

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة البحث العلمي والتعليم العالي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي-سكيكدة

École Normale Supérieure de l'enseignement technologique, Skikda

Département de Mathématiques



قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

مدخل إلى نماذج الانحدار الذاتي المتعدد VAR(p): دراسة تطبيقية باستخدام
برنامج Eviews 10

تحت إشراف الأستاذ:

★ مرابط فريدة

من إعداد:

★ سناني لينا سرور

★ خبيزي حنان

من طرف لجنة المناقشة:

★ موسى إلهام..... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة.....رئيسا.

★ مزيري إيمان..... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة.....مناقشا.

★ خشمان حسام الدين..... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة.....مناقشا.

2023-2024

شكر

الحمد لله العلي العليم الذي أنعم علينا بنعمة العقل والدين، وأحاطنا بوسع جوده وكرمه
ويسر لنا سبل إتمام هذا العمل.

تعجز حروفنا أن تنتظم في عقد شكر نوسم به أستاذتنا المشرفة **مرابط فريدة** نفخر أن
يرفع اسمك في علينا بحثنا اعترافا بجميل عطائك وعلو همتك ونبل خلقك فجزاك الله
خييرا عن أمانتك .

جزيل الشكر لأعضاء لجنة المناقشة **موس إلهام**، **خشمان حسام الدين**، **مزيري إيمان**.

كما لا يفوتنا شكر رئيس قسم الرياضيات الأستاذ **فراق عزوز** لا يسعني القول غير بارك
الله له في عمره وجزاه خيرا عن صبره وتفانيه في عمله .

الشكر الجزيل لكل أساتذة المدرسة وطاقمها الإداري وعلى رأسهم الأستاذ **بوجعدار** .

إهداء

أولا الحمد لله على كثير فضله وجميل عطائه، والصلاة والسلام على رسوله ونبيه الحبيب، و سبحان الذي إذا أحب عبدا أكرمه.

إلى من جسد الحب بكل معانيه فكان السند والعطاء، إلى من علمني أن النجاح لا يأتي إلا بالصبر والإصرار، إلى النور الذي أنار دربي واستمدت منه قوتي واعتزازي بذاتي، إلى من رسم لي المستقبل بخطوط من الحب والثقة، إلى داعمي الأول ”**أبي الغالي رشيد**” أدام الله في عمرك.

إلى من جعلت الجنة تحت أقدامها وسهلت لي الشدائد بدعائها، إلى من علمتني أن الدنيا كفاح ومن منحتني القوة والعزيمة لمواصلة الدرب، إلى الإنسانية العظيمة التي لطالما تمننت أن تقر عينها برؤيتي في يوم كهذا، إلى ”**أمي العزيزة حبيبة**” أبقاك الله ذخرا لنا.

إلى ضلعي الثابت وأمان أيامي، إلى من تقاسمت معها حلو الحياة ومرها، إلى ملاكي الحارس التي كانت موضع اتكائي في عثرات حياتي، إلى التي انتظرت قطاف ثمرة جهدي طويلا، إلى بهجة قلبي أختي الوحيدة ”**يسرا**”.

إلى من شددت عضدي بهم، إلى خيرة أيامي وصفوتها، إلى قرة عيني إخوتي ”**مروان**” و ”**صفوان**”. إلى من شاركتني حلو ومر دراستي الجامعية، إلى من سأفتقدها ”**حنان**”.

إلى رفيقات الدموع والضحكات، إلى صديقاتي الفضليات اللاتي من الله علي بمعرفتهن **نوسة**، **ريهام**، **دعاء**، **نهاد**، **وثام**.

إلى كل من كان عوننا وسندا في هذا الطريق، للأصدقاء الأوفياء ورفقاء السنين لأصحاب الشدائد والأزمات، إليكم عائلتي.

إلى قبلة المسلمين الأولى، إلى الأرض التي أحب وإلى المرابطين على أعتابها... فلسطين والمسجد الأقصى المبارك.

أهديكم هذا الإنجاز وثمره نجاحي الذي طالما تمنيته، ها أنا اليوم أكملت وأتممت أولى ثمراته بفضل الله سبحانه وتعالى.

”وآخر دعواهم أن الحمد لله ربي العالمين” عظم المراد فهان الطريق فلم يكن دربي مفروشا بالورود ولا محفوف بالتسهيلات لكنني فعلتها والحمد لله.

فالحمد لله شكرا وحبا وامتنانا على البدء والختام.

لينا سرور

إهداء

أولاً الحمد لله على كثير فضله وجميل عطائه، و الصلاة والسلام على رسوله ونبيه الحبيب، و سبحان الذي إذا أحب عبداً أكرمه.

إلى من أخذ من نفسه و أنفق عمره ليهيئ لنا الطريق المستقيم، إلى من ألهمني و دفعني لتحقيق أحلامي، إلى من كان السند و الدعم في حياتي، إلى من تعلمت منه الكثير ، إلى من علمني أن النجاح يحتاج إلى عمل و تضحيات **أبي الغالي محمد**، الذي لم يكن فقط أباً بل مثلاً يحتذى به

إلى من جعلت الجنة تحت أقدامها، إلى نبع الحب و الحنان، إلى التي كانت نورا يضيئ دربي، إلى بلسم الشفاء، إلى القلب الناصع بالبياض، إلى من سهلت لي الشدائد بدعائها، إلى من علمتني الصبر والقوة و الطموح **أمي الحبيبة حياة**

إلى من أشد عضدي به، إلى رفيق دربي منذ طفولتي، إلى من منح لي يد العون دائماً، إلى من كان له بالغ الأثر في كثير من العقبات و الصعاب **أخي الأكبر حامد**، إلى سندي و اتكائي، قوتي في الحياة و ضلعي الثابت الذي لا يميل **أخي الأصغر أحمد أمين**

إلى بهجة قلبي، إلى الهدية التي لم أطلبها و لكنها جاءت لتغمر حياتي بالسعادة و الحب في كل مراحل حياتي، إلى رفيقتي وأنس وحدتي، إلى صغيرة العائلة المدللة، **أختي الوحيدة وصال** التي أتمنى أن أراها في أعلى المراتب

إلى من جاد علي بوقته و أكرمني بفضله، إلى الذي ساندني و دعمني بكل حب عند ضعفي، إلى الذي كتب لي أن أجد السعادة و الحب الحقيقي معه، إلى الرجل الذي احتضن حلمي و شجعني لتحقيقه، إلى رفيق دربي و أنيس روحي، خطيبي و زوجي المستقبلي **صلاح الدين**، أتمنى أن تكون هذه المذكرة ذكراً جميلة تستمر معنا طوال حياتنا المشتركة.

إلى التي كانت دائماً إلى جانبي، إلى رفيقة دربي و خطواتي، إلى التي شاركتني كل فرح و حزن، إلى التي دعمتني في لحظات قوتي و ضعفي **أختي و صديقة طفولتي زينب**

إلى رفاق الطريق ومؤنسيه الذين لم يقبضوا يدهم دوماً عن مساعدتي و لم ييسطوها إلا لنفعي صديقات العمر **دنيا، ياسمين، رانية، مريم، ريهام، إيناس**

إلى عائلتي الثانية، إلى من كانوا لي سنداً دائماً، إلى من أمدوني بالحب و التشجيع **خالتي فوزية و عائلتها**

إلى من شاركت معي رحلتي الجامعية، إلى من تذوقت معها كل لحظات التعب و الفرح، إلى رفيقة مشواري و صديقة عمري **لينا سرور**

من قال أنا لها نالها وأنا لها وإن أبت رغما عنها أتيت بها

”و آخر دعواهم أن الحمد لله ربي العالمين“ عظم المراد فهان الطريق فلم يكن دربي مفروشا بالورود و لا محفوفاً بالتسهيلات لكنني فعلتها و الحمد لله اللهم اجعلني ممن علمتهم فاستخفتهم و أصلحت بهذا العلم أعمالهم و قلوبهم اللهم انفعني بما علمتني و زدني علما

حنان

المحتويات

2	1	مفاهيم عامة حول السلاسل الزمنية
3	1.1	تعريف السلسلة الزمنية
4	2.1	أنواع السلاسل الزمنية
4	1.2.1	السلسلة الزمنية المستمرة
4	2.2.1	السلسلة الزمنية المتقطعة
4	3.1	تمثيل سلسلة زمنية
5	4.1	عزوم سلسلة زمنية
5	1.4.1	الوسط الحسابي
5	2.4.1	التباين
6	3.4.1	التغاير
7	5.1	الهدف من دراسة السلاسل الزمنية
7	6.1	مركبات السلسلة الزمنية
7	1.6.1	الاتجاه العام
9	2.6.1	التغيرات الموسمية
9	3.6.1	التغيرات الدورية
10	4.6.1	التغيرات العشوائية (غير المنتظمة)
11	7.1	نماذج السلسلة الزمنية
11	1.7.1	النموذج الجمعي
12	2.7.1	النموذج الضربي
12	3.7.1	النموذج المختلط
12	8.1	العناصر الأساسية في دراسة سلسلة زمنية
12	1.8.1	مؤثر التأخر B
13	2.8.1	مؤثر التقدم F
13	3.8.1	مؤثر الفرق ∇
13	4.8.1	مؤثر الجمع S

14	استقرارية السلاسل الزمنية	9.1
14	1.9.1 سلاسل زمنية مستقرة	
16	2.9.1 السلاسل غير المستقرة	
18	3.9.1 الارتباط	
19	4.9.1 معامل الارتباط	
19	5.9.1 الارتباط الذاتي	
20	6.9.1 دالتي الارتباط الذاتي و الجزئي	
22	10.1 اختبارات الاستقرارية	
22	1.10.1 اختبار الجذر الوحدوي	
25	2.10.1 طرق تعديل السلاسل الزمنية غير المستقرة	
29	2 النماذج الخطية ومنهجية Box-Jenkins	
30	1.2 النماذج الخطية المستقرة	
30	1.1.2 نموذج الانحدار الذاتي $AR(p)$	
32	2.1.2 نموذج المتوسط المتحرك $MA(q)$	
33	3.1.2 نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة $ARMA(p,q)$	
	4.1.2 نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية $ARIMA(p,d,q)$	
35		
36	2.2 منهجية Box-Jenkins	
36	1.2.2 مرحلة التعرف	
36	2.2.2 مرحلة التقدير	
37	3.2.2 مرحلة التشخيص	
40	4.2.2 التنبؤ	
	3.2 مثال تطبيقي : تطبيق منهجية بوكس جينكينز على سلسلة مرضى السكري	
41	باستعمال برنامج $EVIEWS10$	
41	1.3.2 تمثيل السلسلة الأصلية باستخدام البرنامج الإحصائي $Eviews10$	
42	2.3.2 تمثيل دالتي الارتباط الذاتي و الجزئي	
42	3.3.2 اختبار جذر الوحدة	
43	4.3.2 تطبيق منهجية Box-Jenkins على السلسلة $DDIABETE$	
44	5.3.2 مرحلة التقدير	
46	6.3.2 مرحلة التشخيص	
48	7.3.2 خلاصة	

49	3	نماذج الانحدار الذاتي المتعدد $VAR(p)$
50	1.3	تقديم النموذج $VAR(p)$
51	2.3	شعاع الضجيج الأبيض
52	3.3	مصفوفة التغيرات $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t')$
54	4.3	بناء النموذج $VAR(p)$
54	1.4.3	استقرارية السلاسل الزمنية المتعددة
55	2.4.3	استقرارية النموذج $VAR(p)$
56	3.4.3	تحديد رتبة التأخر
57	4.4.3	تقدير معلمات النموذج باستعمال طريقة المربعات الصغرى
59	5.4.3	السببية
62	4	نمذجة علاقة مرضى السكري و تصفية الكلى بوفاة الشخص
62	1.4	تمهيد
62	1.1.4	دراسة استقرارية السلاسل
66	2.1.4	تحديد رتبة التأخر الزمني
67	3.1.4	إختبار السببية
68	4.1.4	تقدير نموذج VAR
70	5.1.4	دراسة البواقي
71	6.1.4	اختبار جودة النموذج $VAR(2)$
72	7.1.4	خلاصة
72		الخاتمة
I		المراجع العلمية

