الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا للأساتذة التعليم التكنولوجي - سكيكدة
Ecole Normale Supérieure d'enseignement technologique, Skikda

قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم المتوسط

عنوان المذكرة

دراسة وجود حلول لبعض مسائل المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية

من إعداد الطالبات:

- بوعزيز أصالة
- لشهب أسماء
- عون الله نجوى

تحت إشراف الأستاذة:

- فنيزري فطيمة

نوقشت من طرف لجنة المناقشة:

- قيدوشي وحيدة...... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة...... رئيسا.
- فنيزري فطيمة...... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة...... مشرفا.
- كناف أسماء......... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة......... مناقشا.
- مو س إلهام.......... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة......... مناقشا.

السنة الجامعية: 2025/2024

دفعة جوان 2025

❖ شكـــر وعرفــــان

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه يليق بجلال وجهه وعظيم سلطانه، والصلاة والسلام على سيد الخلق، نبي الرحمة الذي هدانا به الله إلى طريق العلم والإيمان، نبينا"محمد -صلّى الله عليه وسلّم- " وعلى آله وصحبه أجمعين.

قال تعالى: " يا أيها الذين آمنوا كلو من طيبات ما رزقناكم وأشكروا لله إن كنتم إياه تعبدون ".

الحمد الله الذي بنعمته تتم الصالحات، الحمد لله على نعمة العلم ونعمة التوفيق ونعمة السعي والإنجاز، ونسأله أن ينفعنا به وينفع به من بعدنا.

ومصداقا لقوله -صلّى الله عليه وسلم-: "لا يشكر الله من لا يشكر الناس ".

فاعترافا منا وامتنانا لمن كانت لهم بصمة في مسيرتنا. نتوجه بخالص الشكر وعظيم الامتنان للأستاذة المشرفة "فنيزري فطيمة" التي أشرفت علينا وساعدتنا في كل خطوة من هذا العمل بنصائحها وتوجيهاتها.

كما نتقدم بالشكر إلى أعضاء لجنة المناقشة كل باسمه ومقامه الذين شرفونا بقبولهم مناقشة مذكرتنا وخصصوا من وقتهم وجهدهم لمطالعتها وتقييمها.

كما نشكر جميع أساتذة المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي -سكيكدة- وعلى رأسهم مدير المدرسة الدكتور "جمال بوجعدار" ورئيس قسم الرياضيات الأستاذ "فراق عزوز" وكل الأساتذة الذين أشرفوا على تكويننا طيلة الأربع سنوات.

وكذلك نوجه شكرنا لكل من ساعدنا ولو بكلمة طيبة وكان له إسهام في إنجاز هذا العمل من قريب أو من بعيد.

في الأخير لا يسعنا إلا أن ندعوا الله أن يرزقنا ويرزقكم السداد والرشاد.

" كن من أهل العلم إن استطعت، فإن لم تبلغ منزلتهم فاجتهد أن تكون من طالبي العلم، فإن عز عليك ذلك فكن من محبيهم، ولا تكن ممن يعاديهم أو يحقر شأنهم، فالعلم نور، وأهله منارات في دروب الحياة".

❖ إهــداء

بســم الله الرحمن الرحيــم

أشكر الله العلي القدير الذي أنعم علي بالعقل والدين. القائل في محكم التنزيل

"وَفَوْقَ كُلِ ذِي عِلْمٍ عَلِيمٌ"

سورة يوسف الاية 76 ... صدق الله العظيم

الحمد لله رب العالمين، عدد ما كان وعدد ما يكون عدد الحركات والسكون، الحمد لله على ما أنعم وله الشكر على ما ألهم، الحمد لله الذي علم بالقلم علم الانسان ما لم يعلم، والصلاة والسلام على خير الأنام رسول العلم والهدى، سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم الذي بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة، فجزاه الله عنا خير الجزاء وعلى أله وصحبه ومن اقتدى به إلى يوم الدين.

إلى العزيز الذي حملت إسمه فخرًا ...إلى من كلله الله بالهيبة والوقار ...إلى من حصد الأشواك عن دربي وزرع لي الراحة بدلا منها، إلى سندي في الحياة الذي ذاق مرارة التعب من أجل وصولي إلى ما أنا عليه اليوم "أبي الغالي" .

إلى نبض قلبي سندي عند ضعفي...إلى من غمرتني بجهاو شملتني بودها...إلى اليد الخفية التي أزالت عن طريقي العقبات وظلت دعواتها تحمل إسمي ليلًا نهارًا "أمي الحبيبة".

إلى من وهبني الله نعمة وجودهم إلى من شاركوني لحظات الطفولة، وضحكات البراءة، وأيامًا لا تُنس إلى إخوتي الذين كانوا دومًا سندي ورفاق دربي، لؤي، فؤاد، شعيب .

إلى الأخوات التي لم تلدهن أمي ..إلى من معهم سعدت ..الى من هم دائما بجانبي دون سبب ودون شروط و مصالح وأخص بالذكر صديقاتي: تومي صبيحة توأم روحي، زواق امنة .

إلى صديقاتي العزيزات من شاركني مقاعد العلم ووقفن معي في كل لحظة

نورهان سليماني، صفاء لوزات، أسماء لشهب، نجوى عون الله لكن في قلبي مكان لايملؤه سواكن.

إلى مشرفتي الفاضلة الأستاذة فنيزري فطيمة لكي مني كل الشكر والتقدير على توجيهك و دعمك المتواصل الذي كان نبراسا لي في مسيرتي العلمية.

شكر خاص أقدمه للأستاذ خشمان حسام الدين على مساعدته اللامحدودة ودعمه الصادق وقت الحاجة جزاك الله عني خير الجزاء. كما أود أن أعرب عن بالغ شكري و تقديري لأساتذتي الأفاضل

الأستاذ بوسنة جلال، الأستاذ بولعراس صالح، الأستاذ مزياني سيف الدين.

إلى كل من نساه قلمي و لم ينساه قلبي، إلى كل هؤلاء أهدي ثمرة جهدي .

طويت صفحة من التعب وسجلت في تاريخي فخرًا لا ينسى لم أعد أتساءل عن ملامح الوصول فقد رأيتها في عيوني، هاهي الخطى التي كانت تتعثر أحيانا قد وجدت مستقرها في قمة الإنجاز وبين طيات الطريق تنفست سلامًا و فرحًا و إمتنانًا.

أصالة بوعزيز

❖ إهــداء

بسم الله الرّحمن الرّحيم والصلاة والسلام على من أرسل هدى ورحمة للعالمين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه ومن تبعه بإحسان إلى يوم الدّين وبعد

الحمد لله أولا وآخرا، ظاهرا وباطنا. الحمد لله على كل ثمرة الحمد لله على كل عثرة، الحمد لله الذي بنوره إهتديت وبلطفه سِرت، الحمد لله عدد اللحظات التي ظننت أنني لن أصل ثم بلغت بتوفيقه.

وامتثالا لقول المصطفى صلى الله عليه وسلم (لايشكر الله من لايشكر النّاس) أتقدم بخالص الشكر والإمتنان لكل من كان سببا بعد الله في أن أقف اليوم على عتبة هذا الإنجاز.

إلى من جعل الله الجنّة تحت أقدامها، إلى التي كان قلبها وطنا حين ضاق العالم ونبعا من الحنان لايجف، سر الدعوات التي تحرس خطواتي من حيث لاأدري أمي الغالية .

إلى الذي أحمل إسمه بكل عز و إفتخار وكان لي السند في كل خطوة من المشوار، إلى من علمني أن السير نحو الهدف يحتاج صبرا لايعرف الإنكسار وأن العثرة لا تعني النّهاية وأن الله لايضيع تعب من صدق النّية وسعى أبي الغالي .

إلى من هم أقرب إلي من روحي إلى الذين تربطني بهم أسمى علاقة في الوجود إخوتي أحبتي .

إلى صديقتي العزيزتين اللّتين شاركتاني الجهد والعمل فكنّ السّند والعون في كل خطوة نجوى، أصالة.

إلى من حملو شعلة العلم ووهبوها لنا دون كلل إلى أساتذتي الكرام، أنتم النور الذي أضاء لي دروب المعرفة فلكم مني كل التقدير والإمتنان أخص بالذكر:

الأستاذة المشرفة فنيزري فطيمة، الأستاذ بوسنة جلال، الأستاذ بولعراس صالح، الأستاذ مزياني سيف الدين، الأستاذ خشمان حسام الدين.

إلى صديقاتي الغاليات اللاتي شاركنني لحظات حزني وفرحي كنتن أكثر من صديقات، كنتن أخوات ورفيقات درب لايعوضن

وصال ،شيماء، كوثر ، صفاء، نورهان وريان .

إلى من غفلت عنهم كلماتي ولم يغب أثرهم عن قلبي، إلى كل من أسهم في هذا العمل من قريب أو بعيد ولم يبخل بكلمة أودعوة صادقة أو بلحظة دعم قوي .

"وآخر دعواهم أن الحمد لله رب العالمين" .

لشهب أسماء

❖ إهـــداء

بسم الله الرحمن الرحيم وصلى الله على صاحب الشفاعة، نبي الرحمة ونور العالمين سيدنا محمد النبي الكريم ، وعلى آله وصحبه ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين و بعد

الحمد لله حبّا وشكرا وامتنانا، إن هذا العمل بكل ما حواه من جهد، وبكل ما تطلب من صبر، ما كان ليرى النور لولا فضل الله و توفيقه، فالحمد لله على البدء و على الختام

قال تعالى: "يرفع الله الذين آمنوا منكم و الذّين أوتوا العلم درجات".

بكل حب أهدي ثمرة نجاحي و تخرجي :

إلى من حملتني في بطنها وهنا على وهن، إلى من جعل الله الجنة تحت أقدامها، إلى من بدعائها سرّ نجاحي،
إلى سر الوجود أمي الحبيبة

إلى من كلّله الله بالهيبة والوقار، إلى الذي زين اسمي بأجمل الألقاب، إلى من علمني أن النجاح لا يأتي الا بالصبر والاصرار، إلى من غرس في روحي مكارم الأخلاق، إلى فخري واعتزازي أبي الغالي

إلى من أوصاني ربي ببرهما و مصاحبتهما في الدنيا معروفا، والداي الحبيبين
وأقول لهما :" ربّ إرحمهما كما ربياني صغيرا ".

إلى من قيل فيهم: تشد عضدك بأخيك، إلى من ساندني بكل حب وأزاح لي طريق المتاعب ممهدا لي الطريق زارعا الثقة والاصرار بداخلي، وأضاء دربي و طريقي في كل خطوة أخطوها، إلى ضلعي الثابت و سندي في الحياة. إخوتي الأعزاء بلال، عبد النور، المعتز بالله

كما لا أنسى زوجة أخي كوثر ، وقطعتي السكر اللتان تزيينان بيتنا ،الجميلتين : الينا ميان و أيلا ميليس

إلى صديقتي ورفيقتي في العمل التي تشاركنا لحظات التعب و الفرح طيلة مشوار العمل فكن السند والعون في كل خطوة أسماء، أصالة

إلى أساتذتي المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي -سكيكدة-الذين كانوا لحروفي نبضًا، ولطريقي نورًا، ولأحلامي سلمًا... إليكم أرفع أسمى آيات الشكر والعرفان، فما وصلت إلا بفيض عطائكم وكرم علمكم،وأخص بالذكر :
الأستاذة المشرفة فنيزري فطيمة،الأستاذة صغير فاطمة الزهراء

إلى رفيقات الدرب، إلى من كانوا معي على طريق النجاح والخير، إلى من تحلو بالاخاءوتميزوا بالعطاء، إلى من برفقتهم تزهو الأيام، إلى صديقاتي: حوراء البتول، براءة، فاطمة، إكرام، هداية، صفاء

إلى كل من علّمني حرفًا، وكان له فضل في وصولي إلى مراتب عليا، إلى جميع أساتذتي الكرام من المرحلة الابتدائية الى المرحلة الثانوية، وأخص بالذكر: الأستاذة بوحملة صفاء

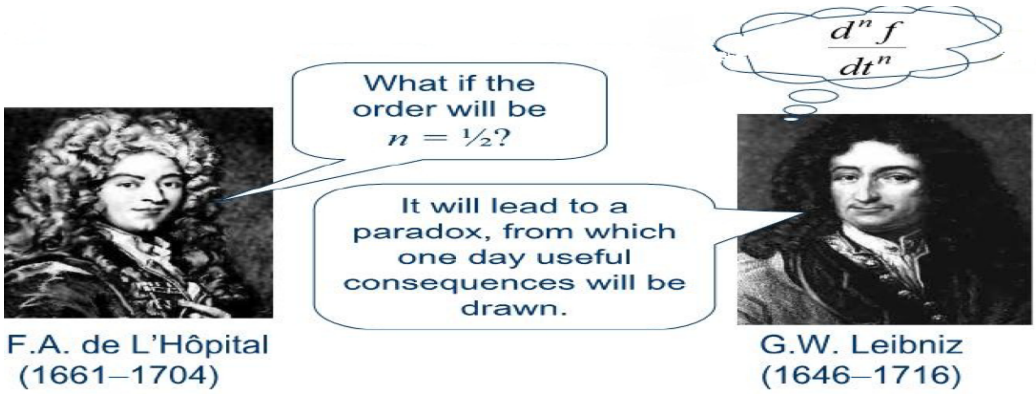
إلى كل من مدّ لي يد العون، أو أهداني كلمة طيبة كانت نورًا في طريقي، إلى كل من مرّ بخاطري وسقط سهوًا من قلمي، فلم تحتوِه سطور مذكرتي لكم جميعًا في القلب مكان، وإن غفلت عنكم الحروف، فما أنتم عن الذاكرة ببعيد.
"فاللّهم إجعلنا ممّن تعلّم وعمل فعلّم، واستفاد فأفاد وغيثا أينما حلّ نفع"

عون الله نجوى

الفهرس

مقـــدّمة

حساب التفاضل والتكامل الكسريين هو أحد مجالات التحليل الرياضي بدأت بوادره في القرن 17 أين طور نيوتن و ليبنتز أسسه، حيث عرّف ليبنتز الرمز $\frac{d^n}{dx^n}f$ الذي عبر به عن المشتق النوني للدالة f المعرفة بـ $f(x)=x$. لتُوجّه له رسالة من قبل العالم ماركيزدو لوبيتال في 30سبتمبر 1695 مفادها ما نتيجة هذا الإشتقاق في حالة $n=\frac{1}{2}$ وقد كان الجواب: "السؤال يبدو متناقضا ومع ذلك يحمل الصحة"، يعتبر هذا السؤال الإنطلاقة الأولى لظهور الحساب الكسري في الرياضيات [16].



