

Ministère de l'Enseignement Supérieure
et de la Recherche Scientifique
Ecole normale supérieure
d'Enseignement technologique

- Azzaba - Skikda

Département des Mathématiques



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا لأساتذة
التعليم التكنولوجي

- عزابة - سكيكدة

- قسم الرياضيات -

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ تعليم ثانوي

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme : professeur d'enseignement secondaire

الموضوع
Thème

دراسة برمجية وتطبيقية باستعمال لغة FreeFem++

تحت إشراف الأستاذ:

- قواسمية محمد

من إعداد الطلبة:

- قوينة عائشة

- بوعزيز مروة

نوقشت من طرف اللجنة:

- الأستاذ سلامي سمير.....رئيسا

- الأستاذ دردار نجم الدين.....مناقشا

- الأستاذ مزياني سيف الدين.....مناقشا

- أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة - عزابة -

- أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة - عزابة -

- أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة - عزابة -

السنة الجامعية: 2024/2023

دفعة 2024

2024 Promotion

❖ شكر وتقدير

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد نبيه ورسوله
الأمين وعلى سائر الأنبياء والمرسلين.

نحمد الله تعالى على توفيقه لنا في إتمام هذه المذكرة و عملا بقوله صلى
الله عليه وسلم:

﴿ مَنْ لَمْ يَشْكُرِ النَّاسَ لَمْ يَشْكُرِ اللَّهَ ﴾

رواه " أحمد والترمذي " .

نتقدم بالشكر الجزيل وخالص الامتنان للأستاذ "قواسمية محمد" الذي
قام بتوجيهنا طيلة فترة العمل ولم يبخل علينا بنصائحه وإرشاداته.
كما نشرف بقبول أعضاء اللجنة مناقشة هذه المذكرة ونشكرهم على
ذلك.

كذلك نشكر كل من ساهم سواء من قريب أو من بعيد وأشعل لنا
شمعة للتقدم في دربنا.

﴿ربي أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي

وأن أعمل صالحا ترضاه وأدخلني برحمتك

في عبادك الصالحين﴾

❖ إهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات
عاما بعد عام كنت أتطلع بيريح الأمل إلى هذا اليوم وها أنا أقف
وقفة تأمل كيف مضت تلك الأعوام بسرعة وتحقق ما كان
بالأمس حلما، أهدي تخرجي الذي وفقت إليه بفضل من الله
سبحانه وتعالى لنفسي ثم لكل من سعى معي لاتمام هذه المسيرة
إلى الرجل العظيم والدرع الحصين من كان لي العون والسند ومفتاح
السعادة في حياتي أبي .
إلى أغلى ما أملك إلى من مهدت لي سبل حياتي بدعائها أُمي .
حفظكم الله لنا و أدامكم عمرا
إلى كواكبي المشرقة وقرّة عيني وإخوتي وأخواتي أسماء، عبدالمالك ،
سكينة ، نجلاء، عبدالودود .
إلى عمي عبد المجيد شكرا لأنك مختلف بطريقة تجعلني أدعوك الله
دائما .
إلى هدية الله لنا خالتي شكرا لأنك تجعلين حياتنا أسعد .
إلى الذي كان نجاحا بعد كل الإخفاقات .
إلى أشخاص أنجبتهم لنا الحياة فكانوا لي خير سند كلما استشعرت
صعوبة الطريق أميمة، وفاء ونجوى .
إلى من يزهر القلب بأحاديثهم وتبتسم الروح برؤياهم، صديقات
السنين والمواقف تقوى، عبلة، فاطمة، اية، شاهيناز، ريم ، دعاء .
وجزيل الشكر إلى رفيقتي وشريكتي في إنجاز مذكرة التخرج مروة .
إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة إلى جميع أساتذتنا الكرام .

قونية عائشة

❖ إهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات،
أهدي هذا الإنجاز إلى الغالين اللذين أفنيا عمرهما من أجلي في هذا
الدرب لأصل لما أنا عليه.
إلى إخوتي الأعزاء يا من كنتم سندي ومصدر سعادتي الدائم.
إلى زملائي دفعة 2024 خاصة وطلبة المدرسة عامة.
إلى أساتذتي الكرام وكل من علمني حرفا طيلة مساري الدراسي.
إلى رفيقائي في الإقامة الجامعية اللواتي زين جو الغربة .
إلى كل من نصحني و شجعني وأثار طريقي للنجاح.
إلى جميع العاملين في المدرسة العليا و الإقامة الجامعية الذين جعلوا
من مكان عملهم منزلا لنا.
إلى جميع الأجيال القادمة من طلاب العلم .

بوعزيز مروة

قائمة المحتويات

| | |
|----|--|
| 8 | مقدمة |
| 9 | 1 عموميات حول العناصر المنتهية |
| 10 | 1.1 تمهيد |
| 10 | 2.1 تذكير |
| 10 | 1.2.1 علاقة التكافؤ على $L^p_E(\mu)$ |
| 12 | 2.2.1 فضاءات صوبولوف |
| 13 | 3.2.1 مسألة إنتشار الحرارة |
| 13 | 4.2.1 طريقة Galarkin |
| 14 | 5.2.1 المسألة المنفصلة |
| 15 | 6.2.1 التقريب الداخلي العام |
| 17 | 3.1 صيغة غرين |
| 17 | 1.3.1 صيغة غرين الاولى |
| 18 | 2.3.1 صيغة غرين الثانية |
| 18 | 4.1 دراسة بعض المسائل الناقصية |
| 18 | 1.4.1 مسألة ديريكليه Dirichlet |
| 18 | 2.4.1 مسألة نيومان Neumann |
| 19 | 5.1 شرح التقنية المستعملة |
| 19 | 6.1 طريقة العناصر المنتهية في البعد 1 |
| 20 | 1.6.1 العناصر المنتهية من الدرجة 1 |
| 23 | 2.6.1 طريقة العناصر المنتهية من الدرجة 2 |
| 24 | 3.6.1 تقدير الخطأ |
| 26 | 7.1 العناصر المنتهية في البعد $N \geq 2$ |
| 26 | 1.7.1 العناصر المنتهية والمثلثات |
| 29 | 2 عموميات حول FreeFem++ |
| 29 | 1.2 خصائص برنامج FreeFem++ |
| 30 | 2.2 كيف نبدأ؟ |
| 30 | 1.2.2 التثبيت |
| 30 | 2.2.2 محرر النصوص |
| 31 | 3.2.2 الحفظ والتشغيل |

| | |
|----|--|
| 31 | 3.2 أنواع البيانات |
| 31 | 1.3.2 المتغيرات الأساسية |
| 32 | 2.3.2 المتغيرات المحجوزة |
| 33 | 3.3.2 العمليات الحسابية |
| 33 | 4.3.2 الدوال الأساسية |
| 34 | 5.3.2 المصفوفات والأشعة |
| 34 | 4.2 الحلقات والشروط |
| 34 | 1.4.2 الحلقات |
| 36 | 2.4.2 الشروط |
| 36 | 3.4.2 إدخال وإخراج البيانات |
| 37 | 5.2 بناء المجال Ω |
| 37 | 1.5.2 الشبكة |
| 37 | 2.5.2 الحدود |
| 37 | 3.5.2 التثليث |
| 39 | 4.5.2 حفظ وقراءة التشبيك |
| 39 | 5.5.2 إنشاء شبكة |
| 40 | 6.5.2 بناء شبكة فارغة |
| 41 | 7.5.2 تحديد جزء من شبكة |
| 43 | 8.5.2 تجزئة التشبيك |
| 43 | 9.5.2 تكييف شبكي موحد |
| 43 | 10.5.2 تكييف التثليث |
| 45 | 6.2 التثليث المنتظم |
| 46 | 7.2 فضاء العناصر المنتهية |
| 46 | 1.7.2 تعريف الفضاء التقريبي |
| 46 | 2.7.2 طرح الشكل التغيري |
| 47 | 3.7.2 الشروط الحدودية |
| 47 | 4.7.2 إظهار النتائج |
| 47 | 5.7.2 wait |
| 47 | 8.2 حل مسألة Poisson باستخدام برنامج ++freefem |
| 48 | 9.2 رسم دالة اختبارية |
| 50 | 10.2 رسم تابع فوق تابع آخر |
| 52 | 3 خوارزميات الأمثلة دون قيود |
| 52 | 1.3 الخوارزميات |
| 53 | 2.3 خوارزميات في فضاء أحادي البعد |
| 54 | 1.2.3 خوارزمية الإنحدار |
| 54 | 2.2.3 خوارزمية القطع الذهبي |

| | |
|-----------|--|
| 57 | 3.2.3 خوارزمية الإستقطاب التكافئي |
| 59 | 3.3 خوارزميات في فضاء متعدد الأبعاد |
| 61 | 1.3.3 خوارزمية تدرج الخطوة المتغيرة |
| 62 | 2.3.3 طريقة التدرج المترافق |
| 63 | 3.3.3 مثال تطبيقي |
| 65 | 4 دراسة برمجية لبعض المسائل الرياضية |
| 65 | 1.4 تمهيد |
| 66 | 2.4 حل معادلة لا خطية ذات متغير واحد |
| 69 | 3.4 طريقة ديكوتومي Méthode de Dichotomie |
| 71 | 4.4 طريقة نيوتن Méthode de Newton |
| 72 | 5.4 طريقة النقطة الثابتة Méthode de point fixe |
| 75 | 6.4 معيار التوقف |
| 77 | 7.4 طريقة النقطة الثابتة مع زيادة سرعة التقارب |
| 78 | 8.4 الأعداد الأولية |

مقدمة

من أهم فروع الرياضيات قديما و حديثا فرع المعادلات التفاضلية الذي يعتبر أساس العلوم الحديثة، أدى الإهتمام بهذا النوع من المعادلات والبحث عن حلولها إلى ظهور عدة طرق لمعالجتها، ولصعوبة أو إستحالة إيجاد الحلول التحليلية الدقيقة، وجدت طرق عددية تقريبية للحل. فتطرقنا في مذكرتنا عن أحد هذه الطرق وهي ”طريقة العناصر المنتهية و تطبيقاتها” وأضفنا دراسة عن بعض خوارزميات الأمثلة والطرق التحليلية العددية باستخدام برنامج freefem++ حيث يتكون موضوع دراستنا من أربع فصول:

• الفصل الأول ”عموميات حول العناصر المنتهية”

قنا بادراج أهم المفاهيم و النظريات (فضائي $L^p_E(\mu)$ و صوبولاف ، التقريب الداخلي العام، نظرية لاكس ملغرام...) و المدخل إلى هذه الطريقة كان مسألة انتشار الحرارة حيث تطرقنا إلى طريقة عمل العناصر المنتهية في البعدين 1 و 2 .

• الفصل الثاني ”عموميات حول freefem++”

قدمنا نظرة شاملة عن البرنامج (تعريف، خصائص ، أوامر) و كيفية توظيفه في حل معادلات ناقصية.

• الفصل الثالث ”خوارزميات الأمثلة دون قيود”

تطرقنا إلى خوارزميات في فضاء أحادي البعد و فضاء متعدد الأبعاد ، ثم إلى طريقة التدرج المترافق مع مثال تطبيقي .

• الفصل الرابع ”دراسة برمجية لبعض المسائل الرياضية”

قنا بعرض بعض الخوارزميات لحل معادلات ذات الشكل العام $f(x) = 0$.

فنسأل الله تعالى التوفيق .



الفصل الأول

عموميات حول العناصر المنتهية



1.1 تمهيد

في كل مما سيأتي نعتبر Ω نطاق مفتوح ومحدود من \mathbb{R}^n حيث $n \in \{1, 2, 3\}$ ، كما سنرمز بـ $\mathcal{M}(\Omega)$ للفضاء الشعاعي لكل التوابع $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ والقيوسة. وعلى هذا الأساس، نستهل هذه المطبوعة ببعض التعاريف المهمة في نظرية القياس والمكاملة ونظرية التوزيعات بما في ذلك فضاءات صوبولاف كونها الأرضية الأساسية لدراسة العناصر المنتهية.

2.1 تذكير

تعريف 1.2.1:

ليكن $p \in]0; +\infty]$ و $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ فضاء قياس و \mathbb{K} حقلا. عندئذ، نعرف أسرة التوابع ذات الأس p كمولة على Ω بالنسبة لـ μ ونرمز لها بالرمز $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ بالعلاقة التالية:

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu) := \left\{ f : \Omega \mapsto (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \text{ قياس} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu < \infty; \quad 1 < p < \infty \right\} \quad (1.1)$$

$$\mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{T}, \mu) := \left\{ f : \Omega \mapsto (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \text{ قياس} \mid \exists M > 0 \wedge \mu(\{|f| > M\}) = 0 \right\} \quad (2.1)$$

1.2.1 علاقة التكافؤ على $\mathcal{L}_E^p(\mu)$

في هذا المقطع سنحاول التعرف على خاصية مهمة نستطيع من خلالها تنظيم عناصر الفضاء الشعاعي $\mathcal{L}^p(E)$ وذلك لسهولة دراستها والتعرف على خواصها. من أجل هذا نعرف عليه العلاقة التالية: من أجل كل f و g من $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ نعتبر $f \mathcal{R} g$ تكافؤ $f \sim_{\mu} g$ أي أن $f = g$ تقريبا أينما كان. عندئذ:

$$f \mathcal{R} g \Leftrightarrow \int_E |f(x)|^p d\mu = \int_E |g(x)|^p d\mu$$

لنجد أن \mathcal{R} تمثل علاقة تكافؤ على $\mathcal{L}_E^p(\mu)$. وعلى هذا الأساس فإن قيمة التكامل $\int_E |f(x)|^p d\mu$ متعلقة بصنف تكافؤ f وليس بـ f فقط. وعلى هذا الأساس، نعرف الأسرة $L^p(E)$ المتمثلة في أسرة كل صفوف التكافؤ الناتجة عن \mathcal{R} أي أن:

$$L^p(E) = \mathcal{L}^p(E) / \mathcal{R} = \bigcup_{f \in \mathcal{L}^p(E)} \bar{f}$$

علما أن $\bar{f} = \{g \in \mathcal{L}^p(E) \mid g \sim_{\mu} f\}$. من هنا يتضح لنا أنه في حالة E مزود بقياس قابلية العد μ_c فإن $\bar{f} = \{f\}$ من أجل كل $p > 0$ وهذا يكافؤ $L^p(E) = L^p(E)$ والكلام نفسه في حالة μ قياس ذرة على E . والآن، و كما هو معلوم فإنه إنطلاقا من العمليتين: الجمع + و ضرب عنصر من $\mathcal{L}_E^p(\mu)$ بسلمي المعرفتين



سابقا، فإنه يمكن تعريف عمليتا الجمع و ضرب عنصر من $L^p(E)$ بسلمي كإيلي:

$$\begin{aligned} \overline{+} : L^p(E) \times L^p(E) &\mapsto L^p(E) & \overline{\times} : \mathbb{K} \times L^p(E) &\mapsto L^p(E) \\ (\overline{f}, \overline{g}) &\mapsto \overline{f+\overline{g}} = \overline{f+g} & (a, \overline{f}) &\mapsto a \overline{\times} \overline{f} = \overline{a \cdot f} \end{aligned}$$

لنجد الثلاثية $(L^p(E), \overline{+}, \overline{\times})$ فضاء شعاعي على الحقل \mathbb{K} سنرمز له بالرمز $(L^p(E), +, \cdot)$ إذا لم نجد أي لبس. فضلا عن ذلك التطبيق $\|\cdot\|_{L^p(E)} : L^p(E) \mapsto \mathbb{R}$ والذي يرفق بكل \overline{f} من $L^p(E)$ السلمي

$$\|\overline{f}\|_{L^p(E)} := \left(\int_E |g|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} ; \quad p \geq 1 \wedge g \in \overline{f} \quad (3.1)$$

ويحقق كذلك الشرط التالي: $\|\overline{f}\|_{L^p(E)} = 0_{\mathbb{K}}$ يكافئ $\overline{f} = \overline{0}$ علاوة على بقية شروط النظيم. فنجد الثنائية المرتبة $(L^p(E), \|\cdot\|_{L^p(E)})$ فضاء نظيمي.

تعريف 2.2.1:

نعتبر $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ وعليه، نعرف حامل التابع، المجموعة التي نرمز لها بـ $\text{supp}(f)$ المعرفة بـ

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

المجموعة المغلقة للمجموعة التي لا ينعدم فيها التابع f .

مثال: بأخذ $\Omega =]-1, 1[$ ونعرف التابع $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = \begin{cases} |x| & : x \in \Omega \\ 0 & : x \in \partial\Omega \end{cases}$$

فنجد

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} = [-1, 1]$$

مثال ثان بأخذ $\Omega =]-10, 10[$ ونعرف التابع $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ بـ

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp \left\{ \frac{3^2}{|x-2|^2 - 3^2} \right\} & : |x-2| < 3 \\ 0 & : |x-2| \geq 3 \end{cases}$$

فنجد

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} = \overline{B(2, 3)} = [-1, 5]$$

تعريف 3.2.1:

نرمز بـ $\mathcal{D}(\Omega)$ للفضاء الشعاعي للتتابع القابلة للمفاضلة عدد غير منته من المرات وذات حامل متراص محتوي في Ω أي أن $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$.

تعليق: الفضاء الثنوي بمفهوم الطوبولوجيا للفضاء $\mathcal{D}(\Omega)$ نرمز له بالرمز $\mathcal{D}'(\Omega)$ أي الفضاء الشعاعي للداليات الخطية T المستمرة على $\mathcal{D}(\Omega)$ يسمى فضاء التوزيعات المعرفة على $\mathcal{D}(\Omega)$.



عمليات على التوزيعات لتكن T_1 و T_2 توزيعيتين على $\mathcal{D}(\Omega)$ أي أن $T_1, T_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ وليكن $\alpha \in \mathbb{R}$.

1- نعرف مجموع T_1 و T_2 بالعلاقة التالية

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle T_1, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \langle T_2, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

2- نعرف التوزيعة T_1 بالسلمي α بالعلاقة التالية

$$\langle \alpha T_1, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \alpha \langle T_1, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

3- نعرف التوزيعة T_2 بالتابع h من $\mathcal{D}(\Omega)$ بالعلاقة التالية

$$\langle hT_1, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle T_1, h\phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

4- يساوي T_1 و T_2 إذا فقط إذا كان

$$\langle T_1, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle T_2, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

2.2.1 فضاءات صوبولاف

الفضاء $H^1(\Omega)$

تعريف 4.2.1:

نرمز بـ $H^1(\Omega)$ للفضاء الشعاعي للتتابع المعرف بالعلاقة التالية

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^2(\Omega), k = \overline{1:n} \right\} \quad (4.1)$$

والمزود بالجداء السلمي

$$(u | v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) dx \quad (5.1)$$

تعليق: لكون كل فضاء شعاعي مزود بجداء سلمي هو فضاء نظيمي فإن النظيم المرفق به الفضاء $H^1(\Omega)$.

$$\|u\|_{1, \Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} \left(|u|^2 + \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 \right) dx}, \quad \forall u \in H^1(\Omega) \quad (6.1)$$

تعليق: نرمز بـ $H_0^1(\Omega)$ للفضاء الشعاعي للتتابع المعرف بالعلاقة التالية

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \} \quad (7.1)$$

وهو فضاء نظيمي مزود بالجداء السلمي

$$(u | v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (8.1)$$

وبالتالي فهو فضاء نظيمي مزود بالنظيم

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx} \quad (9.1)$$

3.2.1 مسألة إنتشار الحرارة

نعتبر $f \in L(\Omega)$ و c تابع مستمر على Ω وليكن $\mu > 0$ ثابت. وعليه، البحث عن التابع $u \in H_0^1(\Omega)$ الذي يحقق المسألة الحدودية التالية

$$\begin{cases} -\mu u''(x) + c(x)u(x) = f : x \in \Omega \\ u(s) = 0 : s \in \partial\Omega \end{cases} \quad (10.1)$$

من الملاحظ أن المعادلة الأولى للمسألة (10.1) هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية يمكن تحديدها باستخدام الشروط الحدودية المعرفة في المعادلة الثانية لذات المسألة. من المعلوم أن معظم المسائل الحدودية في غالب الأحيان تقبل حلا وحيدا حيث يمكن إثبات ذلك باستعمال عدة نتائج مثل نظرية لاكس ميلغرام وغيرها من النظريات الأخرى. لكن وكما هو معلوم فإن إيجاد الحل بطريقة صريحة يبقى هو المشكل المصعبي على الباحثين في نظرية المعادلات التفاضلية من أجل هذا يلجأ معظمهم إلى الحل العددي لما في ذلك من برامج ونتائج متاحة لذلك. غايتنا في هذه المذكرة هو إستعمال أحد أشهر البرامج المستعملة في حل مثل هاته النتائج وهو برنامج FreeFem++ والذي يستعمل في تجسيد طريقة العناصر المنتهية على لغة الحاسب ومن أجل هذا أرتأينا في بقية هذا الفصل التذكير بهاته الطريقة حتى يتسنى لنا العمل على هذه اللغة المفيدة حتى في حل بعض مسائل التحليل العددي وليس المسائل الحدودية فحسب.