قائمة الأشكال

3	تمثيل سلسلة زمنية باستخدام برنامج Eviews	1.1
5	التمثيل البياني لسلسلة الإنتاج السنوي للبترول باستخدام برنامج Eviews10	1.2
8	الإتجاه العام المتزايد	1.3
8	الإتجاه العام المتناقص	1.4
9	التغير الموسمي التصاعدي	1.5
10	التغيرات الدورية	1.6
11	التغيرات غير المنتظمة	1.7
16	تمثيل سلسلة الضجيج الأبيض	1.8
18	تمثيل سلسلة السير العشوائي	1.9
23	خطوات تطبيق اختبار Dickey-Fuller	1.10
32	دالتي الارتباط الذاتي البسيط ACF والجزئي PACF للنموذج AR(1)	2.1
33	دالتي الارتباط الذاتي البسيط ACF والجزئي PACF للنموذج MA(1)	2.2
40	خطوات تطبيق منهجية Box-Jenkins	2.3
41	التمثيل الباني لسلسلة عدد مرضى السكري DIABETE	2.4
42	التمثيل البياني لدالتي الارتباط الذاتي و الجزئي لسلسلة DIABETE	2.5
42	اختبار ADF للسلسلة DIABETE	2.6
43	السلسلة المستقرة DDIABETE	2.7
44	التمثيل البياني لدالتي الارتباط الذاتي و الجزئي لسلسلة DDIABETE	2.8
45	النموذج AR(1)	2.9
45	النموذج AR(2)	2.10
46	النموذج AR(3)	2.11
46	النموذج MA(1)	2.12
47	التمثيل البياني لدالتي الارتباط الذاتي و الجزئي للبواقى	2.13
48	نتائج اختبار التوزيع الطبيعي للبواقى	2.14

63	4.1	عدد الوفيات في مستشفى محمد الصديق بن يحيى - جيغل من عام 2011 إلى 2018
63	4.2	عدد المرضى بالسكري في مستشفى محمد الصديق بن يحيى - جيغل من عام 2011 إلى 2018
64	4.3	عدد مرضى تصفية الكلى في مستشفى محمد الصديق بن يحيى - جيغل من عام 2011 إلى 2018
66	4.4	تمثيل سلسلة الفروق الأولى للسلسلة <i>DIABETE</i>
66	4.5	تمثيل سلسلة الفروق الأولى للسلسلة <i>REINS</i>
70	4.6	التمثيل البياني لدالتى الارتباط الذاتى البسيط و الجزئى للبواقى
72	4.7	مقلوب جذور كثير الحدود المميز للنموذج

مقدمة

يعتبر تحليل السلاسل الزمنية من الأساليب الإحصائية الهامة التي يمكن من خلالها وصف دقيق للظواهر المدروسة ومعرفة طبيعة التغيرات التي تطرأ على قيم الظاهرة بتغير الزمن و تحديد العلاقات بينها، بهدف التنبؤ بالقيم المستقبلية و لبلوغ ذلك يجب دراسة و تحليل المعطيات السابقة لهذه الظاهرة قصد تحديد خصائصها.

و بما أنه في واقعنا المعاش من الصعب إيجاد ظاهرة تتغير بشكل مستقل بل تتأثر بظواهر أخرى تتغير هي الأخرى بتغير الزمن.

نتناول في هذه المذكرة نمذجة السلاسل الزمنية المتعددة باستعمال نماذج الانحدار الذاتي المتعدد $VAR(p)$. ظهرت نماذج VAR لأول مرة سنة 1980 عندما قام الاقتصادي Sims Christopher استكمالاً لأعمال Granger سنة 1969.

تم استخدام هذا النموذج للتعامل مع العديد من المشكلات في التحليل الاقتصادي و المالي مثل العلاقات الديناميكية بين عدة متغيرات اقتصادية. و قد قسمنا منهجية العمل في هذه المذكرة إلى أربعة فصول:

- الفصل الأول: نقدم فيه مفاهيم أولية حول السلاسل الزمنية وحيدة البعد و نحاول إعطاء مركباتها، استقراريتها وارتباطها الذاتي.
- الفصل الثاني: نتطرق فيه إلى النماذج الخطية $AR(p)$, $MA(q)$, $ARMA(p, q)$, $ARIMA(p, d, q)$ ، كما نتطرق إلى تطبيق منهجية Box-Jenkins في تحديد النموذج الخطي المناسب.
- الفصل الثالث نتطرق فيه إلى العنصر الأساسي في مذكرتنا هو نموذج الانحدار الذاتي المتعدد $VAR(p)$ نعرض فيه تقديم النموذج، دراسة استقراره، تقدير معاملاته و تحديد علاقة السببية بين متغيرات النموذج.
- الفصل الرابع: نقدم فيه دراسة تطبيقية باستعمال برنامج Eviews10 لنمذجة ثلاث سلاسل زمنية بالنموذج $VAR(p)$

الفصل 1

مفاهيم عامة حول السلاسل الزمنية

تمهيد

في هذا الفصل سنتطرق إلى التعريف بالسلاسل الزمنية و أهم خصائصها، بالإضافة إلى اختبار استقرارها و دراسة مركباتها و كيفية التخلص من هذه المركبات للحصول على سلاسل زمنية أكثر استقرارا من أجل تحليل الخصائص الأخرى. حيث تعتبر دراسة و تحليل السلاسل الزمنية من أهم أساليب التنبؤ حول المستقبل انطلاقا من المشاهدات الحالية و الماضية.

1.1 تعريف السلسلة الزمنية

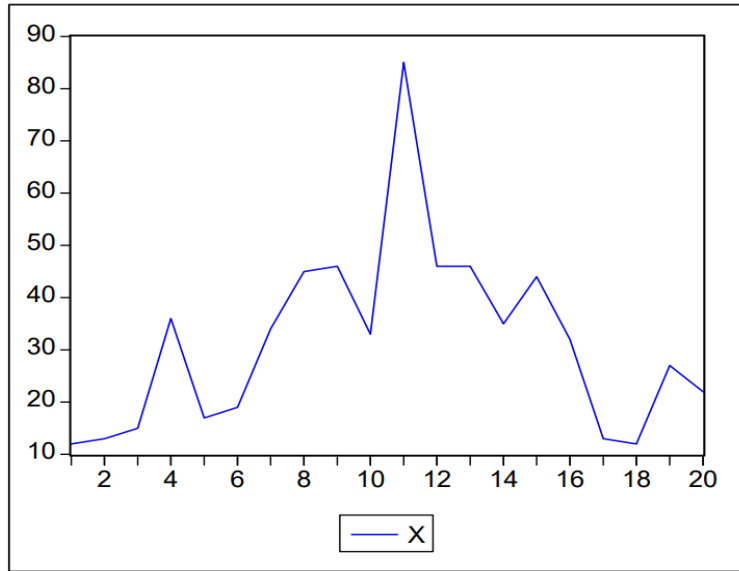
1.1.1 تعريف

السلسلة الزمنية هي مجموعة من المشاهدات أو القياسات المسجلة عن ظاهرة ما (متغير موضع الدراسة) والتي نرمز لها بالرمز (X_t) في فترات زمنية متتابة غالبا ما تكون متساوية الطول¹، تعكس سلوك هذا المتغير في الماضي ويدخل الزمن كعامل مهم فيها.

تعريف 2.1.1 نسمي سلسلة زمنية المجموعة المنتهية $\{X_t\}_{t=1}^Z$ الجزئية من العملية العشوائية. يمكن أن تمثل معطيات مثل:

الإنتاج السنوي للبترول يمثل بسلسلة زمنية.
عدد الإصابات الأسبوعية بالكوفيد 19 في الجزائر يمثل بسلسلة زمنية.

تعريف 3.1.1 نسمي عملية عشوائية كل متتالية لمتغيرات عشوائية $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ معرفة على نفس فضاء الاحتمال (Ω, A, P) وتعطي قيمها في الفضاء القيوس (E, \mathcal{E}) حيث $E = \mathbb{R}$ أو $E = \mathbb{R}^n$ و \mathcal{E} هي عشيرة بوريل و T هو فضاء الأزمنة. إذا كان $E = \mathbb{R}$ فإن العملية أحادية البعد (أحادية المتغير). وإذا كان $E = \mathbb{R}^n$ فإن العملية متعددة الأبعاد (متعددة المتغيرات)²



شكل 1.1: تمثيل سلسلة زمنية باستخدام برنامج Eviews

¹خليدة دهوم، "أساليب التنبؤ بالمبيعات"، جامعة الحاج لخضر، باتنة، 2009.

²Chukunyere, Amenan Christiane, "Les modèles VAR(p), Québec, 2019.

2.1 أنواع السلاسل الزمنية

1.2.1 السلسلة الزمنية المستمرة

نقول أن السلسلة الزمنية مستمرة إذا تم إجراء القياسات باستمرار عبر الزمن (في كل لحظة زمنية) كمتابعة تركيز عنصر كيميائي في تفاعل كيميائي ونكتب:

$$(X_t), t \in \mathbb{R}.$$

2.2.1 السلسلة الزمنية المتقطعة

نقول أن السلسلة الزمنية متقطعة إذا تم تسجيل القياسات في نقاط زمنية متقطعة مثل تغيرات صرف العملة بين الأورو والدولار عبر السنوات ونكتب:

$$(X_t), t \in \mathbb{Z}.$$

يمكن أن تنشأ السلسلة المتقطعة بثلاثة طرق مختلفة:

- من خلال أخذ عينات من سلسلة مستمرة مثل قياس درجات الحرارة كل ساعة على حدة.
- من خلال تجميعها على مدى فترة زمنية مثل إجمالي المبيعات في فترات زمنية متتابة (أشهر أو أسابيع).
- كسلسلة منفصلة بطبيعتها مثل الأرباح المدفوعة من قبل شركة في سنوات متعاقبة.

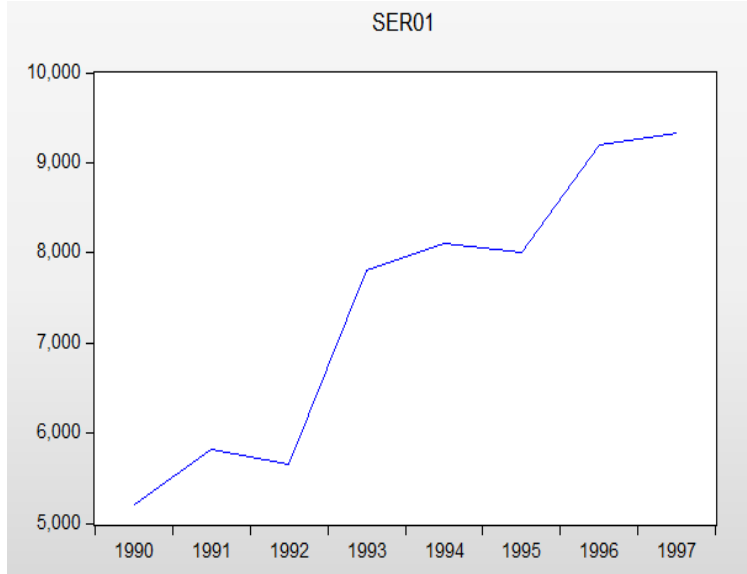
3.1 تمثيل سلسلة زمنية

التمثيل البياني للسلسلة الزمنية يكون بنقط في المستوى البياني بحيث المحور الأفقي يمثل الزمن و المحور العمودي يمثل قيم المشاهدات خلال الزمن. الجدول التالي يمثل الإنتاج السنوي للبتترول في إحدى الدول من سنة 1990 إلى سنة 1997 :

السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
حجم الإنتاج	5210	5820	5655	7800	8100	8010	9200	9335

الجدول (1.1): الإنتاج السنوي للبتترول بالمليون متر مكعب في إحدى الدول

تمثيل هذه السلسلة بيانيا باستخدام برنامج Eviews من إعداد الطالبتين:



شكل 1.2: التمثيل البياني لسلسلة الإنتاج السنوي للبترول باستخدام برنامج Eviews10

4.1 عزوم سلسلة زمنية

1.4.1 الوسط الحسابي

تعريف 1.4.1 نسمي مجموع قيم السلسلة مقسوما على عدد القيم، بالوسط الحسابي للسلسلة الزمنية، يرمز له بالرمز $E(X)$ ويعطى بالعلاقة:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n}, \quad (1.1)$$

حيث x_1, x_2, \dots, x_n هي قيم مشاهدات السلسلة و n عدد المشاهدات.

ملاحظة 1.1 نستعمل التعريف السابق في حالة كانت بيانات السلسلة غير مبوبة (لم يتم وصفها في جداول تكرارية).

بينما الوسط الحسابي لسلسلة ذات بيانات مبوبة (تم وصفها في جداول تكرارية) يعطى بالعلاقة التالية:

$$\bar{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i},$$

حيث x_1, x_2, \dots, x_n هي قيم مشاهدات السلسلة، $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ هي تكراراتها.