في السنوات الأخيرة جذبت المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية إنتباه علماء الرياضيات والفيزياء حيث لجأ العديد منهم إلى إنشاء نماذج رياضية وهذه النماذج غالبا ماتؤدي إلى صياغة مسائل على شكل معادلات تفاضلية برتب كسرية والتي تعد آداة أساسية في العديد من المجالات العلمية المختلفة كالفيزياء، البيولوجيا، الطب، الهندسة الكهربائية وغيرها من المجالات وتبرز تطبيقاتها في تحليل الدوائر الكهربائية المعقدة، نظام تحديد المواقع الجوي، مقارنة تخطيط القلب للمرضى، إنتشار جزيئات المادة[1،11،19،21].

وقد ساهم العديد من الباحثين في دراسة وجود و وحدانية وإستقرار الحلول لهذا النوع من المعادلات [6،7،14،22].

فعلى سبيل المثال درس $Nass\ Adjimi$ وآخرون في [4]وجود ووحدانية الحلول للمعادلة التفاضلية اللاخطية بشروط حدية بمشتقة ريز- كابوتو باستخدام نظريتي النقطة الثابتة لبناخ و كراسنوسلسكي والمسألة معرفة بالشكل التالي

$$\begin{cases} {}_0^{RC}D_T^{\alpha}\left({}_0^{RC}D_T^{\beta}+\chi\right)x(t)=f(t,x(t)), \quad 0<t<T, \\ x(0)+x(T)=0, \\ x'(0)+x'(T)=0. \end{cases}$$

حيث أن $^{RC}D^{\alpha}$ و $^{RC}D^{\beta}$ هما مشتقتا ريز- كابوتو الكسرية من الرتبة $1<\alpha\leq 2$ و $0<\beta\leq 1$، $\chi\in\mathbb{R}$ مع $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة بالنسبة إلى المتغيرين t و x.

في [10] قام $Fulai\ chen$ وآخرون بدراسة نوع من المسائل ذات القيم الحدية للمعادلات التفاضلية الكسرية بمشتقة ريز- كابوتو باستخدام بعض نظريات النقطة الثابتة و تعرف المسألة بالشكل التالي

$$\begin{cases} {}_0^{RC}D_T^{\gamma}y(\tau)=g(\tau,y(\tau)), \quad \tau\in J,\ J=[0,T],\ 1<\gamma\leq 2, \\ y(0)+y(T)=0, \\ y'(0)+y'(T)=0. \end{cases}$$

حيث أن ${}_0^{RC}D_T^{\gamma}$ هي مشتقة ريز- كابوتو و $g:J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة بالنسبة إلى المتغيرين τ و y.

وفي دراسات مشابهة [15] ناقش الباحثون وجود الحلول الموجبة لمسائل القيم الحدية التكاملية للمعادلات التفاضلية الكسرية مع تأخير بمشتقة كابوتو باستخدام إحدى نظريات النقطة الثابتة و المسألة محل الدراسة مصاغة كالأتي

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\beta}z(t)+g(t,z_t)=0, \quad t\in[0,1], \\ z(t)=\phi(t), \quad t\in[-\tau,0], \\ z(0)=z''(0)=z'''(0)=0, \\ z(1)=k\int_0^1 z(\theta)\,d\theta. \end{cases}$$

حيث $3<\beta\leq 4$ و $0<k<2$ و $^{c}D^{\beta}$ هي مشتقة كابوتو الكسرية، مع $g:[0,1]\times C_{\tau}\to[0,+\infty)$ دالة مستمرة.

وفي [5] عرضت المسألة

$$\begin{cases} {}^{RL}D^q({}^CD^r x(t)) = f(t, x(t)), \quad 0 < t < T, \\ x'(\xi) = \lambda\, {}^CD^v x(\eta), \quad x(T) = \mu\, I^p x(\zeta), \quad \xi, \eta, \zeta \in (0, T), \end{cases}$$

حيث ${}^{RL}D^q$ تمثل مشتقة ريمان-ليوفيل الكسرية من الرتبة q مع $0 < q < 1$ و ${}^CD^r$ و ${}^CD^\nu$ تمثلان المشتقات الكسرية لكابوتو من الرتب r وν على التوالي، حيث $0 < r < 1$ و $0 < \nu < q + r$ و I^p هو التكامل الكسري لريمان-ليوفيل من الرتبة $p > 0$ و $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مع $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
من طرف *Ahmed Alsaedi* وآخرون ناقشوا فيها وجود ووحدانية الحلول لمسائل القيم الحدية بمشتقات كسرية مختلطة من نوع ريمان-ليوفيل وكابوتو بشروط حدية تكاملية-تفاضلية كسرية باستخدام نظريات النقطة الثابتة لكراسنوسلسكي، لراي-شودر وبناخ.

موضوع المذكرة:
الهدف من هذه المذكرة هو المساهمة في تطوير مجال دراسة وجود حلول مسائل المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية في فضاء بناخ باستعمال نظريات النقطة الثابتة.
قسمنا عملنا هذا إلى ثلاث فصول
الفصل الأول: تطرقنا فيه إلى بعض المفاهيم الأساسية، تعريف التكامل والإشتقاق الكسريين وبعض خواصهم، وبعض نظريات النقطة الثابتة التي استعملناها في الفصلين الثاني والثالث.
الفصل الثاني: درسنا فيه وجود حلول لمسألة القيم الحدية بمشتقات كسرية مختلطة وتعطى المسألة بالشكل التالي

$$\begin{cases} -{}^CD^\alpha_{1^-}\, {}^RD^\beta_{0^+} u(t) + f(t, u(t)) = 0, \ 1 < \beta \leq 2, 0 < \alpha \leq 1, \ 0 < \ t < \ 1, \\ u(0) = u'(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

بحيث

- ${}^CD^\alpha_{1^-}$ مشتقة كابوتو الكسرية اليمنى.
- ${}^RD^\beta_{0^+}$ مشتقة ريمان-ليوفيل الكسرية اليسرى.
- $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق بعض الشروط التي سنحددها لاحقاً .

الفصل الثالث: درسنا وجود حلول لمسألة القيم الحدية بمشتقة ريز- كابوتو وتعطى كمايلي

$$\begin{cases} {}_0^{RC}D_1^{\alpha} w(s) = A(s, w(s)), \quad 0 < s < 1, \quad 1 < \alpha \leq 2, \\ w(0) = 0, \\ w(1) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \int_0^{c_j} w(s)\, ds, \quad 0 < c_j < 1, \quad \lambda_j > 0. \end{cases}$$

بحيث

- ${}_0^{RC}D_1^{\alpha}$ هي مشتقة ريز- كابوتو (Riesz-Caputo) .
- $A : [0.1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق بعض الشروط التي سنحددها لاحقا .
- λ_j و c_j ثابتان يحققان :

$$\sigma = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j c_j^2 \neq 2.$$

الفصل 1

مفاهيم أساسية

1.1 مقدمة

سنتطرق في هذا الفصل إلى إعطاء بعض التعاريف و المفاهيم الأساسية و النظريات التي تخدم الفصل الثاني و الثالث.

1.2 الفضاءات

1.2.1 فضاء بناخ

تعريف 1.2.1 [2]

نقول عن فضاء طبولوجي E أنه فضاء بناخ إذا كان E فضاء شعاعي نظيمي تام.

1.2.2 فضاء لوبيغ L^1

تعريف 1.2.2 [9]

ليكن $[a,b]$ حيث $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ مجال منته أو غيرمنته. نشير إلى $L^1[a,b]$ فضاء كل الدوال القابلة للقياس f المعرفة على $[a,b]$ نحو $\mathbb{R}$ بـ

$$L^1([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f \text{ قابلة للقياس و } \|f\|_{L^1} < \infty\},$$

مع

$$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)|dx.$$

الفضاء $L^1([a,b])$ المزود بالنظيم $\|.\|_{L^1}$ هو فضاء بناخ.

1.2.3 فضاء C

تعريف 1.2.3 [13]

ليكن $[a,b]$ حيث $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ مجال منته أوغير منته. نشير إلى C([a,b]) فضاء الدوال المستمرة f المعرفة على $[a,b]$ نحو $\mathbb{R}$ بـ

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f \text{ مستمرة}\},$$

مع

$$\|f\|_C = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

الفضاء $C([a,b])$ المزود بالنظيم $\|.\|_C$ هو فضاء بناخ.

1.3 تعاريف أساسية

تعريف 1.3.1 [20]

ليكن E فضاء بناخ ذو النظيم $||.||$ و $A : E \longmapsto E$ تطبيق، نقول عن A أنه مقلص على E إذا وجد عدد حقيقي k بحيث $0 < k < 1$، يحقق

$$\forall x, y \in E: \ \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|.$$

تعريف 1.3.2 [20]

ليكن E فضاء بناخ و $A : E \longmapsto E$ تطبيق، نقول أن x من E أنها نقطة ثابتة لـ A إذا تحقق $Ax = x$.

تعريف 1.3.3 [12]

ليكن E وF فضاءا بناخ و$f : E \longmapsto F$ تطبيق، نقول عن f مستمر كليا إذا كان

1. f مستمر
2. f يحول كل مجموعة محدودة من E إلى مجموعة متراصة نسبيا في F.

تعريف 1.3.4 [12]

لتكن M مجموعة غير خالية من $C(E, F)$، نقول عن M هي مجموعة متساوية الإستمرارية على E إذا تحقق مايلي

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x, y \in E: \ ||x - y||_E < \eta \Longrightarrow \forall f \in M, \ ||f(x) - f(y)||_F < \varepsilon.$$

تعريف 1.3.5 [12]

M مجموعة غير خالية من $C(E,F)$، نقول أن M محدودة بإنتظام إذا تحقق

$$\exists c > 0,\ \|f\|_\infty \leq c,\ \forall f \in M.$$

تعريف 1.3.6 [9]

ليكن E فضاء شعاعي حقيقي، نقول عن K مجموعة جزئية غير خالية من E أنها محدبة إذا كان

$$\forall x, y \in K,\ \lambda x + (1-\lambda)y \in K,\ \lambda \in [0,1].$$

توطئة 1.3.1 (Ascoli-Arzela) أسكولي أرزيلا [12]

M مجموعة جزئية غير خالية من $C(E,F)$، تكون M متراصة نسبيا إذا كان

1. M متساوية الإستمرارية.
2. M محدودة بإنتظام.

1.4 نظريات النقطة الثابتة

1.4.1 نظرية كراسنوسيلسكي (Krasnoselskii)

نظرية 1.4.1 [17]

ليكن E فضاء بناخ و $X \subset E$ لتكن X مجموعة جزئية غير خالية، مغلقة ومحدبة من فضاء بناخ E. لنفرض أن A و B هما مؤثران من X نحو E يحققان الشروط التالية

1. A مستمر ومتراص
2. B مؤثر مقلص (contraction)
3. لكل $x, y \in X$ يكون $Ax + By \in X$

فإنه يوجد $z \in X$ بحيث $Az + Bz = z$.

1.4.2 نظرية ليراي-شودر (Leray-Schauder)

نظرية 1.4.2 [3]

ليكن X فضاء بناخ و $C \subset X$ مجموعة غير خالية ومحدبة ولتكن O مجموعة جزئية مفتوحة حيث $O \subset C$ مع $0 \in O$، لنفرض أن $T : \overline{O} \to C$ مؤثرًا مستمر كليا، عندئذ إما يكون

1. لـ T نقطة ثابتة في $\overline{O}$.
2. أو يوجد $w \in \partial O$ بحيث $w = \lambda T w$من أجل $0 < \lambda < 1$.

1.5 التوابع الخاصة

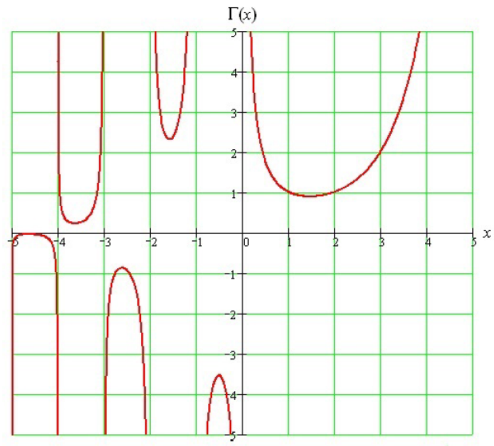
1.5.1 التابع غاما (Gamma)

تعريف 1.5.1 [18]

من أجل $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

هذا التكامل متقارب لما $x > 0$.