4.2.1 طريقة Galarkin

كانت طريقة Galerkin كبداية لطريقة العناصر المنتهية، بالرغم من أن ليس لها أهمية عددية بشكل كبير إلا أنها مفيدة جدا من الناحية النظرية (خاصة دراسة مشكلات غير خطية). نفرض أن فضاء هلبرت V ذو بعد غير منته وقابل للفصل مما يستلزم وجود أساس هلبرتي $(e_i)_{i \geq 1}$ لـ V ثم نختار V باعتباره الفضاء الفرعي الناتج عن قاعدة هلبرت (يتم إنشاؤها بواسطة مجموعة خطية محدودة) والتي هي بالطبع كثيفة في V . من خلال تحديد $h = \frac{1}{n}$ نحدد V_h باعتباره الفضاء الفرعي ذو البعد المنته الناتج عن (e_1, \dots, e_n) . وبالتالي فإن الحل التقريبي u_h يتقارب نحو الحل الدقيق u . نذكر أنه يتم حساب u_h عن طريق حل النظام الخطي $A_h U_h = B_h$ حيث U_h هو المتجه في \mathbb{R}^n لاحداثيات u_h في الأساس (e_1, \dots, e_n) .

على الرغم من ملائمتها للأطار النظري الذي تم توضيحه أعلاه، فإن طريقة Galerkin غير ملائمة من الناحية العددية. في الواقع فإن المصفوفة A_h هي بشكل عام "ممتلئة"، هذه المعاملات غير صفيرية بشكل عام،



أي أن الدقة العددية للنظام الخطي تكون غير مستقرة لأنها حساسة للغاية لتقريب الأخطاء على الحاسوب ، من هنا تعد طريقة العناصر المنتهية أكثر دقة و كفاءة. ،
ولمعرفة سير طريقة غلاركين نأخذ المسألة (10.1) فنضرب المعادلة الأولى في دالة اختبارية $v \in \mathcal{D}([0, 1])$ إذا كاملنا على المجال $[0, 1]$ ، نحصل على

$$\mu \int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad (11.1)$$

نكامل بالتجزئة الحد الأول نجد:

$$\mu \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - \mu u'(1)v(1) + \mu u'(0)v(0) + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad (12.1)$$

إذا فرضنا أن الدالة v معدومة عند $x = 0$ و $x = 1$ ، نستنتج المساواة:

$$\mu \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad (13.1)$$

سنبحث الآن عن $u \in V$ الذي يحقق (13.1) من أجل كل الدوال $v \in V$ ، نتحصل على المشكلة التالية:

$$\mu \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in V \quad (14.1)$$

وتسمى المسألة (14.1) بالصيغة الضعيفة أو التغيرية . بداهة ، تكون الدوال u حلول المسألة (14.1) أقل انتظاما من حلول المسألة التفاضلية (10.1) (تسمى أيضا بالصيغة القوية) .

5.2.1 المسألة المنفصلة

لتكن $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ توابع خطية مستقلة من V ، يمكننا انشاء فضاء شعاعي جزئي من V ، يسمى V_h الناتج عن المجموعات الخطية للتوابع φ_i . و بالتالي ، فإن V_h يمثل مجموع التوابع g التي يمكن التعبير عنها بالنموذج التالي:

$$g(x) = \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(x) \quad (15.1)$$

حيث g_i عدد حقيقي من أجل كل $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ و لذلك فن الطبيعي صياغة تقريب المسألة (14.1) على النحو التالي :
جد تابع $u_h \in V_h$ بحيث:

$$\mu \int_0^1 u'_h(x)v'_h(x)dx + \int_0^1 c(x)u'_h(x)v_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx, \forall v_h \in V_h \quad (16.1)$$

يمكننا القول أن (16.1) هو تقريب جلاغكين ل (14.1) بما أننا نبحث عن u_h في V_h ،



فيمكننا أن نكتب:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x) \quad (17.1)$$

بحيث $\{u_k\}_{k=1}^N$ سلميات حقيقة سيتم تعيينها. من خلال أخذ $1 \leq j \leq N, v_h = \varphi_j$ في المسألة المنفصلة (16.1)، هذا الأخير يكافئ البحث عن $\{u_k\}_{k=1}^N$ حيث:

$$\sum_{i=1}^N u_i \left(\mu \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx + \int_0^1 c(x) \varphi'_i(x) \varphi_j(x) dx \right) = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx \quad (18.1)$$

من أجل كل $j = 1, 2, \dots, N$ ، إذا كانت A هي مصفوفة $N \times N$ ذات المعاملات

$$A_{ji} = \mu \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx + \int_0^1 c(x) \varphi'_i(x) \varphi_j(x) dx \quad (19.1)$$

إذا كان \vec{u} شعاع ذو المركبات u_1, u_2, \dots, u_N وإذا كان \vec{f} المتجه الذي مركبته من الدرجة j هي

$$\int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx \quad (20.1)$$

فإن المسألتان (16.1) و (17.1) تكافئان البحث عن \vec{u} حيث

$$A\vec{u} = \vec{f} \quad (21.1)$$

سنقول أن المسائل (16.1)، (17.1) و (18.1) هي تقسيم للمسألة المستمرة (10.1) و نلاحظ أنه بعد إنشاء المصفوفة A و المتجه \vec{f} ، نتطلب طريقة جلاغكين تحليل النظام الخطي.

ملاحظة (1)

الصيغة

$$\mu \int_0^1 u'(x) v'(x) dx + \int_0^1 c(x) u'(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \forall v \in V$$

تكافئ

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in V$$

6.2.1 التقريب الداخلي العام

ليكن V فضاء هيلبرتي، و لتكن المسألة المطروحة بشكلها التغيري التالي:

جد $u \in V$ حيث

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in V \quad (22.1)$$



نرفقها بالمسألة التقريبية المعطاة:

جد $u_h \in V_h$ حيث

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h \quad (23.1)$$

نسمي (23.1) التقريب الداخلي العام ل (22.1) تقوم هذه الطريقة على استبدال فضاء سوبولاف V غير المنته بالفضاء الجزئي المنته V_h , $(V_h \subset V)$ مزود بنفس تنظيم V (V_h تقريب جيد ل V) ، بالإضافة إلى كون $a(\dots)$ شكل ثنائي الخطية مستمر ناقصي و $L(v)$ خطي مستمر فإن المسألة (22.1) تقبل حل وحيد حسب نظرية لاكس ملغرام التي نقدمها فيما يلي:

نظرية 1.2.1: Lax-Milgram

ليكن H فضاء هلبرتيا وليكن التطبيق $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ شكلا ثنائي الخطية مستمرا و ناقصيا على $V \times V$ وليكن L شكلا خطيا مستمرا على V . عندئذ، الشكل التغيري :

البحث عن $u \in V$ الذي يحقق العلاقة (22.1) يقبل حل وحيد .

تعريف:

1- القول عن الشكل ثنائي الخطية $a(.,.)$ أنه ناقصي يعني ان :

$$\exists \alpha > 0; \forall v \in V: a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$$

و هذا الشرط يكافئ :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} a(v, v) = +\infty$$

2- القول عن الشكل ثنائي الخطية $a(.,.)$ أنه مستمر يعني أن :

$$\exists \sigma > 0; \forall (u, v) \in V^2: |a(v, v)| \leq \sigma \|u\|_V \cdot \|v\|_V$$

3- القول عن الشكل الخطي $L(.)$ أنه مستمر يعني أن :

$$\exists C > 0; \forall v \in V : |L(v)| \leq C \|v\|_V$$

4- القول عن التابعي $J : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ أنه نصف مستمر من الأسفل إذا و فقط إذا حقق الشرطين المتكافئين التاليين :

الشرط الأول:

المجموعة $G = \{u \in V : J(u) \leq a\}$ مغلقة من أجل كل $a \in V$.

الشرط الثاني:

من أجل كل u^* فإن $\lim_{u \rightarrow u^*} \inf J(u) \geq J(u^*)$

البرهان

نعتبر التابعي :

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) ; \forall u \in V$$

بحيث كل من $a(.,.)$ و $L(.)$ يحققان شروط النظرية .
عندئذ، من الواضح ان J محدب بفضل ثنائية الخطية ل $a(.,.)$ و خطية $L(.)$.
علاوة على ذلك J محدب تماما بفضل ناقصية الشكل $a(.,.)$ و هذا الشرط يستلزم كذلك ناقصية J .

فعلا : بأخذ α ثابت الناقصية ل $a(.,.)$ و C ثابت الاستمرارية ل L . و عليه ، نجد :

$$J(u) \geq \alpha \|u\|_V^2 - L(u) \geq \alpha \|u\|_V^2 - C\|u\|_V$$

و منه $\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty$ و بالتالي J ناقصي .

علاوة على ذلك فإنه من الواضح أن J مستمر بالنسبة للطوبولوجيا القوية على V بالتالي فهو نصف مستمر من الأسفل و كونه محدب فهو نصف مستمر من الأسفل بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة على V .
على هذا الأساس ، فإن المسألة $\min \{J(u) ; u \in V\}$ تقبل حل وحيد u^* بمفهوم النظرية التالية :

نظرية 2.2.1:

ليكن V فضاء بناخ عكوس و ليكن لدينا تابعي $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ محدب و نفس مستمر من الأسفل ، و ليكن K مجموعة جزئية غير خالية محدبة و مغلقة من V . بفرض أن J يملك على الأقل قيمة منتهية عند K . عندئذ ، المسألة : إيجاد u^* الذي يحقق العلاقة $J(u^*) = \inf \{J(v) : v \in V\}$ تقبل على الأقل حل إذا تحقق أحد الشرطين :
الشرط الأول : الدالي J ناقصي .
الشرط الثاني : K محدود .

3.1 صيغة غرين

1.3.1 صيغة غرين الاولى

إذا كان Ω مفتوح محدود بحافة لبثشيزية وكان u و v من $H^1(\Omega)$ ، إذن لدينا:

$$\int_{\Omega} v \nabla u = \int_{\Omega} u \nabla v + \int_{\Gamma} u v n$$

ملاحظة: يعتبر n الشعاع العادي عند Γ الموجه نحو الجزء الخارجي ل Ω

2.3.1 صيغة غرين الثانية

إذا كان Ω مفتوح محدود بحافة لبثيزية وكان u من $H^2(\Omega)$ و v من $H^1(\Omega)$ ، إذن لدينا:

$$-\int_{\Omega} \Delta uv = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v$$

4.1 دراسة بعض المسائل الناقصية

سنطرق إلى دراسة بعض المسائل وتحديدًا مسألتَي ديريكلي ونيومان.

1.4.1 مسألة ديريكلي Dirichlet

ليكن Ω مفتوح محدود من \mathbb{R}^n ، حافته لبثيزية. تعطى الدالة $f \in L^2(\Omega)$ ، نبحث عن دالة u المعرفة على Ω وحل ل:

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (24.1)$$

نفرض أن u حل منتظم ل (24.1) مثلاً $u \in H^2(\Omega)$. بضرب المعادلة في الدالة الإختبارية $v \in H_0^1(\Omega)$ والمكاملة على Ω نجد:

$$-\int_{\Omega} \Delta uv = \int_{\Omega} fv \quad (25.1)$$

باستخدام صيغة غرين الثانية و مع الأخذ بالاعتبار أن أثر v على Γ معدوم نتحصل على :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} fv, \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (26.1)$$

كي يكون للحل الأيسر ل (24.1) معنى يكفي أن ينتمي ∇u و ∇v إلى $L^2(\Omega)$ كذلك بالنسبة للطرف الأيمن يكفي أن يكون v من $L^2(\Omega)$ (إفترضنا أن $f \in L^2(\Omega)$). لذلك فإن الإختيار المعقول للفضاء الهلبرتي هو $V = H_0^1(\Omega)$ الذي تتعدم عناصره عند الحافة Γ

تعليق: يسمى التطبيق γ_0 تطبيق الأثر على $H^1(\Omega)$ وهو تطبيق مستمر و غامر يرفق بكل عنصر u من $H^1(\Omega)$ أثره على Γ من الفضاء $L^2(\Omega)$ أي أن : $\gamma_0(u) = u|_{\Gamma}$

2.4.1 مسألة نيومان Neumann

نحتفظ بنفس الفرضيات كما في حالة مسألة ديريكلي وسنضع بعين الاعتبار المشكلة التالية :



يعطى $f \in L^2(\Omega)$ ، نبث عن الحل u المعروف على Ω وحل ل

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (27.1)$$

من خلال إجراء نفس العملية الحسابية كما في حالة مسألة ديريكلي، يتم استبدال المسألة (27.1) بالصيغة التغيرية التالية: يعطى $f \in L^2(\Omega)$

جد $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

5.1 شرح التقنية المستعملة

تتمثل الفكرة الأساسية في حل الأشكال التغيرية للمسائل الرياضية بعد طرحها في فضاء ذو بعد منته نمر له ب V_h محتوى في الفضاء الأصلي و ليكن V للمسألة . نملك فكرة تجعله يقترب شيئاً فشيئاً من V إلى درجة تجعل من الخطأ المرتكب $\|u - u_h\|_V$ أصغر ما يمكن، بحيث u و u_h هما الحل الحقيقي و الحل التقريبي على الترتيب. وهذا ما يسمى بمبدأ Galerkin مع الأخذ بعين الإعتبار أن إنشاء V_h يعتمد على المفهوم الهندسي للشبكة التي وضعت على Ω معتمدين بذلك على الوسيط h المتعلق بالحجم الأعظمي لخلايا الشبكة. قلنا أن الفضاء V_h يتسع أكبر فأكثر حتى يقترب من V بأكمله و هذا باستعمال طريقة التشبيك و ذلك بزيادة عدد خلايا التشبيك. وفيما يلي ندرس بالتفصيل طريقة جلايكجين بالتحديد طريقة العناصر المنتهية التي تختار بشكل ذكي الدوال $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ التي تحدد V_h ، بحيث يتم استيفاء الخصائص التالية:

المصفوفة A يجب أن تكون جوفاء بمعنى أنها تحتوي على عدد كبير من المعاملات الصفرية. أن يتقارب الحل u_h للمسألة (23.1) إلى حل u للمسألة (22.1) بطريقة معينة عندما يصبح الرقم N للدوال المستقلة خطياً من V كبيراً.

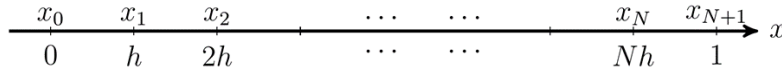
ملاحظة (1)

يتشكل الفضاء الجزئي من فضاءات الدوال المعتادة $H^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)$...

6.1 طريقة العناصر المنتهية في البعد 1

1.6.1 العناصر المنتهية من الدرجة 1

للتبسيط، نضع أنفسنا في إطار بعد واحد من الفضاء ونعتبر المجال $[0, 1]$ حيث نبدأ بتقسيمه إلى $N + 1$ جزءا ونضع $h = \frac{1}{N+1}$ و $x_i = ih$ مع $i = 1, \dots, N + 1$. أنظر الشكل 1.1

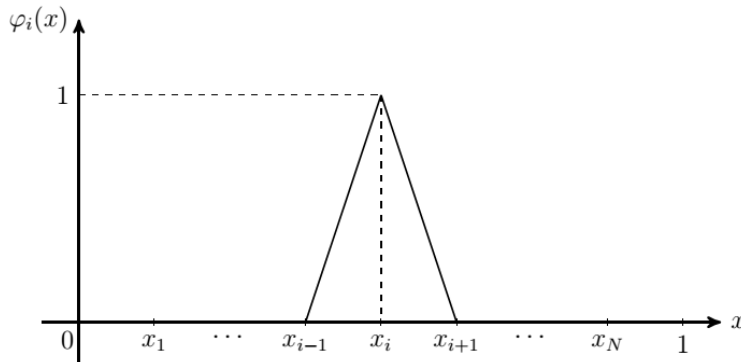


شكل 1.1: نقاط التقسيم

من أجل $i = 1, \dots, N$ ، نعرف الدالة التالية:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} si & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} si & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 si & x \leq x_{i-1} ou x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad (28.1)$$

الرسم البياني لدالة φ_i يظهر في الشكل 1.2



شكل 1.2: بيان التابع φ_i

من الواضح أن الدالة φ تخبرنا أن:

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 si & i = j \\ 0 si & i \neq j \end{cases} \quad 0 \leq j \leq N + 1$$

كثير حدود من الدرجة الأولى، $\varphi_i|_{[x_{i-1}, x_i]}$ $1 \leq i \leq N$ وفي جهة من أجل $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ مستقلة خطيا. كثير حدود من الدرجة الأولى، $\varphi_i|_{[x_i, x_{i+1}]}$ $1 \leq i \leq N$ تحليل النظام الخطي:

المقصود هنا تحليل النظام الخطي $A\vec{u} = \vec{f}$

لدينا $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ مستقلة خطيا، نختار التابع φ_i لتوليد الفضاء V_h نعلم أيضا أن:



هم العقد التقديرية. $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$

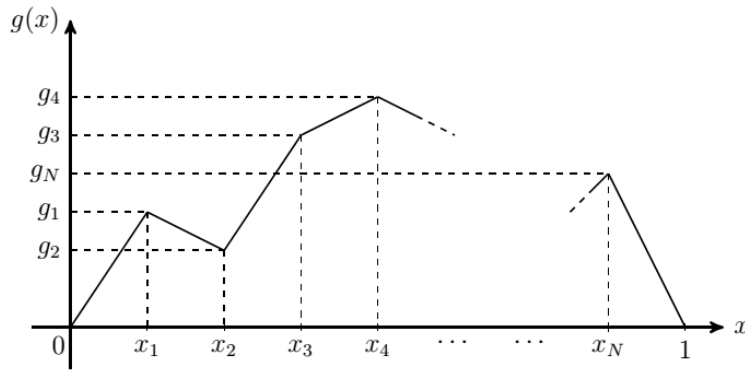
هم عناصر هندسية. $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_N, x_{N+1}]$

التابع الأساسية للفضاء الجزئي V_h من نوع العناصر المنتهية من الدرجة الأولى المرتبطة بالعقد الداخلية x_1, x_2, \dots, x_N

إذا كان $g \in V_h$ ، إذن g عبارة عن مزج خطي ل φ_i

$$g = \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(x)$$

والرسم البياني يظهر في الشكل 1.3



شكل 1.3: بيان التابع g



على الخصوص ، نلاحظ أن من أجل كل $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ لدينا $g(x_j) = g_i$ حيث $A\vec{u} = \vec{f}$ هو تقدير للمسألة المستمرة (10.1) .

الآن لدينا كل المعلومات التي نحتاجها من أجل بناء مصفوفة A ومتجه \vec{f} .
لما $f(x) = f_0$ و $c(x) = c_0$ مع f_0 و c_0 ثابتين نتحقق أن المصفوفة A والمتجه \vec{f} يتم تعريفهما بالعبارتين التاليتين:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_0 h \\ \vdots \\ f_N h \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{h} & -\frac{\mu}{h} + \frac{c_0}{2} & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ -\frac{\mu}{h} - \frac{c_0}{2} & & \ddots & -\frac{\mu}{h} + \frac{c_0}{2} & \\ & & & \ddots & \\ & & & -\frac{\mu}{h} - \frac{c_0}{2} & \frac{2\mu}{h} \end{pmatrix}$$

في حالة $c(x) = 0$ من أجل كل x ينتمي إلى $[0, 1]$ و $\mu = 1$ و $f(x) = f_0$ مسألة انتشار الحمل الحراري تصبح مسألة انتشار نقية. النظام الخطي الأساسي هو $A\vec{u} = \vec{f}$ حيث :

$$A = \frac{1}{h} \text{tridiag}(-1, 2, -1) = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \vec{f} = h \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_0 \end{bmatrix}$$

بذلك نحصل على مصفوفة مثلثية الأقطار، متناظرة و معرفة موجبة إذن تكون قابلة للقلب.

ملاحظة (1)

إذا كان الشكل ثنائي الخطية $a(.,.)$ ناقصي فإن المصفوفة $A(a_{kj})$ معرفة موجبة.

تذكير :

لتكن $A = a_{ij}$ مصفوفة مربعة من الرتبة n و عليه القول عن A أنها معرفة موجبة يعني أن:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \wedge (x \neq 0) \Rightarrow (Ax, x) = x^t Ax \geq 0$$

في هذه الحالة إذا كانت المصفوفة A متناظرة فإنها عكوسة (قابلة للقلب) و بالتالي النظام الخطي $Au_h = B$ يقبل حل وحيد $u_h = A^{-1}B$ و الذي يمثل حلا للشكل التغيري (22.1)
أي أنه الحل التقريبي ل (23.1) .



