الممثلة ل H' . القيم الذاتية تتحدد بالمعادلة التالية :

$$det(H' - \lambda \cdot I_{2\times2}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -A \\ -A & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

و منه :

$$\lambda^2 - A^2 = 0$$

اذا لدينا حلين هما : $A = \lambda_1$ و $-A = \lambda_2$ اي ان :

$$\Delta E^{(1)} = \pm A$$

و هذا يعني ان الجملة تمتلك مستويين طاقويين هما (الى غاية التصحيح من الرتبة الاولى) : $E_1 = E_0 - A$ و $E_2 = E_0 + A$. في هذه الحالة نقول ان الانحطاط رفع تماما .

1.16 الطريقة التغايرية

حل التمرين الاول

نحدد اولا ثابت التقويم انطلاقا من شرط التقويم و الذي هو :

$$A^2 \int_0^\infty x^2 e^{-2\beta x} = 1$$

التكامل يمكن انجازه باستخدام القاعدة التالية :

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2n)!}{n! 2^{2n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}} \quad , \quad \alpha > 0 \text{ من اجل}$$

ومنه نجد :

$$A = 2\beta\sqrt{\beta}$$

و بالتالي :

$$\phi(x) = 2\beta\sqrt{\beta} x e^{-\beta x}$$

من اجل حساب $\langle\phi|H|\phi\rangle$ نقوم اولا بحساب $H|\phi\rangle$. لدينا :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \alpha x$$

و منه :

$$H\phi(x) = \left(2\beta\varepsilon - \beta^2\varepsilon x + \alpha x^2\right)Ae^{-\beta x}$$

حيث $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}$. نقوم الان بحساب $\langle\phi|H|\phi\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\phi|H|\phi\rangle &= \int_0^\infty A^2 x\left(2\beta\varepsilon - \beta^2\varepsilon x + \alpha x^2\right)e^{-2\beta x} \\ &= A^2\left[2\beta\varepsilon\int_0^\infty xe^{-2\beta x}dx - \beta^2\varepsilon\int_0^\infty x^2e^{-2\beta x}dx + \alpha\int_0^\infty x^3e^{-2\beta x}dx\right]\end{aligned}$$

– لدينا :

$$\int_0^\infty xe^{-2\beta x}dx = \frac{1}{4\beta^2}$$
$$\int_0^\infty x^2e^{-2\beta x}dx = \frac{1}{4\beta^3}$$
$$\int_0^\infty x^3e^{-2\beta x}dx = \frac{3}{8\beta^3}$$

بالتعويض عن التكاملات و الاخذ بالاعتبار قيمة ثابت التقويم نجد :

$$\langle\phi|H|\phi\rangle = \varepsilon\beta^2 + \frac{3\alpha}{2\beta}$$

حسب النظرية التغايرية فان :

$$E_0 \leq \langle E\rangle = \varepsilon\beta^2 + \frac{3\alpha}{2\beta}$$

الوسيط التغايري β يسمح لنا بجعل الحصر افضل ما يمكن و ذلك بجعل المقدار $\varepsilon\beta^2 + \frac{3\alpha}{2\beta}$ اصغر ما يمكن . من اجل ذلك نشتق هذا المقدار بالنسبة ل β ثم نبحث عن قيمة β التي ينعدم عندها المشتق (β_{min}) ثم نعوض بها في عبارة $\langle E\rangle$ لنجد اصغر قيمة لهذا المقدار و الذي يمثل اكبر قيمة ممكنة للمستوى الاساسي . بعد الحساب نجد ان :

$$\beta_{min} = \left(\frac{3\alpha}{4\varepsilon}\right)^{1/3}$$

و

$$\langle E\rangle_{min} = 2,476\alpha^{2/3}\varepsilon^{1/3}$$

و هذا يعني ان :

$$E_0 \leq 2,476\alpha^{2/3}\varepsilon^{1/3}$$

حل التمريـــــن الثـــــاني

كما في التمرين السابق :

$$A = 2\beta\sqrt{\beta}$$

و

$$H\phi(x) = \left(2\beta\varepsilon - \beta^2\varepsilon x + \alpha x^{n+1}\right)Ae^{-\beta x}$$