شكل 1.1: التابع غاما

خواص

من أجل $x > 0$ لدينا

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. $\Gamma(1) = 1$
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

برهان

.1

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt=\left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x).$$

.2

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}=e^0=1.$$

.3

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}\,dt,$$

نضع $t=\frac{1}{2}x^2$ وعليه $dt=x\,dx$

بالتعويض نحصل على

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx,$$

نضع

$$A=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx,$$

$$A^2=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

نضع

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

نجد

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{vmatrix}=r$$

ومنه

$$dx\,dy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|dr\,d\theta=r\,dr\,d\theta,$$

و عليه

$$A^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2}r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-e^{-\frac{1}{2}r^2}\right]_0^{+\infty}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2},$$

إذن

$$A^2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow A=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

وبالتالي

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

■

1.5.2 التابع بيتا (Beta)

تعريف 1.5.2 [18]

يعرف التابع بيتا **(Beta)** من أجل $x, y > 0$ كما يلي

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

خاصية 1.5.1
من أجل $x, y > 0$ لدينا

$$B(x,y) = B(y,x).$$

برهان
لدينا

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,$$

بوضع $u = 1-t$ أي $du = -dt$
نحصل على

$$B(x,y) = \int_0^1 (1-u)^{x-1}u^{y-1}\,du = B(y,x).$$

■

1.5.3 العلاقة بين التابعين غاما و بيتا

الدالتان غاما و بيتا يحققان العلاقة التالية

$$\forall x, y > 0,\ B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

برهان

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \left(\int_0^{+\infty} t_1^{x-1} e^{-t_1}\, dt_1\right)\left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1} e^{-t_2}\, dt_2\right)\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t_1^{x-1} t_2^{y-1} e^{-t_1} e^{-t_2}\, dt_1\right) dt_2\\
&= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}\left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1} e^{-(t_1+t_2)}\, dt_2\right) dt_1,
\end{aligned}$$

نقوم بتبديل المتغير $z = t_1 + t_2$ و عليه

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}\left(\int_{t_1}^{+\infty} (z-t_1)^{y-1} e^{-z}\, dz\right) dt_1\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-z}\left(\int_0^{z} (z-t_1)^{y-1} t_1^{x-1}\, dt_1\right) dz,
\end{aligned}$$

نضع $t = \frac{t_1}{z}$ نحصل على

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-z}\left(\int_0^{1} (zt)^{x-1}(z-tz)^{y-1} z\, dt\right) dz\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-z}\left(\int_0^{1} (z)^{x-1}(t)^{x-1}(z)^{y-1}(1-t)^{y-1} z\, dt\right) dz\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-z} z^{x+y-1}\left(\int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt\right) dz\\
&= \left(\int_0^{+\infty} z^{x+y-1} e^{-z}\, dz\right)\left(\int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt\right)\\
&= \Gamma(x+y)B(x,y),
\end{aligned}$$

و عليه

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

■

1.6 التكامل الكسري

تعريف 1.6.1

ليكن $\Omega = [a,b]$ حيث $-\infty < a < b < +\infty$ و $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة معرفة و مستمرة على $[a,b]$ لدينا

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

$$\begin{aligned}
I^{(2)}f(x) &= \int_a^x I^1 f(u)\,du \\
&= \int_a^x \left(\int_a^u f(t)\,dt\right)\,du \\
&= \int_a^x \left(\int_t^x du\right)\,dt \\
&= \int_a^x (x-t)f(t)\,dt,
\end{aligned}$$

و عليه

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt,$$

بمواصلة عملية التكامل n مرة نحصل على

$$I^{(n)}f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt$$

تسمى صيغة كوشي التكاملية المعممة .

تعريف 1.6.2

لتكن $f \in L^1\big([a,b]\big)$ و $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ، التكامل الكسري لريمان-ليوفيل للدالة f من الرتبة α يعطى بالعبارة التالية

$$(I_{a^+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\,,\; x \in [a,b].$$

مثال 1.6.1

$$f(x) = (x-a)^{\beta} \quad , \beta > -1 \quad , x \in [a,b].$$

حساب $I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta}$

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}\, dt,$$

نقوم بتبديل المتغير $t = a + (x-a)\,y$ حيث $0 \leq y \leq 1$ نجد $t - a = (x-a)\,y$ وعليه

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{1} \Big(x - a - (x-a)\,y\Big)^{\alpha-1} \Big((x-a)\,y\Big)^{\beta} (x-a)\, dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{1} \Big(x - a - (x-a)\,y\Big)^{\alpha-1} (x-a)^{\beta+1} y^{\beta}\, dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{1} \Big((x-a)\,(1-y)\Big)^{\alpha-1} (x-a)^{\beta+1} y^{\beta}\, dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{1} (x-a)^{\beta+\alpha}(1-y)^{\alpha-1} y^{\beta}\, dy,
\end{aligned}$$

و منه

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha} f(x) &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{1} (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta}\, dy \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)},
\end{aligned}$$

إذن

$$I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}.$$

خاصية 1.6.1
التكامل الكسري لريمان-ليوفيل من الرتبة $\alpha > 0$ خطي .

برهان
لتكن f و g دالتان معرفتان على $[a,b]$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}\left(\lambda f+\mu g\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(\lambda f+\mu g)(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\lambda f(t)\,dt+\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\mu g(t)\,dt\right] \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt+\frac{\mu}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}g(t)\,dt \\
&= \lambda I_a^{\alpha}f(x)+\mu I_a^{\alpha}g(x).
\end{aligned}$$

■

خاصية 1.6.2
لتكن $f \in C\left([a,b]\right)$ و $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ لدينا

$$I_{a^+}^{\alpha}\circ I_{a^+}^{\beta}f = I_{a^+}^{\alpha+\beta}f.$$

برهان

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}\circ I_{a^+}^{\beta}\left(f(x)\right) &= I_{a^+}^{\alpha}\left[I_{a^+}^{\beta}\left(f(x)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}I_a^{\beta}f(s)\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^s (s-t)^{\beta-1}f(t)\,dt\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\int_a^s (s-t)^{\beta-1}f(t)\,dt\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left(\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds\right)dt,
\end{aligned}$$

نقوم بتبديل المتغير $s = t + (x-t)y$ حيث $0 \leq y \leq 1$

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha} \circ I_{a^+}^{\beta}\left(f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left(\int_0^1 (x-t)^{\alpha-1}(1-y)^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-1}y^{\beta-1}(x-t)dy \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \left(\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dy \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta)\, dt \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{(\alpha+\beta)-1}\, dt \\
&= I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x).
\end{aligned}$$

■

خاصية 1.6.3

من أجل $\alpha = 0$ لدينا

$$I_{a^+}^{0} f(x) = f(x).$$

برهان

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{n} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(t)\, d\left(-\frac{(x-t)^n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n\Gamma(n)} \int_a^x f(t)\, d\left(-(x-t)^n\right),
\end{aligned}$$

باستعمال التكامل بالتجزئة نجد

$$I_{a^+}^{n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\left[-f(t)(x-t)^n\right]_a^x + \int_a^x (x-t)^n f'(t)dt \right)$$

$$I_{a^+}^{n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left[f(a)(x-a)^n + \int_a^x f'(t)(x-t)^n dt \right],$$

لما n=0

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{0} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt \\ &= f(a) + [f(t)]_a^x \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

ومنه النتيجة $$I_{a^+}^{0} f(x) = f(x).$$

■

خاصية 1.6.4

إذا كان $\alpha > 1$ فإن

$$\frac{d}{dx} I_{a^+}^{\alpha} f = I_{a^+}^{\alpha-1} f.$$

برهان

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} I_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d}{dx} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt \\ &= I_{a^+}^{\alpha-1} f(x). \end{aligned}$$

■

تعريف 1.6.3 [12]

نعرف التكاملات الكسرية اليمنى لريمان-ليوفيل من الرتبة $\alpha > 0$ كمايلي

$$(I_{b^-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad x < b$$

1.7 الإشتقاق الكسري

1.7.1 الإشتقاق الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل (Rieman-Liouvile)

تعريف 1.7.1

الإشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل للدالة f من الرتبة $\alpha>0$، حيث $f\in L^1\big([a,b]\big)$ و $n-1\leq\alpha<n$ يعطى بالعبارة التالية

$$\begin{aligned}{}^{R}D_{a^+}^{\alpha}f(t)&=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f(t)\,dt\\&=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_a^{n-\alpha}f(x)\right).\end{aligned}$$

حيث $n=[\alpha]+1$ ، $[\alpha]$ الجزء الصحيح للعدد α.

ملاحظة

- إذا كان $\alpha\in\left]0,1\right]$ فإن

$$\begin{aligned}{}^{R}D_{a^+}^{\alpha}f(x)&=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}(x-t)^{-\alpha}f(t)\,dt\\&=\frac{d}{dx}I_{a^+}{}^{1-\alpha}f(x).\end{aligned}$$

- إذا كان $\alpha=0$ فإن ${}^{R}D_{a^+}^{0}f(x)=f(x)$.

مثال 1.7.1

$$f(x)=(x-a)^{\beta},\ \ \beta>-1$$

حساب مشتق ريمان-ليوفيل من الرتبة α للدالة f

$${}^{R}D_{a^+}^{\alpha}f(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_a^{n-\alpha}(x-a)^{\beta}\right),$$

وجدنا سابقا

$$I_{a^+}^{n-\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta+n-\alpha},$$

ومنه

$$\begin{aligned}
{}^{R}D^{\alpha}_{a^+}f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta+n-\alpha}\right)\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\cdots(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha}\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha},
\end{aligned}$$

إذن

$${}^{R}D^{\alpha}_{a^+}f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

ملاحظة

الإشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل لعدد حقيقي هو عدد ثابت غير معدوم.

مثال 1.7.2

حساب ${}^{R}D^{\alpha}_{a^+}t^{\beta}$ حيث $t>0\ ,\ \beta>-1$

من المثال السابق بوضع $a=0$ نجد

$${}^{R}D^{\alpha}_{0^+}t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}t^{\beta-\alpha}.$$

حالة خاصة لما $\beta=0$

$${}^{R}D^{\alpha}_{0^+}t^{0} = {}^{R}D^{\alpha}_{0^+}\ 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

حالة خاصة

إذا كان $\alpha=m\in\mathbb{N}$ فإن ${}^{R}D^{m}_{a^+}f(x)=f^{(m)}(x)$.

برهان

لدينا $\alpha=m\ \Rightarrow n=m+1.$

إذن

$$\begin{aligned}
{}^{R}D^{m}_{a^+}f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1}\left(I^{m+1-m}_{a^+}f(x)\right)\\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1}\left(I^{1}_{a^+}f(x)\right)\\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1}\frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^x f(t)\,dt\\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^{m}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt\\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^{m}f(x)\\
&= f^{(m)}(x).
\end{aligned}$$

خاصية 1.7.1
الإشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل من الرتبة $\alpha > 0$ خطي .

برهان
من أجل $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ و $f, g \in L^1\big([a,b]\big)$

$$\begin{aligned}
{}^{R}D^{\alpha}_{a^+}\Big(\lambda f + \mu g\Big)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(\lambda f + \mu g)(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \Big(\lambda(x-t)^{n-\alpha-1} f(t) + \mu(x-t)^{n-\alpha-1} g(t)\Big)\,dt \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\,dt \\
&+ \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t)\,dt \\
&= \lambda\left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}_{a^+} f(x) + \mu\left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}_{a^+} g(x) \\
&= \lambda\, {}^{R}D^{\alpha}_{a^+} f(x) + \mu\, {}^{R}D^{\alpha}_{a^+} g(x).
\end{aligned}$$

■

خاصية 1.7.2
لتكن $f \in L^1\big([a,b]\big)$ و $\alpha > 0$ لدينا

$${}^{R}D^{\alpha}_{a^+} \circ I^{\alpha}_{a^+} f = f.$$

برهان

$$\begin{aligned}
{}^{R}D^{\alpha}_{a^+} \circ I^{\alpha}_{a^+}\big(f(x)\big) &= {}^{R}D^{\alpha}_{a^+}\big(I^{\alpha}_{a^+} f(x)\big) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}\big(I^{\alpha} f(x)\big) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \big(I^{n-\alpha+\alpha} f(x)\big) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n} f(x) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

■

خاصية 1.7.3
إذا كان $0<\alpha<\beta$ و $f\in L^1([a,b])$ فإن

$$ {}^RD^{\alpha}_{a^+}\circ I^{\beta}_{a^+}f = I^{\beta-\alpha}_{a^+}f, \quad \alpha,\beta \ \in \mathbb{R}^+. $$

برهان
من خلال تعريف التكامل والاشتقاق الكسريين لريمان-ليوفيل نجد

$$ \begin{aligned} {}^RD^{\alpha}_{a^+}\circ I^{\beta}_{a^+}f(x) &= {}^RD^{\alpha}_{a^+}\big(I^{\beta}_{a^+}f(x)\big)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\left(\int_a^t (t-s)^{\beta-1}f(s)\,ds\right)dt, \end{aligned} $$

بتطبيق نظرية فيبيني نجد

$$ {}^RD^{\alpha}_{a^+}\circ I^{\beta}_{a^+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x\left(\int_s^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}\,dt\right)f(s)\,ds, $$

بوضع $u=\frac{t-s}{x-s}$ نجد

$$ \begin{aligned} {}^RD^{\alpha}_{a^+}\circ I^{\beta}_{a^+}f(x) &= \frac{B(n-\alpha,\beta)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x (x-s)^{n-\alpha+\beta-1}f(s)\,ds\\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\int_a^x (x-s)^{n-\alpha+\beta-1}f(s)\,ds\\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha+\beta}_{a^+}f(x)\\ &= I^{\beta-\alpha}_{a^+}f(x). \end{aligned} $$

■

خاصية 1.7.4
تركيب الإشتقاق الكسري لريمان-ليوفيل ليس تبديلي أي

$$ {}^RD^{\alpha}_{a^+}\circ {}^RD^{\beta}_{a^+} \neq {}^RD^{\beta}_{a^+}\circ {}^RD^{\alpha}_{a^+} \neq {}^RD^{\alpha+\beta}_{a^+}. $$

من أجل $\alpha>0,\ \beta>0$ ، $\alpha\neq\beta$.