2.6.1 طريقة العناصر المنتهية من الدرجة 2

العناصر المنتهية من الدرجة 2 تقع على فضاء منفصل :

$$V_h = \{v \in C([0, 1]) : v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_2; \forall j = \overline{1, N}\}$$

وفي الفضاء الجزئي:

$$V_h^0 = \{v_h \in V_h : v(0) = v(1) = 0\}$$

طريقة العناصر المنتهية من الدرجة 2 هي طريقة التقريب الداخلي للمتغير المطبق على الفضاءات V_h^0 و V_h التي تتكون من توابع بسيطة وقطع مكافئ متعدد العناصر يمكن تمثيلها باستخدام التوابع البسيطة الممثلة في الأعلى. نقدم أولاً نقاط المنتصف للمجال $[x_i, x_{i+1}]$ المعروف بواسطة $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ ونعرف أيضاً التوابع التالية:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & : |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & : |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

إذا كانت الشبكة منتظمة من أجل $0 \leq j \leq n+1$ نعرف توابع الأساس:

$$\psi_j(x) = \phi\left(\frac{x-x_j}{h}\right), 0 \leq j \leq n+1$$

و

$$\psi_j(x) = \phi\left(\frac{x-x_{j+1/2}}{h}\right), 0 \leq j \leq n$$

مبرهنة: الفضاء V_h هو فضاء جزئي من $H^1(1, 2)$ ذو بعد $2n+3$ ويتم تعريف كل تابع v_h بشكل وحيد من خلال قيمه عند الرؤوس $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ وعند نقاط المنتصف $(x_{j+1/2})_{0 \leq j \leq n}$

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v_h(x_j) \psi_j(x) + \sum_{j=0}^n v_h(x_{j+1/2}) \psi_{j+1/2}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

كذلك بالنسبة للفضاء V_h^0 ذو البعد $2n+1$ يتم تعريف كل تابع $v_h \in V_h^0$ على نحو بسيط بواسطة قيمه عند الرؤوس $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ ونقط المنتصف $(x_{j+1/2})_{0 \leq j \leq n}$

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^n v_h(x_j) \psi_j(x) + \sum_{j=0}^n v_h(x_{j+1/2}) \psi_{j+1/2}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

3.6.1 تقدير الخطأ

الحالة العامة لطريقة جلاغكين

أجل تسهيل التحليل، نعتبر دائماً أن $c(x) = 0$ من أجل كل $x \in [0, 1]$ و $u = 1$. نمذج الفضاء الشعاعي

$$\|g\|_1 = \sqrt{\int_0^1 (g'(x))^2 dx} \quad \text{si } g \in V$$

تتحصل على النتيجة التالية:

إذا كان u حل ضعيف للمسألة (14.1) و كان u_h حل للمسألة المنفصلة (16.1)، لدينا تقدير الخطأ:

$$\|u - u_h\|_1 \leq \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1$$

حالة العناصر المنتهية ذات البعد 1

إذا كان $u \in V$ ، إذن الدالة المعرفة ب

$$r_h u = \sum_{i=1}^N u(x_i) \varphi_i \quad (29.1)$$

هي تعميم خطي من الدرجة 1 على فترات للدالة u ، أي أن من أجل كل $1 \leq i \leq N$ و $r_h u|_{[x_i, x_{i+1}]}$ هي كثير الحدود من الدرجة الأولى من خلال بناء $r_h u \in V_h$ من الواضح أن لدينا:

$$\min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 \leq \|u - r_h u\|_1 \quad (30.1)$$

وبالتالي، تقدير الخطأ يصبح:

$$\|u - u_h\|_1 \leq \|u - r_h u\|_1 \quad (31.1)$$

يوضح هذا التفاوت الأخير أن الخطأ بين u و u_h في التنظيم يمكن التحكم فيه إذا عرفنا كيفية تقدير خطأ الاستيفاء بين u و $r_h u$ و نثبت النتيجة التالية:

نظرية 1.6.1:

نعتبر دائماً أن $c(x) = 0$ من أجل كل $x \in [0, 1]$ و $u = 1$. لتكن u حل للمسألة الضعيفة (14.1) و لتكن u_h حل للمسألة المنفصلة (16.1) لما V مولد بدوال قاعدية. إذن يكون تقدير الخطأ لدينا:

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch \quad (32.1)$$

حيث C ثابت مستقل عن N (وبالتالي عن h).

البرهان: تقدير الخطأ (32.1) هو نتيجة ل (31.1) بشرط أن يتضح أن:

$$\|u - r_h u\|_1 \leq Ch$$

حيث C ثابت مستقل عن N

نعتبر الآن $w = u - r_h u$ بما أن لدينا $r_h u(x_i) = u(x_i)$ من أجل كل $0 \leq i \leq N+1$ نتحصل إذن على $w(x_i) = 0$ باستعمال نظرية رول نستنتج أنه يوجد $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$ يحقق $w'(\xi_i) = 0$ من أجل كل $0 \leq i \leq N$. من جهة أخرى كون $r_h u$ كثير حدود من الدرجة الأولى عند كل عنصر هندسي $[x_i, x_{i+1}]$ نتحصل من أجل كل $x \in [x_i, x_{i+1}]$ على:

$$w'(x) = \int_{\xi_i}^x w''(s) ds = \int_{\xi_i}^x u''(s) ds$$

نستنتج من هذه المساواة من أجل $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$|w'(x)| \leq \int_x^{x_{i+1}} |u''(s)| ds$$

بتطبيق نظرية كوشي شوارتز نتحصل إذن من أجل $x \in [x_i, x_{i+1}]$ على:

$$|w'(x)| \leq \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq h^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

عن طريق تربيع هذه الأخيرة ومكاملتها على العنصر الهندسي نتحصل على:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'(x)|^2 dx \leq h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds$$

يمكننا الآن الجمع على الدليل i لتتوصل على:

$$\|u - r_h u\|_1^2 = \|w\|_1^2 = \int_0^1 |w'(x)|^2 dx = \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'(x)|^2 dx \leq h^2 \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds = h^2 \int_0^1 |u''(s)|^2 ds$$

ينهى البرهان مع وضع $C = \int_0^1 |u''(s)|^2 ds$

سنقوم الآن بمقارنة الخطأ الذي حدث عن طريق استبدال الفضاء V بفضاءه الجزئي V_h

بتقدير أدق، سنزيد الفرق حيث u هو الحل في V ل (22.1) و u_h حل في V_h ل (23.1). قبل ذلك، دعونا نوضح بعض الملاحظات: نكتب $v > 0$ الثابت الناقصي و ثابت الاستمرارية $M > 0$ للشكل الثنائي $a(u, v)$ التي تحقق:

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq v \|u\|^2 & \forall u \in V \\ |a(u, v)| &\geq M \|u\| \|v\| & \forall u, v \in V \end{aligned}$$

توضح المبرهنة التالية، التي تعود إلى جان سيبا أن المسافة بين الحل الدقيق u و الحل التقريبي u_h محدودة بشكل موحد بالنسبة إلى للفضاء الجزئي V_h بواسطة المسافة بين u و V_h :



توطئة سيا :

نعتبر V فضاء هيلبرتي و V_h فضاء جزئي ذو بعد منته وليكن الشكل ثنائي الخطية والناقصي $a(u, v)$ في V و $L(v)$ شكل خطي مستمر. u الحل الدقيق للمسألة (22.1) و u_h الحل التقريبي للمسألة (23.1) ، إذن:

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{v} \inf \|u - v_h\| \quad (33.1)$$

البرهان:

لدينا $V_h \in V$ نستنتج من طرح الصيغتين التغيريتين (22.1) و (23.1) أن:

$$\begin{aligned} a(u - u_h, w_h) &= 0 \quad \forall w_h \in V_h \\ h - v_h = w_h &\text{ نختار } \\ v \| u - u_h \| &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \| u - u_h \| \leq M \| u - u_h \| \| u - v_h \| \end{aligned}$$

نستنتج منه (33.1)

بما أننا أشرنا إلى نظرية رول و كوشي شوارتز فلا بأس بأن نتطرق إليهما:

نظرية 2.6.1: رول

نفرض أن f دالة مستمرة في المجال المغلق $[a, b]$ موجودة في المجال المفتوح $]a, b[$ وأن $f(a) = f(b) = 0$ ، عندها توجد نقطة $c \in (a, b)$ تحقق أن $f'(c) = 0$.

نظرية 3.6.1: كوشي شوارتز

لتكن $f, g \in L^2(\Omega)$ فإن: $|\int_{\Omega} f g dx| \leq (\int_{\Omega} f^2)^{\frac{1}{2}} (\int_{\Omega} g^2)^{\frac{1}{2}}$

7.1 العناصر المنتهية في البعد $N \geq 2$

من أجل التبسيط سنقدم نتائج معينة فقط في البعد $N = 2$ ولكنها تمدد إلى البعد 3 أيضا.

لتكن مسألة ديركلي التالية:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \delta\Omega \end{cases}$$

التي تقبل حلا وحيدا في $H^1(\Omega)$ إذا كانت $f \in L^2(\Omega)$ فيما يلي سنفرض أن المجال Ω متعدد السطوح من \mathbb{R}^n .

1.7.1 العناصر المنتهية والمثلثات

نبدأ بتعريف شبكة المجال والمثلثات في $N = 2$ ورباعي السطوح $N = 3$ في عائلة N بسيط N -simplexes ، نسمي N بسيط K من \mathbb{R}^n ذو الرؤوس $(a_i)_{1 \leq i \leq N+1}$ كل شكل محدب. بالطبع: 2 بسيط هو مثلث.

3 بسيط هو رباعي السطوح.



نقول N -بسيط غير منحل إذا كانت النقاط $(a_i)_{1 \leq i \leq N+1}$ لا تنتمي إلى نفس المستوى الفوقى (Hyperplan) من \mathbb{R}^n . إذا كانت إحداثيات المصفوفة a_i في $(a_i)_{1 \leq i \leq N+1}$ فإن شرط عدم الإنحلال هو أن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

قابلة للقلب (والذي سنفرضه دائما لاحقا).

تعاريف

Ω مفتوح متعدد السطوح و $\bar{\Omega}$ هو مجموعة Γ_h من N -بسيط (غير منحلة)، التقاطع $k_i \cap k_j$ لاثنين N -بسيط متمايزان هو m بسيط مع $0 \leq m \leq N-1$ وجميع رؤوسها هي أيضا رؤوس ل k_j و k_i (التقاطع بين مربعين في البعد 2 هو إما مجموعة خالية أو رأس مشترك أو حافة مشتركة كاملة أو وجه مشترك، كذلك التقاطع بين مثلثين هو إما مجموعة خالية أو رأس مشترك أو ضلع مشترك) رؤوس أو عقد الشبكة Γ_h هي رؤوس N -بسيط k_i التي تتكون منها الشبكة، تحدد المعلمة h الحد الأقصى للأقطار N -بسيط، إذا التعريف ينطبق على مجموعة مفتوحة متعددة السطوح وليس على أي مجموعة مفتوحة.

في N من الملائم استخدام الإحداثيات المركزية بدلا من الإحداثيات الديكارتية المعتادة، نذكر أنه إذا كان k عبارة عن N -بسيط غير منحل من الرؤوس (a_i) فإن الإحداثيات المركزية للثنائيات (λ_i) من $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1 \quad \sum_{i=1}^{N+1} a_{i,j} \lambda_i = x_j \quad 1 \leq j \leq N$$

الذي يعترف بكل وحيد لأن المصفوفة A المعرفة قابلة للقلب حيث: λ_i هي عبارة عن توابع ل x تحقق أن:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^k \quad \lambda_i(x) > 0 : \forall 0 \leq i \leq N+1\}$$

الوجوه $(N+1)$ ل K هي تقاطعات K والأشكال الفوقية hyperplans

$$0 \leq i \leq N+1 \quad \lambda_{ij} = 0$$

يمكن بعد ذلك تعريف مجموعة من النقاط والتي ستلعب دور معين لأي عدد صحيح K المجموعة

$$\sum_k = \{x \in k \quad \lambda_i(x) \in K \{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\} : \forall 0 \leq i \leq \infty\}$$

من أجل :

$K=1$ فهي مجموعة رؤوس.



$K = 2$ فهي رؤوس ونقاط منتصف الحواف التي تربط بين رأسين.

نعرف الآن المجموعة P_k من كثيرات الحدود مع المعاملات الحقيقية من \mathbb{R}^{\times} في R بدرجة أقل من أو

يساوي K وهذا يعني: $P(x) = \sum \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N}$ مع: $n = (x_1 \dots x_N)$

فائدة \sum_k ل N - بسيط هو أنه يسمح بتوظيف جميع كثيرات الحدود ل P_K (نقول \sum_k أحادية الانحلال ل P_K)

تعريف 1.7.1:

بالنظر إلى مجموعة Γ_h من مجموعة مفتوحة Ω متعددة السطوح، فإن طريقة العناصر المنتهية P_k أو العناصر المنتهية المثلثية للاغرونج من الترتيب K المرتبطة بهذه الشبكة من خلال الفضاء المنفصل.

$$\vartheta_h = \{ \vartheta_h = v_h \in C([0, 1]) : \forall j = \overline{1, N} : v_h /_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_2 \}$$

الفصل الثاني

عموميات حول FreeFem++

تمهيد

المعادلة التفاضلية الجزئية هي العلاقة بين دالة ذات عدة متغيرات ومشتقاتها (الجزئية) و FreeFem++ هو برنامج لحل هذه المعادلات عدديا، فكما يوحي اسمه، فهو برنامج مجاني يعتمد على طريقة العناصر المنتهية؛ يعمل على العديد من أنظمة التشغيل مثل: window و MacOS .

1.2 خصائص برنامج FreeFem++

- المشكلة (قيم حقيقية أو عقدية): يتم وصف المشكلة عن طريق الصيغ التغيرية، مع إمكانية الوصول إلى المتجهات والمصفوفات الداخلية عند الحاجة.
- متعدد المتغيرات، متعدد المعادلات ثنائية الأبعاد (أو ثلاثية الأبعاد)، ثابت أو يعتمد على الوقت، أنظمة مقترنة خطية أو غير خطية ومع ذلك، يُطلب من المستخدم وصف الإجراءات التكرارية التي تقلل المشكلة إلى مجموعة من المشكلات الخطية.
- إدخال هندسي سهل عن طريق الوصف التحليلي للحدود بالقطع ، ولكن هذا البرنامج ليس نظام CAD ، على سبيل المثال، عندما يتقاطع حدان، يجب على المستخدم تحديد نقاط التقاطع.



- مولد شبكي تلقائي، يعتمد على خوارزمية Delaunay-Voronoi
- تناسب كثافة النقاط الداخلية مع كثافة النقاط الموجودة على الحدود.
- التكيف الشبكي المتباين على أساس المترية، يمكن حساب هذه المعايير تلقائياً من المصفوفة الهيسية لأي دالة في FreeFem++ .
- لغة إدخال مكتوبة عالية المستوى وسهلة الاستخدام .
- مجموعة كبيرة ومتنوعة من القيم الذاتية والمتجهات الذاتية كذلك الحلول الخطية المباشرة والتكرارية (LU, Cholesky, Crout, CG, GMRES, UMFPACK) .
- قرب سرعة التنفيذ المثلي (مقارنة بتطبيقات C++ المترجمة والمبرمجة مباشرة) .
- الرسومات المباشرة وإنشاء ملفات شبكية بتنسيق txt. و eps. و gnu. لمزيد من معالجة بيانات الإدخال والإخراج .

2.2 كيف نبدأ؟

كل هذه المعلومات هنا مفصلة في وثائق FreeFem++

1.2.2 التثبيت

قم أولاً بفتح الصفحة الإلكترونية التالية

<http://www.freefem.org/ff++/>

اختر النظام الأساسي الخاص بك: Linux ، Windows ، MacOSX أو انتقل إلى نهاية الصفحة للحصول على القائمة الكاملة للتنزيلات ثم قم بالتثبيت بالنقر المزدوج على الملف المناسب.

2.2.2 محرر النصوص

بالنسبة لنظام التشغيل Windows : قم بتثبيت برنامج notepad++ المتوفر على

<http://notepad-plus.sourceforge.net/uk/site.htm>

بالنسبة لنظام التشغيل MacOS : قم بتثبيت Smultron المتوفر على

<http://smultron.sourceforge.net>

نظام التشغيل Linux : قم بتثبيت Kate المتوفر على

<ftp://ftp.kde.org/pub/kde/stable/3.5.10/src/kdebase-3.5.10.tar.bz2>

3.2.2 الحفظ والتشغيل

يجب حفظ جميع أكواد FreeFem++ بامتداد الملف edp. ولتشغيلها، يمكنك النقر نقرا مزدوجا فوق الملف الموجود على نظام MacOS أو Windows

3.2 أنواع البيانات

يجب الإعلان عن كل متغير من نوع معين، في بيان تعريفه؛ ويتم فصل كل عبارة عن التي تليها بفاصلة منقوطة ”؛“
 يمكننا التعليق داخل وخارج باستخدام ”//“ كما هو الحال في C++، و التعليق على فقرة باستخدام
 ”/* paragraph */“ ومن أجل إجراء استراحة أثناء الحساب، يمكننا استخدام ”exit(0);“
 تسمح لغة FreeFem++ بمعالجة الأنواع الأساسية: الأعداد الحقيقية، المركبة، المصفوفات، الدوال، شبكات العناصر المنتهية...

1.3.2 المتغيرات الأساسية

- الصحيحة، مثال: `int a=1;`
- الحقيقية، مثال: `real b=1.;` (يجب وضع نقطة بعد العدد الحقيقي)
- العقدية، مثال: `complex c=1.+3i;`
- السلاسل، مثال: `stringtest="toto";`
- أشعة ذات مركبات حقيقية، مثال: `real[int]V(n);` حيث `n` هو حجم `v`
- أشعة ذات مركبات معقدة، على سبيل المثال: `complex[int]V(n);`
- مصفوفة ذات مركبات حقيقية، مثال: `real[int,int]A(m,n);`
- مصفوفة ذات مركبات معقدة، مثال: `complex[int,int]C(m,n);`
- شبكات العناصر المنتهية ثنائية الأبعاد (2D)، مثال: `meshTh;`
- فضاءات العناصر المنتهية ثنائية الأبعاد، مثال: `fespace Vh(Th,P1);`
- المشتقات:

$$dx = \frac{\delta}{\delta x} \quad dy = \frac{\delta}{\delta y}$$

$$dxy = \frac{\delta^2}{\delta x \delta y} \quad dyx = \frac{\delta^2}{\delta y \delta x} \quad dyz = \frac{\delta^2}{\delta y \delta z}$$

$$u_x v_x + u_y v_y = dx(u) * dx(v) + dy(u) * dy(v)$$

-التكاملات :

$$\text{int } 1d(Th, \Gamma)(u * v) = \int_{\Gamma} u.v dx \quad \Gamma \subset \mathbb{R}$$

$$\text{int } 2d(Th)(u * v) = \int_{\Omega} u.v dx dy \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{int } 3d(Th)(u * v) = \int_{\Omega} u.v dx dy dz \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

- ofstream للإخراج إلى الملف .
- ifstream للإدخال من ملف .
- real[int] تعريف متغير يقوم بتخزين أرقام حقيقية بفهرس عدد صحيح .
- func تعريف تابع بمتغيرات مستقلة .
- problem: تحديد مسألة edp دون حلها .
- solve تحديد مسألة edp وحلها .
- varf تحديد الصيغة التغيرية .

2.3.2 المتغيرات المحجوزة

- x, y, z الإحداثيات الحالية للنقطة
- عوامل التفاضل الحالية:
- $dx = \frac{\partial}{\partial x}, dy = \frac{\partial}{\partial y}, dz = \frac{\partial}{\partial z}, dxy = \frac{\partial}{\partial xy}, dxz = \frac{\partial}{\partial xz}, dyz = \frac{\partial}{\partial yz}, dxx = \frac{\partial}{\partial xx}, dyy = \frac{\partial}{\partial yy}, dzz = \frac{\partial}{\partial zz}$
- label الرقم المرجعي للحافة الذي تقع فيه النقطة الحالية وإلا 0
- region ارجاع رقم المنطقة للنقطة الحالية .
- P النقطة الحالية .
- N شعاع الوحدة الناظمي المتجه نحو خارج النطاق عند النقطة الحالية إذا كان يقع على الحافة .
- cin ، cout أوامر عرض/استرجاع البيانات من لغة C++ .
- endl الانتقال الى السطر الجديد .
- pi العدد π
- true و false المنطقية .
- i العدد التخيلي .
- lenedge يعطي طول الحافة الحالية .
- htriangle يعطي مقياس المثلث الحالي أي طول قطر الدائرة المحيطة به .
- nutriangle يعطي عدد المثلثات المرتبطة بالضلع الحالي .
- nuedge يعطي فهرس الحافة الحالية في المثلث (عدد صحيح) .
- ntonedge تعطي عدد المثلثات المجاورة للحافة الحالية (عدد صحيح) .
- orea تعطي مساحة المثلث الحالي (عدد صحيح) .
- adaptmesh تحدد الدقة المطلوبة وذلك لجعل الشبكة الجديدة أكثر دقة .
- hmin الحد الأدنى لحجم الحافة .
- hmax أقصى حجم للحافة وهو عدد حقيقي .
- Errg خطأ هندسي نسبي بشكل افتراضي .



3.3.2 العمليات الحسابية

| التعبير في freefem++ | الوظيفة | العامل |
|----------------------|-------------|--------|
| a+b | الجمع | + |
| a-b | الطرح | - |
| a*b | الضرب | * |
| a/b | القسمة | / |
| a%b | باقي القسمة | % |

نضيف إلى ذلك الحد الأدنى و الحد الأقصى لعدد من صحيحين a و b يتم الحصول عليهما بواسطة $\max\{a,b\}$ و $\min\{a,b\}$ على الترتيب.

4.3.2 الدوال الأساسية

نقدم بعض الدوال الأساسية في الجدول التالي:

| التعبير في freefem++ | الدالة |
|----------------------|--------------|
| exp(x) | e^x |
| log10(x) | $\log_{10}x$ |
| sin(x) | $\sin x$ |
| cos(x) | $\cos x$ |
| tan(x) | $\tan x$ |
| acos(x) | $\arccos x$ |
| tanh(x) | $\tanh x$ |
| asinh(x) | $\sin^{-1}x$ |

بالإضافة إلى الدوال الأولية التالية:

$$f(x)g(x) \quad f(x) + g(x)$$

$$f(x) - g(x) \quad f(x)/g(x)$$

• الصيغة العامة لكاتب تابع بمتغير واحد تكون كالتالي:

```
func type Nom_func (type variable) ;
{
    return déclaration_func ;
}
```

مثال:

```
func real f (real) ;
{
    return  $x^2 + 2x + 16$  ;
}
```

• الصيغة العامة لكاتب تابع بمتغيرين مستقلين تعطى بالشكل التالي:

`func` Nom_func= déclaration_func (x,y) ;

5.3.2 المصفوفات والأشعة

كما في ال Matlab، يمكننا تعريف شعاع كآتي: $U=1:2:10$; وهو عبارة عن شعاع من 5 قيم $U[i]=2*i+1$; حيث $i = \overline{0,4}$ وأيضا تحديد مصفوفة مثل $A=[[4,3,2], [3,2,1]]$; وهي مصفوفة بحجم 2×3 . يمكننا القيام ببعض العمليات على الأشعة والمصفوفات باستخدام FreeFem++:

```
1: real [ int ] u1 =[1 ,2 ,3] , u2 =2:4;
2: real u1pu2 =u1 '* u2;
3: real [ int ] u1du2 =u1 ./ u2;
4: real [ int ] u1mu2 =u1 .* u2;
5: matrix A=u1*u2 ' ;
6: matrix < complex > C=[ [1 ,1 i ] , [1+2 i ,.5*1 i ] ] ;
```

- 1- تحديد $u1$ و $u2$
- 2- إعطاء القيمة العددية ل $u1$ و $u2$ ($u1$ هو تبديل $u2$)
- 3- قسمة قيمة على قيمة .
- 4- ضرب قيمة بقيمة .
- 5- ضرب $u1$ و التحويل ل $u2$.
- 6- مصفوفة مركبة 2×3 .