و منه :

$$\begin{aligned}\langle\phi|H|\phi\rangle &= \int_0^\infty A^2 x\left(2\beta\varepsilon - \beta^2\varepsilon x + \alpha x^{n+1}\right)e^{-2\beta x} \\ &= A^2\left[2\beta\varepsilon\int_0^\infty xe^{-2\beta x}dx - \beta^2\varepsilon\int_0^\infty x^2e^{-2\beta x}dx + \alpha\int_0^\infty x^{n+2}e^{-2\beta x}dx\right]\end{aligned}$$

– لدينا :

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad , \quad (a>0; n>-1)$$

و عليه :

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty xe^{-2\beta x}dx = \frac{1}{4\beta^2} \\ &\int_0^\infty x^2e^{-2\beta x}dx = \frac{1}{4\beta^3} \\ &\int_0^\infty x^{n+2}e^{-2\beta x} = \frac{\Gamma(n+3)}{(2\beta)^{n+3}} = \frac{(n+2)!}{2^{n+3}\beta^{n+3}} \quad , \quad (a>0; n>-1)\end{aligned}$$

بالتعويض نجد :

$$\langle H\rangle = \beta^2\varepsilon + \frac{\alpha(n+2)!}{2^{n+1}\beta^n}$$

اي ان :

$$E_0 \le \beta^2\varepsilon + \frac{\alpha(n+2)!}{2^{n+1}\beta^n}$$

لجعل الحصر افضل ما يمكن نبحث عن اقل قيمة ل $\langle H\rangle$ بدلالة β :

$$\frac{d\langle H\rangle}{d\beta} = 2\beta\varepsilon - \frac{\alpha n(n+2)!}{2^{n+1}}\frac{1}{\beta^{n+1}}$$

و منه :

$$\frac{d\langle H\rangle}{d\beta} = 0 \Longrightarrow \beta_0 = \left[\frac{n\alpha(n+2)!}{2^{n+2}\varepsilon}\right]^{1/(n+2)}$$

و عليه :

$$\langle H\rangle_{min} = \frac{1}{4}\varepsilon^{n/(n+2)}\left(1+2/n\right)\left[n\alpha(n+2)!\right]^{2/(n+2)}$$

اذا :

$$E_0 \le \frac{1}{4}\varepsilon^{n/(n+2)}\left(1+2/n\right)\left[n\alpha(n+2)!\right]^{2/(n+2)}$$

حل التمريـــــــن الثـــالث

انطلاقا من شرط التقويم :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(x)\phi(x)dx=1$$

نجد ان :

$$A^2=\frac{15}{16}\frac{1}{\lambda^5}$$

و منه :

$$\phi(x)=\sqrt{\frac{15}{16}}\frac{1}{\lambda^2\sqrt{\lambda}}\Big(\lambda^2-x^2\Big)$$

لحساب $\langle H\rangle$ نحسب اولا $H\phi(x)$:

$$\begin{aligned}H\phi(x)&=\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{k}{2}x^2\Big)A\Big(\lambda^2-x^2\Big)\\&=2A\varepsilon+\frac{k}{2}Ax^2\Big(\lambda^2-x^2\Big)\end{aligned}$$

حيث $\varepsilon=\frac{\hbar^2}{2m}$ و منه :

$$\begin{aligned}\langle H\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}\phi^*(x)H\phi(x)dx\\&=\int_{-\lambda}^{\lambda}\Big[A\Big(\lambda^2-x^2\Big)\Big]\Big[2A\frac{\hbar^2}{2m}+\frac{k}{2}Ax^2\Big(\lambda^2-x^2\Big)\Big]dx\\&=A^2\Big[\frac{8}{3}\varepsilon\lambda^3+\frac{8}{105}k\lambda^7\Big]\\&=\frac{5}{2}\frac{\varepsilon}{\lambda^2}+\frac{1}{14}k\lambda^2\end{aligned}$$

و هذا يعني ان :

$$E_0\leq\frac{5}{2}\frac{\varepsilon}{\lambda^2}+\frac{1}{14}k\lambda^2$$

يمكن تضييق مجال الحصر و ذلك بجعل $\langle H\rangle$ اصغر ما يمكن بالنسبة للوسيط التغايري λ :

$$\frac{d\langle H\rangle}{d\lambda}=\frac{2k}{7}\lambda-\frac{5\varepsilon}{\lambda^3}$$