مثال مضاد

$$f(x)=x,\quad x\geq 0\,.$$

نأخذ $\alpha=1\;,\;\beta=\frac{1}{2}\;.$

لدينا

$${}^{R}D^{\alpha}_{a+}x^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha},$$

نجد

$$\begin{aligned}
{}^{R}D^{1}_{0+}\,x &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)}x^{1-1} \;=1,\\
{}^{R}D^{\frac{1}{2}}_{0+}\,x &= \frac{\Gamma\,(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}x^{1-\frac{1}{2}} \;=\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}},\\
{}^{R}D^{1}_{0+}\circ{}^{R}D^{\frac{1}{2}}_{0}\,x &= 1,\\
{}^{R}D^{\frac{1}{2}}_{0+}\circ{}^{R}D^{1}_{0+}\;x &= \frac{2\times 1^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}},
\end{aligned}$$

و منه

$${}^{R}D^{1}_{0+}\circ{}^{R}D^{\frac{1}{2}}_{0+}\,x\neq{}^{R}D^{\frac{1}{2}}_{0+}\circ{}^{R}D^{1}_{0+}\;x,$$

كذلك

$${}^{R}D^{1+\frac{1}{2}}_{0+}x={}^{R}D^{\frac{3}{2}}_{0+}\,x=\frac{\Gamma\,(2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,x^{-\frac{1}{2}}\;=\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}},$$

و بالتالي

$${}^{R}D^{1}_{0+}\circ{}^{R}D^{\frac{1}{2}}_{0+}\,x\neq{}^{R}D^{\frac{1}{2}}_{0+}\circ{}^{R}D^{1}_{0+}\;x\neq{}^{R}D^{\frac{3}{2}}_{0+}.$$

تعريف 1.7.2 [12]

نعرف الإشتقاق الكسري الأيمن بمفهوم ريمان-ليوفيل من الرتبة $\alpha>0$ كما يلي

$$\begin{aligned}
{}^{R}D^{\alpha}_{b^-}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(-\frac{d}{dt})^{n}\int_{t}^{b}(s-t)^{n-\alpha-1}f(s)ds\\
&= \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n}I^{n-\alpha}_{b^-}f(t).
\end{aligned}$$

1.7.2 الإشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو(Caputo)

تعريف 1.7.3

لتكن f دالة حيث $f \in C^n([a,b])$، الإشتقاق الكسري من الرتبة $\alpha > 0$ للدلة f بمفهوم كابوتو يعطى بالعبارة التالية

$$ {}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt. $$

حيث $n = [\alpha] + 1$ ، $[\alpha]$ الجزء الصحيح للعدد α.

ملاحظة

إذا كان $\alpha = n \in \mathbb{N}$ فإن ${}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f(x) = f^{(n)}(x)$

إذا كان $0 < \alpha < 1$ فإن ${}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \displaystyle\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)\, dt$

مشتق ثابت بمفهوم كابوتو يساوي صفر ${}^{C}D_{a^+}^{\alpha} K = 0 \quad , \forall K \in \mathbb{R}$

مثال 1.7.3

حساب مشتقة الدالة $f(x) = (x-a)^{\beta}$ بمفهوم كابوتو

لدينا

$$ \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} (x-a)^{\beta-n}, $$

$$ \begin{aligned} I_{a^+}^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\beta}\right] &= I_{a^+}^{n-\alpha}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} (x-a)^{\beta-n}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} I_a^{n-\alpha} (x-a)^{\beta-n} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} \frac{\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-n+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}, \end{aligned} $$

ومنه

$$ {}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}. $$

خاصية 1.7.5
الاشتقاق الكسري بمفهوم كابوتو من الرتبة α خطي.

برهان
من أجل $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و $f, g \in C^n([a,b])$
لدينا

$$^C D_{a^+}^{\alpha} f(t) = I_{a^+}^{n-\alpha} D_{a^+}^{n} f(t)$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} ^C D_{a^+}^{\alpha} \left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right) &= I_{a^+}^{n-\alpha} D_{a^+}^{n} \left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right) \\ &= \lambda I_{a^+}^{n-\alpha} D_{a^+}^{n} f(t) + \mu I_{a^+}^{n-\alpha} D_{a^+}^{n} g(t) \\ &= \lambda ^C D_{a^+}^{\alpha} f(t) + \mu ^C D_{a^+}^{\alpha} g(t). \end{aligned}$$

■

خاصية 1.7.6
تركيب الإشتقاق الكسري لكابوتو ليس تبديلي أي

$$^C D_{a^+}^{\alpha} \circ {}^C D_{a^+}^{\beta} \neq {}^C D_{a^+}^{\beta} \circ {}^C D_{a^+}^{\alpha} \neq {}^C D_{a^+}^{\alpha+\beta}\ .$$

من أجل $\beta > 0\,,\ \alpha > 0\,,\ \alpha \neq \beta$.

تعريف 1.7.4 [12]

نعرف الإشتقاق الكسري الأيمن بمفهوم كابوتو من الرتبة $\alpha > 0$ كما يلي

$$^C D_{a^+}^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} g^{(n)}(s) ds = I_{a^+}^{n-\alpha} g^{(n)}(t).$$

خاصية 1.7.7

ليكن $n-1 \leq \alpha < n$ و $f \in L^1[a,b]$ إذن

$$I_{a^+}^{\alpha}\, {}^C D_{a^+}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k,$$

$$I_{b^-}^{\alpha}\, {}^C D_{b^-}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k.$$

1.7.3 العلاقة بين مشتق ريمان-ليوفيل و مشتق كابوتو

توطئة 1.7.1 [12]

لتكن $f \in C^n\left([a,b]\right)$ و $\alpha \geq 0$ حيث $n \in \mathbb{N}$, $n-1 \leq \alpha < n$ ،
العلاقة بين مشتق كابوتو و مشتق ريمان-ليوفيل تعطى بـ

$${}^C D_a^{\alpha} f(t) = {}^R D_a^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(a).$$

برهان

نقوم بإستعمال نشر تايلور الدالة f عند النقطة a

$$f(t) = f(a) + (t-a) f'(a) + \frac{(t-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(t-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_{n-1},$$

أي

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1},$$

حيث

$$
\begin{aligned}
R_{n-1} &= \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t f^{(n)}(s)(t-s)^{n-1}\,ds \\
&= I^n f^{(n)}(t),
\end{aligned}
$$

بإستعمال خواص مشتق Riemman-liouvile المذكورة سابقا نحصل على

$$
\begin{aligned}
{}^R D_a^\alpha f(t) &= {}^R D_a^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}^R D_a^\alpha (t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + {}^R D_a^\alpha R_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(a) + {}^R D_a^\alpha R_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(a) + {}^R D_a^\alpha I^{(n)} f^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(a) + I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(a) + {}^C D_a^\alpha f(t),
\end{aligned}
$$

ومنه نجد

$$
{}^R D_a^\alpha f(t) = {}^C D_a^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a).
$$

■

1.7.4 الاشتقاق الكسري بمفهوم ريز- كابوتو(Riesz-Caputo)

تعريف 1.7.5 [4،8]

لتكن $f \in C^n([a,b])$، الإشتقاق الكسري من الرتبة $\alpha > 0$ للدالة f بمفهوم ريز- كابوتو يعطى بالعلاقة التالية

$$\begin{aligned} {}_a^{RC}D_b^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b |t-s|^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds \\ &= \frac{1}{2}\left({}_a^C D_t^{\alpha} + (-1)^n {}_t^C D_b^{\alpha}\right) f(t). \end{aligned}$$

خاصية 1.7.8
لتكن $f \in C^n([a,b])$ و $\alpha > 0$ لدينا

$$ {}_aI_b^{\alpha}\,{}_a^{RC}D_b^{\alpha} f(t) = \frac{1}{2}\left[{}_aI_t^{\alpha}\,{}_a^C D_t^{\alpha} + (-1)^n {}_tI_b^{\alpha}\,{}_t^C D_b^{\alpha}\right] f(t). $$

برهان
لدينا

$$ {}_aI_b^{\alpha}\,{}_a^{RC}D_b^{\alpha} f(t) = \frac{1}{2}({}_aI_t^{\alpha}\,{}_a^C D_t^{\alpha} + {}_tI_b^{\alpha}\,{}_a^C D_t^{\alpha})f(t) + (-1)^n\frac{1}{2}({}_aI_t^{\alpha}\,{}_t^C D_b^{\alpha} + {}_tI_b^{\alpha}\,{}_t^C D_b^{\alpha})f(t), $$

ومنه

$$ {}_aI_b^{\alpha}\,{}_a^{RC}D_b^{\alpha} f(t) = \frac{1}{2}[{}_aI_t^{\alpha}\,{}_a^C D_t^{\alpha} + (-1)^n {}_tI_b^{\alpha}\,{}_t^C D_b^{\alpha}]f(t). $$

■

الفصل 2

وجود حلول لمسألة القيم الحدية للمعادلات التفاضلية الكسرية المختلطة

2.1 مقدمة

الهدف من هذا الفصل هو دراسة وجود حلول لمسألة القيم الحدية المتعلقة بكل من مشتقة كابوتو الكسرية اليمنى ومشتقة ريمان-ليوفيل الكسرية اليسرى وذلك باستخدام نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسيلسكي Krasnoselskii .

2.2 مسألة القيم الحدية للمعادلات التفاضلية الكسرية المختلطة

لتكن المسألة التالية

$$\begin{cases} -{}^{C}D^{\alpha}_{1^-}\,{}^{R}D^{\beta}_{0^+}u(t) + f(t,u(t)) = 0,\ 1<\beta\leq 2 \quad ,0<\alpha\leq 1,\ 0< \ t<\ 1, & (2.1)\\ u(0)=u'(0)=u(1)=0. & (2.2)\end{cases}$$

بحيث

- ${}^{C}D^{\alpha}_{1^-}$ مشتقة كابوتو الكسرية اليمنى.
- ${}^{R}D^{\beta}_{0^+}$ مشتقة ريمان-ليوفيل الكسرية اليسرى.
- $f:[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تحقق بعض الشروط التي سنحددها لاحقاً.

ملاحظة

نلاحظ أنه وفق الشروط الحدية (2.2) مشتقة كابوتو ${}^{C}D^{\alpha}_{1^-}$ و ${}^{C}D^{\beta}_{0^+}$ تتطابق على التوالي مع مشتقة ريمان-ليوفيل ${}^{R}D^{\alpha}_{1^-}$ و ${}^{R}D^{\beta}_{0^+}$

ومنه يمكن أن نختزل المعادلة (2.1) إلى معادلة تحتوي على مشتقات كابوتو فقط أو مشتقات ريمان-ليوفيل فقط أي

$$-{}^{C}D^{\alpha}_{1^-}\,{}^{C}D^{\beta}_{0^+}u(t) + f(t,u(t)) = 0, \quad 0<\ t<\ 1,$$

أو

$$-{}^{R}D^{\alpha}_{1^-}\,{}^{R}D^{\beta}_{0^+}u(t) + f(t,u(t)) = 0, \quad 0<\ t<\ 1.$$

2.3 وجود الحلول

نرمز ب $X=C([0,1],\mathbb{R})$ إلى فضاء بناخ للدوال المستمرة من $[0,1]$ نحو $\mathbb{R}$ المزود بالنظيم

$$\|f\|_X = \max_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

نبدأ بحل المسألة الخطية التالية

$$\begin{cases} -{}^{C}D_{1-}^{\alpha}\,{}^{R}D_{0+}^{\beta}u(t)+y(t)=0,\ 1<\beta\leq 2 \quad , 0<\alpha\leq 1,\ 0<\ t<\ 1, & (2.3)\\ u(0)=u'(0)=u(1)=0. & (2.4)\end{cases}$$

توطئة 2.3.1

من أجل $0<\alpha\leq 1$ و $1<\beta\leq 2$ و $y\in L^{1}[0,1]$، حل مسألة القيم الحدية الخطية (2.3)(2.4) يكافئ المعادلة التكاملية التالية

$$u(t)=\int_0^1 G(t,r)y(r)dr-t^{\beta}\int_0^1 g(r)y(r)dr, \qquad (2.5)$$

حيث

$$G(t,r)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\begin{cases}\int_0^r (t-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds, & 0\leq r\leq t\leq 1,\\ \int_0^t (t-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds, & 0\leq t\leq r\leq 1.\end{cases}$$

$$g(r)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^r (1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds.$$