2.4.1 التباين

تعريف 2.4.1 نعرف تباين لمتغير عشوائي X ب:

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 \quad (2.1)$$

تعريف 3.4.1 (تباين مجتمع)

هو متوسط مجموع مربع الانحرافات القيم عن وسطها الحسابي، نرمز له بالرمز σ^2 ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$$

حيث: $\mu = E(X)$

تعريف 4.4.1 (تباين عينة)

يعرف تباين عينة من القياسات $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ بالعلاقة التالية:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})$$

3.4.1 التباين

تعريف 5.4.1 ليكن X و Y متغيرين عشوائيين حيث:

$$E(Y) \leq +\infty \quad \text{و} \quad E(X) \leq +\infty,$$

نرمز للتباين بالرمز $Cov(X, Y)$ ويعطى بالعلاقة التالية:

$$Cov(X, Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y)) \quad (3.1)$$

تعريف 6.4.1 (في حالة السلاسل المفردة)

نسمي تباين $Cov(X, Y)$ التباين المشترك ل X و Y ويعطى بالعلاقة التالية:

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p x_i y_i - \bar{X}\bar{Y}$$

تعريف 7.4.1 (في حالة الجداول التكرارية)

يعطى التباين المشترك ل X و Y بالعلاقة:

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q n_{ij} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y})$$

حيث:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i$$

و:

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^q n_i y_i$$

5.1 الهدف من دراسة السلاسل الزمنية

يستعمل تحليل السلاسل الزمنية بشكل يومي في عدة مجالات (الاقتصاد، الهندسة، الطب، الجيولوجيا،...) وذلك لفهم سلوك المتغيرات المدروسة واتخاذ القرارات الصائبة بشأنها، وفي ما يلي أهم النقاط التي توضح الهدف من الدراسة:

- الشرح والوصف: Description تمثل السلسلة الزمنية في صورة بيانية لمعرفة سلوكها عبر الزمن.
- النمذجة: Modelling إيجاد نموذج إحصائي مناسب لوصف عملية توليد البيانات. يقوم النموذج أحادي المتغير على القيم السابقة لهذا المتغير فقط، بينما قد يقوم النموذج متعدد المتغيرات على القيم السابقة والحالية لمتغيرات تنبؤية أخرى
- التنبؤ: Forecasting يمكن التنبؤ بقيم مستقبلية للسلسلة الزمنية انطلاقاً من القيم الحالية والماضية لها بواسطة آليات التحليل المناسبة والتي سنتطرق لها في الفصول القادمة.
- الضبط: Control دراسة العلاقة المتبادلة بين عدة سلاسل زمنية يمكن من ضبط سلسلة ما من خلال معرفة سلوك سلاسل أخرى ترتبط بها.
- دراسة مختلف الأسباب ومعرفة مصادرها وطبيعة التغيرات التي تطرأ على السلسلة وتحديد النتائج التي تسببها للتمكن من تفادي وقوعها أو التعامل معها بشكل أكثر فعالية.

6.1 مركبات السلسلة الزمنية

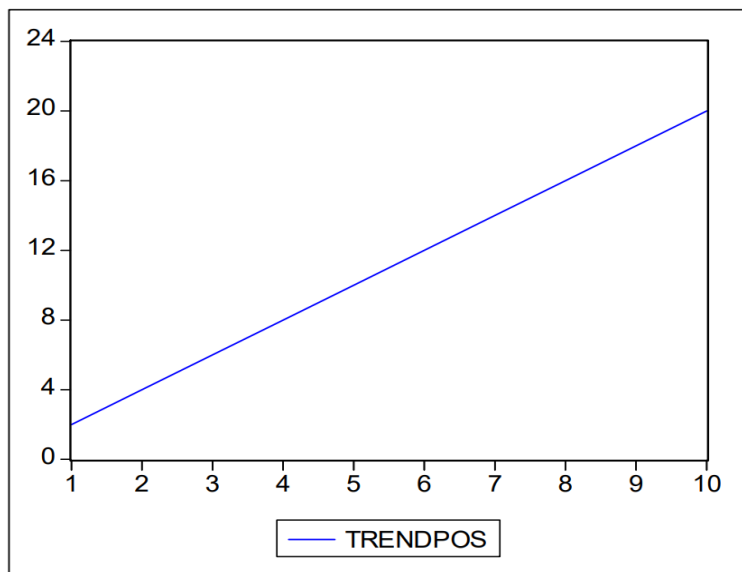
قبل البدء في نمذجة السلاسل الزمنية يجب أن نلم ببعض خصائص البيانات المشكلة لها، ولا شك أن أولى المراحل هنا هي تمثيل السلسلة برسوم بيانية واحصاءات والتي نسميها تحليلاً أولياً للبيانات، قد يساعدنا أيضاً تحليل السلسلة وتفكيكها إلى ما يسمى بمركباتها الأربع:

1.6.1 الاتجاه العام

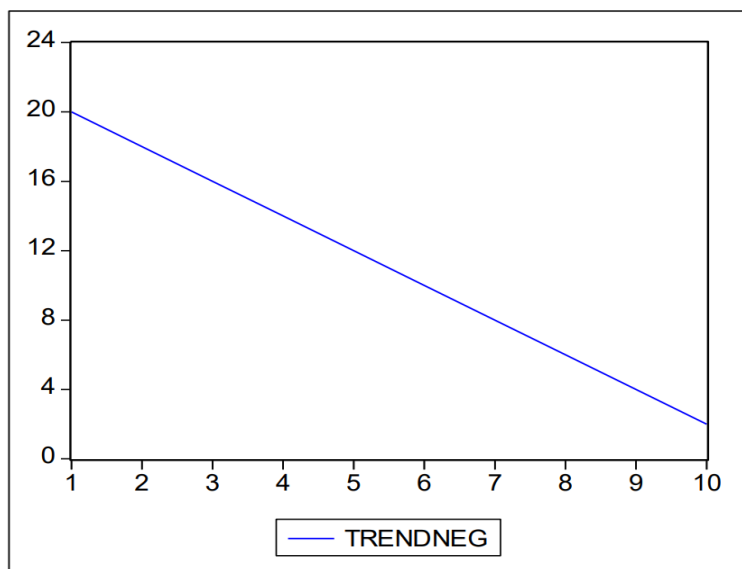
تعريف 1.6.1 هو مقدار الاندفاع في الزيادة أو النقصان أو الثبوت في قيم ظاهرة ما خلال فترة زمنية معينة، ويقصد به التغير المنتظم الحاصل في متوسط السلسلة الزمنية في أجل طويل³.
يكون الاتجاه العام متزايد إذا كانت قيم الظاهرة تتزايد عبر الزمن ومتناقصاً إذا اتجهت قيم السلسلة إلى النقصان عبر الزمن حيث أن التغيرات التي تطرأ عليه تكون تدريجية و ليست مفاجئة. يمكن تقريبه بكثير

³معتوق احمد، "الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية"، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2007-11

حدود أو بدالة أسية.



شكل 1.3: الإتجاه العام المتزايد

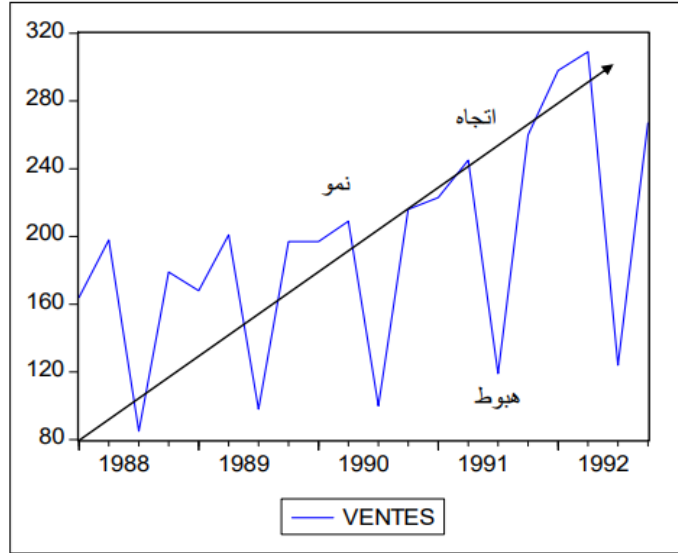


شكل 1.4: الإتجاه العام المتناقص

يعتبر أهم مركبات السلسلة إذ يعتمد عليه في الوصف، النمذجة والتنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة الزمنية. قد يصبح من الصعب معرفة اتجاه سلسلة زمنية إذا لم تكن السلسلة طويلة بما يكفي مما يؤدي إلى سوء تقدير للظاهرة وأخطاء في التنبؤ.

2.6.1 التغيرات الموسمية

تعريف 1.6.1 تعرف بأنها التقلبات التي تحصل بشكل نمطي وتكرر بانتظام بعد عدد معين من الفترات الزمنية (عادة ما تكون سنة) ونرمز لها بالرمز S .
تختلف التغيرات الموسمية اختلاف طبيعة البيانات فقد تكون سنوية (فصلية) مثل ارتفاع مبيعات الملابس الصوفية في فصل الشتاء⁴، كما قد تكون أسبوعية مثل ارتفاع حجوزات المطاعم في نهاية الأسبوع ...
إذا تم قياس سلسلة زمنية مرة واحدة سنويا فلا يمكن معرفة ما إذا كانت التغيرات الموسمية موجودة أم لا. إذا ظهر السلوك المتكرر في البيانات فإننا نسمي السلسلة الزمنية في هذه الحالة سلسلة زمنية موسمية ذات دورة طولها S .



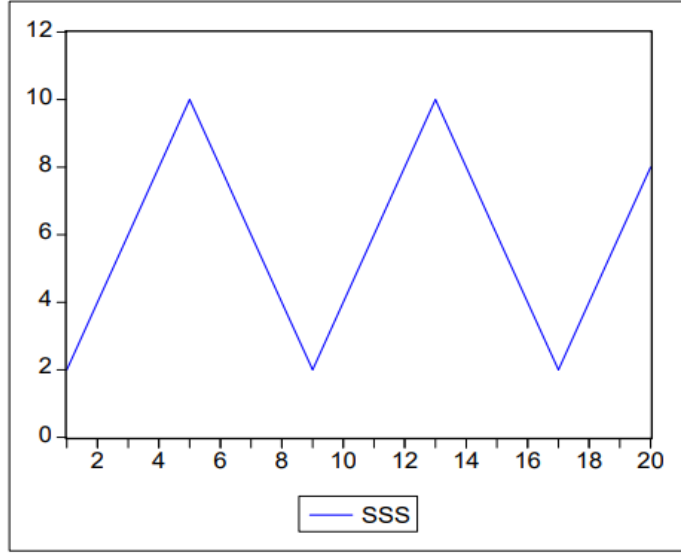
شكل 1.5: التغير الموسمي التصاعدي

كما يمكن للبيانات أن لا تحتوي على تغيرات موسمية مثل أن تكون في فترات متفاوتة الطول أو لا تستقر حول نفس القيمة كما هو الحال في السلاسل ذات البيانات التي تتأثر بعوامل خارجية مثل حجوزات شركات الطيران التي تتأثر بالعوامل المناخية.

3.6.1 التغيرات الدورية

تحدث هذه التغيرات في السلاسل الزمنية طويلة المدى بشكل مفاجئ و يؤثر على تذبذب السلسلة وهي متكررة الحدوث مثل التغيرات الموسمية إلا أن طول فتراتها الزمنية أطول نسبيا و غير معلوم حيث قد يستغرق من سنة إلى 10 سنوات أو أكثر و بالتالي يصعب التنبؤ بها وتقديرها لوجود اختلافات كبيرة بين كل دورة وأخرى.

⁴سمير مصطفى الشعراوي، "مقدمة في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية"، مركز النشر العلمي جامعة الملك عبد العزيز جدة، 2005.



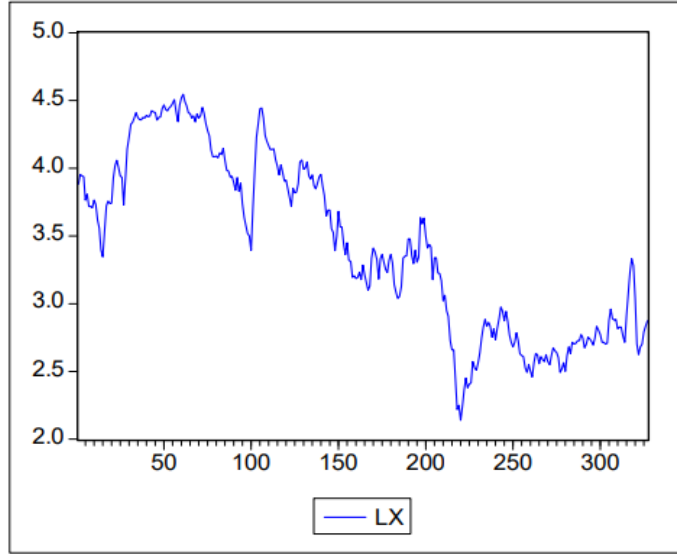
شكل 1.6: التغيرات الدورية

4.6.1 التغيرات العشوائية (غير المنتظمة)

هي تغيرات تحدث نتيجة عوامل استثنائية، غير منتظمة و لا يمكن السيطرة عليها و لا التنبؤ بها منها: الزلازل، الحروب، الإضرابات ... يحدث هذا النوع بصورة غير متوقعة و يرجع لأسباب وأخطاء صعبة التفسير مثل التدهور الحاد لمبيعات منتج ما إثر ظهور منتج بديل بجودة عالية وبسعر أقل، وعند زوالها يزول تأثيرها لأنها مؤقتة، عشوائية وتأتي صدفة.

و تعتبر هذه التغيرات ذات أهمية نسبية بسبب التذبذبات الصغيرة التي تظهر في بيانات السلسلة عند استبعاد التغيرات الأخرى والاتجاه العام⁵.