4.2 الحلقات والشروط

1.4.2 الحلقات

يتم تنفيذ حلقات `for` و `while` في برنامج ال `freefem++` مع الكلمات الأساسية `break` و `continue`.

الحلقة `for`

الصيغة العامة:

```
for(initialization;condition
      ;change)
statement;
```

عمل الحلقة `for`:



أولا initialization يمثل القيمة الأولية للعداد (عداد الحلقة هو عبارة عن متغير)، ثانيا الشرط condition فإذا كان الشرط صحيحا، ينفذ الأمر change والذي يمثل مقدار الزيادة أو النقصان في عداد الحلقة، تكرر الخطوات ثانيا وثالثا لغاية أن يصبح الشرط غير صحيح.
مثال : يمكننا إجراء الحساب من 1 إلى 10 باستخدام الحلقة for:

```
int sum =0;
for ( int i =1; i <=10; i ++)
sum += i ;
```

الحلقة while

الصيغة العامة:

```
Intializing;
while condition
{
    statement;
    Update;
}
```

عمل الحلقة while:

- Intializing: القيمة الابتدائية المعطاة للمتغير والتي منها سيبدأ العد.
- Condition: الشرط .
- Update: مقدار الزيادة أو النقصان في قيمة المتغير في كل دورة .
- statement : الخطوات البرمجية التي تنفذ عدد من المرات.

يتم تنفيذها بشكل متكرر حتى يصبح الشرط غير صحيح ويمكن أيضاً حساب المجموع من 1 إلى 5 بواسطة حلقة while

في هذا المثال ، نريد توضيح كيفية الخروج من حلقة في منتصفها باستخدام break وكيف سيتخطى الدالة continue الجزء من continue إلى نهاية الحلقة:

```
1 : int i=1, sum=0;
2 : while ( i<=10) {
3 : sum += i ; i++;
4 : if (sum>0) continue ;
5 : if ( i==5) break ;
6 : }
```



2.4.2 الشروط

التركيب الشرطي البسيط *if*

الصيغة العامة:

```
if(condition)
    statement;
```

عمل *if*:

- إذا كان الشرط *condition* صحيحا ينفذ الأمر *statement*.
 - إذا كان المطلوب تنفيذ جملة من الأوامر ضمن شرط ما، فيجب وضع هذه الجملة ضمن الرمز { }
- كإيلي:

```
{statement-1
    statement-2
    ...
    statement-n
}
```

التركيب الشرطي (*if else*)

الصيغة العامة:

```
if(condition)
    statement-1;
else
    statement-2;
```

عمل *if else*:

- إذا كان الشرط *condition* صحيحا ينفذ الأمر *statement-1*، أما إذا كان الشرط غير صحيح ينفذ الأمر *statement-2*

3.4.2 إدخال وإخراج البيانات

تشبه صيغة عبارات الإدخال/الإخراج صيغة C++ لفتح ملف للقراءة:

```
ifstream name(nom_fichier);
```

لفتح ملف للكاتب:

`ofstream name(nom_fichier);`

5.2 بناء المجال Ω

1.5.2 الشبكة

لإنشاء شبكة $n \times m$ في المستطيل $[x_1, x_0][y_1, y_0]$ نستعمل الأمر:

`mesh Nom_maillage= square(n,m,[x0+(x1-x0)*x,y0+(y1-y0)*y]);`

2.5.2 الحدود

نعرف حدود منطقة معينة بالصيغة التالية :

`border Nom_border (t= debut,fin) {x=x(t);y=y(t);label=nombre_label;}`

3.5.2 التثليث

الصيغة العامة هي:

`mesh Mesh-Name=buildmesh($\Gamma_1(m_1)+\dots+\Gamma_J(m_j)$);`

حيث:

$$\Gamma_j = \{(x, y) | x = \varphi_x(t), y = \varphi_y(t), a_j \leq t \leq b_j\}$$

تمثل حدود المجال، و m_j تشير الى عدد الرؤوس التي يجب ان تكون عليها Γ_j حيث

$$\Gamma = \cup_{j=1}^J \Gamma_j$$

و يمكننا تغيير اتجاه الحدود بتغيير اشارة m_j .

مثال:

نلاحظ أنه في FreeFem++ ، يتم وصف المجال من خلال حدوده والتي يتم توجيهها ضمناً بواسطة الإعدادات.

لنفترض أن Ω هو مستطيل معرف بحدوده $\partial\Omega = [-5, 5] \times [-1, 1]$ حيث رؤوسه هي النقاط $A(-5, -1)$ ، $B(5, -1)$ ، $C(5, 1)$ ، $D(-5, 1)$ يجب علينا تحديد الحدود AB ، BC ، CD و DA الخاصة بـ

$\partial\Omega$ باستخدام الكلمة الأساسية `border` ، ثم يتم إنشاء التثليث T_h للمجال Ω تلقائياً باستخدام الكلمة

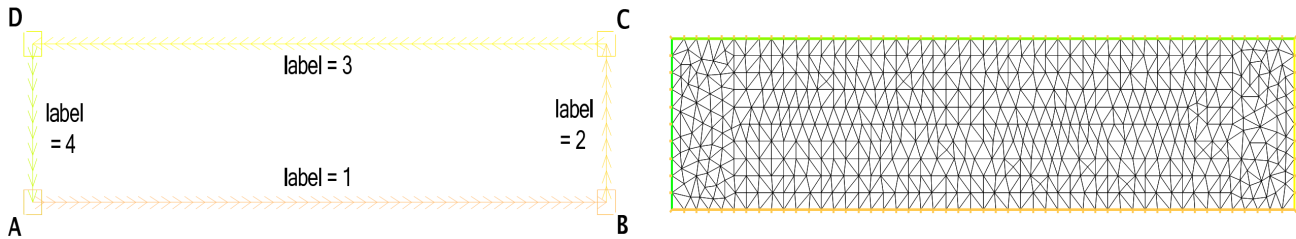
الأساسية `buildmesh` .

```

1 : real Dx =.2;
2 : int aa =-5,bb =5, cc =-1,dd =1;
3 : border AB (t = aa , bb){ x = t ; y = cc; label = 1;};
4 : border BC (t = cc , dd){ x = bb; y = t ; label = 2;};
5 : border CD (t = bb , aa){ x = t ; y = dd; label = 3;};
6 : border DA (t = dd , cc){ x = aa; y = t ; label = 4;};
7 : mesh Th = buildmesh ( AB( floor ( abs (bb -aa)/Dx))
+ BC( floor ( abs (dd -cc)/Dx)) + CD( floor ( abs (bb -aa)/Dx))
+ DA( floor ( abs (dd -cc)/Dx) ) );
10 : plot ( AB( floor ( abs (bb -aa)/Dx)) + BC( floor ( abs (dd -cc)/Dx))
+ CD( floor ( abs (bb -aa)/Dx)) + DA( floor ( abs (dd -cc)/Dx)) );
12 : plot ( Th , ps = " mesh . eps " );

```

موضحة في الشكل التالي:



شكل 2.1: إنشاء الحدود والتثليث

نجد صعوبة في التعبير عن حافة Ω وفق لغة freefem++ و الأكثر من ذلك تشبيكها ، ويزداد الأمر صعوبة كلما كانت Ω ذات شكل معقد أو أردنا أن نشبكها وفق شكل معين ، و عليه نلجأ إلى إستخدام برامج للتغلب على هذه الصعوبات .

- نذكر منها: Mathematica ، Matlab ، Medit ، Gnuplot .
- من أجل Gnuplot يمكننا حفظ البيانات بالامتداد .gnu .

```

{ ofstream gnu ( " plot . gnu " ); // or plot . gp
// ofstream gnu ( " plot ." +1000+ k ". gnu " ); // to save the data
for ( int i =0; i <=n; i ++ )
gnu <<xx[ i ]<< " " <<yy[ i ]<< endl ; // to plot yy [ i ] vs xx [ i ]
}

```

- من أجل Medit يمكننا حفظ البيانات بالامتداد .Mesh .

```

load " medit "
int k =0;
savemesh (Th , " solution . " +(1000+ k)+ " . mesh " );
savesol ( " solution . " +(1000+ k)+ " . sol " ,Th ,uh);

```

```
medit ( " solution " ,Th ,uh); // to plot the solution here
k +=1;
```

• من أجل Matlab يمكننا حفظ البيانات بالامتداد .bb

```
{ ofstream file ( " solution . bb " );
file << " 2 1 1 " << Vh. ndof << " 2 \ n" ;
for ( int j =0;j<Vh. ndof ; j ++)
file << uh [][] j << endl ;
}
```

• من أجل Mathematica يمكننا حفظ البيانات بالامتداد .txt

```
i n t k =0;
{ ofstream ff( " uhsol . " +(1000+ k)+ " . txt " );
for ( int i =0; i <Th.nt; i ++) {
for ( int j =0; j <3; j ++)
ff <<Th[ i ][j]. x << " " << Th[ i ][j]. y << " " <<uh [][] Vh( i ,j)]<< endl ;
ff <<Th[ i ][0]. x << " " << Th[ i ][0]. y << " " <<uh [][] Vh( i ,0) ]<< " \ n" ;
}
k +=1;
```

ملاحظة (1)

بالنسبة ل freefem يتم حفظ البيانات وفق الامتداد .msh

4.5.2 حفظ وقراءة التشبيك

لحفظ التشبيك نستعمل الأمر التالي:

```
savemesh( Nom_maillage, Nom_fichier );
```

لقراءة التشبيك نستعمل الأمر:

```
readmesh( Nom_fichier );
```

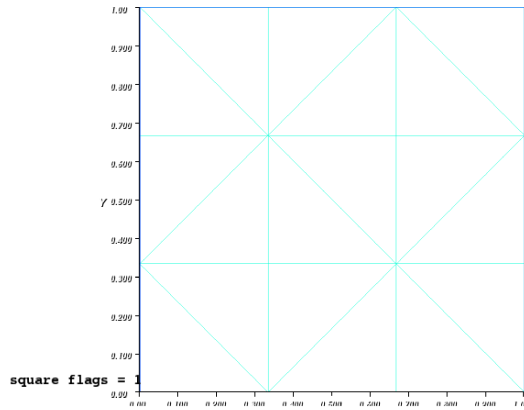
5.5.2 إنشاء شبكة

```
1 : mesh Th0 = square(10 , 10);
2 : mesh Th1 = square(4, 5);
3 : real x0 = 1.2;
4 : real x1 = 1.8;
```



```
5 : real y0 = 0;
6 : real y1 = 1;
7 : int n = 5;
8 : real m = 20;
9 : mesh Th2 = square(n, m, [x0+(x1-x0) *x, y0+(y1-y0) *y]);
10 : for (int i = 0; i < 5; ++i){
11 :   int[ int] labs = [ 11, 12, 13, 14];
12 :   mesh Th3 = square(3, 3, flags=i, label=labs, region=10);
13 :   plot(Th3, wait=1, cmm="square flags = "+i );
14 : }
```

من النتائج المتحصلة عليها الشبكة الموضحة في الشكل التالي:



شكل 2.2

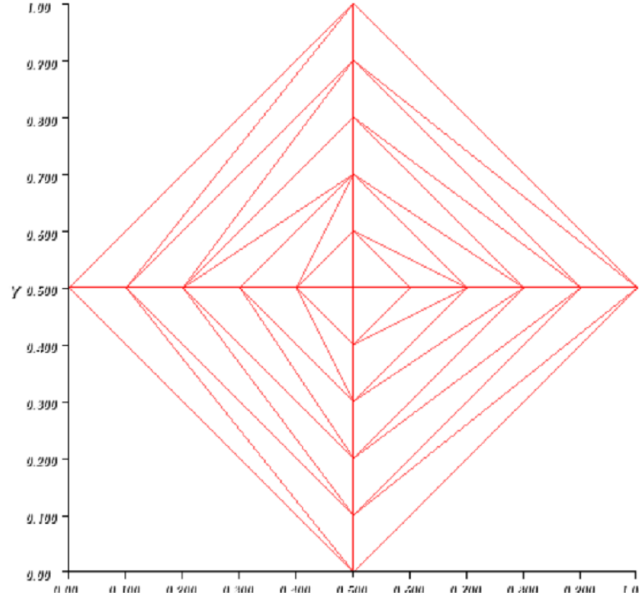
6.5.2 بناء شبكة فارغة

عندما نريد تحديد مساحة العناصر المنتهية على حدود فإننا نأتي بفكرة شبكة بدون نقاط داخلية (إستدعاء شبكة فارغة) لذا فإن وظيفة الإفراغ تقوم بإزالة كل النقاط الداخلية للشبكة.

```
1 : {
2 : mesh Th = square(10, 10);
3 : int[int] ssd(Th.nt);
4 : for(int i = 0; i < ssd.n; i++){
5 :   int iq = i/2;
6 :   int ix = iq%10;
7 :   int iy = iq/10;
8 :   ssd[i] = 1 + (ix>=5) + (iy>=5)*2;
9 : }
10: Th = emptymesh(Th, ssd);
11: plot(Th);
```

```
12: savemesh(Th, "emptymesh.msh");
13: }
```

نتحصل على :



شكل 2.3: شبكة فارغة

7.5.2 تحديد جزء من شبكة

عملية صغيرة لإنشاء شبكة مقطوعة من شبكة فيما يتعلق بوظيفة منطقية. المعلمتان تسميان:

label : يعين رقم التسمية لعنصر حد جديد .

split : يحدد المستوى n لتقسيم المثلث، حيث ينقسم كل مثلث إلى $n \times n$

لإنشاء الشبكة $Th3$ حيث يتم تقسيم كل مثلثات الشبكة إلى 3×3 ، فقط أكتب :

```
mesh Th3=turc(Th,1,split=3);
```

يقوم مثال truncmesh.edp ببناء جمع شبكات "trunc" الحامل لتابع الأساس للفضاء $V_h(\text{cf. abs}(u) > 0)$ ، قسم كل المثلثات إلى 5×5 ، ثم ضع رقم التسمية 2 على الحدود الجديدة .

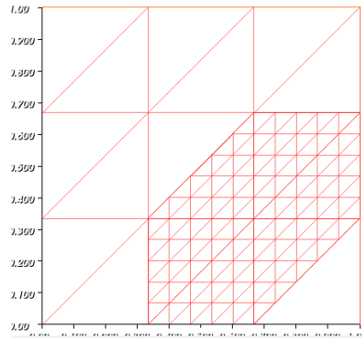
```
1 : mesh Th=square(3,3);
2 : fespace Vh(Th,P1);
3 : Vh u ;
4 : int i, n=u.n;
5 : u=0;
6 : for (i=0;i<n;i++)
7 : {
```

```

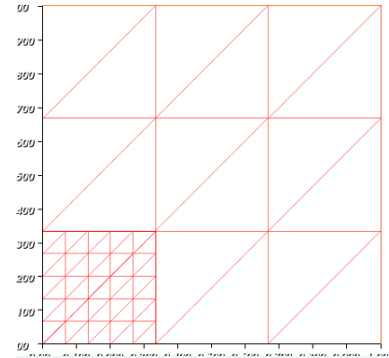
8 : u[] [i]=1;
9 : plot(u,wait=1);
10 : mesh Sh1=trunc(Th,abs(u)>1.e-10,split=5,label=20);
11 : plot(Th,Sh1,ps="trunc"+i+".eps");
12 : u[] [i]=0;
13 : }

```

نتحصل على :



شكل 2.5: شبكة لحامل الوظيفة $p1$ رقم 6
مقسمة إلى 5×5



شكل 2.4: شبكة لحامل الوظيفة $p1$
رقم 0، مقسمة إلى 5×5

8.5.2 تجزئة التشبيك

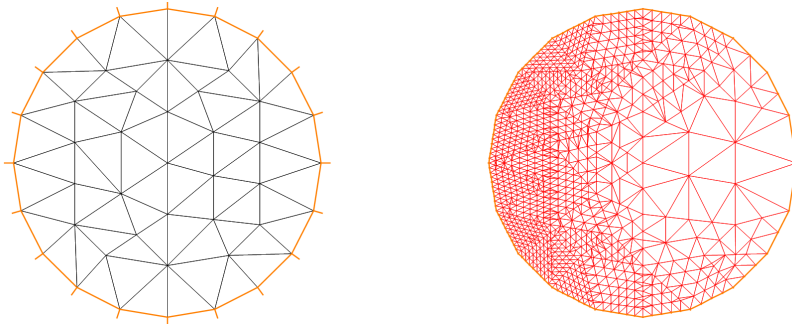
طرق أخرى لتقسيم مثلث الشبكة :

```

1 : {
2 : assert(version>=1.37);
3 : border a(t=0,2*pi){x=cos(t);y=sin(t);label=1;}
4 : mesh Th=buildmesh(a(20));
5 : plot(Th,ps="nosplitmesh.eps");
6 : Th=splitmesh(Th,1+5*(square(x-0.5)+y*y));
7 : plot(Th,ps="splitmesh.eps");
8 : }

```

نتحصل على :



شكل 2.6: شبكة التقسيم الأولية والثانوية .

9.5.2 تكييف شبكي موحد

```

1 : mesh Th = square(2, 2);
2 : plot(Th, wait=true);
3 :
4 : Th = adaptmesh(Th, 1. /30. , IsMetric=1, nbvx=10000);
5 : plot(Th, wait=true);
6 :
7 : Th = adaptmesh(Th, 1. /30. , IsMetric=1, nbvx=10000);
8 : Th = adaptmesh(Th, 1. /30. , IsMetric=1, nbvx=10000);
9 : plot(Th, wait=true);

```

10.5.2 تكييف التثليث

```

1 : border b1(t=0,1.0){x=t; y=0; label=1;};

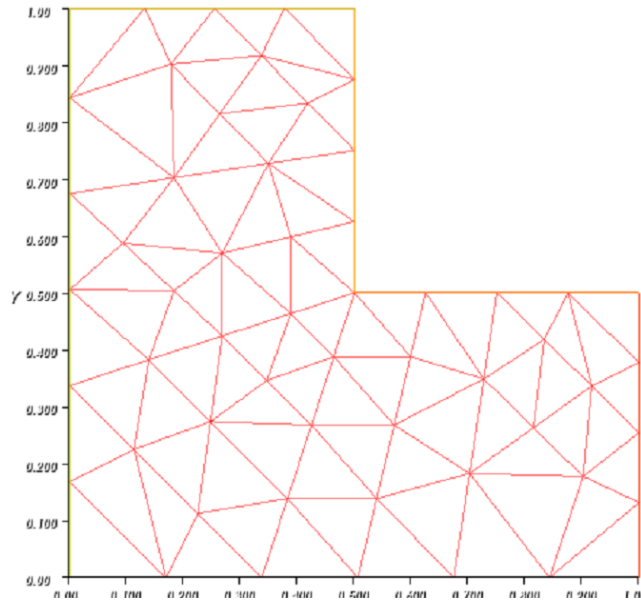
```

```

2 : border b2(t=0,0.5){x=1; y=t; label=2;};
3 : border b3(t=0,0.5){x=1-t; y=0.5;label=3;};
4 : border b4(t=0.5,1){x=0.5; y=t; label=4;};
5 : border b5(t=0.5,1){x=1-t; y=1; label=5;};
6 : border b6(t=0.0,1){x=0; y=1-t;label=6;};
7 : mesh Th= buildmesh (b1(6) + b2(4) + b3(4) +b4(4) + b5(4) + b6(6));
8 : plot(Th, wait=true);

```

فنتحصل على ما هو مبين في الشكل التالي:



شكل 2.7: شبكة التكييف الأولى

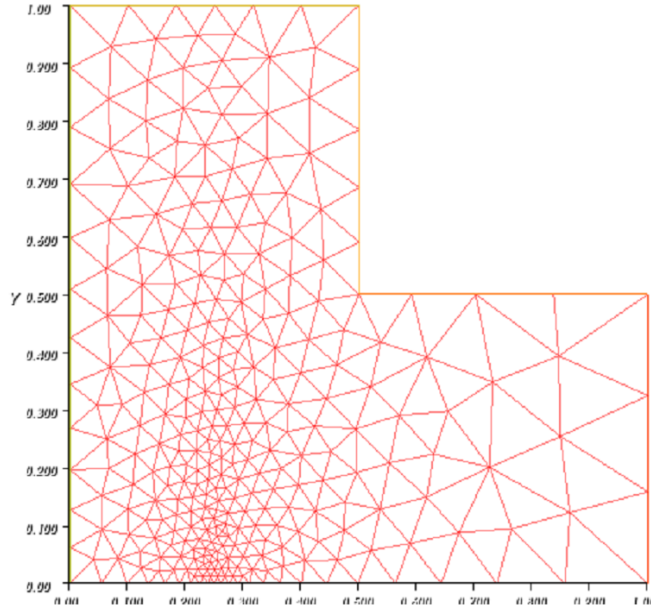
إذا أردنا أن يتم تكييف التليث Th مع دالة $h = 0.01 + \frac{1}{5} |x - \frac{1}{4}| + \frac{1}{20}y \in H$ نضيف الأسطر التالية (نقوم بتنفيذ أمر التكييف مرتين عمداً)

```

9 : func h= 0.01 +0.2*abs(x-0.25) +0.05*y;
10 : func metric=1/h^2;
11 : Th=adaptmesh(Th, metric,0,metric, IsMetric=true);
12 : Th=adaptmesh(Th, metric,0,metric, IsMetric=true);
13 : plot(Th,wait=true, ps="pic.eps");

```

وبالتالي نتحصل إضافة لما هو في الشكل السابق على :



شكل 2.8: شبكة التكيف الثانية

يعد التعديل الشبكي أداة قوية للغاية عندما يختلف حل المشكلة محليا و بشكل حاد. لتسريع التكيف نغير يدويا معلمة إفتراضية ل adaptmesh والتي تحدد الدقة المطلوبة وذلك لجعل الشبكة الجديدة أكثر دقة، ومن خلالها نحصل على ميل جيد للحل النهائي بالقرب من نقطة التقاطع.