البرهان

بتطبيق I_{1-}^{α} على المعادلة (2.3) ومن الخاصية (1.7.7) نجد

$${}^{R}D_{0+}^{\beta}u(t)=I_{1-}^{\alpha}y(t)+C_0,$$

نطبق I_{0+}^{β} على المعادلة الناتجة

$$I_{0+}^{\beta}\,{}^{R}D_{0+}^{\beta}u(t)=I_{0+}^{\beta}I_{1-}^{\alpha}y(t)+I_{0+}^{\beta}C_0,$$

من نفس الخاصية السابقة نحصل على

$$u(t)-C_2-C_1t=I_{0+}^{\beta}I_{1-}^{\alpha}y(t)+I_{0+}^{\beta}C_0,$$

ومنه

$$u(t)=C_2+C_1t+I_{0+}^{\beta}I_{1-}^{\alpha}y(t)+\frac{C_0}{\Gamma(\beta+1)}t^{\beta},$$

لدينا من (2.4)

$$u(0) = 0 = C_2,$$

باشتقاق $u(t)$ نجد

$$u'(t) = C_1 + I_{0^+}^{\beta-1} I_{1^-}^{\alpha} y(t) + \frac{\beta C_0 t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+1)},$$

ومنه

$$u'(0) = 0 = C_1,$$

ولدينا أيضا

$$u(1) = I_{0^+}^{\beta} I_{1^-}^{\alpha} y(t)\Big|_{t=1} + \frac{C_0}{\Gamma(\beta+1)} = 0,$$

$$C_0 = -\Gamma(\beta+1)\left[I_{0^+}^{\beta} I_{1^-}^{\alpha} y(t)\Big|_{t=1}\right],$$

بالتعويض بـ C_0 و C_1 و C_2 في $u(t)$ نجد

$$u(t) = I_{0^+}^{\beta} I_{1^-}^{\alpha} y(t) - t^{\beta}\left(I_{0^+}^{\beta} I_{1^-}^{\alpha} y(t)\big|_{t=1}\right)$$

$$u(t) = I_{0^+}^{\beta}\left(I_{1^-}^{\alpha}(y(t))\right) - t^{\beta}\left(I_{0^+}^{\beta}\left(I_{1^-}^{\alpha}(y(t))\right)\big|_{t=1}\right)$$

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\left(\int_s^1 (r-s)^{\alpha-1} y(r)\,dr\right)ds\right]$$
$$-\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}\left(\int_s^1 (r-s)^{\alpha-1} y(r)\,dr\right)ds\right],$$

باستعمال نظرية فيبيني **(Fubini)**

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t \left[\int_0^r (t-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1} ds\right] y(r)\,dr$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_t^1 \left[\int_0^t (t-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1} ds\right] y(r)\,dr$$
$$-\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \left[\int_0^r (1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1} ds\right] y(r)\,dr,$$

ومنه

$$u(t) = \int_0^1 G(t,r) y(r)\,dr - t^{\beta}\int_0^1 g(r) y(r)\,dr.$$

■

توطئة 2.3.2

الدالتان G و g تحققان الخواص التالية

1) الدالتان $G(t,r)$ و $g(r)$ موجبتان.

2) $G(t,r) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}$ و $g(r) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}$ من أجل كل $t,r \in [0,1]$

البرهان

1. واضح أن الدالتين g و G موجبتين وذلك من خلال التعريف.

2. لدينا

$$g_1 = \int_0^r (t-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds, \quad 0 \leq r \leq t \leq 1,$$
$$g_2 = \int_0^t (t-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}ds, \quad 0 \leq t \leq r \leq 1.$$

بالنسبة لـ g_1

$$0 \leq s \leq r \leq t \leq 1,$$

بالضرب في (-1) وبإضافة t إلى أطراف المتباينة ورفع الطرفين إلى قوة $(\beta-1)$ نجد

$$g_1 \leq \int_0^r (r-s)^{\alpha-1}ds \leq \frac{1}{\alpha},$$

بالنسبة لـ g_2

$$0 \leq s \leq t \leq r \leq 1,$$

نطرح s من جميع أطراف المتباينة ونرفع قوة $(\alpha-1)$ نجد

$$(r-s)^{\alpha-1} \leq (t-s)^{\alpha-1},$$

إذن

$$\begin{aligned} g_2 &\leq \int_0^t (t-s)^{\beta-1}(t-s)^{\alpha-1}ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-2}ds \\ &\leq \frac{1}{\alpha}, \end{aligned}$$

من تعريف الدالة $G(t,r)$ نجد

$$G(t,r) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}.$$

بقي إثبات $g(r) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$

لدينا

$$0 \leq s \leq r \leq 1,$$

بطرح s من جميع أطراف المتباينة ونرفع قوة $(\beta - 1)$ نجد

$$(1-s)^{\beta-1} \leq 1,$$

إذن

$$\begin{aligned} g(r) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^r (r-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}. \end{aligned}$$

■

نعرف المؤثرين $A, B : X \longrightarrow X$ كما يلي

$$Au(t) = \int_0^1 G(t,r) f(r, u(r)) dr,$$

$$Bu(t) = -t^{\beta} \int_0^1 g(r) f(r, u(r)) dr.$$

توطئة 2.3.3

المسألة (2.1)(2.2) مكافئة لمسألة النقطة الثابتة

$$Au(t) + Bu(t) = u(t), \quad t \in [0,1].$$

لإثبات وجود حلول المسألة (2.1)(2.2) نحتاج النظرية التالية

نظرية 2.3.1

نعتبر الفرضيات التالية محققة

(H_1) الدالة $f(.,0)$ مستمرة وغير معدومة على $[0,1]$.

(H_2) توجد دالة موجبة $k \in L^1([0,1];\mathbb{R}_+)$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k(t)|x-y|, \quad 0 \leq t \leq 1, x, y \in \mathbb{R},$$

حيث

$$\|K\|_{L^1} < \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{2}.$$

(H_3) يوجد R بحيث

$$R \geq \frac{2L}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta) - 2\|K\|_{L^1}},$$

و

$$L = \max\{|f(t,0)|, \quad 0 \leq t \leq 1\}.$$

لتكن $M = \{u \in X, \|u\|_X \leq R\}$ حيث R معرفة في (H_3)، واضح أن M مجموعة مغلقة، محدودة ومحدبة من X.

نظرية 2.3.2

المسألة (2.1) (2.2) تملك على الأقل حل في M.

لإثبات وجود الحل نستعمل نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسيلسكي

البرهان

يتم البرهان في 4 مراحل.

المرحلة 1: نبرهن أن المؤثر A مستمر .

لنعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نحو u في X، إذن من أجل كل $t \in [0,1]$ لدينا

$$\begin{aligned}
|Au_n(t) - Au(t)| &\leq \int_0^1 G(t,r)\,|f(r,u_n(r)) - f(r,u(r))|\,dr \\
&\leq \frac{\|K\|_{L^1}\,\|u_n - u\|_X}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \\
&\leq \frac{\|u_n - u\|_X}{2}.
\end{aligned}$$

بما أن $\|u_n - u\|_X \to 0$ لما $n \to +\infty$ فإن $\|Au_n - Au\|_X \to 0$

إذن A مستمر.

المرحلة 2: نبرهن أن المؤثر A متراص في M.

يتم البرهان في خطوتين

الخطوة الأولى: نبرهن أن $A(M)$ مجموعة محدودة بانتظام .

من أجل $u \in M$ لدينا

$$\begin{aligned}
|Au(t)| &= \left|\int_0^1 G(t,r) f\left(r,u(r)\right) dr\right| \\
&\leq \int_0^1 G(t,r) \left|f(r,u(r))\right| dr \\
&\leq \int_0^1 G(t,r) \left[\left|f(r,u(r)) - f(r,0)\right| + \left|f(r,0)\right|\right] dr \\
&\leq \int_0^1 G(t,r) \left|f\left(r,u(r)\right) - f(r,0)\right| dr + \int_0^1 G(t,r) \left|f(r,0)\right| dr,
\end{aligned}$$

من خلال فرضيات النظرية (2.3.1) والتوطئة (2.3.2) ينتج

$$\begin{aligned}
|Au(t)| &\leq \frac{\|K\|_{L^1} \|u\|_X}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} + \frac{L}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \\
&= \frac{\|K\|_{L^1} \|u\|_X + L}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}.
\end{aligned}$$

ومنه $A(M)$ مجموعة محدودة بانتظام.

الخطوةالثانية :نبرهن أن $A(M)$ مجموعة متساوية الاستمرارية.

لدينا من أجل $u \in M$ و $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$

$$\begin{aligned}
|Au(t_1) - Au(t_2)| \leq & \int_0^{t_1} |G(t_1,r) - G(t_2,r)| |f(r,u(r))| \, dr \\
& + \int_{t_1}^{t_2} |G(t_1,r) - G(t_2,r)| |f(r,u(r))| \, dr \\
& + \int_{t_2}^{1} |G(t_1,r) - G(t_2,r)| |f(r,u(r))| \, dr \\
\leq & \left(\frac{R\|K\|_{L^1} + L}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\right) \left(\int_0^{t_1} \int_0^{r} \left[(t_2-s)^{\beta-1} - (t_1-s)^{\beta-1}\right] (r-s)^{\alpha-1} \, ds\, dr \right. \\
& \quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{t_1} \left[(t_2-s)^{\beta-1} - (t_1-s)^{\beta-1}\right] (r-s)^{\alpha-1} \, ds\, dr \\
& \quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{r} (t_2-s)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} \, ds\, dr \\
& \quad \left. + \int_{t_2}^{1} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\beta-1} (r-s)^{\alpha-1} \, ds\, dr \right) \\
\leq & \left(\frac{R\|K\|_{L^1} + L}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\right) \left((\beta-1)(t_2-t_1) \left(\frac{1-(1-t_1)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{(1-t_1)^{\alpha+1} - (1-t_2)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}\right) \right).
\end{aligned}$$

لما $t_1 \to t_2$ فإن $\|Au(t_1) - Au(t_2)\|_X \to 0$ و بالتالي $A(M)$ مجموعة متساوية الاستمرارية.

حسب توطئة أسكولي-أرزيلا $A(M)$ مجموعة متراصة نسبيا ومنه A متراص في M .

المرحلة 3: نبرهن أن B مقلص.

ليكن $u, v \in C([0,1], \mathbb{R})$ لدينا

$$|Bu(t) - Bv(t)| \leq \int_0^1 g(r)|f(r, u(r)) - f(r, v(r))|\, dr,$$

من التوطئة (2.3.2) و الفرضية (H_2) نجد

$$\begin{aligned}|Bu(t) - Bv(t)| &\leq \frac{\|K\|_{L^1}\|u - v\|_X}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \\ &\leq \frac{\|u - v\|_X}{2}.\end{aligned}$$

وبالتالي فإن B مقلص.

المرحلة 4: من أجل كل $u, v \in M$ نبرهن أن $Au + Bv \in M$.

لدينا

$$\begin{aligned}|Au(t)| &\leq \frac{(R\|K\|_{L^1} + L)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \\ &\leq \left(\frac{R\|K\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}\right) + \left(\frac{L}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}\right) \\ &\leq \left(\frac{R\|K\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}\right) + \frac{R}{2}\left(\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta) - 2\|K\|_{L^1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}\right) \\ &\leq \frac{R}{2},\end{aligned}$$

بنفس الطريقة نجد

$$|Bv(t)| \leq \frac{(R\|K\|_{L^1} + L)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \leq \frac{R}{2},$$

وبالتالي

$$\|Au + Bv\|_X \leq \|Au\|_X + \|Bv\|_X \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \leq R.$$

إذن $Au + Bv \in M$.

■

وبالتالي حسب نظرية كراسنوسيلسكي فإن $A + B$ يقبل على الأقل نقطة ثابتة وعليه المسألة(2.1) (2.2) تقبل على الأقل حل.

مثال 2.3.1
اذا اعتبرنا المسألة(2.1)(2.2) من أجل $\alpha = \frac{1}{2}$ و $\beta = \frac{3}{2}$ و

$$f(t,x) = \frac{\sin t^2}{3}\left(x - \frac{t}{2(1+x^2)}\right),$$

نبين أن f تحقق شروط النظرية (2.3.1)
1/ f تحقق (H_1)
لدينا الدالة $f(.,0) = \frac{-t\sin(t^2)}{6}$ مستمرة وغير معدومة على $[0,1]$.
2/ f تحقق (H_2)

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{\sin t^2}{3}\left|x - y - \frac{t}{2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right)\right| \\
&= \frac{\sin t^2}{3}|x-y|\left|1 + \frac{t}{2}\frac{(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\le \frac{\sin t^2}{2}|x-y| = k(t)|x-y|, \quad 0 \le t \le 1, x, y \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

حيث

$$\|K\|_{L^1} = \int_0^1 \frac{1}{2}\sin(t^2)\,dt = 0.15513 < 0.39270 = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{2}.$$

3/ f تحقق (H_3)

$$L = \sup\{|f(t,0)|,\ 0 \le t \le 1\},$$

$$\sup\left\{\frac{t\sin(t^2)}{6},\ 0 \le t \le 1\right\} = f(1,0) = \frac{\sin(1)}{6} = 0.14025,$$

و

$$\frac{2L}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta) - 2\|K\|_{L^1}} = 0.75464,$$

نختار R بحيث $R = 1 \ge 0.75464$.
و بالتالي المسألة (2.1)(2.2) تقبل على الأقل حل.