⁵المشهداني، م. حسن، "طرائق الإحصاء الأرقام القياسية والسلاسل الزمنية"، جامعة بغداد، 1985



شكل 1.7: التغيرات غير المنتظمة

7.1 نماذج السلسلة الزمنية

يمكن تمثيل قيم السلسلة الزمنية بدالة للمركبات المكونة لها وفقا للزمن :

$$X = f(T_t, C_t, S_t, I_t)$$

تشكل السلسلة الزمنية بتفاعل مختلف مركباتها الأربعة ، حيث يمكن نمذجة هذا التفاعل عن طريق كتابة السلسلة بدلالة المركبات لتجسيد العلاقة بينها باستخدام الدوال الرياضية ، و يوجد عدة نماذج لذلك كما يلي :

1.7.1 النموذج الجمعي

تكون فيه قيم السلسلة الزمنية X_t عبارة عن مجموع قيم المركبات الأربعة، بحيث تكون مستقلة عن بعضها البعض. وتكتب بالعلاقة التالية :

$$X = T + S + C + I$$

بحيث :

X: قيمة المشاهدة

T: الاتجاه العام

S: التغيرات الموسمية

C: التغيرات الدورية

I: التغيرات العشوائية

2.7.1 النموذج الضربي

تكون فيه قيم السلسلة الزمنية X_t عبارة عن جداء قيم المركبات الأربعة و تكتب بالعلاقة التالية :

$$X = T \times S \times C \times I$$

3.7.1 النموذج المختلط

في بعض الحالات يتم جمع النموذجين السابقين معا، و نكتب :

$$X_t = X_t \times S_t \times (1 + I_t)$$

إذا كانت السلسلة الزمنية مدروسة على المدى القصير فإنه يمكن عزل العنصر الدوري في حالة النموذج الجمعي فتصبح العلاقة :

$$X = T + S + I$$

و في حالة النموذج الضربي، يتم ضرب العنصر الموسمي في الاتجاه العام و تصبح العلاقة :

$$X = T_t \times S_t \times I_t$$

8.1 العناصر الأساسية في دراسة سلسلة زمنية

1.8.1 مؤثر التأخر B

يسمى بعامل الإزاحة إلى الخلف و يعرف كمايلي :

$$B(X(t)) = X(t-1), \quad (4.1)$$

أو بالعلاقة:

$$BX_t = X_{t-1}. \quad (5.1)$$

خواص:

• خطي :

$$\begin{aligned} B(\alpha X_1(t)) &= \alpha X_1(t-1) + \beta X_2(t-2) \\ &= \alpha B(X_1(t)) + \beta B(X_2(t)) \end{aligned}$$

• يقبل مؤثر حيادي :

$$B^\circ X(t) = 1.X(t)$$

• مؤثر التأخر $a.B$ حيث $a \in \mathbb{R}$ يعرف كما يلي :

$$(a.B)(X(t)) = a.B(X(t)) = a.X(t-1)$$

$$Bc = c, \quad c = cte \quad \bullet$$

$$B^n X_t = B^{n-1}(BX_t) = B^{n-2}(B(BX_t)) = \dots = X_{t-n} \quad \bullet$$

2.8.1 مؤثر التقدم F

يسمى بعامل الإزاحة الأمامي و يعرف كمايلي :

$$FX_t = X_{t+1} \quad (6.1)$$

بإدخال مؤثر الإزاحة إلى الخلف نجد:

$$FX_t = X_{t-(-1)} = B^{-1}X_t \quad \Rightarrow \quad F = B^{-1}$$

3.8.1 مؤثر الفرق ∇

يسمى بعامل التفريق ويعرف كما يلي:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} \quad (7.1)$$

باستعمال مؤثر الإزاحة إلى الخلف نجد:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t$$

$$\nabla = 1 - B$$

4.8.1 مؤثر الجمع S

يسمى بعامل التجميع ويعرف كما يلي:

$$SX_t = \sum_{-\infty}^n (X_t) \quad (8.1)$$

$$SX_t = \sum_{-\infty}^n (X_t) = X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + \dots + X_{1-n} + \dots$$

$$= X_t + BX_t + B^2 X_t + \dots + B^n X_t + \dots$$

$$= (1 + B + B^2 + \dots + B^n + \dots)X_t$$

$$= \frac{1}{1-B} X_t$$

$$= \frac{1}{1-B} = (1-b)^{-1} \quad |B| < 1$$

$$S = \nabla^{-1}$$

9.1 استقرارية السلاسل الزمنية

ان استقرار سلسلة زمنية (عملية عشوائية) يعبر عما إذا كانت خصائصها الإحصائية تتغير عبر الزمن أم لا، ومعرفة ذلك تمكننا من دراسة وتحليل السلاسل الزمنية وتساعد في عملية بناء نماذج التنبؤ الخاصة بتلك الظاهرة، لذلك تنقسم السلاسل الزمنية إلى نوعين:

1.9.1 سلاسل زمنية مستقرة

تعرف بأنها السلاسل التي تكون في حالة توازن إحصائي أي أن خصائصها الإحصائية لا تتأثر بتغير الزمن (ثابتة) ويمكن وصفها بشكل دقيق وكامل باستعمال التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي، كما يمكن وصفها بشكل جزئي عن طريق عزوم الدرجة الأولى والثانية (الأم، التباين والتغاير)⁶.

خصائص سلسلة مستقرة

تكون السلسلة الزمنية مستقرة (خالية من الاتجاه والموسمية) إذا تحققت الشروط الثلاثة⁷

1- المتوسط الحسابي ثابت ومستقل عن الزمن أي:

$$E(X_t) = E(X_{t+h}) = \mu$$

2- تباينها مستقل عن الزمن و منته أي:

$$Var(X_i) < \infty$$

$$Var(X_t) = E((X_t - \mu)^2) = \sigma^2$$

3- اعتماد التباين المشترك بين قيمتين لنفس المتغير بين فترتين زمنية على الفجوة الزمنية بينهما فقط وليس على القيمة الفعلية للزمن أي:

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = E(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu) = \gamma(h)$$

ويميز الإحصائيون بين نوعين من الاستقرار هما:

⁶سمير مصطفى الشعراوي، المرجع السابق

⁷R.Bourbonnais, M.Terraza, "Analyse des Séries Temporelles en Economie", Fenixx, .1998

الاستقرارية التامة

تعريف 1.9.1⁸

تتميز السلسلة الزمنية (العملية العشوائية) بالاستقرارية التامة إذا كان التوزيع الاحتمالي المشترك لأي مجموعة جزئية من المتغيرات المكونة للسلسلة لا يتأثر بإزاحة الزمن إلى الأمام أو إلى الخلف بخطوة صحيحة h هذا يعني أن جميع عزوم العملية لا تتعلق بالزمن أي تكون السلسلة الزمنية تامة الاستقرارية إذا وفقط إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرات $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ تساوي دالة التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرات $(X_{t_{h+1}}, X_{t_{h+2}}, \dots, X_{t_{t+h}})$ لأي مجموعة من الفواصل الزمنية وأي إزاحة h ونعبر عنها رياضياً كآتي:

$$F(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = F(X_{t_{h+1}}, X_{t_{h+2}}, \dots, X_{t_{t+h}})$$

مع $h = \pm 1, \pm 2, \dots$

هذا النوع من الاستقرارية صعب التحقيق في الواقع الاحتمالي لذلك نضعف الشروط لتحصل على النوع الثاني من الاستقرارية:

الاستقرارية الضعيفة (الاستقرارية من الرتبة الثانية)

تعريف 2.9.1 نقول عن سلسلة زمنية أنها تتميز بالاستقرارية الضعيفة (من الرتبة الثانية) إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

- $E(X_t) = \mu$ حيث μ ثابت لا يعتمد على الزمن t .
- $Var(X_t) = \sigma_x^2$ حيث σ^2 ثابت لا يعتمد على الزمن.
- $Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = \gamma(t_1 - t_2)$ أي أن التغاير بين متغيرين يعتمد على الفجوة الزمنية (lag) بينهما فقط.

يتجلى من خلال ما سبق أن الاستقرارية التامة تؤدي إلى الاستقرارية الضعيفة إذا كانت العزوم الأولى والثانية موجودة .

نقتصر في دراستنا على السلاسل الزمنية ذات الإستقرارية الضعيفة.

سلسلة الضجيج الأبيض (الضجة البيضاء)

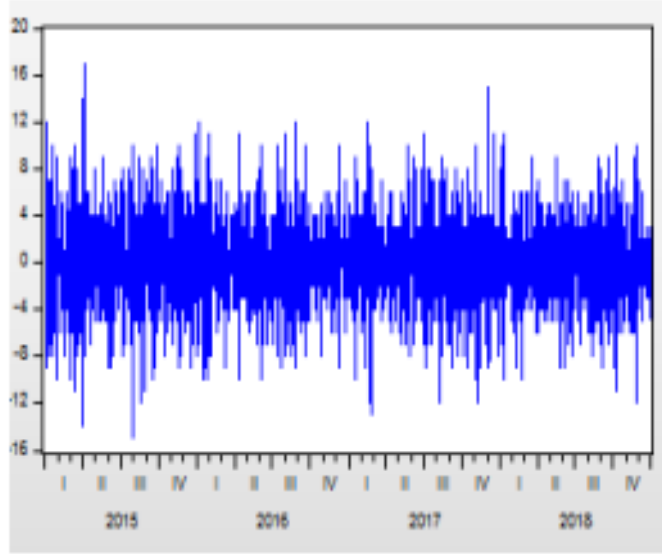
هي سلسلة من المشاهدات العشوائية المستقلة (ونفترض أحياناً أنها سلسلة من المتغيرات العشوائية التي تكون مستقلة ولها توزيعات متطابقة) ذات متوسط معدوم وتباين ثابت أي:

$$E(X_t) = 0, \forall t$$

⁸Chukunyere, Amenan Christiane, "Les modèles VAR(p), Québec, 2019

$$Cov(X_t, X_s) = \begin{cases} \sigma^2 & ; \forall t = s \\ 0 & ; \forall t \neq s \end{cases}$$

ويرمز لها بالرمز $X_t \sim WN(0, \sigma^2)$



شكل 1.8: تمثيل سلسلة الضجيج الأبيض

2.9.1 السلاسل غير المستقرة

إن أغلب السلاسل الزمنية في الواقع التطبيقي تكون غير مستقرة لأنها قد يكون لها اتجاهها واضح مثل السلاسل الاقتصادية التي لها اتجاهها عاما بالتزايد أو التناقص وعليه تكون السلسلة الزمنية غير مستقرة إذا اعتمد كلا من متوسطها وتباينها على الزمن أو أحدهما على الأقل. غالبا ما نقوم بتحويل هذا النوع إلى سلاسل زمنية مستقرة حتى يسهل علينا نمذجتها ودراستها.

أنواع السلاسل الزمنية غير المستقرة

⁹ نميز نوعين من النماذج للسلاسل غير المستقرة:

1- النموذج TS: تظهر عدم استقرارية تحديدية (deterministic) وتعرف بالشكل:

$$X_t = f(t) + \varepsilon_t$$

حيث $f(t)$ كثير حدود للزمن، و ε_t ضجيج أبيض، وأكثر هذه النماذج انتشارا يأخذ شكل كثير حدود من الدرجة الأولى (خطي) ويكتب على الشكل:

$$X_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$$

⁹خليدة دهنوم، نفس المرجع السابق.

هذا النموذج غير مستقر لأن متوسطه $E(X_t)$ مرتبط بالزمن، لكننا نجعله مستقراً بتقدير المعلمتين \hat{a}_1, \hat{a}_0 بطريقة المربعات الصغرى وطرح المقدار $\hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$ من X_t أي:

$$X_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 t$$

2- النموذج DS: يظهر هذا النموذج عدم استقرار عشوائية (stochastic) وتعرف بالشكل:

$$X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

يمكن جعلها مستقرة باستخدام مؤثر الفرق أي:

$$(1 - B)^d X_t = \beta + \varepsilon_t$$

حيث β ثابت حقيق (معامل التأخير) و d درجة الفرق. غالباً نستعمل الفرق من الدرجة الأولى في هذا النموذج ($d = 1$) وتكتب من الشكل:

$$(1 - B)X_t = \beta + \varepsilon_t$$

سلسلة السير العشوائي

يعرف نموذج السير العشوائي كما يلي:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

حيث: X_t : متغير عشوائي يتعلق بالزمن،
 ε_t : الضجيج الأبيض ($X_t \sim WN(0, \sigma^2)$).