6.2 التثليث المنتظم

S مجموعة، يحدد قطر S بواسطة

$$\text{diam}(s) = \sup_{x, y \in S} |x - y|$$

السلسلة T_h من Ω تكون منتظمة إذا إستوفى ما يلي :

$$1 - \lim_{h \rightarrow 0} \max\{\text{diam}(T_k) | T_k \in \tau_h\}$$

-2 يوجد $\delta > 0$ مستقل عن h يحقق:

$$\frac{\rho(T_k)}{\text{diam}(T_k)} \geq \delta$$

من أجل $T_k \in \tau_h$ حيث $\rho(T_k)$ هو قطر الدائرة ل T نضع

$$h(\tau_h) = \max\{\text{diam}(T_k) | T_k \in \tau_h\}$$

التي يتم الحصول عليها بواسطة:

```
meshTh=.....;
fespace Ph(Th,P0);
Ph h=hTriangle;
cout«"size of mesh ="«h[]].max ;
```

7.2 فضاء العناصر المنتهية

1.7.2 تعريف الفضاء التقريبي

نستعمل الصيغة التالية:

```
fespace Nom_espace ( Nom_maillage, type_elements finis );
```

حيث:

type_elements finis تمثل نوع العناصر المنتهية من القائمة التالية:

(P0,P03d,P1,P13d,P1dc,P1b,P1b3d,P2,P23d, P2b, P2dc, P3, P3dc, P4, P4dc, Morley, P2BR, RT0, RT03d, RT0Ortho, Edge03d, P1nc, RT1, RT1Ortho, BDM1, BDM1Ortho, TDNNS1)

الأنواع المعروفة للعناصر المنتهية

P0

$$P0_h = \{v \in (\Omega) \quad \forall K \in \Gamma_h \quad \alpha_k \in \mathbb{R} : v|_K = \alpha_k\}$$

P1

$$P1_h = \{v \in H^1(\Omega) \quad \forall K \in \Gamma_h \quad v|_K \in P_1\}$$

P2

$$P2_h = \{v \in H^1(\Omega) \quad \forall K \in \Gamma_h \quad v|_K \in P_2\}$$

حيث P2 هي مجموعة كثيرات الحدود ل \mathbb{R}^2 من الدرجة $2 \geq$

2.7.2 طرح الشكل التغيري

نستعمل الصيغة التالية:

```
problem Nom_pb(u,v)=a(u,v)-l(v)+(conditions aux limits );
```

للحصول على الحل نكتب الأمر:

```
Nom_pb;
```

3.7.2 الشروط الحدودية

نستعمل الأمر `on` كما يلي:

```
on (num1,numk,u=g);
```

4.7.2 إظهار النتائج

نستعمل الصيغة:

```
plot (var1,[var2,var3],...[options list] );
```

5.7.2 wait

`wait=true/false` يحدد الأمر ما إذا كانت النافذة البيانية ستغلق على الفور أم لا، إذا اخترنا `true` سينتظر البرنامج نوع الإجراء من لوحة المفاتيح:

+ - : للتكبير و التصغير.
r : لتنشيط الصفحة.
p : للحفظ.

8.2 حل مسألة Poisson باستعمال برنامج freefem++

نستخدم برنامج freefem++ في حل مسألة poisson التالية:

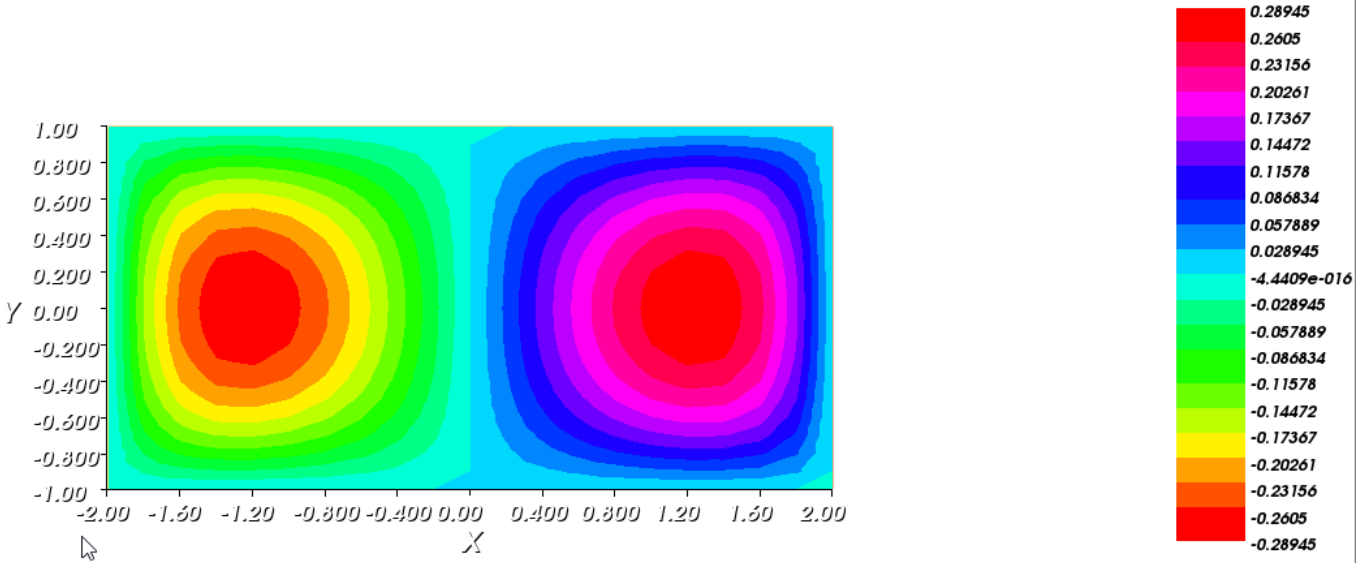
جد $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ التي تحقق:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in \Gamma \end{cases}$$

حيث: $\Omega =]-2, 2[\times]-2, 2[$ و من أجل التابع $f(x, y) = x * \cos(y)$ وفق الخوارزمية المرفقة:

```
1 : func f=x*cos(y);
2 : mesh Th=square(20,20, [-2+4*x, -1+2*y]);
3 : plot(Th,wait=1);
4 : fespace Vh(Th,P1);
5 : Vh uh,vh;
6 : problem poisson(uh,vh,solver=LU)=
7 : int2d(Th) (dx(uh)*dx(vh)+dy(uh)*dy(vh))-int2d(Th) (f*vh)+on(1,2,3,4,uh=0);
8 : poisson;
9 : plot(uh,wait=1,fill=true,value=true);
```

نتحصل على الحل بالشكل الموالي:



شكل 2.9: إظهار الحل u

شرح الخوارزمية

- 1- تعريف التابع f .
- 2- إنشاء شبكة تقسيم المجال مربع الشكل Th .
- 3- رسم الشبكة Th .
- 4- تحديد فضاء العناصر المنتهية V_h واعتبار u_h و v_h عنصرين منه.
- 5- تحديد الصيغة التغيرية.
- 6- الإعلان عن مشكلة بواصون وحلها باستخدام طريقة LU.
- 7- عرض النتيجة.

9.2 رسم دالة اختبارية

يمكن كذلك وضع خوارزمية لرسم دالة اختبارية باستعمال freefem++.

شرح الخوارزمية

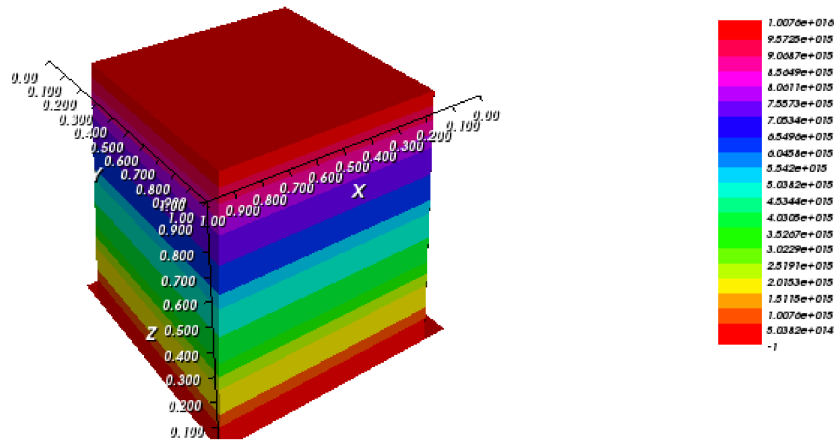
- 1- تحديد الشبكة 10×10 .
- 2- تحديد فضائي العناصر المنتهية V_h و N_h بالتتابع P_1 و P_0 على الترتيب.

- 3- تحديد تابع ثابت f وتعيين الشكل ثنائي الخطية حيث u يعدم في الحواف.
- 4- تعيين المصفوفة A باستعمال شكل الثنائي الخطية على الفضاء V_h .
- 5- تعيين الشعاع $chii$ وكذا ca باعتباره الشعاع مع قسمة مربكاته مع أكبر مركبة.
- 6- رسم الحل على الشبكة و تلوين عناصرها.
- 7- تحديد التوابع ϕ ، ϕ' ، ϕ'' .
- 8- إخراج قيم التوابع ϕ ، ϕ' ، ϕ'' عند 3.
- 8- تحديد التابع J كذا إخراج الحل الأصغري و الحل الأعظمي.
- 9- تحديد التابع ff .

```

1 : mesh th=square(10,10);fespace Vh(th,P1),Nh(th,P0);
2 : Vh u,alpha,Alpha,FF=-1,chii,Chi,u1;func f=1; varf a(u,v)=on(1,2,3,4,u=0);
3 : matrix A=a(Vh,Vh,tgv=1);chii []=A^-1*FF[];real ca=chii [].max;chii []/=ca;Chi=-chii;
4 : plot(Chi,fill=1,value=1);
5 : func real phi(real w){return w-log(w+1);};
6 : func real dphi(real w){return w/(w+1);};
7 : func real ddphi(real w){return 1/((w+1)^2);};
8 : func real g(real w){return sqrt(phi(w));};
9 : cout<<phi(3)<<"          "<<dphi(3)<<"          "<<ddphi(3)<<"          "<<g(3)<<endl;
10 : func real J(real[int] & uu){
11 : uu=u[];real r=int2d(th)(phi( dx(u)^2+dy(u)^2 )-f*u);
12 : cout << "J(x) =" << r << " " << uu.min << " " << uu.max << endl;
13 : return r;};;
14 : Vh ww; func ff=(x^2+y^2)*cos(pi*x);u=0;
15 : //cout<<J(uu)<<endl;

```



شكل 2.10: رسم دالة اختبارية

10.2 رسم تابع فوق تابع آخر

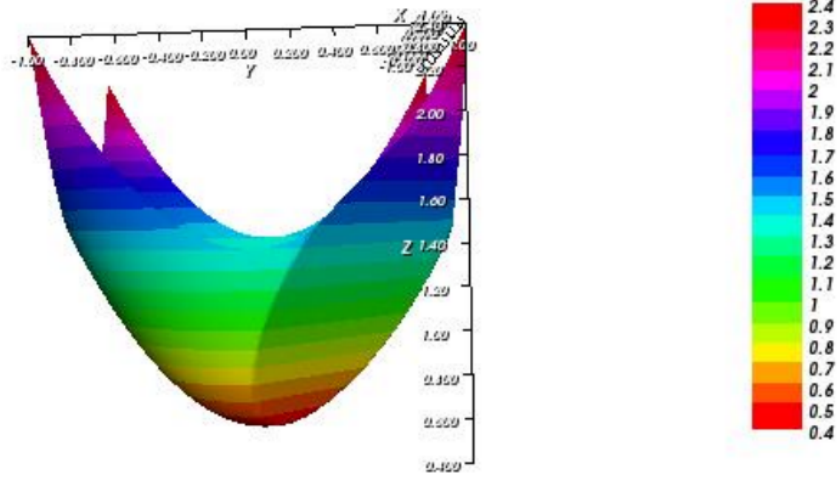
شرح الخوارزمية

- 1- تحديد الشبكة 40×40 في المربع $[-1, 1]^2$.
- 2- تحديد فضاء العناصر المنتهية V_h بالتتابع P_2 .
- 3- تحديد التتابع U ، F و G في الفضاء V_h .
- 4- رسم شبكة التتابع F و G .
- 5- تحديد التابع U_{ad} كحد أقصى لقيم u_1 و u_2 ثم U .
- 6- إظهار الرسم.

```

1: mesh th=square(40,40,[-1+2*x,-1+2*y]);
2: fespace Vh(th,P2); Vh F=x^2+y^2+0.4,G=x+y,U; plot(F,G,fill=1,value=1);
3: func real[int] Uad(real[int] U1,real[int] U2){
4: Vh u1,u2,u3; u1[]=U1; u2[]=U2;
5: int n1=Vh.ndof; for(int k=0;k<n1;k++){if(u1[][k]>u2[][k]) u3[][k]=u1[][k];
6: else u3[][k]=u2[][k]; }
7: return u3[];}
8: U[]=Uad(F[],G[]);
9: plot(U,fill=1,value=1);

```



شكل 2.11: رسم تابع فوق تابع

الفصل الثالث

خوارزميات الأمثلة دون قيود

1.3 الخوارزميات

في هذا المقطع سنحاول التعرف على الشكل العام للخوارزميات المتبعة في البحث عن حدود المتتالية $(x^{(k)})_k$ من الفضاء $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ من أجل إيجاد الحلول التقريبية للمسألة $f(x) = 0 \dots (I)$

تعريف 1.1.3:

الخوارزمية هي تطبيق $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ يسمح بتحديد $(x^{(k)})_k$ من الفضاء \mathbb{R}^n وفق العلاقة

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, & \text{معطى} \\ x^{(k+1)} = \mathcal{F}(x^{(k)}), & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.3)$$

تعريف 2.1.3:

القول عن الخوارزمية (1.3) أنها متقاربة يعني أن $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* \in \mathbb{R}^n$

ملاحظة (1)

من المهم ضمان تقارب الخوارزمية عبر فرضيات مخصصة، لكن سرعة التقارب والتعقيد من العوامل أيضاً يجب مراعاتها عند استخدام (أو إنشاء) الخوارزمية، ومن المهم أيضاً أن تكون الطريقة سريعة قدر الإمكان مع الحفاظ على الدقة والاستقرار وهما معياران أساسيان للخوارزمية إضافة إلى معيار قياس سرعة التقارب والمعرف بالعلاقة $e_k = \|x^* - x^{(k)}\|$.

تعريف 3.1.3: (معيار التقارب)

لتكن $(x^{(k)})_k$ متتالية مولدة باستعمال الخوارزمية (1.3) ومتقاربة نحو x^* . عندئذ، القول عن الخوارزمية (1.3) أنها متقاربة خطياً يعني أن

$$\exists C \in [0, 1[, \exists k_0 \in \mathbb{N} : e_{k+1} \leq C e_k, \quad \forall k \geq k_0.$$

ملاحظة (2)

هناك أنواع أخرى من التقاربات نذكر منها

التقارب فوق خطي: القول عن الخوارزمية (1.3) أنها متقاربة فوق خطي إذا كان $e_{k+1} \leq \alpha_k e_k$ حيث $(\alpha_k)_k$ متتالية موجبة تماماً متقاربة نحو الصفر. وكحالة خاصة إذا كانت $(\alpha_k)_k$ متتالية هندسية فإننا نقول عن الخوارزمية (1.3) أنها متقاربة هندسياً.

التقارب من الرتبة p : القول عن الخوارزمية (1.3) أنها متقاربة من الرتبة p يعني أن

$$\exists C \geq 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : e_{k+1} \leq C(e_k)^p, \quad \forall k \geq k_0.$$

وكحالة خاصة إذا كانت $p = 2$ فإن التقارب نسميه تقاربة تربيعية.

2.3 خوارزميات في فضاء أحادي البعد

شعاع الإنحدار

تعريف 1.2.3:

ليكن لدينا التابع $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ قابل للمفاضلة بحيث يوجد $x \in \mathbb{R}^n$ يحقق $\nabla J(x) \neq 0$ وليكن $d \in \mathbb{R}^n$ القول عن d أنه شعاع إنحدار للتابع J عند x يعني وجود $\alpha > 0$ يحقق العلاقة التالية

$$J(x + \rho d) \leq J(x), \quad \forall \rho \in [0, \alpha[$$

**نظرية 1.2.3:**

ليكن لدينا التابع $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ قابل للمفاضلة بحيث يوجد $x \in \mathbb{R}^n$ يحقق $\nabla J(x) \neq 0$ وليكن $d \in \mathbb{R}^n$ القول عن d أنه شعاع إنحدار للتابع J عند x إذا وفقط إذا كان $\langle \nabla J(x), d \rangle \leq 0 \dots (*)$

الإثبات: لكون J قابلة للمفاضلة عند x مع كون d شعاع إنحدار لـ J عند x فإنه لدينا

$$\langle \nabla J(x), d \rangle = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J(x + \rho d) - J(x)}{\rho} \leq 0$$

والآن، بفرض أن العلاقة (*) محققة نجد من النشر المحدود من الرتبة الأولى للتابع J في جوار x

$$J(x + \rho d) = J(x) + \rho \langle \nabla J(x), d \rangle + o(\|\rho d\|) \dots (1)$$

مع العلم أن $\lim_{\rho \rightarrow 0} o(\|\rho d\|) = 0$ مع إهمال الباقي هذا الأخير والشرط (*) نجد (1) تستلزم وجود

$\alpha > 0$ يحقق العلاقة التالية $\frac{J(x + \rho d) - J(x)}{\rho} \leq 0$ من أجل كل $\rho \in [0, \alpha[$ ولكون $\rho \geq 0$ فإن $J(x + \rho d) - J(x) \leq 0$

1.2.3 خوارزمية الإنحدار

نسمي خوارزمية الإنحدار كل خوارزمية تحقق العلاقة التراجعية التالية

$$\begin{cases} x^{(0)}, & \text{معطى} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d^{(k)}, & \forall k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.3)$$

حيث x_0 يسمى الشعاع الابتدائي للخوارزمية و $d^{(k)}$ فهو شعاع الإنحدار لتابع الكلفة J أو نقول شعاع الإنحدار للخوارزمية أما ρ^k فيسمى مقدار خطوة الخوارزمية عند العملية التكرارية k . وهكذا نجد

$$J(x^{(k+1)}) \leq J(x^{(k)}), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

ملاحظة (1)

هناك أنواع عديدة من خوارزميات الإنحدار والاختلاف بينهم يكمن في طريقة إختيار الشعاع $d^{(k)}$ ومقدار الخطوة ρ_k . كما أن هناك طرق وأساليب أخرى تعتمد على الاستقطاب ونتائج نظرية القيم المتوسطة.

2.2.3 خوارزمية القطع الذهبي

في هذا المقطع نعتبر $J: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ونقوم ببناء المتتالية $(x^{(k)})_k$ التي تحقق العلاقة (3.3) وذلك وفقا لمتتالية من المجالات من الشكل $[a_k, b_k]$ التي تحتوي على الحد الأصغري x^* لتابع الكلفة J على مجال معلوم $[a, b]$



يحتوي x^* مع أخذ $x^{(k)} = \frac{a_k + b_k}{2}$. من أجل هذا، للانتقال من المجال $[a_k, b_k]$ إلى المجال $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ مع اعتبار $[a_0, b_0] = [a, b]$ نتبع المراحل التالية:

الخطوة رقم k : نختار a' و b' ضمن المجال $[a_k, b_k]$ بحيث $a_k < a' < b' < b_k$ ثم نحسب كل $J(a')$ و $J(b')$. نحلل هذه الخطوة نميز ثلاث حالات

1- الحالة الأولى: إذا كان $J(a') < J(b')$ ففي هذه الحالة لدينا x^* يقع في المجال $[a_k, b']$. من أجل هذا نعرف المجال الجديد $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, b']$.

2- الحالة الثانية: إذا كان $J(a') > J(b')$ ففي هذه الحالة لدينا x^* يقع في المجال $[a', b_k]$. من أجل هذا نعرف المجال الجديد $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a', b_k]$.

3- الحالة الثالثة: إذا كان $J(a') = J(b')$ ففي هذه الحالة لدينا x^* يقع في المجال $[a', b']$. من أجل هذا نعرف المجال الجديد $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a', b']$.