الفصل 3

وجود حلول لمسألة معادلات تفاضلية كسرية بمشتقة ريز- كابوتو

3.1 مقدمة

سندرس في هذا الفصل فئة محددة من مسائل القيم الحدية متعددة النقاط متعلقة بمشتقة ريز- كابوتو الكسرية باستخدام نظريتي النقطة الثابتة لكل من كراسنوسيلسكي و ليراي-شودر بالإضافة إلى تقديم أمثلة عددية.

3.2 مسألة القيم الحدية متعددة النقاط

نعتبر المسألة التالية

$$\begin{cases} {}_{0}^{RC}D_{1}^{\alpha}w(s) = A(s,w(s)), \quad 0<s<1, \quad 1<\alpha\leq 2, \\ w(0)=0, \\ w(1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\int_0^{c_j} w(s)\,ds, \quad 0<c_j<1, \quad \lambda_j>0. \end{cases} \tag{3.1}$$

بحيث

- ${}_{0}^{RC}D_{1}^{\alpha}$ هي مشتقة ريز-كابوتو (Riesz-Caputo) .
- $A:[0.1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تحقق بعض الشروط التي سنحددها لاحقا .
- λ_j و c_j ثابتان يحققان

$$\sigma=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j c_j^2\neq 2.$$

3.3 وجود الحل لمسألة القيم الحدية متعددة النقاط باستخدام نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسيلسكي

نرمز ب $X=C([0,1],\mathbb{R})$ إلى فضاء بناخ للدوال المستمرة من $[0,1]$ نحو $\mathbb{R}$ المزود بالنظيم

$$\|\omega\|_X=\max_{s\in[0,1]}|\omega(s)|.$$

$L^1_{\alpha-1}[0,1]$ حيث $0<\alpha-1\leq 1$ المزود بالنظيم

$$\|\omega\|_{L^1_{\alpha-1}}=\int_0^1|\omega(s)|(1-s)^{\alpha-2}ds.$$

نبدأ بحل المسألة الخطية التالية

$$\begin{cases} {}_{0}^{RC}D_{1}^{\alpha}w(s) = f(s), \quad s\in[0,1], \quad 1<\alpha\leq 2, \\ w(0)=0, \\ w(1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\int_0^{c_j} w(s)\,ds. \end{cases} \tag{3.2}$$

توطئة 3.3.1

من أجل $1 < \alpha \le 2$ و $f \in L^1[0,1]$ حل مسألة القيم الحدية الخطية (3.2) يكافئ المعادلة التكاملية التالية

$$w(s) = \int_0^1 k(s,x)f(x)(1-x)^{\alpha-2}\,dx + \frac{2s}{\sigma-2}\Bigg[\int_0^1 B(x)f(x)(1-x)^{\alpha-2}\,dx$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(-\int_0^{c_j}\frac{(c_j-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(x)\,dx + \int_{c_j}^{1}\frac{(x-c_j)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(x)\,dx\right)\Bigg], \quad (3.3)$$

حيث

$$k(s,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left((1-x)-(\alpha-1)(1-s)+|s-x|^{\alpha-1}(1-x)^{2-\alpha}\right),$$

و

$$B(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[2(1-x)-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(c_j(1-x)-(\alpha-1)\left(c_j-\frac{c_j^2}{2}\right)+\frac{(1-x)^{2-\alpha}x^\alpha}{\alpha}\right)\right].$$

البرهان

بتطبيق (تركيب) المؤثر ${}_0I_1^\alpha$ على طرفي المعادلة في المسألة (3.2) نحصل على

$${}_0I_1^\alpha\, {}_0^{RC}D_1^\alpha w(s) = {}_0I_1^\alpha f(s),$$

لدينا من الخاصية (1.7.7) و(1.7.8) ومن كون $1 < \alpha \le 2$ نجد

$${}_0I_1^\alpha\, {}_0^{RC}D_1^\alpha w(s) = w(s) - \frac{1}{2}\big(w(0)+w(1)\big) - \frac{1}{2}\big(w'(0)s - w'(1)(1-s)\big),$$

و عليه

$$w(s) = \frac{1}{2}\big(w(0)+w(1)\big) + \frac{1}{2}\big(w'(0)s - w'(1)(1-s)\big) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |s-x|^{\alpha-1}f(x)\,dx,$$

من الشرط $w(0)=0$ نجد

$$w(s) = \frac{w(1)}{2} + \frac{w'(0)s - w'(1)(1-s)}{2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |s-x|^{\alpha-1}f(x)\,dx, \quad (3.4)$$

و بالتالي

$$w'(s) = \frac{w'(0)+w'(1)}{2} + \int_0^s \frac{(s-x)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}f(x)\,dx - \int_s^1 \frac{(x-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}f(x)\,dx.$$

ومنه يمكننا استنتاج

$$\frac{w(1)}{2} = \frac{1}{2}w'(0) + \int_0^1 \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x)\,dx, \tag{3.5}$$

$$\frac{w'(1)}{2} = \frac{w'(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-x)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} f(x)\,dx, \tag{3.6}$$

بالتعويض ب(3.5) و (3.6) في العبارة (3.4) نحصل على

$$\begin{aligned} w(s) &= \frac{1}{2}w'(0) + \int_0^1 \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x)\,dx + \frac{w'(0)}{2}s - \frac{w'(0)}{2}(1-s) \\ &- \int_0^1 \frac{(1-x)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} f(x)\,dx + \int_0^1 \frac{|s-x|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x)\,dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(s) = w'(0)s &+ \int_0^1 \frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x)\,dx - \int_0^1 \frac{(1-x)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}(1-s) f(x)\,dx \\ &+ \int_0^1 \frac{|s-x|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x)\,dx, \end{aligned}$$

و بالتالي

$$w(s) = w'(0)s + \int_0^1 k(s,x) f(x)(1-x)^{\alpha-2}\,dx, \tag{3.7}$$

حيث

$$k(s,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big[(1-x) - (\alpha-1)(1-s) + |s-x|^{\alpha-1}(1-x)^{2-\alpha}\Big].$$

بأخذ الشرط $w(1) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \int_0^{c_j} w(s)\,ds$ بعين الإعتبار نجد

$$\begin{aligned}
w'(0)+\int_0^1 \frac{2(1-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\int_0^{c_j} w'(0)s\,ds\\
&\quad+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\int_0^{c_j}\int_0^1 k(s,x)f(x)(1-x)^{\alpha-2}\,dx\,ds\\
&= w'(0)\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{c_j^2}{2}\\
&\quad+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\int_0^{c_j}\int_0^1 k(s,x)f(x)(1-x)^{\alpha-2}\,dx\,ds,
\end{aligned}$$

و عليه

$$\begin{aligned}
\frac{w'(0)}{2}\left(2-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j c_j^2\right) &= \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\int_0^{c_j}\int_0^1 k(s,x)f(x)(1-x)^{\alpha-2}\,dx\,ds\\
&\quad-\int_0^1 \frac{2(1-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(x)\,dx,
\end{aligned}$$

و بالتالي

$$w'(0)=\frac{2}{\sigma-2}\left[\int_0^1 \frac{2(1-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(x)\,dx-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\int_0^{c_j}\int_0^1 k(s,x)f(x)(1-x)^{\alpha-2}\,dx\,ds\right], \qquad (3.8)$$

حيث

$$\sigma=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j c_j^2$$

بتعويض (3.8) في (3.7) نحصل على

$$\begin{aligned}
w(s)=\frac{2s}{\sigma-2}&\left[\int_0^1 \frac{2(1-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(x)\,dx-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\int_0^{c_j}\int_0^1 k(s,x)f(x)(1-x)^{\alpha-2}\,dx\,ds\right]\\
&+\int_0^1 k(s,x)f(x)(1-x)^{\alpha-2}\,dx, \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

قيمة التكامل المزدوج في المعادلة (3.9) هي

$$\begin{aligned}\int_0^{c_j}\int_0^1 k(s,x)f(x)(1-x)^{\alpha-2}\,dx\,ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_0^{c_j}\int_0^1 \big((1-x)^{\alpha-1}-(\alpha-1)(1-x)^{\alpha-2}\\ &\times(1-s)\big)f(x)\,dx\,ds+\int_0^{c_j}\int_0^1 |s-x|^{\alpha-1}f(x)\,dx\,ds\Bigg]\\ &=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_0^1 c_j(1-x)^{\alpha-1}-(\alpha-1)(1-x)^{\alpha-2}\\ &\times\left(c_j-\frac{c_j^2}{2}\right)f(x)\,dx\Bigg]\\ &\quad+\int_0^{c_j}\int_0^1 |s-x|^{\alpha-1}f(x)\,dx\,ds, \end{aligned}\tag{3.10}$$

لدينا قيمة التكامل المزدوج في المعادلة (3.10) هي

$$\begin{aligned}\int_0^{c_j}\int_0^1 |s-x|^{\alpha-1}f(x)\,dx\,ds &= \int_0^{c_j}\int_0^s (s-x)^{\alpha-1}f(x)\,dx\,ds+\int_0^{c_j}\int_s^1 (x-s)^{\alpha-1}f(x)\,dx\,ds\\ &=\int_0^{c_j}\int_x^{c_j}(s-x)^{\alpha-1}f(x)\,ds\,dx+\int_0^{c_j}\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}f(x)\,ds\,dx\\ &\quad+\int_{c_j}^1\int_0^{c_j}(x-s)^{\alpha-1}f(x)\,ds\,dx\\ &=\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\alpha}f(x)\,dx+\int_0^{c_j}\frac{(c_j-x)^\alpha}{\alpha}f(x)\,dx\\ &\quad-\int_{c_j}^1 \frac{(x-c_j)^\alpha}{\alpha}f(x)\,dx,\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}w(s) &= \int_0^1 k(s,x)f(x)(1-x)^{\alpha-2}\,dx\\ &+\frac{2s}{\sigma-2}\Bigg[\int_0^1 B(x)f(x)(1-x)^{\alpha-2}\,dx\\ &+\sum_{j=1}^k \lambda_j\left(-\int_0^{c_j}\frac{(c_j-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(x)\,dx+\int_{c_j}^1\frac{(x-c_j)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(x)\,dx\right)\Bigg],\end{aligned}$$

حيث

$$B(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[2(1-x)-\sum_{j=1}^k\lambda_j\left(c_j(1-x)-(\alpha-1)\left(c_j-\frac{c_j^2}{2}\right)+\frac{(1-x)^{2-\alpha}x^\alpha}{\alpha}\right)\right].$$

■

توطئة 3.3.2

الدالتين K و B تحققان الخصائص التالية

.1

$$|K(s,x)| \leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)}$$

.2

$$|B(x)| \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\frac{1+\alpha^2 c_j}{\Gamma(\alpha+1)} \right)$$

البرهان

1. لدينا

$$\begin{aligned}
|K(s,x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| (1-x) - (\alpha-1)(1-s) + (s-x)^{\alpha}(1-x)^{2-\alpha} \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[|1-x| + |\alpha-1||1-s| + |s-x|^{\alpha-1}|1-x|^{2-\alpha} \right],
\end{aligned}$$

بما أن $s, x \in [0,1]$ فإن

$$|K(s,x)| \leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)}.$$

2. لدينا

$$\begin{aligned}
|B(x)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| 2(1-x) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(c_j(1-x) - (\alpha-1)(c_j - \frac{c_j^2}{2}) + \frac{(1-x)^{2-\alpha}x^{\alpha}}{\alpha} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |2(1-x)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(c_j(1-x) - (\alpha-1)(c_j - \frac{c_j^2}{2}) + \frac{(1-x)^{2-\alpha}x^{\alpha}}{\alpha} \right) \right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |2(1-x)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(|c_j(1-x)| + |\alpha-1| \left| c_j - \frac{c_j^2}{2} \right| + \left| \frac{(1-x)^{2-\alpha}x^{\alpha}}{\alpha} \right| \right),
\end{aligned}$$

بما أن $s, x \in [0,1]$ فإن

$$|B(x)| \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\frac{\alpha^2 c_j + 1}{\Gamma(\alpha+1)} \right).$$

■

نعرف المؤثرين $M, N : X \longrightarrow X$ كمايلي

$$M\omega(s) = \int_0^1 K(s,x)A(x,\omega(x))(1-x)^{\alpha-2}\,dx,$$

$$N\omega(s) = \frac{2s}{\sigma-2}\int_0^1 B(x)A(x,\omega(x))(1-x)^{\alpha-2}\,dx$$

$$-\frac{2s}{\sigma-2}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(\int_0^{c_j}\frac{(c_j-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}A(x,\omega(x))\,dx - \int_{c_1}^{1}\frac{(x-c_j)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}A(x,\omega(x))\,dx\right).$$

توطئة 3.3.3

المسألة (3.1) مكافئة لمسألة النقطة الثابتة

$$M\omega(s) + N\omega(s) = \omega(s), \quad s \in [0,1]$$

لإثبات وجود حلول المسألة(3.1) نحتاج النظرية التالية

نظرية 3.3.1

نعتبر الفرضيات التالية محققة

(C_1) الدالة $A(.,0)$ مستمرة وغير معدومة على $[0,1]$.