هذا المشتق ينعدم عند $\lambda_0=\left(\frac{35\varepsilon}{k}\right)^{1/4}$ و منه :

$$\langle H\rangle_{min}=\sqrt{\frac{5k\varepsilon}{7}}$$

لدينا $k=mw^2$ بالتعويض نجد :

$$\langle H\rangle_{min}=\sqrt{\frac{5}{14}}\hbar w=0.597\hbar w$$

اي ان :

$$E_0\leq0.597\hbar w$$

مع العلم ان القيمة المضبوطة هي :

$$E_0 = 0,5\hbar w$$

حل التمرين الرابع

اولا نجد ثابت التقويم :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x)\phi(x)dx \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2bx} dx \\ &= A^2 \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \end{aligned}$$

و منه :

$$A = \Big(\frac{2b}{\pi}\Big)^{1/4}$$

و :

$$\phi(x) = \Big(\frac{2b}{\pi}\Big)^{1/4} e^{-bx}$$

الان نقوم بحساب $H\phi(x)$:

$$H\phi(x) = A\Big[2b\varepsilon + \Big(k/2 - 4\varepsilon b^2\Big)x^2\Big]e^{-bx^2}$$

و منه :

$$\phi^*(x)H\phi(x) = A^2\Big[2b\varepsilon + \Big(k/2 - 4\varepsilon b^2\Big)x^2\Big]e^{-2bx^2}$$

القيمة المتوسطة للهاملتونيان اذا هي :

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x)H\phi(x)dx \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Big[2b\varepsilon + \Big(k/2 - 4\varepsilon b^2\Big)x^2\Big]e^{-2bx^2}dx \\ &= b\varepsilon + \frac{mw^2}{8b} \end{aligned}$$

اذا :

$$E_0 \leq b\varepsilon + \frac{mw^2}{8b}$$

مهما كانت قيمة الوسيط التغايري b . افضل حصر يكون من اجل اصغر قيمة ل $\langle H \rangle$:

$$\frac{d}{db}\langle H \rangle = \varepsilon - \frac{mw^2}{8b^2} = 0 \Longrightarrow b_0 = \frac{mw}{2\hbar}$$

بالتعويض في $\langle H\rangle$ نجد :

$$\langle H\rangle_{min}=\frac{1}{2}\hbar w$$

اي ان :

$$E_0\leq\frac{1}{2}\hbar w$$

و هو افضل حصر .

حل التمريـــــن الخـــامس

باستخدام شرط التقويم نجد ان :

$$A=b\sqrt{\frac{\pi b}{2}}$$

لحساب $\langle H\rangle$ نحسب اولا $\phi(x)H\phi(x)$. لدينا :

$$\begin{aligned}H\phi(x)&=\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}kx^2\Big]\Big[\frac{A}{x^2+b^2}\Big]\\&=2\varepsilon A\frac{b^2-3x^2}{(x^2+b^2)^3}+\frac{k}{2}A\frac{x^2}{x^2+b^2}\end{aligned}$$

حيث $\varepsilon=\frac{\hbar^2}{2m}$. و منه :

$$\phi(x)H\phi(x)=2\varepsilon A^2\frac{b^2-3x^2}{(x^2+b^2)^4}+\frac{k}{2}A^2\frac{x^2}{(x^2+b^2)^2}$$

و عليه :

$$\begin{aligned}\langle H\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)H\phi(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[2\varepsilon A^2\frac{b^2-3x^2}{(x^2+b^2)^4}+\frac{k}{2}A^2\frac{x^2}{(x^2+b^2)^2}\Big]dx\\&=2\varepsilon A^2\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{4b^2}{(x^2+b^2)^4}-\frac{3(b^2+x^2)}{(x^2+b^2)^4}\Big]dx+\frac{k}{2}A^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+b^2)^2}dx\\&=8\varepsilon A^2b^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+b^2)^4}-6\varepsilon A^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+b^2)^3}+\frac{k}{2}A^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+b^2)^2}\end{aligned}$$