إلى هنا. نطرح السؤال التالي: كيف نختار a' و b' في كل خطوة من أجل الوصول إلى x^* أو إلى قيمة تقريبية بها بأكبر عدد ممكن من الأرقام المعبرة وبأقل الخطوات الممكنة. من أجل هذا نقترح أن نختار عامل التخفيض $\tau \in]0, b - a[$ من المجال $[a_k, b_k]$ إلى المجال $[a_{k+1}, b_{k+1}]$. وعليه، نجد

$$a' = a_k + \frac{1}{\tau^2}(b_k - a_k) \quad ; \quad b' = a_k + \frac{1}{\tau}(b_k - a_k)$$

وغالبا من نأخذ τ يساوي قيمة العدد الذهبي $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ من هنا أخذت اسم خوارزمية العدد الذهبي.

تطبيق: نأخذ مثال تطبيقي للتابع $f(x) = 2x^2 - \ln(x) - e^x$ على المجال $[0.2, 1.8]$ حيث نوضح الخوارزمية في

الجدول التالي مع تقريب النتائج إلى 10^{-7} .

| k | a_k | b_k | a' | b' | $f(a')$ | $f(b')$ | $x^{(k)}$ | $ x^{(k+1)} - x^{(k)} $ |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|-----------|-------------------------|
| 0 | 0.2000000 | 1.8000000 | 0.8111456 | 1.1888544 | -0.7252626 | -0.6295583 | 1.0000000 | |
| 1 | 0.2000000 | 1.1888544 | 0.5777088 | 0.8111456 | -0.5657706 | -0.7252626 | 0.6944272 | 0.305572809 |
| 2 | 0.5777088 | 1.1888544 | 0.8111456 | 0.9554175 | -0.7252626 | -0.7285037 | 0.8832816 | 0.188854382 |
| 3 | 0.8111456 | 1.1888544 | 0.9554175 | 1.0445825 | -0.7285037 | -0.7035237 | 1.0000000 | 0.116718427 |
| 4 | 0.8111456 | 1.0445825 | 0.9003106 | 0.9554175 | -0.7342334 | -0.7285037 | 0.9278640 | 0.072135955 |
| 5 | 0.8111456 | 0.9554175 | 0.8662526 | 0.9003106 | -0.7336170 | -0.7342334 | 0.8832816 | 0.044582472 |
| 6 | 0.8662526 | 0.9554175 | 0.9003106 | 0.9213595 | -0.7342334 | -0.7329924 | 0.9108351 | 0.027553483 |
| 7 | 0.8662526 | 0.9213595 | 0.8873016 | 0.9003106 | -0.7343890 | -0.7342334 | 0.8938061 | 0.017028989 |
| 8 | 0.8662526 | 0.9003106 | 0.8792616 | 0.8873016 | -0.7342454 | -0.7343890 | 0.8832816 | 0.010524494 |
| 9 | 0.8792616 | 0.9003106 | 0.8873016 | 0.8922706 | -0.7343890 | -0.7343857 | 0.8897861 | 0.006504495 |
| 10 | 0.8792616 | 0.8922706 | 0.8842306 | 0.8873016 | -0.7343560 | -0.7343890 | 0.8857661 | 0.004019999 |
| 11 | 0.8842306 | 0.8922706 | 0.8873016 | 0.8891996 | -0.7343890 | -0.7343959 | 0.8882506 | 0.002484496 |
| 12 | 0.8873016 | 0.8922706 | 0.8891996 | 0.8903726 | -0.7343959 | -0.7343952 | 0.8897861 | 0.001535503 |
| 13 | 0.8873016 | 0.8903726 | 0.8884746 | 0.8891996 | -0.7343945 | -0.7343959 | 0.8888371 | 0.000948993 |
| 14 | 0.8884746 | 0.8903726 | 0.8891996 | 0.8896476 | -0.7343959 | -0.7343961 | 0.8894236 | 0.00058651 |
| 15 | 0.8891996 | 0.8903726 | 0.8896476 | 0.8899245 | -0.7343961 | -0.7343959 | 0.8897861 | 0.000362483 |
| 16 | 0.8891996 | 0.8899245 | 0.8894765 | 0.8896476 | -0.7343961 | -0.7343961 | 0.8895620 | 0.000224027 |
| 17 | 0.8891996 | 0.8896476 | 0.8893707 | 0.8894765 | -0.7343961 | -0.7343961 | 0.8894236 | 0.000138456 |
| 18 | 0.8893707 | 0.8896476 | 0.8894765 | 0.8895418 | -0.7343961 | -0.7343961 | 0.8895092 | 8.55706E - 05 |
| 19 | 0.8894765 | 0.8896476 | 0.8895418 | 0.8895822 | -0.7343961 | -0.7343961 | 0.8895620 | 5.28856E - 05 |
| 20 | 0.8894765 | 0.8895822 | 0.8895169 | 0.8895418 | -0.7343961 | -0.7343961 | 0.8895294 | 3.26851E - 05 |

فيتضح لنا أن $x^{(20)} = 0.8895294$ كما نشير إلى أنه يمكن التحقق من أن $x^* = 0.889549290248009 \dots$

ملاحظة (2)

في هذه الحالة k هو عدد مرات المراحل التكرارية، لكن ليس من الضروري الوصول إلى x^* من أجل هذا وجب علينا حساب الفرق $e_k = |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$ وتحديد العتبة ϵ من أجل التوقف عند المرحلة التكرارية k والتي من أجلها نحصل على $e_k < \epsilon$.

ملاحظة (3)

يمكن ترجمة خوارزمية العدد الذهبي إلى لغة برمجة معينة سنتحصل لاحالة على نفس النتائج التي تحصلنا عليها في الجدول الأخير، فمثلا لو كتبنا الخوارزمية بلغة ++FreeFem مع أخذ $\epsilon = 10^{-7}$ سنجد النتائج أسفل البرنامج

```

1 : func real f(real u){real r=2*u^2-log(u)-exp(u); return r;}
2 : int m=100,M;      real[int] X(m),A(m),B(m);
3 : real a,b,aa,bb,tau,dis;
4 : a=0.2;b=1.8;    tau=(1+sqrt(5))/2.;    A(0)=a;B(0)=b; X(0)=(A(0)+B(0))/2.;
5 : for(int n=1;n<m;n++){ M=n;

```



```

6 : aa=A(n-1)+(B(n-1)-A(n-1))/tau^2;
7 : bb=A(n-1)+(B(n-1)-A(n-1))/tau;
8 : bool p1,p2,q; p1=f(aa)<f(bb); p2=f(aa)>f(bb);
9 : if(p1) { A(n)=A(n-1);B(n)=bb; }
10 : else { if(p2){ A(n)=aa; B(n)=B(n-1);}
11 :         else{ A(n)=aa; B(n)=bb;} }
12 : X(n)=(A(n)+B(n))/2.;
13 : dis=abs(X(n)-X(n-1)); q=dis<1e-7;
14 : if(q) break;}
15 : X.resize(M); cout<<"X="<<X<< endl;
16 : cout<<"number des iterations est "<<M<<endl; sizestack + 1024 =1249 ( 225 )

```

X=33

```

1 0.694427191 0.883281573 1 0.927864045
0.883281573 0.910835056 0.893806067 0.883281573 0.889786068
0.885766069 0.888250565 0.889786068 0.888837075 0.8894235849
0.889786068 0.8895620411 0.8894235849 0.8895091556 0.8895620411
0.8895293561 0.8895495565 0.889537072 0.8895447879 0.8895495565
0.8895466093 0.8895484308 0.8895495565 0.8895488608 0.8895492908
0.8895495565 0.8895493923 0.8895492908
number des iterations est 33

```

3.2.3 خوارزمية الإستقطاب التكافئي

الفكرة الرئيسية لطريقة الإنحدار التكافئي تقوم ببناء المتتالية $(y_k)_k$ بالاعتماد على إستقطاب دالة الكلفة f على متتالية المجالات $[x_k, z_k]$ من $[a, b]$ والتي تحوي x^* بكثير حدود من الدرجة الثانية على طريقة الفروق المقسومة عند العقد $\{(x_k, f(x_k))\}$ ، $\{(y_k, f(y_k))\}$ و $\{(z_k, f(z_k))\}$ بحيث $a < x_k < y_k < z_k < b$ وفق المراحل التالية:

المرحلة رقم k : نختار x_k, y_k, z_k بحيث $f(x_k) \geq f(y_k)$ و $f(z_k) \geq f(y_k)$. من أجل هذا نجد كثير حدود الاستقطاب هو

$$P(x) = f[x_k] + f[x_k, y_k](x - x_k) + f[x_k, y_k, z_k](x - x_k)(x - y_k)$$

مع العلم أن

$$f[x_k, y_k] = \frac{f(x_k) - f(y_k)}{x_k - y_k} \quad ; \quad f[x_k, y_k, z_k] = \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, z_k]}{x_k - z_k}$$

وهكذا نجد الحد الأصغري لكثير الحدود P يكون عند الفاصلة

$$y_{k+1} = \frac{1}{2} \left[(x_k + y_k) - \frac{f[x_k, y_k]}{f[x_k, y_k, z_k]} \right]$$

إلى هنا نغيز حالتين



- 1- إذا كان $y_{k+1} \in [x_k, y_k]$ في هذه الحالة نأخذ $x_{k+1} = x_k$ و $z_{k+1} = y_k$
- 2- إذا كان $y_{k+1} \in [y_k, z_k]$ في هذه الحالة نأخذ $x_{k+1} = y_k$ و $z_{k+1} = z_k$

فمثلا لو كتبنا الخوارزمية بلغة FreeFem++ مع أخذ المثال السابق سنجد النتائج أسفل البرنامج

```

1 : func real f(real u){real r=2*u^2-exp(u)-log(u); return r;}//2*u^2-log(u)-exp(u)
2 : func real df(real u){real r=4*u-exp(u)-(1/u); return r;}//4*u-(1./u)-exp(u) with a=0.2;b=2;
3 : func real f1(real u1,real u2){real r=(f(u1)-f(u2))/(u1-u2); return r;}
4 : func real f2(real u1,real u2,real u3){real r=(f1(u1,u2)-f1(u2,u3))/(u1-u3); return r;}
5 : int m=100,M;      real[int] X(m),Y(m),Z(m);
6 : real a,b,dis,pas,S0;  bool q;  a=0.2;  b=1.8;
7 : X(0)=a;  Z(0)=b;      pas=(b-a)/10.;
8 :  Y(0)=(a+b)/5.;
9 : for(int n=1;n<20;n++){ M=n;
10 :  Y(n)=0.5*( X(n-1)+Y(n-1) - f1(X(n-1),Y(n-1)) / f2(X(n-1),Y(n-1),Z(n-1)));
11 :  bool s1,s2,s3,s4;
12 :  s1=X(n-1)<Y(n); s2=Y(n)<Y(n-1);
13 :  s3=Y(n-1)<Y(n); s4=Y(n)<Z(n-1);
14 :  if(s1&s2) {X(n)=X(n-1);  Z(n)=Y(n-1);}
15 :  else {X(n)= Y(n-1);  Z(n)=Z(n-1);}
16 :  dis=abs(df(Y(n)));
17 :  q=dis<1e-8; if(q) break;
18 :  }
19 : Y.resize(M);  cout<<"Y="<<Y<< endl;
20 : cout<<"number des iterations est  "<<M<<endl; sizestack + 1024 =1305  ( 281 )

```

```

Y=19
0.4 1.084799807 1.064185078 0.9381116145 0.9209933166
0.9009577031 0.895742982 0.8921056467 0.8908235724 0.8901077865
0.8898166575 0.8896697983 0.889605895 0.8895751388 0.8895613243
0.8895548194 0.8895518538 0.8895504716 0.889549837
number des iterations est 19

```

يمكن إثبات أن الطريقة من الرتبة 1.3 أي أنه يمكن إثبات وجود ثابت $C > 0$ مستقل عن k يحقق العلاقة التالية

$$|y_{k+1} - x^*| \leq C|y_k - x^*|^{1.3}$$

نقول أن الطريقة من الرتبة 1.3، يعني أنه إذا كان الخطأ في خطوة معينة هو 10^{-2} فستكون الطريقة من الرتبة $(10^{-2})^{1.2} \approx 2.5 \times 10^{-3}$ في الخطوة الموالية. إحدى الصعوبات تتعلق ببدء استعمال الخوارزمية، عمليا يمكننا القيام بذلك بالطريقة التالية:

نختار $\alpha_0 \in [a; b]$ ، وخطوة موجبة δ ثم نحسب:

$$f(\alpha_0) \wedge f(\alpha_0 + \delta)$$

إذن توجد حالتين:
-إذا كان:



$$f(\alpha_0) \geq f(\alpha_0 + \delta)$$

فإن f متناقصة ومنه x^* تقع على يمين α_0

نستمر في حساب $f(\alpha_0 + 2\delta), f(\alpha_0 + 3\delta), \dots, f(\alpha_0 + k\delta)$ إلى أن نجد عدد صحيح k بحيث:

$$f(\alpha_0 + k\delta) > f(\alpha_0 + (k-1)\delta), k \geq 2$$

نضع إذن:

$$x_0 = \alpha_0 + (k-2)\delta \quad \wedge \quad y_0 = \alpha_0 + (k-1)\delta \quad \wedge \quad x_0 = \alpha_0 + k\delta$$

-إذا كان:

$$f(\alpha_0) < f(\alpha_0 + \delta)$$

فإن x^* يقع على يسار $\alpha_0 + \delta$

لدينا $-\delta$ هي خطوة إلى أن نجد عدد صحيح k بحيث:

$$f(\alpha_0 - k\delta) \geq f(\alpha_0 - (k-1)\delta)$$

إذن نضع:

$$x_0 = \alpha_0 - k\delta \quad \wedge \quad y_0 = x_0 = \alpha_0 - (k-1)\delta \quad \wedge \quad z_0 = \alpha_0 - (k-2)\delta$$

ملاحظة (4)

البحث عن الخطوة ما هي إلا مرحلة في خوارزمية جد معقدة من أجل تصغير J . إذن هو المحاولة الحصول على تقريب أحسن للخطوة المثلى.

نعتبر: $F(\rho) = J(x + \rho d)$, $\rho > 0$ ونعلم أن: $F(\rho) = \langle \nabla J(x + \rho d), d \rangle_{\mathbb{R}^n}$ بما أن d هو اتجاه الإنحدار فإن:

$$F'(0) = \langle \nabla J(x), d \rangle_{\mathbb{R}^n} < 0$$

إضافة إلى ذلك إذا أخذنا ρ قليلا إلى يمين 0 ، مع q متناقصة. فإن هناك عنصرين متعاكسين هما:

- إذا كان ρ كبير جدا، فقد نقفز فوق الحد الأصغري المطلوب
- إذا كان ρ صغيرا جدا، الخوارزمية لا تتقدم بسرعة

3.3 خوارزميات في فضاء متعدد الأبعاد

نريد الوصول إلى x^* . فإننا نبحث عن $x^{(1)}$ إنطلاقا من $x^{(0)}$ بحيث $J(x^{(1)}) \leq J(x^{(0)})$ بشكل بسيط هو البحث عن الشعاع x_1 بحيث الشعاع $x_1 - x_0$ موازيا لإتجاه الإنحدار d_0 مع أن $d^{(k)} \neq 0$ والعلاقة العامة التي تحدد الانطلاق من $x^{(k)}$ إلى $x^{(k+1)}$ تم وفق الخوارزمية التالية:

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{معطى} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d^{(k)}, & k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.3)$$

مع العلم أن $\rho > 0$ في حين $d^{(k+k)}$ هو شعاع الانحدار كما سبق وأن أشرنا إليه في بداية الفصل. ففي حالة J قابل للمفاضلة في جوار $x^{(k)}$ فإن

$$J(x^{(k+1)}) = J(x^{(k)} + \rho_k \cdot d^{(k)}) = J(x^{(k)}) + \rho_k \langle \nabla J(x^{(k)}), d^{(k)} \rangle + o(\|d^{(k)}\|)$$

وهكذا نكون قد تحصلنا على الخوارزمية التالية والتي تسمى بخوارزمية التدرج.

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{معطى} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \rho_k \nabla J(x^{(k)}), & k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (5.3)$$

عادة في مثل هذه الخوارزميات عندما نريد الوصول إلى الدقة التالية ϵ $\|x^* - x^{(k)}\| \leq \epsilon$ يكفي تحقيق العلاقة $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \epsilon$ ، وبما أن التقارب ليس دائماً مضمون فإن القاعدة الأساسية هي تحديد العدد الأعظمي للتكرارات k^{\max} تظل حاضرة في أي خوارزمية.

ملاحظة (1)

حتى لو كانت هذه الطريقة بسيطة من ناحية المفهوم ويمكن برمجتها مباشرة، إلا أنها غالباً ما تكون بطيئة في تحقيق أكبر عدد ممكن من الأرقام الدالة، فهي متقاربة ولكنها تتطلب شروط تقارب معقدة، ونشير إلى أن هناك صنفين من الخوارزميات يتفرعان منها وهما:

1- خوارزمية التدرج ذات خطوة ثابتة أي أن $\rho_k = \rho \in \mathbb{R}_+^*$ من أجل كل k .

2- خوارزمية التدرج ذات خطوة مثل أي أن

$$J(x^{(k)} + \rho_k d^{(k)}) = \min\{J(x^{(k)} + \rho \cdot d^{(k)}), \quad \rho \in \mathbb{R}_+^*\}$$



1.3.3 خوارزمية تدرج الخطوة المتغيرة

نظرية 1.3.3:

ليكن $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابع α -إهليجي أي أن

$$\exists \alpha > 0, \quad \langle \nabla J(x) - \nabla J(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

ولیکن ∇J ليبشيتزي أي أن

$$\exists M > 0, \quad \|\nabla J(x) - \nabla J(y)\| \leq M \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

بحيث

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < \rho_k < b < \frac{2a}{M^2}, \quad \forall k \geq$$

عندئذ، طريقة التدرج تعرف متقاربة هندسية من أجل كل إختيار $x^{(0)}$ أي أن

$$\exists q \in]0, 1[, \quad \|x^* - x^{(k+1)}\| \leq \|x^* - x^{(k)}\|$$

نظرية 2.3.3:

إذا كان J من الصنف C^1 وكان α -إهليجي فإن خوارزمية التدرج ذات خطوة مثلث تتقارب من أجل أي إختيار لشعاع البداية $x^{(0)}$.

ملاحظة (2)

- 1- التدرج بخطوة مثلث من حيث المبدأ هو أفضل هذه الطرق بالنسبة لسرعة التقارب، ويمكن أن يكون بطيئاً بسبب عدم توفر شروط المصفوفة الهيسية $Hess(J)$.
- 2- في حالة تدرج الخطوة المثلث نتحصل على نفس نتيجة التقارب السابقة تحت فرضيات ضعيفة لـ J .
- 3- يمكن أخذ بعين الإعتبار معايير التقارب على التدرج لـ J في x_k بحيث: $\|\nabla J(x_k)\| < \varepsilon_1$.



2.3.3 طريقة التدرج المترافق

تعريف 1.3.3:

ليكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة وليكن $B \in \mathbb{R}^n$ و $c \in \mathbb{R}$. وعليه، القول عن $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ أنه تابع تربيعي مرفق بالمصفوفة A والشعاع B يعني أنه يكتب على الشكل التالي:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle B, x \rangle + c = x^t Ax - B^t \cdot x + c \quad (6.3)$$

ملاحظة (3)

1- من الملاحظ أن التابع التربيعي عبارة عن كثير حدود معرف على \mathbb{R}^n وبالتالي فهو من الصنف C^∞ . علاوة على ذلك فإن

$$\nabla J(x) = Ax - B \quad ; \quad \text{Hiss}(J) = A$$

2- في هذا المقصع سنهتم بطريقة التدرج المترافق وذلك بالبحث عن القيم الحدية للتوابع التربيعية، وبالتالي سنبحث وبطريقة غير مباشرة عن حلول النظام الخطي $Ax = B$ لأنه كون J تابع قابل للمفاضلة ويملك قيمة حدية عند x^* يعني أن $J(x^*) = 0$ أي أن $Ax^* = B$. من أجل سهولة الحساب سنعتبر $c = 0$.

نظرية 3.3.3:

ليكن $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ أنه تابع تربيعي مرفق بالمصفوفة A والشعاع B . وعليه، إذا كانت A مصفوفة معرفة موجبة وليكن λ_{\min} و λ_{\max} القيمتين الذاتيتين الصغرى والكبرى لـ A على الترتيب فإن J تابع α -إهليجي من أجل $\alpha = \lambda_{\min}$ في حين ∇J تابع M -ليبيثيتزي من أجل $M = \lambda_{\max}$.

تعريف 2.3.3:

ليكن $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة متناظرة معرفة موجبة وليكن $u, v \in \mathbb{R}^n$. وعليه، القول عن u و v أنهما متعامدان بالنسبة إلى الجداء السلبي المرفق بـ A يعني أن $\langle Au, v \rangle = u^t Av = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle B, x \rangle = \frac{1}{2} x^t Ax - B^t \cdot x \quad (7.3)$$

ملاحظة (4)

في بعض المراجع يقصد بـ u و v مترافقان يعني أنهما متعامدان بالنسبة إلى الجداء السلبي المرفق بـ A .