(C_2)توجد دالة موجبة $\psi \in L^1_{\alpha-1}[0,1]$ تحقق الشرط

$$|A(x,t)-A(x,r)| \leq \psi(x)|t-r|\ ,\ 0 \leq x \leq 1\ ,\ t,r \in \mathbb{R},$$

حيث

$$\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} \leq \frac{1}{2L},$$

و

$$L = \max\left(\frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)}, \frac{2}{|\sigma-2|}\left(\frac{2}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\alpha^2c_j+2}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right).$$

(C_3) يوجد R بحيث

$$R \geq \left(\frac{1}{2L} - \|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}}\right)^{-1}\frac{T}{\alpha-1},$$

و

$$T = \max\{|A(x,0)|, \quad 0 \leq x \leq 1\}.$$

لتكن $B=\{\omega\in X,\|\omega\|_X\leq R\}$ حيث R معرفة في (C_3)، واضح أن B مجموعة مغلقة، محدودة ومحدبة في X .

نظرية 3.3.2

المسألة (3.1) تملك على الأقل حل في B.

لإثبات وجود الحل نستعمل نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسيلسكي

البرهان

يتم البرهان في 4 مراحل

المرحلة 1: نبرهن أن المؤثر M مستمر .

لنعتبر المتتالية $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نحو ω في X، إذن من أجل كل $s\in[0,1]$ لدينا

$$\begin{aligned}
|M\omega_n(s)-M\omega(s)| &\leq \int_0^1 |K(s,x)|\,|A(x,\omega_n(x))-A(x,\omega(x))|\,(1-x)^{\alpha-2}\,dx\\
&\leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 |A(x,\omega_n(x))-A(x,\omega(x))|\,(1-x)^{\alpha-2}\,dx\\
&\leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \psi(x)\,|\omega_n(x)-\omega(x)|\,(1-x)^{\alpha-2}\,dx\\
&\leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)}\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}}\|\omega_n-\omega\|_X.
\end{aligned}$$

بما أن $\|\omega_n-\omega\|_X\to 0$ لما $n\to+\infty$ فإن $\|M\omega_n-M\omega\|_X\to 0$

إذن M مستمر.

المرحلة 2:نبرهن أن المؤثر M متراص في B.

يتم البرهان في خطوتين

الخطوة الأولى: نبرهن أن $M(B)$ مجموعة محدودة بانتظام.

من أجل $\omega\in B$ عندئذ من التوطئة(3.3.2) والفرضية(C_2)و(C_3) نحصل على

$$\begin{aligned}
|M\omega(s)| &\leq \int_0^1 |K(s,x)|\,|A(x,\omega(x))|\,(1-x)^{\alpha-2}\,dx\\
&\leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (|A(x,\omega(x))-A(x,0)|+|A(x,0)|)(1-x)^{\alpha-2}\,dx\\
&\leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (\psi(x)\,|\omega(x)|+T)(1-x)^{\alpha-2}\,dx\\
&\leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)}\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}}\|\omega\|_X+\frac{T(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-2}\,dx\\
&\leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)}R\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}}-\frac{T(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(1-x)^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right]_0^1\\
&\leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)}\left(R\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}}+\frac{T}{\alpha-1}\right). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

ومنه $M(B)$ محدودة بانتظام.

الخطوة الثانية: نبرهن أن $M(B)$ متساوية الاستمرارية .

لدينا من أجل $\omega \in B$ و $0 \leq s_1 < s_2 \leq 1$

$$\begin{aligned}
|M\omega(s_1) - M\omega(s_2)| &\leq \int_0^1 |K(s_1,x) - K(s_2,x)||A(x,\omega(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx \\
&\leq \frac{(\alpha-1)(s_2-s_1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |A(x,\omega(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (|s_1-x|^{\alpha-1} - |s_2-x|^{\alpha-1})|A(x,\omega(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx \\
&\leq \frac{(\alpha-1)(s_2-s_1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |A(x,\omega(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{s_1} ((s_2-x)^{\alpha-1} - (s_1-x)^{\alpha-1})|A(x,\omega(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{s_1}^{s_2} ||s_1-x|^{\alpha-1} - |s_2-x|^{\alpha-1}||A(x,\omega(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{s_2}^1 ((x-s_1)^{\alpha-1} - (x-s_2)^{\alpha-1})|A(x,\omega(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx \\
&\leq \frac{(\alpha-1)(s_2-s_1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |A(x,w(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx \\
&+ \frac{(s_2-s_1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{s_1} |A(x,w(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{s_1}^{s_2} \left|(x-s_1)^{\alpha-1} - (s_2-x)^{\alpha-1}\right| |A(x,w(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx \\
&+ \frac{(s_2-s_1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{s_2}^1 |A(x,w(x))|(1-x)^{\alpha-2}\, dx \\
&\leq \frac{(\alpha-1)(s_2-s_1) + 2(s_2-s_1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[R\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} + \frac{T}{\alpha-1}\right] \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{s_1}^{s_2} \left|(x-s_1)^{\alpha-1} - (s_2-x)^{\alpha-1}\right| |A(x,w(x))|(1-x)^{\alpha-2}\, dx.
\end{aligned}$$

لما $s_1 \to s_2$ فإن $\|M\omega(s_1) - M\omega(s_2)\|_X \to 0$

و بالتالي $M(B)$ مجموعة متساوية الاستمرارية.

حسب توطئة أسكولي-أرزيلا $M(B)$ مجموعة متراصة نسبيا ومنه M متراص في B .

المرحلة 3: نبرهن أن N مقلص.

ليكن $\omega_1, \omega(s) \in C([0,1],\mathbb{R})$ لدينا

$$\begin{aligned}
|N\omega(s) - N\omega_1(s)| &\leq \frac{2}{|\sigma-2|}\int_0^1 \left(|B(x)| + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{|c_j-x|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\
&\times |A(x,\omega(x)) - A(x,\omega_1(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx \\
&\leq \frac{2}{|\sigma-2|}\left[\frac{2}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(\frac{\alpha^2 c_j+1}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_j}{\Gamma(\alpha+1)}\right] \\
&\times \int_0^1 \psi(x)|\omega(x)-\omega_1(x)|(1-x)^{\alpha-2}dx \\
&\leq \frac{2}{|\sigma-2|}\left[\frac{2}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(\frac{\alpha^2 c_j+2}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right]\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}}\|\omega-\omega_1\|_X,
\end{aligned}$$

من (C_2) نحصل على

$$\begin{aligned}
\|N\omega - N\omega_1\|_X &\leq L\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}}\|\omega-\omega_1\|_X \\
&\leq \frac{\|\omega-\omega_1\|_X}{2}.
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن N مقلص.

المرحلة 4: من أجل كل $\omega, \omega_1 \in B$ نبرهن أن $M\omega + N\omega_1 \in B$.

لدينا من (C_2) و (C_3) و (3.11) نجد

$$\begin{aligned}
|Mw(s)| &\leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)}\left(R\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} + \frac{T}{\alpha-1}\right) \\
&\leq L\left(R\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2L} - \|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}}\right)R\right) \\
&\leq \frac{R}{2},
\end{aligned}$$

من جهة أخرى من النظرية $(3.3.1)$ والتوطئة $(3.3.2)$ ومن (3.11) نجد

$$\begin{aligned}
|Nw_1(s)| &\leq \frac{2s}{|\sigma-2|}\left[\int_0^1 |B(x)||A(x,w_1(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx\right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(\int_0^{c_j}\frac{(c_j-x)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}|A(x,w_1(x))|dx + \int_{c_j}^1 \frac{(x-c_j)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}|A(x,w_1(x))|dx\right)\right] \\
&\leq \frac{2s}{|\sigma-2|}\left(\int_0^1\left[|B(x)| + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{|c_j-x|^{\alpha}(1-x)^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]|A(x,w_1(x))|(1-x)^{\alpha-2}dx\right) \\
&\leq \frac{2}{|\sigma-2|}\left(\frac{2}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\alpha^2 c_j+2}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(R\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} + \frac{T}{\alpha-1}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq L\left(R\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}}+\frac{T}{\alpha-1}\right)\\
&\leq \frac{R}{2},
\end{aligned}
$$

وبالتالي

$$
\begin{aligned}
\|Mw+Nw_1\|_X &\leq \|Mw\|_X+\|Nw_1\|_X\\
&\leq \frac{R}{2}+\frac{R}{2}\\
&= R,
\end{aligned}
$$

إذن

$$
Mw+Nw_1\in B.
$$

■

وبالتالي حسب نظرية كراسنوسيلسكي فإن $M+N$ يقبل نقطة ثابتة على الأقل وعليه المسألة (3.1) تقبل على الأقل حل.

3.4 وجود الحل لمسألة القيم الحدية متعددة النقاط باستخدام نظرية النقطة الثابتة لراي-شودر

لنعبر عن المعادلة التكاملية $w(s)$ في (3.3) بالشكل التالي

$$
w(s)=\int_0^1 H(s,x)A\left(x,w(x)\right)(1-x)^{\alpha-2}\,dx
$$

$$
+\frac{2s}{\sigma-2}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(-\int_0^{c_j}\frac{(c_j-x)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}A\left(x,w(x)\right)\,dx+\int_{c_j}^{1}\frac{(x-c_j)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}A\left(x,w(x)\right)\,dx\right),
$$

حيث

$$
H(s,x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\begin{array}{l}|s-x|^{\alpha-1}(1-x)^{2-\alpha}+\left(\dfrac{4s}{\sigma-2}+1\right)(1-x)-(\alpha-1)(1-s)\\[2mm] +\dfrac{2s}{\sigma-2}\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(c_j(1-x)-(\alpha-1)\left(c_j-\dfrac{c_j^2}{2}\right)+\dfrac{(1-x)^{2-\alpha}x^{\alpha}}{\alpha}\right)\end{array}\right].
$$

توطئة 3.4.1

لدينا

$$|H(s,x)| \leq G,$$

حيث G معرف كما يلي

$$G = \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2}{|\sigma-2|}\left(2\alpha + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(\alpha^2 c_j + 1\right)\right).$$

البرهان

$$\begin{aligned}
|H(s,x)| &\leq \left|\frac{4s(1-x)}{(\sigma-2)\Gamma(\alpha)}\right| + \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(1-x) - (\alpha-1)(1-s) + |s-x|^{\alpha-1} x^{\alpha-1}(1-x)^{2-\alpha}\right| \\
&+ \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{2s}{\sigma-2}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(c_j(1-x) - (\alpha-1)\left(C_j - \frac{C_j^2}{2}\right) + \frac{(1-x)^{2-\alpha}x^{\alpha}}{\alpha}\right)\right| \\
&\leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2s}{|\sigma-2|\Gamma(\alpha)} \\
&\times \left|2(1-x) + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(c_j(1-x) - (\alpha-1)\left(C_j - \frac{C_j^2}{2}\right) + \frac{(1-x)^{2-\alpha}x^{\alpha}}{\alpha}\right)\right| \\
&\leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2s}{|\sigma-2|\Gamma(\alpha+1)}\left(2\alpha + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\alpha^2 c_j + 1)\right) \\
&\leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2}{|\sigma-2|}\left(2\alpha + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\alpha^2 c_j + 1)\right).
\end{aligned}$$

■

نعرف المؤثر P كما يلي

$$Pw(s) = \int_0^1 H(s,x)A(x,w(x))(1-x)^{\alpha-2}\,dx$$

$$+\frac{2s}{\sigma-2}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(-\int_0^{c_j}\frac{(c_j-x)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}A\left(x,w(x)\right)\,dx + \int_{c_j}^{1}\frac{(x-c_j)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}A\left(x,w(x)\right)\,dx\right).$$

لاثبات وجود حلول المسألة(3.1) نحتاج النظرية التالية

نظرية 3.4.1

نعتبر الفرضيات التالية محققة

(D_1) الدالة $A(.,0)$ غير معدومة على $[0,1]$.

(D_2) يوجد دالتين موجبتين $\psi \in L^1_{\alpha-1}[0,1]$ و $\varphi \in C[0,+\infty)$ مع φ متزايدة و $\eta > 0$ حيث

$$|A(x,t)| \leq \psi(x)\varphi(|t|),$$

من أجل كل $0 \leq x \leq 1$ و $t \in \mathbb{R}$.

مع

$$\left(G + \sum_{j=1}^{k} \frac{2\lambda_j}{|\sigma-2|}\right) \|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} \varphi(\eta) < \eta.$$

نضع $B_\eta = \{w \in X, \|w\|_X < \eta\}$ مع $\eta > 0$ واضح أنها مجموعة مفتوحة ومحدودة في X .

نظرية 3.4.2

المسألة (3.1) تملك على الأقل حل في X.

لإثبات وجود الحل نستعمل نظرية النقطة الثابتة لراي-شودر

البرهان

يتم البرهان في مرحلتين

المرحلة 1: نبرهن أن المؤثر P مستمر كليا.

الخطوةالأولى :نبرهن أن المؤثر P مستمر.

لنعتبر المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نحو w في X إذن من أجل كل $s \in [0,1]$ لدينا

$$\begin{aligned}
|Pw_n(s) - Pw(s)| \leq & \int_0^1 |H(s,x)| \left|A\left(x,w_n(x)\right) - A\left(x,w(x)\right)\right| (1-x)^{\alpha-2}\, dx \\
& + \frac{2s}{|\sigma-2|} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\int_0^{c_j} \frac{(c_j-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \int_{c_j}^1 \frac{(x-c_j)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\
& \times \left|A\left(x,w_n(x)\right) - A\left(x,w(x)\right)\right| (1-x)^{\alpha-2}\, dx \\
& \leq \int_0^1 \left(|H(s,x)| + \frac{2s}{|\sigma-2|} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{|c_j-x|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\
& \times \left|A\left(x,w_n(x)\right) - A\left(x,w(x)\right)\right| (1-x)^{\alpha-2}\, dx \\
& \leq \left(G + \sum_{j=1}^{k} \frac{2\lambda_j}{|\sigma-2|} \right) \|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} \|w_n - w\|_X .
\end{aligned}$$

بما أن $\|w_n - w\|_X \to 0$ لما $n \to +\infty$ فإن $\|Pw_n - Pw\|_X \to 0$

إذن P مستمر.