عزوم السير العشوائي

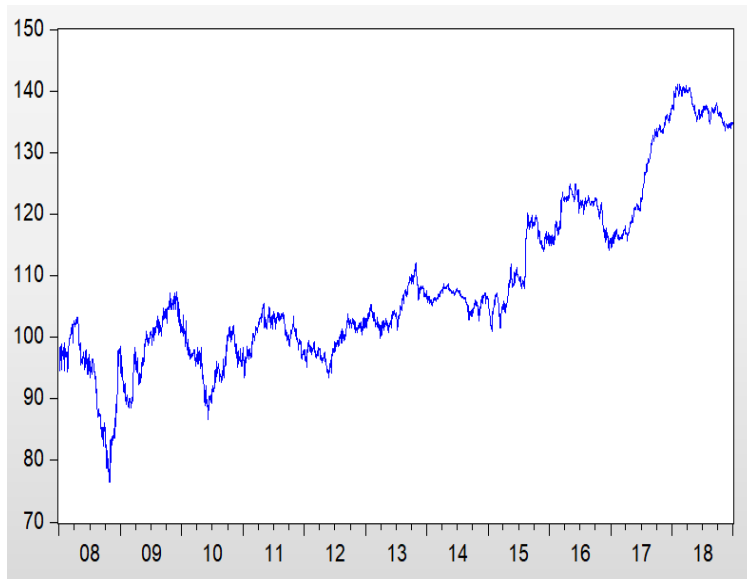
$$\begin{cases} E(X_t) = 0 \\ Var(X_t) = t\sigma^2 \end{cases}$$

بالفعل لدينا:

$$\begin{aligned}
 X_t &= X_{t-1} + \varepsilon_t \\
 &= X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
 &= X_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
 &\vdots \\
 &= X_{t-t} + \varepsilon_{t-(t-1)} + \dots + \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
 &= X_0 + \sum_{k=1}^t \varepsilon_k \\
 X_0 = 0 &\Rightarrow X_t = \sum_{k=1}^t \varepsilon_k
 \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{cases} E(X_t) = 0 \\ Var(X_t) = t\sigma^2 \end{cases}$$



شكل 1.9: تمثيل سلسلة السير العشوائي

3.9.1 الارتباط

تعريف 3.9.1 هو العلاقة التي تربط بين متغيرين و تبين مدى ارتباط تغير أحدهما بتغير الآخر. فهو يصف درجة تأثير الظواهر على بعضها في مختلف الظروف. ويمكن أن يكون هذا الارتباط قويا أو ضعيفا، كما أنه قد يكون طرديا (موجبا) أي أن الزيادة في قيمة الظاهرة الأولى تتبعها زيادة في قيمة الظاهرة الثانية، أو عكسيا (سالبا) أي أن الزيادة في قيمة الظاهرة الأولى

يتبعها نقصان في قيمة الظاهرة الثانية.

4.9.1 معامل الارتباط

تعريف 4.9.1 هو مؤشر يستخدم لقياس الارتباط بين متغيرين، بهدف توضيح مدى تأثير أحدهما على الآخر. يكون أحد هذين المتغيرين متغيراً تابعاً، في حين يكون الآخر مستقلاً. بالإضافة إلى أنه يبين مدى اقتراب أو ابتعاد مستقيمي الانحدار ذات المعادلة $Y = aX + b$ و يرمز لمعامل الارتباط ب ρ و نكتب :

$$\rho = \rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

حيث :

σ_X : الانحراف المعياري لقيم المتغير المستقل X .

σ_Y : الانحراف المعياري لقيم المتغير التابع Y .

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 (y_i - \bar{Y})^2}}$$

5.9.1 الارتباط الذاتي

يعد الارتباط مشكلة تؤدي إلى نقص في دقة قياس معاملات العلاقات الاقتصادية عند استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية.

تعريف 5.9.1 يشير الارتباط الذاتي إلى وجود ترابط بين القيم الملاحظة لنفس المتغير، في النماذج الاحصائية للانحدار تشير عادة مشكلة الارتباط الذاتي إلى وجود ترابط بين القيم المتتالية في المتغير العشوائي. في هذه الحالة، يكون معامل الارتباط بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي غير مساو للصفر، و يؤثر وجود مشكلة الارتباط الذاتي على إحدى الافتراضات الأساسية لطريقة المربعات الصغرى العادية¹⁰. هذا يعني أن أي خطأ يحدث في فترة زمنية معينة يمكن أن يؤثر على الأخطاء في الفترات التالية بطريقة تتسبب في تكرار نفس الخطأ. بمعنى آخر، يوجد خطأ واحد يتكرر في كل الفترات التالية، مما يؤدي إلى ظهور قيم عشوائية على مستوى يختلف عن القيم الحقيقية.

¹⁰ عبد القادر عطية، "الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق"، الدار الجامعية، مصر، 2004

6.9.1 دالة الارتباط الذاتي و الجزئي

دالة الارتباط الذاتي

تعريف 6.9.1 هي الدالة التي تقيس قوة الارتباطات الداخلية بين البيانات التي تتكون منها السلسلة الزمنية إذا توفرت كل عناصرها. يرمز إلى دالة الارتباط الذاتي ب $\rho(h)$ و تكتب بالعلاقة التالية ¹¹:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, \quad h \in \mathbb{Z},$$

حيث :

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t-h} - E(X_{t-h}))].$$

و

$$\gamma(0) = Var(X_t) = E[(X_t - E(X_t))^2].$$

يتراوح معامل الارتباط الذاتي بين (-1) و (1) منحناها البياني يسمى *Corrlogramme* و من خلاله يمكننا دراسة إستقرارية السلسلة و الذي يتطلب أن يكون ρ يساوي الصفر أو قريب منه حيث نعتبر المعنوية الاحصائية لمعامل الارتباط الذاتي :

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_h = 0.$$

$$H_1 : \rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_h \neq 0.$$

إذا كانت بعض معاملات الارتباط الذاتي أو كلها تقع داخل مجال الثقة فهي تساوي الصفر معنويا أي تتحقق H_0 و في هذه الحالة السلسلة مستقرة ، أما إذا كانت معظم معاملات الارتباط أو كلها تقع خارج مجال الثقة فهي تختلف عن الصفر معنويا أي تتحقق H_1 و في هذه الحالة السلسلة غير مستقرة . من خلال هذه الدالة يمكننا حساب معاملات الارتباط الذاتي بين المشاهدات في فترات مختلفة. إذا كان الارتباط يقترب من (+1) فهذا يعني أنه يوجد ارتباط قوي و موجب بين المشاهدات التي تفصلها فجوة زمنية قيمتها h . و إذا كان يقترب من (-1) يعني أنه يوجد ارتباط قوي و سالب بين المشاهدات التي تفصلها فجوة زمنية قيمتها h . كما يمكننا أن نقدر دالة الارتباط الذاتي للمجتمع بدالة الارتباط الذاتي للعينة التي تكتب على الشكل:

$$r_h = \frac{\sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}$$

¹¹ صالح تومي، ”مدخل لنظرية القياس الاقتصادي”. ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1999.

حيث :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t}{(n - b + 1)}$$

r_h : قيم الارتباط ($h = 1, 2, 3, \dots$)

دالة الارتباط الذاتي الجزئي

تعريف 7.9.1 هي الدالة التي تقوم بقياس درجة الارتباط بين متغيرين بثبوت المتغيرات الأخرى و من خلالها يمكننا تحديد بعض خصائص السلسلة الزمنية.

تعطى دالة الارتباط الذاتي الجزئي بالصيغة الرياضية التالية :

$$r_h = \frac{cov[(X_t - X_t^*)(X_{t-h} - X_{t-h}^*)]}{\sqrt{var(X_t - X_t^*)var(X_{t-h} - X_{t-h}^*)}}$$

حيث :

$$X_t^* = \sum_{j=1}^{h+1} \alpha_j X_{t-j} \quad X_{t-h}^* = \sum_{j=1}^{h+1} \alpha_j X_{t-j}$$

10.1 اختبارات الاستقرار

إن دراسة استقرارية أو عدم استقرارية سلسلة زمنية هي خطوة أساسية في بناء نموذج يساعدنا في عملية التنبؤ، وعليه نلجأ إلى طرق واختبارات تمكننا من معرفة ذلك. باستعمال تمثيل بيانات السلسلة برسم بياني يمكن وضع فرضية بخصوص الاستقرار، فإذا كانت قيم السلسلة تتذبذب بتشتت ثابت حول خط وسط ثابت تقريباً فهي في الغالب مستقرة. أما إذا كان خط الوسط غير ثابت (أي أن السلسلة لها اتجاه عام سواء متزايد أو متناقص أو منحني) فهي غير مستقرة. وإذا كان تشتت القيم حول خط الوسط غير ثابت (أي أن التباين مرتبط بالزمن) فهي غير مستقرة. هذه الطرق قد تكون فعالة في بعض الحالات، لكن لا يمكن الجزم بها لأنه قد تؤدي إلى أخطاء في تحليل السلسلة والتنبؤ بقيمها المستقبلية.

1.10.1 اختبار الجذر الوحدوي

اختبار Dickey-Fuller

تعمل اختبارات *Dickey - Fuller* على البحث في استقرارية السلسلة أو عدمها وذلك بتحديد مركبة الاتجاه العام سواء كانت تحديدية TS أو عشوائية DS ويعتمد الاختبار على ثلاث نماذج هي:¹²

$$1- \text{ نموذج الانحدار الذاتي: } X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$2- \text{ نموذج الانحدار الذاتي مع وجود الاتجاه العام: } X_t = \phi_1 X_{t-1} + b_t + c + \varepsilon_t$$

$$3- \text{ نموذج الانحدار الذاتي مع وجود ثابت: } X_t = \phi_1 X_{t-1} + c + \varepsilon_t$$

ب طرح X_{t-1} من النماذج الثلاثة وبوضع $\lambda = (\phi_1 - 1)$ تصبح:

$$\Delta X_t = \lambda X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta X_t = \lambda X_{t-1} + \varepsilon_t + c$$

$$\Delta X_t = \lambda X_{t-1} + \varepsilon_t + b_t + c$$

حيث Δ : هو مؤثر الفرق الأول أي $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$

¹²Dickey D: and Fuller W. (1979) "Distribution of the estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root", Journal of the American Statistical Association, n47: pp. 427-4231

ϵ_t هي سلسلة الضجة البيضاء ولكل نموذج من النماذج السابقة نضع فرضيات من الشكل:

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = 0 (\phi_1 = 1) \\ H_1 : \lambda \neq 0 (\phi_1 \neq 1) \end{cases}$$

نقوم بتقدير ϕ_1 باستعمال طريقة المربعات الصغرى من أجل النماذج الثلاثة.

إذا وجدنا أن $\hat{\phi}_1 = 1$ أي $\lambda = 0$ فإن المتغير X_t يكون له جذر الوحدة وبالتالي فإن السلسلة غير مستقرة. ولاختبار استقرارية السلسلة نتبع الخطوات التالية:

1. نحسب إحصائية الاختبار t حيث:

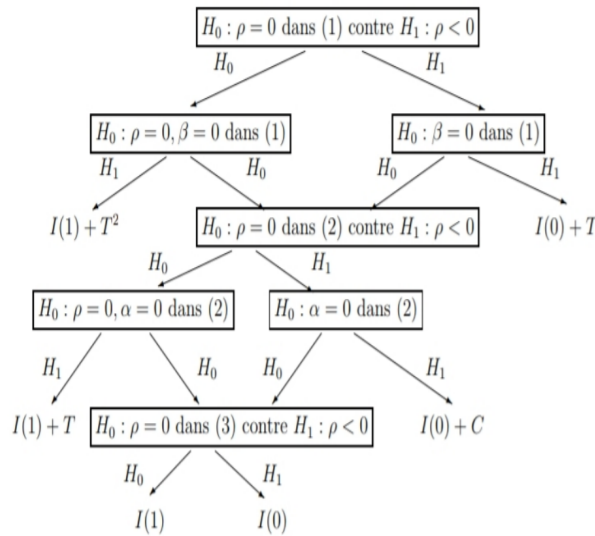
$$t = \frac{\hat{\phi}_1}{SE(\hat{\phi}_1)}$$

2. نقارن إحصائية الاختبار مع القيم الجدولية التي وضعها Fuller and Dickey في جدول 1979 حيث:

• إذا كانت t المحسوبة $t <$ الجدولية فإننا نرفض فرضية عدم الاستقرار $H_0 : \lambda = 0$ ونقبل الفرضية البديلة $H_1 : \lambda \neq 0$ وبالتالي تكون السلسلة مستقرة.

• إذا كانت t المحسوبة $t >$ الجدولية فإننا نقبل فرضية عدم $H_0 : \lambda = 0$ ونرفض الفرضية البديلة $H_1 : \lambda \neq 0$ وبالتالي تكون السلسلة غير مستقرة.