تعريف 3.3.3:

ليكن $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ أنه تابع تربيعي مرفق بالمصفوفة A المعرفة موجبة والشعاع B . وليكن شعاع $x^{(0)}$ معطى بحيث $\nabla J(x^{(0)}) \neq 0$. من أجل هذا نعرف خوارزمية التدرج المترافق مادام $\nabla J(x^{(k)}) \neq 0$ بالعلاقة التالية

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho_k d^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (8.3)$$

$$\rho_k = \frac{\|J(x^{(k)})\|^2}{\langle Ad^{(k)}, d^{(k)} \rangle}, \quad d^{(k)} = -\nabla J(x^{(k)}) + \frac{\|\nabla J(x^{(k)})\|^2}{\|\nabla J(x^{(k-1)})\|^2} d^{(k-1)}; \quad d^{(0)} = -\nabla J(x^{(0)})$$

3.3.3 مثال تطبيقي

من أجل المعطيات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ -39 \\ 42 \end{pmatrix}; \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

فإننا نحصل على النتائج في الجدول التالي

| k | $x_1^{(k)}$ | $x_2^{(k)}$ | $x_3^{(k)}$ | ρ_k |
|-----|-------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 2.103002339485313 | -2.910644658175201 | 4.810371718221990 | 0.100272939953210 |
| 2 | 1.197565470245279 | -4.849894537594134 | 3.381390409582261 | 0.578786924954743 |
| 3 | 1.999999999999943 | -4.999999999999872 | 2.999999999999827 | 4.307621625566413 |

حيث يمكن التحقق من أن $x^* = (2, -5, 3)$. نشير إلى أنه يمكن الحصول على نتائج هذا الجدول بلغة FreeFem++ كما هو موضح أسفل الخوارزمية التالية

```

1 : real a=1,b=-1,c=2,d=5,e=-4,f=6,b1=13,b2=-39,b3=42;
2 : real[int,int] A=[[a,b,c],[b,d,e],[c,e,f]];
3 : real[int] A1(3),A2(3), M(3),X0(3),B(3),uu(3),X1(3);
4 : X0=[1,1,1];B=[b1,b2,b3];A1=[a,d,f];A2=[b,e,c];
5 : func real F(real[int]&u){real s=0.,r=0.;
6 : for(int j=0;j<3;j++){s+=0.5*A1[j]*u[j]^2-B[j]*u[j];}
7 : for(int j=0;j<2;j++){r+=u[j]*u[j+1]*A2[j];} r+=u[0]*u[2]*A2[2];
8 : return s+r;}
9 : func real[int] dF(real[int]&u){M=0;
10 : for(int j=0;j<3;j++){M[j]+=A1[j]*u[j]-B[j];}
11 : M[0]+=b*u[1]+c*u[2]; M[1]+=b*u[0]+e*u[2]; M[2]+=c*u[0]+e*u[1];
12 : return M;}
13 : func real Ero(real[int]&xx,real[int]&yy){real epss=0;uu=0;
14 : uu[0]+=a*xx[0]+b*xx[1]+c*xx[2];

```



```
15 : uu[1]=b*xx[0]+d*xx[1]+e*xx[2];
16 : uu[2]=c*xx[0]+e*xx[1]+f*xx[2];
17 : for(int j=0;j<3;j++) epss+=abs(uu[j]-B(j));return epss;}
18 : func real[int] initial(real[int]&vv){return vv;}
19 : LinearCG(dF,X0,nbiter=0,precon=initial);
20 : cout <<"LinearCG(Affine):J(x)="<<F(X0)<<" et Ero="<<Ero(X0,B)<<" "<<initial(X0)<<endl;
21 : X0=[1,1,1]; LinearCG(dF,X0,nbiter=1,precon=initial);
22 : cout <<"LinearCG(Affine):J(x)="<<F(X0)<<" et Ero="<<Ero(X0,B)<<" "<<initial(X0)<<endl;
23 : X0=[1,1,1]; LinearCG(dF,X0,nbiter=2,precon=initial);
24 : cout <<"LinearCG(Affine):J(x)="<<F(X0)<<" et Ero="<<Ero(X0,B)<<" "<<initial(X0)<<endl;
CG does'nt converge: 0 ||g||^2 = 19.6439 reps2= 3.086e-009
LinearCG(Affine):J(x)=-167.721 et Ero=7.44749 3
2.103002339 -2.910644658 4.810371718
CG does'nt converge: 1 ||g||^2 = 0.0436569 reps2= 3.086e-009
LinearCG(Affine):J(x)=-173.406 et Ero=0.300211 3
1.19756547 -4.849894538 3.38139041
LinearCG(Affine):J(x)=-173.5 et Ero=3.0731e-013 3
2 -5 3
```

لاحظ النتيجة الأخيرة التي توضح x^* ولدنا أيضا $J(x^*) = -173.5$ والتمثلة في القيمة الحدية الدنيا للتابع التربيعي J المرفق بالمصفوفة A والشعاع B .

الفصل الرابع

دراسة برمجية لبعض المسائل الرياضية

1.4 تمهيد

نسمي نظام لمعادلات لاخطية كل مسألة تكتب على الشكل التالي:

$$\begin{cases} X \in D \subseteq D_f \\ f(X) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

بحيث $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابع مستمر على D في حين D_f هي مجموعة تعريف التابع f . في الحقيقة لا توجد طرق مباشرة لحل هكذا مسائل، ولكن توجد هناك طرق تكرارية تعمل على إنشاء متتالية تراجعية للحلول التقريبية $(X^{(k)})_{k \geq 0}$ بدءاً من شعاع $X(0)$ معطى مسبقاً يساهم لبدئ المتتالية. في هذا الفصل سنعمل على كيفية إنشاء هاته المتتالية ودراستها في الفضاء الاعتيادي على \mathbb{R}^n . فأهم شيء بعد إنشائها هو دراسة تقاربها نحو X^* والذي يمثل الحل الحقيقي الذي نبحث عنه أي أن $X^* \in D \wedge f(X^*) = 0$. كما لا يخفى علينا أن المسألة (1.4) فهي قد تملك حلاً أو أكثر في المجموعة D وقد تملك حلاً خارج D وهذا لا يعنينا في دراسة المسألة (1.4). في الواقع التطبيقي يجب أن نجد تقريب أفضل ل X^* في عدد منته من المرات وذلك بإستعمال معيار الخطأ المطلق أو النسبي ويحصل ذلك بإختيار أمثل ل $X^{(0)}$ في هذا الفصل سنعمل على معالجة المسألة (1.4) باعطاء طرق مختلفة للحل ودراسة تقاربها.



تعريف 1.1.4:

القول عن الخوارزمية (1.3) أنها متقاربة يعني أن $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^* \in \mathbb{R}^n$

ملاحظة (1)

من المهم ضمان تقارب الخوارزمية عبر فرضيات مخصصة، لكن سرعة التقارب والتعقيد من العوامل أيضاً يجب مراعاتها عند استخدام (أو إنشاء) الخوارزمية، ومن المهم أيضاً أن تكون الطريقة سريعة قدر الإمكان مع الحفاظ على الدقة والاستقرار وهما معياران أساسيان للخوارزمية إضافة إلى معيار قياس سرعة التقارب والمعرف بالعلاقة $e_k = \|x^* - x^{(k)}\|$

تعريف 2.1.4: (معيار التقارب)

لتكن $(x^{(k)})_k$ متتالية مولدة باستعمال الخوارزمية (1.3) ومتقاربة نحو x^* . عندئذ، القول عن الخوارزمية (1.3) أنها متقاربة خطياً يعني أن

$$\exists C \in [0, 1[, \exists k_0 \in \mathbb{N} : e_{k+1} \leq C e_k, \quad \forall k \geq k_0.$$

ملاحظة (2)

هناك أنواع أخرى من التقاربات نذكر منها

التقارب فوق خطي: القول عن الخوارزمية (1.3) أنها متقاربة فوق خطي إذا كان $e_{k+1} \leq \alpha_k e_k$ حيث $(\alpha_k)_k$ متتالية موجبة تماماً متقاربة نحو الصفر. وكحالة خاصة إذا كانت $(\alpha_k)_k$ متتالية هندسية فإننا نقول عن الخوارزمية (1.3) أنها متقاربة هندسياً.

التقارب من الرتبة p : القول عن الخوارزمية (1.3) أنها متقاربة من الرتبة p يعني أن

$$\exists C \geq 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : e_{k+1} \leq C(e_k)^p, \quad \forall k \geq k_0.$$

وكحالة خاصة إذا كانت $p = 2$ فإن التقارب نسميه تقارباً تربيعياً.

2.4 حل معادلة لاخطية ذات متغير واحد

في هذا المقطع ستعمل على حل معادلة لاخطية ذات متغير واحد ذات الشكل العام $f(x) = 0 \dots (I)$ حيث f تابع حقيقي و D يكون مجالاً من R ما لم نشير إلى غير ذلك، مع أخذ f تابع جبري (دالة كثير حدود أو دالة ناطقة أو صماء) وقد يكون لاجبري (دالة أسية أو لوغاريتمية أو ما شابه ذلك). من



الواضح أنه في الحالة العامة مثل هاته المعادلات لا تقبل جذور دقيقة لا يمكن حسابها بشكل مباشر، من أجل هذا وجب علينا إيجاد طرق للبحث عن قيم تقريبية لها. في هذا المقطع سنعمل على وضع الطرق الأكثر شهرة في هذا المجال.

تعريف 1.2.4:

ليكن $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع كثير حدود وليكن $x^* \in \mathbb{R}$. عندئذ، القول عن x^* أنه جذر بسيط لـ f يعني أن $f(x^*) = 0$ ونقول أنه جذر من الرتبة m لـ f يعني أن $f^{(k)}(x^*) = 0, \quad k = \overline{0 : m-1}$ في حين $f^{(m)}(x^*) \neq 0$

أمثلة:

1- بالنسبة لكثير الحدود $P(x) = x^2 - 1$ من الواضح أن كل من $x_1^* = 1$ و $x_2^* = -1$ جذرين بسيطين لـ f .

2- بالنسبة لكثير الحدود $S(x) = 2x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 16x + 4$ يمكن التحقق من أن $x^* = 2$ جذر من الرتبة الثانية لـ S ونقول أيضا جذر مضاعف. في حين $y^* = 1$ و $z^* = \frac{1}{2}$ جذرين بسيطين.

تذكير: ليكن $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تطبيق. عندئذ، نذكر بنواة التطبيق f المجموعة المعرفة بالعلاقة التالية: $\ker(f) = \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) = 0\}$ وهذه الأخيرة قد تكون مجموعة منتهية كما الحال مع كثيري الحدود P و S وقد تكون مجموعة عدودة كما هو الحال مع التابع $\cos(x)$ وقد تكون مجموعة تتمتع بقدره المستمر كما هو الحال مع التابع المميز بمجموعة الأعداد الناطقة

$$\chi_Q(x) = \begin{cases} 1 : x \in Q \\ 0 : x \in Q^c \end{cases}$$

وعليه، البحث عن حلول المسألة (1.4) يعني البحث (بطريقة تراجعية) عن المجموعة $\ker(f) \cap \mathcal{D}$.

نتيجة: إذا كان $P \in \mathbb{R}_n[X]$ وكان x^* جذرا من الرتبة m لكثير الحدود P فهذا يكافئ وجود Q من $\mathbb{R}_{n-m}[X]$ يحقق العلاقة $P(x) = (x - x^*)^m Q(x)$.

مثال: كون $x^* = 2$ جذر مضاعف لـ S فإن $S(x) = (x - 2)^2 Q(x)$ حيث $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ تحقق من ذلك.

ملاحظة (1)

في هذا الفصل سنستخدم مصطلح جذرا بدلا عن صفرا لتابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ كفي في جميع الحالات. كما سنقول جذرا من الرتبة m بدلا عن صفرا من الرتبة m .



تعريف 2.2.4:

ليكن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع معرف على المجموعة I ، وليكن $x^* \in I$. ومنه، القول عن x^* أنه جذرا معزولا يعني أنه يوجد مجال من الشكل $]a, b[$ بحيث x^* هو الجذر الوحيد لـ f في هذا المجال.

مثال:

- 1- بالنسبة للتابع $x \rightarrow \cos(x)$ من أجل $D = \mathbb{R}^+$ فإن جميع جذوره معزولة.
- 2- بالنسبة للتابع $x \rightarrow \chi_Q(x)$ من أجل $D = [0, 1]$ لا يملك أي جذر معزول.

ملاحظة (2)

في هذا الفصل لا نهتم سوى بالجذور المعزولة، وعليه، وجب علينا تحديد المجالات التي تحويها، وقبل البحث عن الجذور، فإن الطرق الشهيرة في هذا الجانب تتمثل في نظرية بولزانو Bolzano (أو ما تعرف بنظرية القيم المتوسطة) إضافة إلى الطريقة البيانية.

تذكير: لا بأس بأن نذكر بكلا الطريقتين

نظرية 1.2.4: (Bolzano)

ليكن لدينا $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع معرف على $]a, b[$. وعليه، إذا كان f مستمرا على $]a, b[$ وكان $f(a)f(b) < 0$ ، فإنه يوجد على الأقل $\xi \in]a, b[$ يحقق $f(\xi) = 0$.

نشير إلى أن وجود يكون وحيدا في المجال $]a, b[$ إذا كان f رتيب على $]a, b[$. وبالتالي لفصل حلول المعادلة $f(x) = 0$ باستعمال نظرية القيم المتوسطة نحدد المجالات التي تتحقق فيها شروط النظرية مع شرط الرتبة. أما الطريقة البيانية فهي كمايلي: بفرض أن $f(x) = 0$ على المجموعة D . إلى هنا لدينا وجهتي نظر:

- 1- الأولى: تحديد المجالات التي يقطع فيها البيان (Cf) حامل محور الفواصل مرة واحدة على كل مجال.
- 2- الثانية: بفرض أن $f = g - h$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تكافئ $g(x) = h(x)$. وعليه، لفصل الجذور يكفي تحديد المجالات التي يتقاطع فيها (Cg) مع (Ch) مرة واحدة على كل مجال.

مثال: نريد عزل جذور المعادلة $x \ln(x) - 1 = 0$ من أجل $D = \mathbb{R}^+$ بفرض أن $f(x) = x \ln(x) - 1$. نجد ذلك فإن f يحقق شروط نظرية القيم المتوسطة على المجال $[1, 2]$ مع شرط الرتبة، وبالتالي فهو يقبل حل



وحيد في هذا المجال. وإذا ما أردنا استعمال الطريقة البيانية حيث يمكن ملاحظة المعادلة $f(x) = 0$ تكافئ $\ln(x) = \frac{1}{x}$. وعليه، بعد رسم بيان الدالة مقلوب وبيان دالة اللوغاريتم النيبيري نجد أنهما يتقطعان في المجال $[1, 2]$.

ملاحظة (3)

من الطبيعي أن نعزل الجذور بمجالات ذات طول أصغر ما يمكن للحصول على تقدير مقبول للجذور في عدد منته من حدود متتالية الحلول التقريبية، من أجل هذا نقترح تطبيق نظرية القيم المتوسطة عدة مرات حتى الحصول على طول مناسب للمجال الذي سننشئ فيه المتتالية $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ ، ومن أجل التوضيح أكثر سندرج الطريقة في المقطع الموالي.

3.4 طريقة ديكوتومي Méthode de Dichotomie

المبدأ الأساسي لهذه الطريقة يعتمد على نظرية بولزانو، والشئ المميز فيها كونها بسيطة وبطيئة لكن لها فوائد في تطبيق الطرق الأخرى من بينها تضيق المجالات التي تعزل الجذور وتقدم لها أيضا القيم الابتدائية. وعليه، لإنشاء المتتالية $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ وفقا لهذه الطريقة بالطبع بعد تحديد المجال $[a, b]$ الذي يعزل الجذر x^* . نحدد أولا المجال $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ وفقا للخوارزمية (2.4) حيث $[a_0, b_0] = [a, b]$ في حين $x^{(k)} = \frac{1}{2}(b_k + a_k)$ من أجل كل $k \in \mathbb{N}$ لدينا

$$a_{k+1} = \begin{cases} a_k & : f(a_k)f(x^{(k)}) < 0 \\ x_k & : f(a_k)f(x^{(k)}) > 0 \end{cases} ; \quad b_{k+1} = \begin{cases} b_k & : f(b_k)f(x^{(k)}) < 0 \\ x_k & : f(b_k)f(x^{(k)}) > 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

نتيجة: كل مجال $[a_k, b_k]$ محدد على طريقة ديكوتومي يعزل الجذر x^* وبالتالي كلما كان ذا طول أصغر كلما حصلنا على تقدير أدق في عدد منته من العمليات التكرارية.

ملاحظة (1)

من مراحل تحديد المتتالية $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ في طريقة ديكوتومي لدينا $x^* \in [a_k, b_k] = [a_k, x^{(k)}] \cup [x^{(k)}, b_k] \Rightarrow |x^* - x^{(k)}| \leq \frac{1}{2}(a_k + b_k) = \frac{1}{2^2}(a_{k-1} + b_{k-1}) = \dots = \frac{1}{2^{k+1}}(a + b)$ كما يمكن التحقق من العلاقة التالية $|x^* - x^{(k)}| \leq |x^{(k)} - x^{(k-1)}|$ من أجل كل $k \geq 1$. وعليه، من أجل وقف عملية البحث عن حدود المتتالية $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ تحت الشرط $|x^* - x^{(k)}| \leq \varepsilon$ يكفي إيقافه من أجل $|x^* - x^{(k-1)}| \leq \varepsilon$. علاوة على ذلك فعدد الحدود اللازم لذلك هي $k \geq \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln 2} - 1$.



مثال: على طريقة ديكتومي، حل في المجال $[1, 2]$ المعادلة التالية $\ln(x) - x^2 + \frac{7}{4} = 0$ مع توقيف العملية من أجل الحصول على دقة تقريب لا تتعدى 10^{-3} .
الحل:

في الجدول التالي سنلخص الحل مع العلم أنه من أجل الحصول على دقة تقريب لا تتعدى 10^{-3} أي أن $|x^* - x^{(k)}| \leq 10^{-3}$ ومنه يكفي الحصول على $|x^* - x^{(k-1)}| \leq 10^{-3}$ وعليه، فعدد الحدود اللازم لذلك هو $k \geq \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln 2} - 1 = \frac{3 \ln(10)}{\ln 2} - 1 \approx 9$ الأقل. لنرى ذلك

| k | a_k | b_k | $x^{(k)}$ | $\text{sign}(f(a_k)f(x^{(k)}))$ | $\text{sign}(f(b_k)f(x^{(k)}))$ | $ x^{(k)} - x^{(k-1)} $ |
|-----|-------------|-------------|-------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------|
| 1 | 1 | 2 | 1.5 | -1 | 1 | |
| 2 | 1 | 1.5 | 1.25 | 1 | -1 | 0.25 |
| 3 | 1.25 | 1.5 | 1.375 | 1 | -1 | 0.125 |
| 4 | 1.375 | 1.5 | 1.4375 | 1 | -1 | 0.0625 |
| 5 | 1.4375 | 1.5 | 1.46875 | -1 | 1 | 0.03125 |
| 6 | 1.4375 | 1.46875 | 1.453125 | 1 | -1 | 0.015625 |
| 7 | 1.453125 | 1.46875 | 1.4609375 | -1 | 1 | 0.0078125 |
| 8 | 1.453125 | 1.4609375 | 1.45703125 | 1 | -1 | 0.00390625 |
| 9 | 1.45703125 | 1.4609375 | 1.458984375 | -1 | 1 | 0.001953125 |
| 10 | 1.45703125 | 1.458984375 | 1.458007813 | 1 | -1 | 0.000976563 |
| 11 | 1.458007813 | 1.458984375 | 1.458496094 | 1 | -1 | 0.000488281 |
| 12 | 1.458496094 | 1.458984375 | 1.458740234 | -1 | 1 | 0.000244141 |

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 : x > 0 \\ -1 : x < 0 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

حيث $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ هو تابع الإشارة المعروف بـ sign
بمواصلة متتالية الحدود نجد $x^* \approx 1.4585834073433$
باستعمال هذه الطريقة

```

1 : func real f(real u){real r=log(u)+1.75-u^2; return r;}
2 : int m=100,M;      real[int] X(m),A(m),B(m); real dis;
3 : real a,b,c,fa,fb;a=1;b=2;
4 : A(0)=a;B(0)=b;X(0)=(A(0)+B(0))/2.;
5 : for(int n=1;n<m;n++){ M=n;
6 :          fa=f(A(n-1))*f(X(n-1));fb=f(B(n-1))*f(X(n-1));
7 :   bool P,Q,S;   P=fa<0;S=fb<0;
8 :          if(P)  A(n)=A(n-1);   else A(n)=X(n-1);
9 :          if(S)  B(n)=B(n-1);   else B(n)=X(n-1);
10 :          X(n)=(A(n)+B(n))/2.;
11 :          dis=abs(X(n)-X(n-1));
12 :          Q=dis<1e-4;   if(Q) break;}
13 : X.resize(M);      cout<<"X="<<X<<endl;
14 : cout<<"number des iterations est "<<M<<endl;

```



نتحصل على النتائج التالية:

X=13

1.5 1.25 1.375 1.4375 1.46875

1.453125 1.4609375 1.45703125 1.458984375 1.458007813

1.458496094 1.458740234 1.458618164

number des iterations est 13

4.4 طريقة نيوتن Méthode de Newton

نعتبر $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ مستمر وقابل للاشتقاق على المجال $[a, b]$. وعليه، من أجل البحث عن متتالية القيم التقريبية لحل المعادلة $f(x) = 0$ على طريقة نيوتن وفق التحليل التالي:
نشر تايلور للتابع f في جوار x_0 كمايلي:

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0 + \theta h) \quad 0 < \theta < 1$$

مع إهمال باقي النشر نجد $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$ وعليه، بوضع $x = x^*$ مع كون $f(x^*) = 0$ وأن $f'(x_0) \neq 0$ لأن f رتيب في جوار x_0 فنجد

$$x^* \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ومن هاته الأخيرة نحدد خوارزمية نيوتن في البحث عن المتتالية (x_n) كمايلي: نجد قيمة تقريبية ل x_0 باستعمال نظرية القيم المتوسطة أو نضع $x_0 = a \vee b$ و من أجل كل $n \geq 0$ لدينا

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

مثال: على طريقة نيوتن، حل في المجال $[1, 2]$ المعادلة التالية $\ln(x) - x^2 + \frac{7}{4} = 0$ مع توقيف العملية من أجل الحصول على دقة تقريب لا تتعدى 10^{-3} .
الحل:

في الجدول التالي سنلخص الحل مع العلم أنه من أجل الحصول على دقة تقريب لا تتعدى 10^{-3} يكون

$$|x^* - x^{(k)}| \leq 10^{-3}$$

| k | $x^{(k)}$ | $ x^{(k)} - x^{(k-1)} $ |
|---|-------------|-------------------------|
| 0 | 1 | |
| 1 | 1.75 | 075 |
| 2 | 1.492917586 | 0.257082414 |
| 3 | 1.45920845 | 0.33709156 |
| 4 | 1.458147254 | 0.001061176 |

نقدم طريقة نيوتن في هذا المثال باستعمال freefem++



```

1 : func real f(real u){real r=log(u)-u^2+1.75;return r;}
2 : func real df(real u){real r=1./u-2*u;return r;}
3 : int m=100,M;      real[int] X(m); real dis;
4 : X(0)=1;
5 : for(int n=1;n<m;n++){M=n;
6 :           X(n)=X(n-1)-f(X(n-1))/df(X(n-1));
7 :           dis=abs(X(n-1)-X(n));
8 :           bool P=dis<1e-3;
*** Warning The identifier P hide a Global identifier
if(P)break; }
9 : X.resize(M);  cout<<"X="<<X<<endl;
10 : cout<<"number des iterations est "<<M<<endl;

```

نتحصل على :

```

X=4
1 1.75 1.492917586 1.45920843
number des iterations est 4

```

خوارزمية طريقة نيوتن

- 1- نختار قيمة تخمينية ابتدائية ل $x_0 = b$ قيمة للعتبة $\epsilon = 10^{-4}$.
- 2- نحدد عبارة التابع f
- 3- نحدد عبارة التابع f'
- 4- نحدد الحد x_{n+1} باستعمال خوارزمية نيوتن كما ذكرناها سابقا.
- 5- نطبع في كل مرة قيمة x_{n+1} .
- 6- إذا كان $|x_1 - x_0| < \epsilon$ إذا x_1 هو الجذر الجديد، اذهب إلى الخطوة الأخيرة.
- 7- $x_1 = x_0$ اذهب إلى الخطوة رقم 2.
- 8- توقف.