الخطوةالثانية :نبرهن أن $P(B_\eta)$ مجموعة محدودة بانتظام.

من أجل $w \in B_\eta$ و من التوطئة (3.4.1) و النظرية (3.4.1) لدينا

$$\begin{aligned}
|Pw(s)| \leq & \int_0^1 |H(s,x)| \, |A\left(x, w(x)\right)| \, (1-x)^{\alpha-2} \, dx \\
& + \frac{2s}{|\sigma-2|} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\int_0^{c_j} \frac{(c_j - x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} |A(x,w(x))| \, dx + \int_{c_j}^1 \frac{(x-c_j)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} |A(x,w(x))| \, dx \right) \\
\leq & \int_0^1 \left(|H(s,x)| + \frac{2s}{|\sigma-2|} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{|c_j - x|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) |A\left(x, w(x)\right)| \, (1-x)^{\alpha-2} \, dx \\
\leq & \left(G + \sum_{j=1}^{k} \frac{2\lambda_j}{|\sigma-2|} \right) \int_0^1 \psi(x) \varphi\left(|w(x)|\right) (1-x)^{\alpha-2} \, dx \\
\leq & \left(G + \sum_{j=1}^{k} \frac{2\lambda_j}{|\sigma-2|} \right) \|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} \varphi(\eta) < +\infty.
\end{aligned}$$

ومنه $P(B_\eta)$ مجموعة محدودة بانتظام.

الخطوةالثالثة :نبرهن أن $P(B_\eta)$متساوية الاستمرارية.

ليكن $w \in B_\eta$ و $0 \leq s_1 < s_2 \leq 1$ لدينا

$$\begin{aligned}
|Pw\left(s_1\right) - Pw\left(s_2\right)| \leq & \int_0^1 |H\left(s_1, x\right) - H\left(s_2, x\right)| \, |A\left(x, w(x)\right)| \, (1-x)^{\alpha-2} \, dx \\
& + \frac{2\left(s_2 - s_1\right)}{|\sigma-2|} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \int_0^1 \frac{|c_j - x|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} |A\left(x, w(x)\right)| \, (1-x)^{\alpha-2} \, dx \\
\leq & \left[\frac{4\left(s_2 - s_1\right)}{|\sigma-2|\Gamma(\alpha)} + \frac{(\alpha-1)\left(s_2 - s_1\right)}{\Gamma(\alpha)} \right] \int_0^1 |A\left(x, w(x)\right)| \, (1-x)^{\alpha-2} \, dx \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left| |s_2 - x|^{\alpha-1} - |s_1 - x|^{\alpha-1} \right| |A\left(x, w(x)\right)| \, (1-x)^{\alpha-2} \, dx \\
& + \frac{2\left(s_2 - s_1\right)}{|\sigma-2|} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \int_0^1 |A\left(x, w(x)\right)| \, (1-x)^{\alpha-2} \, dx \\
\leq & \left(\frac{4}{|\sigma-2|\Gamma(\alpha)} + \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2}{|\sigma-2|} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \right) \left(s_2 - s_1\right) \|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} \varphi(\eta) \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{s_1} \left[\left(s_2 - x\right)^{\alpha-1} - \left(s_1 - x\right)^{\alpha-1} \right] |A\left(x, w(x)\right)| \, (1-x)^{\alpha-2} \, dx \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{s_1}^{s_2} \left| |s_2 - x|^{\alpha-1} - |s_1 - x|^{\alpha-1} \right| |A\left(x, w(x)\right)| \, (1-x)^{\alpha-2} \, dx \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{s_2}^{1} \left[\left(x - s_1\right)^{\alpha-1} - \left(x - s_2\right)^{\alpha-1} \right] |A\left(x, w(x)\right)| \, (1-x)^{\alpha-2} \, dx.
\end{aligned}$$

لما $s_2 \to s_1$ فإن $\|Pw(s_1) - Pw(s_2)\|_X \to 0$ و بالتالي $P(B_\eta)$ مجموعة متساوية الاستمرارية.
حسب توطئة أسكولي-أرزيلا $P(B_\eta)$ مجموعة متراصة نسبياً بالإضافة إلى كون P مستمر فهو مستمر كلياً.
المرحلة 2: نبرهن أن المؤثر P يملك على الأقل نقطة ثابتة.
نأخذ $O = B_\eta$ من أجل $w \in \partial O$ حيث $w = \lambda P w$ مع $0 < \lambda < 1$ نحصل على

$$\begin{aligned}|w(s)| &= |\lambda P w(s)| \\ &\leq |Pw(s)| \\ &\leq \left(G + \sum_{j=1}^{k} \frac{2\lambda_j}{|\sigma - 2|}\right) \|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} \varphi(\eta) < \eta.\end{aligned}$$

وهذا تناقض مع كون $w \in \partial O$ أي $\|w\|_X = \eta$
ومنه المؤثر P يملك على الأقل نقطة ثابتة. ■

وبالتالي حسب نظرية النقطة الثابتة ليراي-شودر فإن P يملك على الأقل نقطة ثابتة في $\overline{O}$ وبالتالي المسألة (3.1) تملك على الأقل حل.

مثال 3.4.1
اذا اعتبرنا المسألة(3.1) من أجل $\alpha = \frac{3}{2}$ ، $\lambda_j = 2^{j+1}$ ، $c_j = \frac{1}{j+1}$ من أجل كل j=1,2,3 و

$$A(x,t) = \frac{1}{60}\sqrt{1-x}e^{-10x}\left(t - \frac{x}{2(t^2+1)}\right),$$

نبين أن A تحقق شروط النظرية (3.3.1)
1/ A تحقق (C_1)
لدينا الدالة $A(.,0) = -\frac{x}{120}\sqrt{1-x}e^{-10x}$ مستمرة وغير معدومة على $[0,1]$.
1/ A تحقق (C_2)

$$\begin{aligned}|A(x,t) - A(x,r)| &= \frac{1}{60}\sqrt{1-x}e^{-10x}\left|t - r + \frac{x}{2(r^2+1)} - \frac{x}{2(t^2+1)}\right| \\ &\leq \frac{1}{60}\sqrt{1-x}e^{-10x}|t-r|\left|1 + \frac{x}{2}\frac{t+r}{(r^2+1)(t^2+1)}\right| \\ &\leq \psi(x)|t-r|,\end{aligned}$$

حيث

$$\psi(x) = \frac{1}{40}\sqrt{1-x}e^{-10x},$$

$$\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} = \int_0^1 \frac{1}{40}e^{-10x}\,dx = 2.49991 \times 10^{-3},$$

و

$$\sigma=\sum_{j=1}^{3}2^{j+1}(\frac{1}{j+1})^{2}=\frac{26}{9},$$

و

$$\begin{aligned}L&=\max\left\{\frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha)},\frac{2}{|2-\sigma|}\left(\frac{2}{\Gamma(\alpha)}+\sum_{j=1}^{3}2^{j+1}\frac{\alpha^{2}c_j+2}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right\}\\&=\max\left\{\frac{5}{\sqrt{\pi}},\frac{471}{2\sqrt{\pi}}\right\}\\&=\frac{471}{2\sqrt{\pi}}\\&=132.8666,\end{aligned}$$

إذن

$$\frac{1}{2L}=\frac{\sqrt{\pi}}{471}=3.7631\times10^{-3},$$

ومنه

$$\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}}<\frac{1}{2L}.$$

وبالتالي المسألة (3.1) تملك على الأقل في X.

مثال 3.4.2

اذا اعتبرنا المسألة(3.1) من أجل $\alpha=\frac{3}{2}$ ، $\lambda_j=2^{j+1}$ ، $c_j=\frac{1}{j+1}$ ، من أجل كل j=1,2,3 و

$$A(x,t)=(1-x)e^{-x}\left(\frac{1}{10}+\arctan t\right),$$

نبين أن A تحقق شروط النظرية (3.4.1)

1/ A تحقق (D_1)

لدينا

$$A(x,0)=(1-x)e^{-x}\neq0.$$

1/ A تحقق (D_2)

$$\begin{aligned}|A(x,t)|&=(1-x)e^{-x}\left|\frac{1}{10}+\arctan t\right|\\&\leq\psi(x)\varphi(|t|),\end{aligned}$$

حيث

$$\varphi(t) = \frac{1}{10} + \arctan t \quad , \quad \psi(x) = \sqrt{1-x}e^{-x}$$

لدينا

$$\sigma = \sum_{j=1}^{3} 2^{j+1}(\frac{1}{j+1})^2 = \frac{26}{9},$$

ومنه

$$k = \frac{5}{\sqrt{\pi}} + \frac{909}{8} \simeq 116.45,$$

و

$$\|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} \simeq 5.2677 \times 10^{-3}.$$

نختار $\eta = 1$ نحصل على

$$\left(k + \sum_{j=1}^{3} \frac{2\lambda_j}{|\sigma - 2|}\right) \|\psi\|_{L^1_{\alpha-1}} \varphi(\eta) = 0.83693 < \eta = 1.$$

وبالتالي المسألة (3.1) تملك على الأقل حل في X.

خـــاتمة

ختاما، ما يسعنا إلا أن نقول أنّ مادرسناه هو قطرة من بحر ونأمل أن نكون قد ساهمنا ولو بشكل بسيط في توضيح كيفية دراسة وجود الحلول لبعض مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية الكسرية. كما نرجو أن تشكل نتائجنا إضافة مهمة في هذا المجال وأن تكون بداية لبحوث أخرى تهتم بتطوير الطرق العددية لإيجاد الحلول التقريبية لهذا النوع من المسائل.

قائمة المراجع

[1] س. أنجرو، مجلة جامعة المنارة، بعض تطبيقات الاشتقاق الكسري ، المجلد 2، العدد 1، (**2022**).

[2] م. حازي، المقعد المجلي للتحليل الدالي ،ديوان المطبوعات الجامعية، 04-(**2016**).

[3] S. Abbas, M. Benchohra, and G.M. N'Guérékata, *Topics in fractional differential equations*, Springer Science, Business Media, (**2012**).

[4] N. Adjimi, M. Benbachir *Existence results for Langevin equation with Riesz–Caputo fractional derivative*, Surveys in Mathematics and its Applications, 17, (**2022**), 225–239.

[5] B. Ahmad, A. Alsaedi, S.K. Ntouyas, *Ntouyas. Existence theorems for mixed Riemann–Liouville and Caputo fractional differential equations and inclusions with nonlocal fractional integro-differential boundary conditions*, Fractal and Fractional, 3(2), (**2019**), 21.

[6] S. Asawasamrit, et al, *Existence and stability analysis for fractional differential equations with mixed nonlocal conditions*, Mathematics, 7(2), (**2019**), 117.

[7] A. Boutiara, *Mixed fractional differential equation with nonlocal conditions in Banach spaces*, Journal of Mathematical Modeling, 9(3), (**2021**), 451–463.

[8] A. Boutiara, et al, *Analysis of a fractional boundary value problem involving Riesz–Caputo fractional derivative*, Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Application, 6(1), (**2022**), 14–27.

[9] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*, Masson, 2nd tirage, (**1978**).

[10] A. Chen, F. Chen, X. Wu, *Anti-periodic boundary value problems with Riesz–Caputo derivative*, Advances in Difference Equations, 2019, (**2019**), 1–13.

[11] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, (**2000**).

[12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. *Theory And Applications of Fractional Differential Equations*, 204, Elsevier Science Limited, (**2006**).

[13] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, JohnWiley & Sons, (**1991**).

[14] C. Li, M. Cai, *Theory and numerical approximations of fractional integrals and derivatives*, Society for Industrial and Applied Mathematics, (**2019**).

[15] S. Li, Z. Zhang, W. Jiang, *Positive solutions for integral boundary value problems of fractional differential equations with delay*, Advances in Difference Equations, 2020, (**2020**), 1–11.

[16] K.S. Miller, B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional*, differential equations, (**1993**).

[17] V. Pata, *Fixed point theorems and applications*, Springer, (**2019**).

[18] I. Podlubny, *Fractional differential equations An introduction to fractional derivatives fractional differential equations to methods of their solution and some of their applications*, Elsevier, (**1998**).

[19] J.A.T. Sabatier, O.P. Agrawal, J.A.T. Machado, *Advances in Fractional Calculus – Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, (**2007**).

[20] D.R. Smart, *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press, (**1974**).

[21] V.E. Tarasov, *Fractional Dynamics Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles Fields and Media*, Springer, Beijing, (**2010**).

[22] Y. Zhou, *Existence and uniqueness of solutions for a system of fractional differential equations*, Fract. Calc. Appl, 12, (**2009**), 195–204.

الملخص

قمنا في هذه المذكرة بدراسة وجود الحلول لمسألتين من مسائل القيم الحدية للمعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية، المسألة الأولى مختلطة والثانية بمشتقة ريز- كابوتو باستخدام نظريتي النقطة الثابتة لكل من كراسنوسلسكي ولراي- شودر مدعِمين نتائجنا بأمثلة توضيحية.

الكلمات المفتاحية: فضاء بناخ، نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسلسكي، نظرية النقطة الثابتة لراي-شودر، وجود الحلول ، مشتقة ريز- كابوتو، مشتقة كابوتو.