لتوضيح اختبار ديكي فولر نستعين بالمخطط التالي:



شكل 1.10: خطوات تطبيق اختبار Dickey-Fuller

إن اختبار Fuller and Dickey البسيط هو نموذج انحدار ذاتي من الرتبة 1 وفي ما يلي الاختبار الموسع لنماذج الانحدار الذاتي من الرتبة أكبر من 1:

اختبار Augmented Dickey-Fuller (1981)

وضع هذا الاختبار لمعالجة بعض النقائص التي أظهرتها اختبارات ديكي فولر البسيطة، يعتمد اختبار DFA على النماذج الثلاث:¹³

$$\Delta X_t = \lambda X_{t-1} - \sum_{j=2}^p \phi_j \Delta X_{t-j+1} + \mu_t$$

$$\Delta X_t = \lambda X_{t-1} - \sum_{j=2}^p \phi_j \Delta X_{t-j+1} + c + \mu_t$$

$$\Delta X_t = \lambda X_{t-1} - \sum_{j=2}^p \phi_j \Delta X_{t-j+1} + c + bt + \mu_t$$

حيث p هو درجة التأخير. يتم تحديد p عن طريق معياري Akaike أو Schwarz. خطوات الاختبار هي نفسها في الاختبار البسيط.

اختبار Perron et Phillips (1988)

نقوم بإجراء الاختبار في خطوات هي:¹⁴

1. التقدير بواسطة طريقة المربعات الصغرى للنماذج الثلاث لـ DF وذلك من أجل الباقي ε_t

2. تقدير التباين في المدى القصير:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2$$

3. تقدير التباين في المدى الطويل:

$$S_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 + 2 \sum_{i=1}^l \left(1 - \frac{i}{l+1}\right) \frac{1}{n} \sum_{t=i}^n \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$$

ومن أجل تقدير هذا التباين في المدى الطويل، من المهم تحديد رقم التأخر l الذي يساوي بالتقريب:

$$l = 4(n/100)^{2/9}$$

حيث أن: n هو عدد المشاهدات.

¹³Dickey D. and Fuller W. (1981) "The likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root". *Econometrics*, n49: pp. 1057-1072
¹⁴قليل محمد صغير، "محاضرات في تحليل السلاسل الزمنية"، 2020.

4. حساب الإحصائية:

$$t_{\hat{\phi}_1} = \sqrt{k} + \frac{(\hat{\phi}_1 - 1)}{\sigma\hat{\phi}_1} + \frac{n(k-1)\sigma\hat{\phi}_t}{\sqrt{k}}$$

حيث:

$$k = \frac{\hat{\sigma}^2}{S_t^2}$$

نقارن هذه الإحصائية مع القيمة الجدولية في جدول *Makinson*. إذا كانت $t_{\hat{\phi}_1} \geq t_{TAB}$ نقبل فرضية العدم $H_0: \phi_1 = 1$ أي السلسلة الزمنية غير مستقرة.

2.10.1 طرق تعديل السلاسل الزمنية غير المستقرة

1-إزالة الاتجاه العام :

يمكن استعمال طريقتين لإزالة الاتجاه العام هما :

- إجراء تعديل الفروق : إذا كانت لدينا X_t سلسلة غير مستقرة فإنه يمكننا جعلها مستقرة باستعمال التحويل التالي :

$$\nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t$$

حيث : $(\nabla = 1 - B)$ و **B** يسمى مؤثر التأخر.

إذن : $BX_t = X_{t-1}$ و $B^2X_t = X_{t-2}$ و عادة تتم هذه العملية بأخذ الفرق الأول **First difference** كما يلي :

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$$

$$\nabla X_t = X_t - BX_t = (1 - B)X_t$$

و إذا لم نتحصل على سلسلة مستقرة نأخذ الفرق الثاني كما يلي :

$$\nabla^2 X_t = X_t - BX_{t-1} = (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2})$$

$$(1 - 2B + B^2)X_t = (1 - B^2)X_t$$

أخذنا الفرق الأول و الثاني من أجل تحقيق الاستقرار للسلسلة الزمنية و إذا لم تتحقق نعيد نفس العملية **d** مرة حتى نتحصل على سلسلة مستقرة شكلها العام :

$$\nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t$$

حيث **d** هو درجة الفرق الذي يجعل السلسلة مستقرة و عادة نكتفي بالفرق الأول و الثاني .

- الانحدار الخطي : إذا كان الاتجاه العام خطياً فإن السلسلة تكون بالشكل :

$$X_t = a + b + \epsilon_t$$

حيث :

$(\alpha + \beta t)$: الاتجاه العام.

ϵ_t : المركبة العشوائية.

و لإزالة مركبة الاتجاه العام T من السلسلة نقوم بتقدير المعلمتين a و b بطريقة المربعات الصغرى
فنتحصل على المعلمتين المقدرتين \hat{a} و \hat{b} ثم نزيل الاتجاه العام باستعمال الفرق كما يلي :

$$X_t - T = \epsilon_t$$

$$X_t - (\hat{a}t + \hat{b}) = \epsilon_t$$

و منه : نحصل على سلسلة تخلو من الاتجاه العام.

2- إزالة التغيرات الموسمية :

لإزالة المركبة الموسمية من السلسلة الزمنية الفصلية أو الشهرية من أجل تحويلها إلى سلسلة مستقرة نستعمل
الطريقة التالية :

$$\nabla_s X_t = X_t - X_{t-s}$$

$$\nabla_s = (1 - B^s)X_t$$

حيث s : هي الموسمية.

و تسمى طريقة الفروق الموسمية ، و الفروق الموسمية من الدرجة D تكتب على الشكل :

$$\nabla_s^D X_t = (1 - B^s)^D,$$

حيث: D هي درجة الفرق الموسمي.

ويمكن أن نلجأ إلى استعمال الفروق البسيطة و الموسمية معا.

3- في حالة عدم ثبوت التباين :

الأسباب و المشاكل الرئيسية لعدم الحصول على نموذج دقيق هو عدم تثبيت التباين و لمعالجة ذلك يمكن
أخذ التحويلات كاللوغاريتم أو الجذر التربيعي ... لبيانات السلسلة الزمنية.

وان التحويلات للسلاسل الزمنية ربما تقودنا لايجاد سلسلة زمنية مستقرة، وبشكل عام نماذج $ARIMA$
والتحويلات للسلسلة الزمنية تعطينا دوال مهمة للتقدير وهذه الحالة تشابه ملاءمة النماذج في حالة اجراء
التمهيد.

وهنالك اربعة من التحويلات المتوفرة وبالتحديد لسلسلة موجبة، ونفرض ان $0 < Y_t$ هي السلسلة الاصلية
وان X_t هي السلسلة المحولة¹⁵ وفيما يأتي التحويلات:

¹⁵فاضل ع. الطائي، ”التنبؤ والتمهيد للسلاسل الزمنية”، المجلة العراقية للعلوم الإحصائية، 1(10): [293-308].

• التحويل اللوغارتمي :

$$X_t = \ln(Y_t)$$

• التحويل اللوجستي :

$$X_t = \ln(cY_t/(1 - cY_t))$$

حيث أن :

$$c = (1 - \exp(-6))10^{\text{ceil}(\log_{10}(\max(Y_t)))}$$

وان $\text{ceil}(w)$ عدد صحيح وصغير اكبر من او يساوي

$$w = (\log_{10}(\max(Y_t)))$$

• تحويل الجذر التربيعي :

$$x_t = \sqrt{y_t}$$

$$t = \begin{cases} \frac{y_t^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln(y_t) & \lambda = 0 \end{cases} \quad \text{تحويل Box-Cox : } x$$

4- طريقة المربعات الصغرى :

طريقة المربعات الصغرى تعد من بين الأساليب الرئيسية في التقدير، وهي تعتبر أحد أكثر الطرق انتشارا و تطبيقا، حيث تستخدم كثيرا في مجال تحليل الانحدار الذي يتمثل دوره في ايجاد معادلة تربط بين متغير تابع Y و متغيرات مستقلة X_1, X_2, \dots, X_n . تهدف طريقة المربعات الصغرى إلى تصغير مجموع البواقي إلى الحد الأدنى الممكن، مما يجعل البواقي مربعة و موجبة.

يتم اختيار \hat{a} و \hat{b} بحيث يكون مجموع البواقي معدوما بالاضافة إلى تصغير مجموع مربعات هذه البواقي بحيث :

$$Q = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2 = \sum (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i)^2$$

نشتق بالنسبة ل \hat{a} و \hat{b} على التوالي و نساويهما للصفر، من أجل تصغير Q :

$$\text{Min} \sum_i^n (Y_i - \hat{Y})^2 = \text{Min} \sum_i^n (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i)^2$$

$$\text{Min} Q = \frac{\partial Q}{\partial \hat{a}} = \frac{\partial Q}{\partial \hat{b}} = 0$$

من العبارة

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}} = 0$$

نجد المعادلة :

$$\frac{\partial \sum_i^n (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i)}{\partial \hat{a}} = 0$$

حيث :

$$\sum_i^n Y_i = n\hat{a} + \hat{b} \sum_i^n X_i$$

نعرف الانحرافات $\bar{Y} - Y = y$ و $\bar{X} - X = x$ ومن العبارة

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{b}} = 0$$

نجد :

$$\sum_i^n X_i Y_i = \hat{a} \sum_i^n X_i + \hat{b} \sum_i^n X_i^2$$

نعوض قيمة \hat{a} في المعادلة $\hat{b} = \bar{Y} - \hat{a}\bar{X}$ ، نجد :

$$\hat{b} = \frac{\sum_i^n (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2}$$

نعرف الانحرافات $y = Y - \bar{Y}$ و $x = X - \bar{X}$ كمايلي :

$$\hat{b} = \frac{\sum_i^n x_i y_i}{\sum_i^n x_i^2}$$

من المعادلتين السابقتين نجد :

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} = \frac{\sum_i^n y_i}{n} - \hat{b}\bar{X}$$

الفصل 2

النماذج الخطية ومنهجية Box-Jenkins

تمهيد

في هذا الفصل سنقوم بتقديم نماذج الإنحدار الذاتي، نماذج المتوسطات المتحركة و نماذج الإنحدار الذاتي و المتوسطات المتحركة المختلطة و هي النماذج التي تشرح تحرك السلسلة الزمنية باستخدام قيمها الحالية و الماضية، كما سنتطرق إلى منهجية Box-Jenkins التي من خلالها نقوم بمعالجة السلاسل الزمنية و هي تعتبر من أهم الأساليب المستخدمة في التنبؤ بالسلاسل الزمنية نظرا لدقتها المنهجية و قد وضعت كتعميم لتقنيات المتوسطات المتحركة.

1.2 النماذج الخطية المستقرة

1

1.1.2 نموذج الإنحدار الذاتي $AR(p)$

لتكن السلسلة الزمنية X_t ذات متوسط μ ، نعرف السلسلة الممركزة Y_t كما يلي :

$$Y_t = X_t - \mu$$

و هي سلسلة زمنية متوسطها معدوم.

تعريف 2.1.1 نمي نموذج انحدار ذاتي من الرتبة p ونكتب $AR(p)$ كل نموذج من الشكل:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (1.2)$$

واختصارا

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \Phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (1.2)$$

حيث تمثل :

$(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p})$: انحرافات قيم السلسلة عن وسطها الحسابي.

ε_t : الخطأ العشوائي (أو سلسلة الضجة البيضاء).

$(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$: معاملات النموذج.

يقوم هذا النموذج بوصف العلاقة بين المشاهدات السابقة و الحالية، يلاحظ تراجعا تدريجيا في دالة الارتباط الذاتي بشكل أسي حيث تأخذ شكلا منحنيا تنازليا و في المقابل تنقطع دالة الارتباط الذاتي الجزئي بعد الفترة p .

¹Chukunyere, Amenan Christiane, "Les modèles VAR(p), Québec, .2019

مؤثر التأخر

نستطيع كتابة النموذج $AR(p)$ شكل نموذج لانتهائي من الأخطاء العشوائية باستخدام مؤثر التأخر كما يلي :

$$B^n Y_t = Y_{t-n}$$

$$Y_t = \phi_1 B Y_{t-1} + \phi_2 B^2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p B^p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Y_t$$

$$\varepsilon_t = \Phi(B) Y_t$$

$$Y_t = \Phi^{-1}(B) \varepsilon_t$$

مع :

$$\Phi(B) = \sum_{i=0}^p \Phi_i B^i \quad (2.2)$$

$$\Phi(B) = \sum_{i=0}^p \Phi_i B^i$$

قابلية القلب

حتى يكون النموذج $AR(p)$ مستقرا يجب أن يكون قابل للقلب، أي نستطيع كتابته على شكل نموذج لانتهائي من الأخطاء العشوائية. و ذلك باستخدام معامل التأخير كما يلي :

$$B^n Y_t = Y_{t-n}$$

$$Y_t = \Phi_1 B Y_{t-1} + \Phi_2 B^2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p B^p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = (1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \dots - \Phi_p B^p) X_t$$

$$\varepsilon_t = \phi(B) Y_t$$

$$Y_t = \Phi^{-1}(B) \varepsilon_t$$

$$\Phi_0 = 1 \text{ و } \Phi(B) = \sum_{i=0}^p \Phi_i B^i \text{ مع}$$

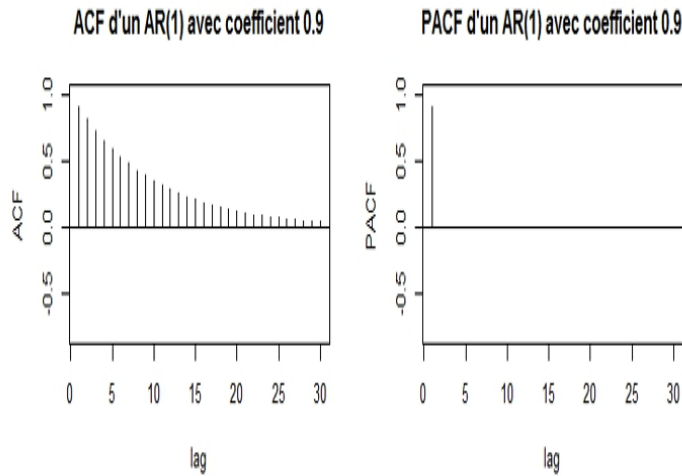
حتى يكون النموذج قابل للقلب يجب أن تكون جميع جذور كثير الحدود $\Phi(B)$ بالقيمة المطلقة أكبر من الواحد الصحيح $|\Phi(B)| > 1$

نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى $AR(1)$

يكتب نموذج $AR(1)$ للسلسلة الممركزة Y_t على الشكل:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.2)$$

يكون هذا النموذج دوما قابلا للقلب، ومستقرا إذا كانت $|\phi| < 1$



شكل 2.1: دالتي الارتباط الذاتي البسيط ACF والجزئي PACF للنموذج AR(1)

2.1.2 نموذج المتوسط المتحرك MA(q)

نسمي نموذج متوسطات متحركة من الرتبة q و نكتب $MA(q)$ كل نموذج من الشكل :

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q}, \quad (4.2)$$

مع

ε_t : التغيرات العشوائية

($\theta_1 \dots \theta_n$) : ثوابت تمثل معاملات النموذج يجب تقديرها.