لدينا :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+b^2)^4}&=2\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+b^2)^4}=2\frac{5\pi}{32b^7}\\\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+b^2)^3}&=2\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+b^2)^3}=2\frac{3\pi}{16b^5}\\\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+b^2)^2}&=2\int_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+b^2)^2}=2\frac{\pi}{4b}\end{aligned}$$

هذه التكاملات تم تقييمها باستخدام القاعدة التالية :

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{(x^2+b^2)^p}dx = \frac{1}{2b^{2p-n-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2p-n-1}{2}\right)}{\Gamma(p)}$$

بالتعويض و الاخذ بالحسبان ان $k = mw^2$ نجد :

$$\boxed{\langle H\rangle = \frac{\hbar^2}{4mb^2} + \frac{1}{2}mw^2b^2}$$

اصغر قيمة ل $\langle H\rangle$ بدلالة b تكون من اجل $b = \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{2}mw}}$ و هي :

$$\boxed{\langle H\rangle_{min} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar w}$$

اي ان :

$$E_0 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar w$$

الملحق 1
جدول التكاملات الشهيرة

$$(1)-\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$(2)-\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^n}=\frac{1}{2a^2\left(n-1\right)}\left[\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}+(2n-3)\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}\right]$$

$$(3)-\int \frac{x^2dx}{a^2+x^2}=x-a^2\int \frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$(4)-\int \sqrt{a+bx}dx=\frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$(5)-\int \sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]$$

$$(6)-\int \sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]$$

$$(7)-\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{|a|}\right)\right]$$

$$(8)-\int \sin^2(ax)dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\sin(2ax)$$

$$(9)-\int \cos^2(ax)dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4a}\sin(2ax)$$

$$(10) - \int \sin(mx)\sin(nx)dx = \frac{\sin[(m-n)x]}{2(m-n)} + \frac{\sin[(m+n)x]}{2(m+n)} \quad \left(m^2 \neq n^2\right)$$

$$(11) - \int \cos(mx)\cos(nx)dx = \frac{\sin[(m-n)x]}{2(m-n)} + \frac{\sin[(m+n)x]}{2(m+n)} \quad \left(m^2 \neq n^2\right)$$

$$(12) - \int \sin(mx)\cos(nx)dx = -\frac{\cos[(m-n)x]}{2(m-n)} - \frac{\cos[(m-n)x]}{2(m+n)} \quad \left(m^2 \neq n^2\right)$$

$$(13) - \int \sin(ax)\cos(ax)dx = \frac{1}{2a}\sin^2(ax)$$

$$(14) - \int \sin(ax)\cos^m(ax)dx = \frac{\cos^{m+1}(ax)}{(m+1)a}$$

$$(15) - \int \sin^m(ax)\cos(ax)dx = \frac{\sin^{m+1}(ax)}{(m+1)a}$$

$$(16) - \int x\sin(ax)dx = \frac{1}{a^2}\sin(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax)$$

$$(17) - \int x\cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\sin(ax)$$

$$(18) - \int x^2\sin(ax)dx = \frac{2x}{a^2}\sin(ax) - \frac{a^2x^2-2}{a^3}\cos(ax)$$

$$(19) - \int x^2\cos(ax)dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin(ax)$$

$$(20) - \int xe^{ax}dx = (ax-1)\frac{e^{ax}}{a^2}$$

$$(21) - \int_0^\infty xe^{-ax}dx = \frac{1}{a^2}$$

$$(22) - \int_0^\infty x^2e^{-ax}dx = \frac{2}{a^3}$$

$$(23) - \int_0^\infty x^3e^{-ax}dx = \frac{6}{a^4}$$

$$(24) - \int_0^\infty x^ne^{-ax}dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} \qquad (a > 0\ ;\ n > -1)$$

$$(25) - \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}$$

$$(26) - \int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$(27) - \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}}$$

$$(28) - \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$(29) - \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}}$$

$$(30) - \int_0^\infty x^5 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{a^3}$$

$$(31) - \int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \ \cdot 5 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$(32) - \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \qquad (a > 0)$$

$$(33) - \int_0^\infty \frac{x^n}{(x^2+b^2)^p} dx = \frac{1}{2b^{2p-n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2p-n-1}{2}\right)}{\Gamma(p)}$$