5.4 طريقة النقطة الثابتة Méthode de point fixe

هذه الطريقة تحظى بأهمية كبيرة جدا من كلا الناحيتين النظرية والتطبيقية وهي لا تزال إلى حد اليوم تشهد تطورا يوما بعد يوم من طرف المفكرين لما فيها من أسرار تطبيقية لم تكتشف بعد، ونستهل هذه الطريقة ببعض التذكير



تعريف 1.5.4: ليكن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع مستمر على جزء D من D_f وليكن $X^* \in D$. وعليه، القول عن X^* نقطة ثابتة (أو نقول صامدة) ل f يعني أن $f(x^*) = x^*$.

إن الشرط اللازم لوجود النقطة الثابتة ل f هو $f(D) \subseteq D$. في بعض الحالات نرجع المعادلة $f(x) = 0$ للمسألة (1.4) على الشكل المكافئ $f(x) = 0$ وبالتالي فحل هذه المسألة يكافئ البحث عن البحث عن النقطة الصامدة ل g وهذا هو مبدأ طريقة النقطة الثابتة في حل المسألة (1.4) .
أما الخوارزمية الموافقة لهذه الطريقة فهي

$$\begin{cases} x^{(0)} \in D, \\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.4)$$

وبالتالي، إذا كانت المتتالية $x^{(k)}$ المعرفة بهاته الخوارزمية متقاربة فإنها متقاربة نحو النقطة الثابتة ل g .
بالفعل: لكون f مستمر على D ولدينا $f(D) \subseteq D$ فإن $x^{(k)} \in D$ لأجل كل $k \geq 0$ علاوة على ذلك لدينا

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(k)}) = f(x^*) \quad (4.4)$$

تعريف 2.5.4: ليكن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع على مجال $[a, b]$ من D_f . وعليه، القول عن f أنه مقلص على $[a, b]$ يعني أنه يوجد $\alpha \in [0, 1[$ يحقق العلاقة $|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$ لأجل كل x و y من $[a, b]$.

ملاحظة (1)

نشير إلى أنه إذا كان التابع

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مقلص على المجال $[a, b]$ فإنه مستمر عليه لأنه ليبشتزي .

أما إذا كان f مقلص على $[a, b]$ وقابل للاشتقاق على $]a, b[$ فإن $|f'(x)| \leq \alpha < 1$ من أجل كل

$$x \in]a, b[\text{ أن } \|f'\|_{\infty}(a, b) = \max |f'(x)|, x \in]a, b[= \alpha$$

في الحقيقة لدينا نظرية ذات شهرة عالية في هذا المجال وهي نظرية بناخ للنقطة الثابتة.

نظرية 1.5.4: إذا كان التابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مقلص على المجال $[a, b]$ ويحقق الشرط $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ فإنه توجد نقطة صامدة وحيدة للتابع f على المجال $[a, b]$.

إثبات الوجود: ليكن $x^{(0)}$ كفي من المجال $[a, b]$ ولتكن المتتالية $(x^{(k)})_k$ المعرفة ب:



$x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$ لأجل كل $k \geq 0$ حيث f مقلص على المجال $[a, b]$ ويحقق $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. وعليه، من أجل أن تتقارب المتتالية $(x^{(k)})_k$ يكفي أن تكون كوشية لأن الفضاء الاعتيادي على \mathbb{R} تام. وعلى هذا الأساس، من أجل كل $p \in \mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} |x^{(p+1)} - x^{(p)}| &= |f(x^{(p)}) - f(x^{(p-1)})| \leq \alpha |x^{(p)} - x^{(p-1)}| \\ &\leq \alpha^2 |x^{(p-1)} - x^{(p-2)}| \\ &\leq \dots \leq \alpha^p |x^{(1)} - x^{(0)}| \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى من أجل كل عدد طبيعي q بفرض أن $q = n + p$ لدينا

$$\begin{aligned} |x^{(q)} - x^{(p)}| &= |(x^{(p+n)} - x^{(p)})| \leq |x^{(p+1)} - x^{(p)}| + |x^{(p+1)} - x^{(p+2)}| \dots |x^{(p+n-1)} - x^{(p+n)}| \\ &\leq \alpha^p (1 + \alpha + \dots + \alpha^n) |x^{(1)} - x^{(0)}| \\ &\leq \alpha^n |x^{(1)} - x^{(0)}| \\ &\leq \alpha^p \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) |x^{(1)} - x^{(0)}| \\ \Rightarrow |x^{(q)} - x^{(p)}| &\leq \frac{\alpha^p}{1 - \alpha} |x^{(1)} - x^{(0)}| \end{aligned}$$

لما يكون p كبير كفاية نجد $|x^{(q)} - x^{(p)}|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب تماما وهكذا نجد $(x^{(k)})_k$ متتالية كوشية وبالتالي فهي متقاربة في المجال $[a, b]$. ويمكن البرهان على أنها متقاربة نحو نقطة ثابتة ل f في المجال نفسه. بالفعل: من إستمرارية التابع f على $[a, b]$ وتعريف المتتالية $(x^{(k)})_k$ نجد

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(k)}) = f(x^*) \quad (5.4)$$

إثبات الوحدانية: ليكن x_1^* و x_2^* نقطتين ثابتتين ل f على المجال $[a, b]$ وعليه، من تقلص التابع نجد

$$|x_1^* - x_2^*| = |f(x_1^*) - f(x_2^*)| \leq \alpha |x_1^* - x_2^*| \leq |x_1^* - x_2^*|$$

ملاحظة (2)

شرطا نظرية بناخ للنقطة الثابتة مهمين معا لوجود ووحدانية النقطة الثابتة.

أمثلة: تحقق الشرط الأول دون الثاني مع التابع $f(x) = x$ على المجال $[0, 1]$ فهو مستمر ويحقق $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$ لكنها ليست مقلصة لأن $|f'| = 1$ على ذات المجال، وفي هذه الحالة جميع نقاط المجال $[0, 1]$ صامدة. إذن، لدينا الوجود لكن لم نحصل على الوحدانية.

تحقق الشرط الثاني دون الأول مع التابع $f(x) = \frac{x}{2}$ على المجال $[\frac{3}{2}, 2]$ فهو مستمر ولا يحقق الشرط $f([\frac{3}{2}, 2]) \subseteq [\frac{3}{2}, 2]$. في حين أنه مقلص على $[\frac{3}{2}, 2]$ لأن $|f'| \leq \frac{1}{2} < 1$ على ذات المجال، وفي هذه



الحالة التابع f لا يقبل نقطة ثابتة ثابتة في $[\frac{3}{2}, 2]$. وكما قد أشرنا إلى أن $f(D) \subseteq D$ شرط لازم لوجود نقطة صامدة.

ملاحظة (3)

نظرية بناخ للنقطة الثابتة تقدم الشرط الكاف لوجود ووحدانية النقطة الثابتة.

مثال مضاد: التابع $f(x) = \frac{1}{x}$ على المجال $[0.5, 2]$ أين لدينا $x^* = 1$ نقطة ثابتة ل f في حين لم نسجل تحقق أي شرط من شرطانظرية بناخ للنقطة الثابتة.

نتيجة: حل المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $D = [a, b]$ على طريقة النقطة الثابتة وفق الخوارزمية التالية

$$\begin{cases} x \in D \text{ معطى} \\ x^{k+1} = g(x^k), k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

يجعلنا نحصل على تقارب المتتالية $(x_k^{(k)})$ نحو النقطة الثابتة ل g من أجل أي قيمة $x^{(0)}$ في $[a, b]$ في حالة كانت g تحقق شرطانظرية بناخ للنقطة الثابتة غير أنه من الأفضل الاستعانة بطريقة ديكتومي في إختيار $x^{(0)}$ من أجل الوصول إلى تقدير مقبول في عدد أقل من العمليات التكرارية.

6.4 معيار التوقف

في الحقيقة لدينا معيارين لتوقف خوارزمية النقطة الثابتة: ليكن g تابعا يحقق شرطانظرية النقطة الثابتة على $[a, b]$ ولتكن $(x_k^{(k)})$ متتالية القيم التقريبية لحل المعادلة $g(x) = x$ من أجل كل $x \in [a, b]$ وعلية، مما سبق نجد

$$\begin{aligned} \forall p, n \in \mathbb{N}, * \quad |x^{(p)} - x^{(p+n)}| &= |g(x^{(p-1)}) - g(x^{(p+n-1)})| \\ &\leq \alpha |x^{(p-1)} - x^{(p+n-1)}| \\ &\leq \alpha^2 |x^{(p-2)} - x^{(p+n-2)}| \\ &\leq \dots \leq \alpha^p |x^{(0)} - x^{(n)}| \leq \alpha^p (b - a) \\ &\Rightarrow |x^p - x^*| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x^{(p)} - x^{(p+n)}| \leq \alpha^p (b - a) \end{aligned}$$

والآن، نرغب في توقف خوارزمية النقطة الثابتة عند أول قيمة تقريبية $x^{(p)}$ بها n رقم دقيق على الأقل وهذا كاف من أجل $\alpha^p (b - a) \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n}$ ويكافئ $p \geq \frac{\ln(\frac{10^{-n}}{2(b-a)})}{\ln \alpha}$. هذا من جهة، ومن جهة أخرى لدينا



$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \quad |x^{(p)} - x^*| &= |g(x^{(p-1)}) - g(x^*)| \\ &\leq \alpha |x^{(p-1)} - x^*| \\ &\leq \alpha |x^{(p-1)} - x^{(p)}| + \alpha |x^{(p)} - x^*| \\ &\Rightarrow |x^p - x^*| \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) |x^{(p)} - x^{(p-1)}| \end{aligned}$$

وعليه، لما نريد الحصول على أول قيمة تقريبية $x^{(p)}$ بها n رقم دقيق على الأقل وهذا كاف من أجل كل $\frac{1-\alpha}{\alpha} \leq 1$ ففي حالة $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ، وبالتالي، $|x^{(p)} - x^{(p-1)}| \leq \frac{1-\alpha}{2} \times 10^{-n}$ ويكافئ $\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) |x^{(p-1)} - x^{(p)}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n}$ أي أن $\alpha \geq \frac{1}{2}$ يكفي تحقق العلاقة $|x^{(p)} - x^{(p-1)}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n}$.

مثال: على طريقة النقطة الثابتة حل في المجال $[1, 2]$ المعادلة التالية $\ln(x) - x^2 + \frac{7}{4} = 0$ مع توقيف العملية من أجل الحصول على دقة تقريب لا تتعدى 10^{-3} . الحل: لاحظ أن $\ln(x) - x^2 + \frac{7}{4} = 0$ تكافئ $x = \frac{\ln(x) - \frac{7}{4}}{x}$ أي أن $g(x) = x$ حيث $g(x) = \frac{1}{x} \left(\ln(x) - \frac{7}{4}\right)$ من الواضح أن g قابلة للإشتقاق على $]1, 2[$. لكن، هل g تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة؟

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = -\frac{1}{4x^2} (4\ln(x) + 3) \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & e^{-3/4} & +\infty \\ \hline g'(x) & \| & + & 0 & - \end{array}$$

ولكون $e^{-3/4} < 1$ فإن g متناقصة على المجال $]1, 2[$ ومنه $g(]1, 2[) =]g(2), g(1)[\approx]1.2216, 1.75[\subseteq]1, 2[$ أن $\max\{|g'(x)|, x \in]1, 2[\} = \max\{|g'(1)|, |g'(2)|\} = \max\{0.75, 0.3608\} = 0.75 < 1$ ومنه $\alpha = 0.75 < 1$ إذن، g تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة. وبالتالي من أجل أي إختيار ل $x^{(0)}$ في المجال نجد الخوارزمية التالية متقاربة نحو النقطة الثابتة ل g .

$$\begin{cases} x^{(0)} \in]1, 2[& \text{معطى} \\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) = \frac{1}{x^{(k)}} \left(\ln(x^{(k)}) + \frac{7}{4}\right), k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

من أجل الحصول على دقة تقريب لا تتعدى 10^{-3} مع العلم أن $\alpha = 0.75 \geq \frac{1}{2}$ فإنه يكفي تحقيق العلاقة $|x^{(p)} - x^{(p-1)}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$ أما عدد التكرارات الموافقة لذلك فهو $p \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-3}}{2(b-a)}\right)}{\ln \alpha} = \frac{\ln\left(\frac{10^{-3}}{2}\right)}{\ln(0.75)} \approx 26.421$ أنه يلزمنا 28 حد على الأقل للحصول على هاته الدقة. في الجدول الموالي سنظهر أن حسن إختيار $x^{(0)}$ يساهم في الحصول على هذه الدقة في أقل عدد ممكن من العمليات التكرارية.



| | |
|--|-------------|
| $x^{(0)}$ | 1 |
| $x^{(1)}$ | 1.75 |
| $x^{(2)}$ | 1.31978045 |
| $x^{(3)}$ | 1.536214146 |
| $x^{(4)}$ | 1.418631021 |
| $x^{(5)}$ | 1.480083479 |
| $x^{(6)}$ | 1.447282212 |
| $x^{(7)}$ | 1.464598572 |
| $x^{(8)}$ | 1.455403025 |
| $x^{(9)}$ | 1.460271017 |
| $x^{(10)}$ | 1.457689718 |
| $x^{(11)}$ | 1.459057282 |
| $\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) x^{(11)} - x^{(10)} $ | 0.004102692 |
| $ x^* - x^{(11)} \approx$ | 0.000473814 |

تعليق: كما قد توصلنا سابقا إلى العلاقة التالية $|x^p - x^*| \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) |x^{(p)} - x^{(p-1)}|$ وبالتالي وجدنا المتتالية $(x^{(k)})_k$ ذات تقارب أسرع، غير أنه يمكن إستغلال هذه الخاصية في زيادة سرعة تقارب خوارزمية النقطة الثابتة في حالة كانت g قابلة للاشتقاق على $]a, b[$.

مبرهنة: بفرض أن g مقلصة على المجال $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على $]a, b[$ ولتكن x^* نقطة ثابتة ل g في $[a, b]$ وعليه، كلما كانت $g'(x^*)$ قريبة إلى الصفر وجدنا $(x^{(k)})_k$ ذات تقارب أسرع.

7.4 طريقة النقطة الثابتة مع زيادة سرعة التقارب

مثال:

نعرض هذه الطريقة لحل المعادلة $\ln(x) - x^2 + \frac{7}{4} = 0$ في برنامج Freefem++:

```

1 : func real f(real u){real r=(log(u)+1.75)/u;return r;}
2 : func real df(real u){real r=(-3/4+log(u))/u^2;return r;}
3 : real alpha;
4 : func real G(real u){real r=(alpha*u+f(u))/(1+alpha);return r;}
5 : int m=100,M; real[int] X(m);real dis;
6 : X(0)=1;
7 : for(int n=1;n<5;n++){M=n; X(n)=f(X(n-1));}
8 : dis=abs(X(n-1)-X(n));
9 : bool p=dis<1e-4; if(p)break ;}

```



```
10 : for(int n=5;n<m;n++){M=n; alpha =-df(X(n-1));
11 : X(n)=G(X(n-1));
12 : dis=abs(X(n-1)-X(n));
13 : bool p=dis<1e-4;if(p)break;}
14 : X.resize(M); cout<<"X="<<X<<endl;
15 : cout<<"nombre des interations est"<<M-1<<endl;
```

نتحصل على النتائج التالية:

X=49

```
1 1.75 1.31978045 1.536214146 1.418631021
1.493006965 1.429083947 1.483994029 1.436784448 1.477355192
1.442468146 1.472456862 1.446667436 1.468839289 1.449771589
1.466166141 1.452066799 1.464190236 1.453764091 1.46272944
1.455019297 1.461649346 1.455947587 1.460850682 1.456634109
1.460260095 1.45714183 1.459823362 1.457517316 1.459500396
1.457795006 1.459261559 1.458000371 1.459084935 1.458152246
1.458954318 1.458264565 1.458857723 1.458347628 1.458786288
1.458409057 1.45873346 1.458454485 1.458694393 1.458488082
1.458665501 1.458512927 1.458644134 1.458531301
nombre des interations est48
```

8.4 الأعداد الأولية

يمكننا برمجية خوارزمية لايجاد الأعداد الأولية باستعمال لغة FreeFem++

شرح الخوارزمية

- 1- إدخال قيمة m بعد تحديدها .
- 2- إخراج قيمة m . بعد تعيينها كعدد صحيح .
- 3- إدخال وإخراج قيمة 2 كعدد أولي .
- 4- نعين قيمة ابتدائية $i = 3$ ومن أجل كل قيمة i أصغر أو تساوي m نعتبر $S1 = 1$
- 5- يتم التحقق إذا كانت الأعداد من 2 إلى $i-1$ أولية أم لا وذلك بالاعتماد على باقي القسمة $S1$
- 6- إخراج قيم الأعداد الأولية التي يكون فيها باقي القسمة $S1$ غير معدوم .



```

1 : int k, i, m,s,S1,sum;    sum=0;
2 : cout << "Entrer la valeur de m "<<endl; cin>>m;
3 : cout<< "Donc, tu donne m="<<m<<". Alors, les nbs primirs"<<endl;
4 : for( i=2;i<=m;i++){ S1=1;
5 : for( k=2;k<=i;k++){ s=i%k; if(s==0) S1+=1;  }
6 : if(S1==2){ cout << i << " est un number premier "<<endl;sum+=1;}}
7 : cout << "il y a "<<sum<< " number premier inf ou egale a " <<m<<endl;

```

نتحصل على:

```

Entrer la valeur de m
Donc, tu donne m=70. Alors, les nbs primirs inf ou egale a m sont
2 est un number premier
3 est un number premier
5 est un number premier
7 est un number premier
11 est un number premier
13 est un number premier
17 est un number premier
19 est un number premier
23 est un number premier
29 est un number premier
31 est un number premier
37 est un number premier
41 est un number premier
43 est un number premier
47 est un number premier
53 est un number premier
59 est un number premier
61 est un number premier
67 est un number premier
il y a 19 number premier inf ou egale a 70

```

خاتمة

تطرقنا في هذه المذكرة لطريقة العناصر المنتهية وتوظيفها في حل المعادلات التفاضلية معتمدين على برنامج FreeFem++ حيث لم يقتصر استخدامنا له في هذه الطريقة وحسب، بل إلى عدة طرق أخرى في التحليل العددي والأمثلة دون قيود.

رغم توسعنا في هذه الدراسة إلا أن استخدامات البرمجة لازالت شاسعة ومتنوعة، إذ توجد برامج أخرى يمكن اعتمادها في التحليل العددي والرياضيات بشكل عام.

في الأخير، نرجوا أننا وفقنا ولو بالقدر الضئيل في ترك بصمة مضيئة ضمن صفحات العلم وأن يكون عملنا المتواضع بابا للبحث والتعمق وتمهيدا لاستخدام برامج أخرى في هذه الدراسة.

المراجع العلمية

[1] الدكتور نصر الدين عيد، التحليل العددي، مديرية الكتب و المطبوعات الجامعية 1432 - 2011

[2] Hecht, Frédéric, et al. "FreeFem++ manual." (2005)

[3] Mostapha Lakrib, cour d'analyse numérique, OPU, (2003).

[4] Allaire, Grégoire. Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[5] Georges Sadaka. FreeFem++, a tool to solve PDEs numerically,(2012).