بادخال معامل التأخر B على النموذج:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 B\varepsilon_t - \theta_2 B^2\varepsilon_t - \dots - \theta_q B^q\varepsilon_t$$

$$Y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)\varepsilon_t$$

نجد:

$$Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t. \quad (5.2)$$

قابلية القلب

يكون النموذج $MA(q)$ قابلا للقلب إذا كانت جذور كثير $\Theta(B)$ تقع خارج دائرة الوحدة أي : $|\theta(B)| > 1$

الاستقرارية

يكون النموذج $MA(q)$ مستقرا دوما لأنه عبارة عن دالة خطية بمتغيرات عشوائية.

دوال الارتباط الذاتي

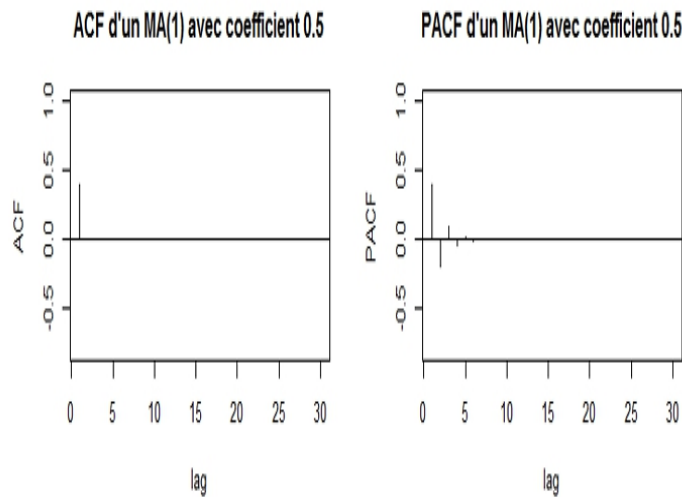
الارتباطات البسيطة (ACF) للنموذج $MA(q)$ تنعدم ابتداء من الرتبة $q + 1$. بينما الارتباطات الجزئية تتناقص أسياً نحو الصفر.

نموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الأولى $MA(1)$

يكتب نموذج $MA(1)$ للسلسلة الممركزة Y_t كما يلي:

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \quad (6.2)$$

يكون هذا النموذج دوماً مستقراً، وقابلاً للقلب من أجل $|\theta| < 1$



شكل 2.2: دالتي الارتباط الذاتي البسيط ACF والجزئي PACF للنموذج $MA(1)$

3.1.2 نموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة $ARMA(p, q)$

توجد في الواقع سلاسل زمنية لا يمكن أن تكتب كنموذج انحدار ذاتي أو متوسطات متحركة لأنها تجمع بين خصائص النموذجين معا لذلك نلجأ إلى نمذجتها بنموذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة المختلط من الرتبة (p, q) الذي يعرف كما يلي:

تعريف 1.2.1 يكتب نموذج $ARMA(p, q)$ على الشكل:

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad (7.2)$$

بادخال معامل التأخير نجد:

$$Y_t - \phi_1 B Y_t - \phi_2 B^2 Y_t - \dots - \phi_p B^p Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 B \varepsilon_t - \theta_2 B^2 \varepsilon_t - \dots - \theta_q B^q \varepsilon_t$$

$$Y_t(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) = \varepsilon_t(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$$

$$\Phi(B)Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t. \quad (8.2)$$

استقرار النموذج $ARMA(p, q)$

يكون النموذج $ARMA(p, q)$ مستقرا إذا كانت جميع جذور كثير الحدود $\Phi(B)$ تقع خارج دائرة الوحدة. إذا كانت العملية مستقرة فإنه يمكن التعبير عنها بشكل عملية متوسطات متحركة لا نهائية كما يلي:

$$Y_t = \left(\frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \right) \varepsilon_t, \quad |B| \leq 1.$$

قابلية القلب

يكون النموذج $ARMA(p, q)$ منعكس إذا كانت جميع جذور كثير الحدود $\Theta(B)$ تقع خارج دائرة الوحدة. إذا حققت العملية شرط الإنعكاس فإنه يمكن التعبير عنها بشكل عملية انحدار لا نهائية كما يلي:

$$\left(\frac{\Phi(B)}{\Theta(B)} \right) Y_t = \varepsilon_t \quad (9.2)$$

أمثلة

1- $ARMA(0, 0)$ هي سلسلة الضجة البيضاء ε_t

2- $ARMA(p, 0)$ هو النموذج $AR(p)$

3- $ARMA(0, q)$ هو النموذج $MA(q)$

دالة الارتباط الذاتي لنموذج ARMA(p,q)

النموذج	FAC	FAP
AR(1)	تناقص أسي	$1 < k$ بالنسبة لكل $0 =$
AR(2)	تناقص أسي	$2 < k$ بالنسبة لكل $0 =$
AR(P)	تناقص أسي	$p < k$ بالنسبة لكل $0 =$
MA(1)	$1 < k$ بالنسبة لكل 0تساوي	تناقص باستمرار
MA(2)	$2 < k$ بالنسبة لكل 0تساوي	تناقص باستمرار
MA(q)	$q < k$ بالنسبة لكل 0تساوي	تناقص باستمرار
ARMA(1,1)	تناقص هندسي ابتداءاً من أول تأخر	تناقص أسي
ARMA(p,q)	تأخر p-qتناقص أسي بعد	تأخر q-تناقص أسي بعد

الجدول (1.2): خصائص منحني الارتباط الذاتي

4.1.2 نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية ARIMA(p, d, q)

عندما تكون السلاسل الزمنية غير مستقرة فإننا نلجأ إلى إجراء بعض التعديلات لجعلها مستقرة وواحدة من هذه الطرق هي تطبيق الفروقات d على النموذج $ARMA(p, q)$ فتتوصل على نموذج $ARIMA(p, d, q)$ الذي يكتب على الشكل:

$$\Phi(B)\nabla^d Y_t = \Theta(B)\varepsilon_t, \quad (10.2)$$

مع ∇^d هو الفرق من الرتبة d و ε_t هي سلسلة الضجيج الأبيض حيث:

$$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p,$$

هو كثير حدود الانحدار الذاتي من الدرجة p ,

$$\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q$$

هو كثير حدود المتوسطات المتحركة من الدرجة q .

حيث أن كثيري الحدود $\Phi(z)$ و $\Theta(z)$ ليس لهما جذور مشتركة.

خاصية 1.2.1 نقول عن السلسلة الممركزة Y_t أنها نموذج $ARIMA(p, d, q)$ إذا كانت السلسلة $\nabla^d Y_t$ هي نموذج $ARMA(p, q)$.

لذلك كل تعاريف وخصائص النموذج $ARMA(p, q)$ المذكورة سابقاً تنطبق على السلسلة $\nabla^d Y_t$.

حالات خاصة

- إذا كان d و q معدومين، نقول أنه نموذج انحدار ذاتي من الرتبة p ونكتب $AR(p)$.
- إذا كان d و p معدومين، نقول أنه نموذج متوسطات متحركة من الرتبة q ونكتب $MA(q)$.
- إذا كان d معدوم، نقول أنه نموذج انحدار ذاتي ومتوسطات متحركة ذو الرتبين p و q $ARMA(p, q)$.

2.2 منهجية Box-Jenkins

1.2.2 مرحلة التعرف

هذه المرحلة تعتبر أهم و أصعب مرحلة من مراحل عملية *Box - Jenkins* حيث يتم فيها التعرف على النموذج الملائم لدراسة و تحليل السلسلة ضمن نماذج $ARIMA(p, d, q)$ بالإضافة إلى الاستعانة بدوال الارتباط الذاتي و الجزئي من أجل تحديد و استخراج الرتب p, d, q و هي على الترتيب رتب الانحدار الذاتي، عدد الفروق المطبقة، درجات المتوسطات المتحركة. و تتم مرحلة التعرف بعد التأكد من استقرارية السلسلة و التخلص من الاتجاه العام و التغيرات الموسمية.

2.2.2 مرحلة التقدير

تتمثل هذه المرحلة في تقدير المعاملات θ و Φ و هذا بعد الانتهاء من المرحلة الأولى و التعرف على النموذج المرافق للسلسلة و تحديد المعامل. تتم هذه الطريقة عبر ثلاث مراحل:

- التقديرات الأولية لمعاملات نموذج (MA).

- التقديرات الأولية لمعاملات نموذج (AR).

- التقديرات الأولية لمعاملات نموذج (ARMA).

في حالة نموذج الانحدار الذاتي تكون عملية التقدير سهلة نسبيا لذلك بإمكاننا استعمال طريقة المربعات الصغرى، أما في حالة نموذج $ARMA$ تصبح عملية التقدير أكثر تعقيدا لذا نلجأ إلى طريقة العزوم، طريقة الإمكانية العظمى و أيضا طريقة المربعات الصغرى.

3.2.2 مرحلة التشخيص

تعني بفحص النماذج المختلفة أيها أكثر ملاءمة لوصف البيانات محل الدراسة. ولاختيار أفضل نموذج نطبق عدة اختبارات هي:

أ. اختبار معنوية معاملات النموذج :

الهدف الأساسي في هذه المرحلة هو تقدير معاملات النموذج ، نضع الفرضيتين التاليتين :

$$\begin{cases} H_0 : \phi_i = 0, \\ H_1 : \phi_i \neq 0. \end{cases}$$

بحيث إذا كانت الاحتمالية أقل من 0.05 تكون المعاملات معنوية و بالتالي نرفض فرضية العدم.

ب. معايير الاختيار :

الهدف الأساسي من هذه المعايير هو إيجاد النموذج المناسب من بين عدة نماذج، و التي سنذكر منها:²

• معيار *Akaike* :

$$AIC = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + \frac{2n}{T}.$$

• معيار *Schwartz* :

$$BIC = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + n \frac{\log(T)}{T}.$$

حيث:

$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$: هي تباين الخطأ للنموذج المختار

n : عدد معلمات النموذج

T : حجم العينة (عدد مشاهدات السلسلة)

ب. دراسة بواقي النموذج المقدر:

تعرف بواقي ε_t بالعلاقة :³

$$\varepsilon_t = X_t - \hat{X}_{t-1},$$

² نفس المرجع السابق

³Box G.E.P, Jenkins G.M, Time series Analysis (1976). Forecasting and control, Holden-Day, San Francisco.

حيث : \hat{X}_{t-1} هو التنبؤ للقيمة t في الفترة $t - 1$.
 كما يمكن التأكد من أن ε_t تشكل ضجيج أبيض و ذلك بالقيام بالاختبارين التاليين :

• اختبار Ljung Box : يعرف كما يلي :

$$LB = n(n + 2) \frac{\sum_{i=1}^{\lambda} \hat{\rho}^2(k)}{n - k},$$

حيث :

λ : عدد الفجوات الزمنية السابقة الداخلة في الاختبار .

n : عدد المشاهدات .

$\hat{\rho}(k)$: الارتباط التجريبي للبواقي

و فرضية هذا الاختبار هي :

H_0 : ε_t تمثل صدمات عشوائية .

H_1 : ε_t لا تمثل صدمات عشوائية .

فإذا كانت :

$Qstat < \chi_{n-p-q}^2$ نقبل H_0 و بالتالي (ε_t) تمثل صدمات عشوائية .

$Qstat > \chi_{n-p-q}^2$ نرفض H_0 و بالتالي لا تمثل صدمات عشوائية .