الملحق 2
جدول الثوابت الفيزيائيـــة

الاســـم	الرمـــز	القيـــمة	الوحـــدة
سرعة الضوء	c	2.9979×10^{8}	$m\ s^{-1}$
ثابت بلانك	h	6.6261×10^{-34}	$J\ s = kg\ m^{2}\ s^{-1}$
ثابت بلانك	$\hbar$	1.0546×10^{-34}	$J\ s = kg\ m^{2}\ s^{-1}$
ثابت الجذب العام	G	6.6742×10^{-11}	$m^{3}\ kg^{-1}\ s^{-1}$
الشحنة العنصرية	e	1.6022	C
كتلة الالكترون	m_e	9.1094×10^{-31}	kg
كتلة البروتون	m_p	1.6726×10^{-27}	kg
كتلة النيوترون	m_n	1.6749×10^{-27}	kg
وحدة الكتل الذرية	AMU	1.6605×10^{-27}	G
نصف قطر بور	a_0	5.2918×10^{-11}	m
ثابت ريدبارغ	R_∞	1.0974×10^{7}	m^{-1}
عدد افوقادرو	N_A	6.0221×10^{23}	mol^{-1}
ثابت بولتزمان	k	1.3807×10^{-23}	$J\ K^{-1}$
ثابت واين	b	2.898×10^{-3}	$m\ K$
ثابت ستيفان – بولتزمان	σ	5.67×10^{-8}	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$
النفاذية المغناطيسية	μ_0	4π	$kg\ m\ C^{-2}$
السماحية الكهربائية	ϵ	8.8542×10^{-12}	$C^{2}\ s^{2}\ kg^{-1}\ m^{-3}$

الملحق 3

علاقــات مثلثيـــــة

(1) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

(2) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

(3) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$

(4) $\sin\beta\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$

(5) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

(6) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

(7) $\cos n\pi = (-1)^n$

(8) $\sin n\pi = 0$

(9) $\sin(2n+1)\pi/2 = (-1)^n \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, ...$

(10) $\cos(2n+1)\pi/2 = 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, ...$

الملحق 4
الدالـــة غـــامــــــا

التعريف

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad , \quad z = x + iy \quad , \quad x > 0$$

علاقة التراجع

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

قيم خاصة

$$\Gamma(n+1) = n! \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, ...$$
$$\Gamma(1) = 1 \quad , \quad \Gamma(2) = 1 \quad , \quad \Gamma(3) = 2 \quad , \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(m + \frac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi} \quad , \quad m = 0, 1, 2, 3, 4, ...$$
$$\Gamma(-m + \frac{1}{2}) = \frac{(-1)^m 2^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}\sqrt{\pi} \quad , \quad m = 0, 1, 2, 3, 4, ...$$

المراجع

[1] **2008 , Publishers Bartlett and Jones ,** ***Mechanics Quantum*** **, C.Reed Bruce.**

[2] **Leonard I. Schiff ,** ***Quantum Mechanics*** **, 3rd Edition , McGRAW-HILL.**

[3] **R Shankar ,** ***Principle of Quantum Mechanics*** **,2nd Edition, PLENUM PRESS.**

[4] **R H.Dicke and J P.Wittke ,*****Introduction to Quantum Mechanics*** **2nd Edition Addison-Wesley .**

[5] **David J. Griffiths ,** ***Introduction to Quantum Mechanics*** **,2nd Edition ,Pearson , 2005 .**

[6] **R Liboff ,** ***Introdictory Quantum Quantum*** **, 3rd Edition , McGRAW-HILL .**

[7] **J J.Sakurai ,** ***Modern Quantum Mechanics*** **,Addiso -Wesley,1994 .**

[8] **David Bohm ,** ***Quantum Theory*** **, Dover Publications,1989 .**

[9] **Nouredine Zettili ,** ***Quantum Mechanics*** **, 2nd Edition ,Wiley .**

[10] **J L.Powell and C .Bernd ,** ***Quantum Mechanics*** **, Addison-Wesley , 1961.**

[11] **K F. Riley, M P. Hobson and S J. Bence ,** ***Mathematical Methods for Physics and Engineering*** **, 3rd Edition , Cambridge University Press .**