لمعرفة فيما اذا كانت هذه الصدمات العشوائية تخضع للتوزيع الطبيعي أم لا نقوم بالاختبار

التالي :

• اختبار التوزيع الطبيعي :

من اجل التحقق من أن البواقي $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ تتبع التوزيع الطبيعي و يمكن الاستعانة

باختبار $\langle\langle jarque - berra \rangle\rangle$ الذي يعتمد على معاملي $skewness$ (التناظر) و $kurtosis$ (التفلطح).

حيث أن معامل $skewness$ يعطى بالعلاقة :

$$\beta_1^{1/2} = \frac{U_3}{U_2^{3/2}}.$$

و معامل $kurtosis$ يعطى بالعلاقة :

$$\beta_1^{1/2} = \frac{U_3}{U_2^{3/2}}.$$

مع العلم أن U_n قيمة العزم الممركز من الرتبة n يساوي :

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{X}).$$

فإذا كانت $(n > 30)$:

$$\beta_1^{1/2} \sim \mathcal{N}\left(0, \sqrt{\frac{6}{n}}\right).$$

$$\beta_2 \sim \mathcal{N}\left(2, \sqrt{\frac{24}{n}}\right).$$

إذن :

$$V_1 = \frac{\beta_1^{1/2} - 0}{\sqrt{\frac{6}{n}}}.$$

و:

$$V_2 = \frac{\beta_2 - 3}{\sqrt{\frac{24}{n}}}.$$

نقوم بمقارنة V_1 و V_2

مع القيمة 1.96 عند مستوى المعنوية ($\alpha = 5\%$) حيث إذا كان :

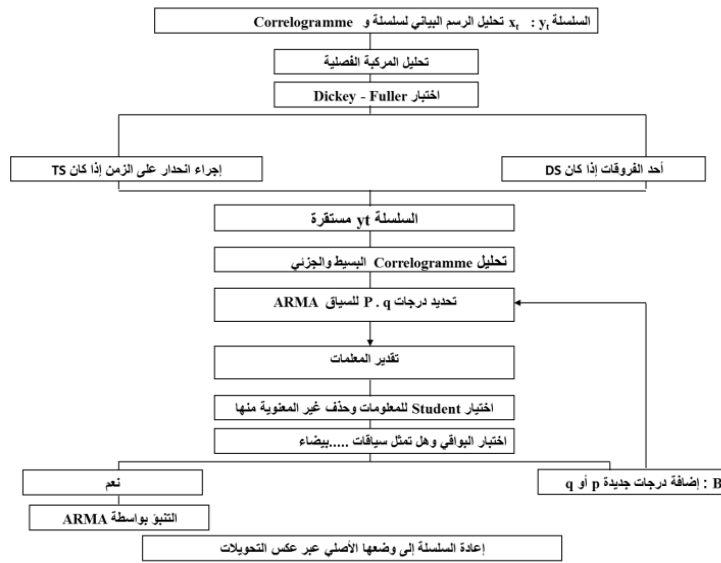
$$\begin{cases} |V_1| < 1.96 \\ |V_2| < 1.96 \end{cases}$$

تقبل فرضية التوزيع الطبيعي للبواقي ε_t

بعد اختيار أفضل نموذج وتقدير معاملاته، لا بد لنا من اختبار مدى ملائمة هذا النموذج لتمثيل السلسلة الزمنية بفحص قيم دالة الارتباط الذاتي لبواقي النموذج من خلال ارسم دالة الارتباط الذاتي لهذه البواقي وملاحظة ما إذا كانت معاملات الارتباط تقع ضمن حدود الثقة أم لا، تهدف هذه الاختبارات للتأكد من أن سلسلة البواقي ($\hat{\varepsilon}_t = \frac{\hat{\Phi}(B)}{\hat{\Theta}(B)} X_t$) هي عبارة ضجيج أبيض، بحيث تكون سلسلة البواقي تتبع توزيع طبيعي بمتوسط صفري و تباين ثابت و غير مرتبطة فيما يبيها (أي تبايناتها المشتركة معدومة).

4.2.2 التنبؤ

في الأخير، آخر مرحلة من مراحل منهجية Box-Jenkins تسمى مرحلة التنبؤ، و التي نستعملها في إيجاد القيم المستقبلية للسلسلة الزمنية، من خلال استخدام النموذج المناسب الذي تحصلنا عليه من المراحل السابقة، و أفضل تنبؤ هو الذي يكون الخطأ الناتج عنه صغير جدا و تباينه أقل مايمكن، و بعد أن نحدد رتب النموذج نختار النموذج المناسب الذي نستخدمه في التنبؤ للفترة المستقبلية و نحسب خطأ و مجال التنبؤ في هذه الفترة.

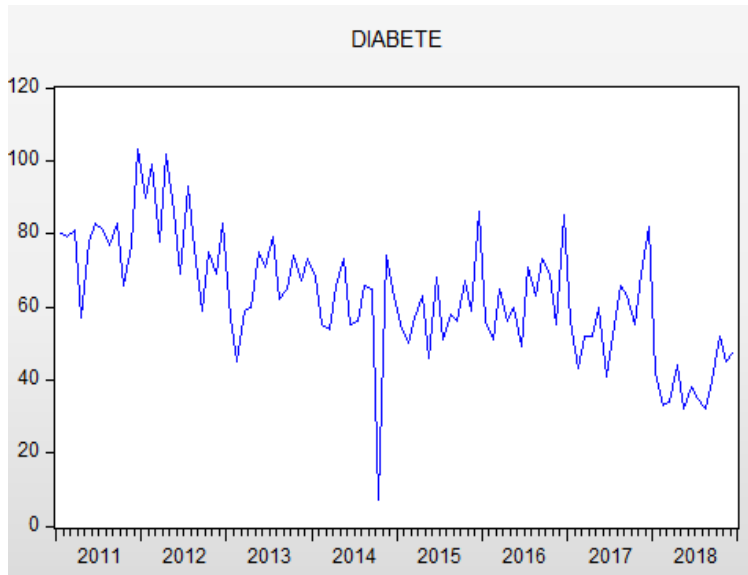


شكل 2.3: خطوات تطبيق منهجية Box-Jenkins

3.2 مثال تطبيقي : تطبيق منهجية بوكس جينكينز على سلسلة مرضى السكري باستعمال برنامج *EViews10*

نقوم بدراسة تحليلية و إحصائية لمعطيات متمثلة في عدد مرضى السكري شهريا من جانفي 2011 إلى غاية ديسمبر 2018 في إحدى المستشفيات مقدرة ب 96 مشاهدة، معطيات هذه السلسلة موجودة في الملاحق:

1.3.2 تمثيل السلسلة الأصلية باستخدام البرنامج الإحصائي *Eviews10*

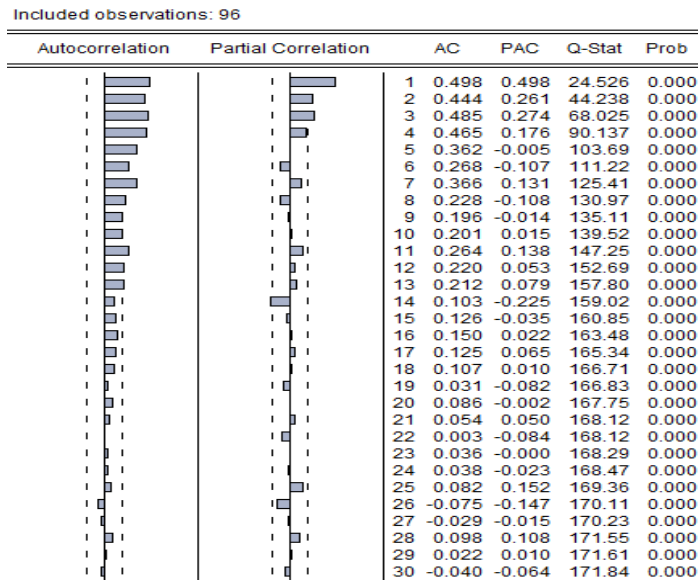


شكل 2.4: التمثيل الباني لسلسلة عدد مرضى السكري DIABETE

نلاحظ من خلال المنحنى أن الاتجاه العام يتناقص بوتيرة ضعيفة، و التباين يتذبذب حول وسط غير ثابت أي أن السلسلة الزمنية غير مستقرة و للتأكد من صحة هذا التخمين نحتاج إلى مجموعة من إختبارات الإستقرارية.

و نتأكد من ذلك باستخدام بيان دالتي الارتباط الذاتي ACF و الارتباط الذاتي الجزئي PACF.

2.3.2 تمثيل دالتي الارتباط الذاتي و الجزئي



شكل 2.5: التمثيل البياني لدالتي الارتباط الذاتي و الجزئي للسلسلة DIABETE

نلاحظ أن قيمة الاحتمالية للسلسلة أقل من 0.05 و بالتالي نرفض فرضية العدم، التي تقول أن السلسلة مستقرة ومنه السلسلة غير مستقرة.

3.3.2 إختبار جذر الوحدة

Null Hypothesis: DIABETE has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=11)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-8.036221	0.0000
Test critical values:		
1% level	-4.057528	
5% level	-3.457808	
10% level	-3.154859	

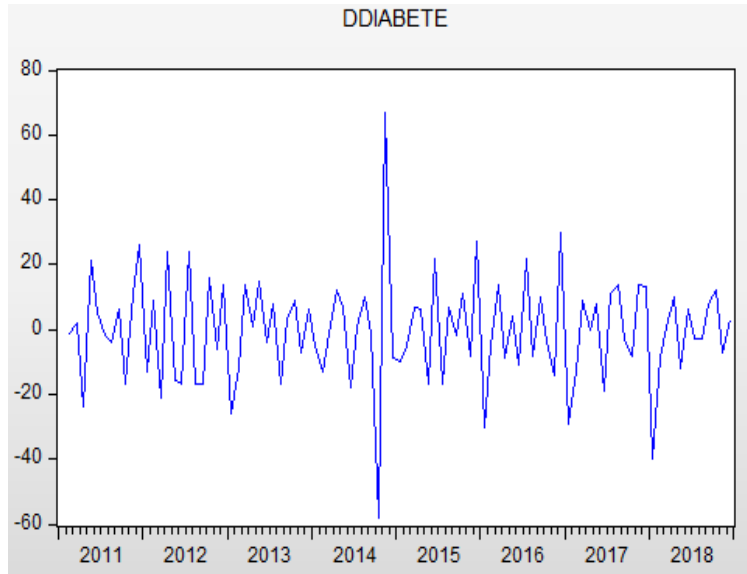
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(DIABETE)
 Method: Least Squares
 Date: 06/07/24 Time: 18:27
 Sample (adjusted): 2011M02 2018M12
 Included observations: 95 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DIABETE(-1)	-0.825154	0.102679	-8.036221	0.0000
C	66.86735	8.784899	7.611624	0.0000
@TREND("2011M01")	-0.313996	0.062175	-5.050231	0.0000

شكل 2.6: إختبار ADF للسلسلة DIABETE

نلاحظ من خلال الجدول أن الاحتمالية أصغر من 0.05 و منه نرفض فرضة العدم و هي وجود جذر الوحدة و نلاحظ أن $(Tc > Tt)$ انطلاقا من جدول Dickey-Fuller و منه الاتجاه العام معنويين ، أي عدم وجود جذر الوحدة و السلسلة تتأثر بالاتجاه العام إذن فهي غير مستقرة من النوع TS (أي عدم استقرارية تحديدية).
من أجل إزالة الاتجاه العام نطبق الفرق الأول $(\nabla X_t = X_t - X_{t-1})$ فنحصل على سلسلة مستقرة DDIABETE تمثيلها البياني كما يلي:



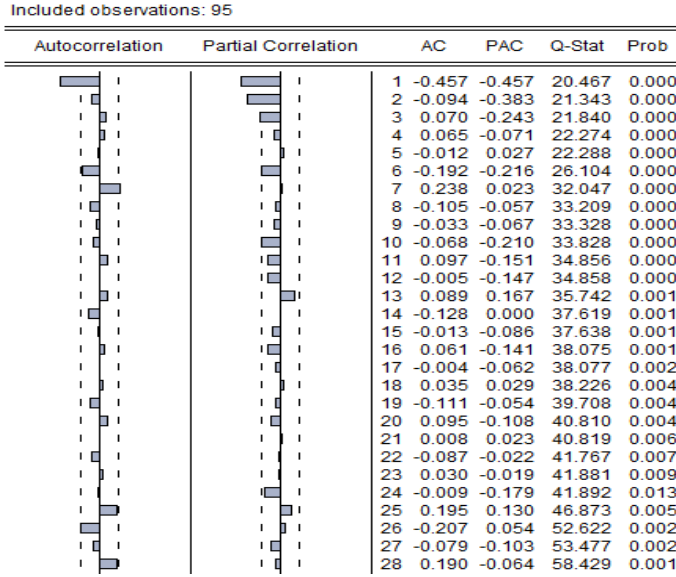
شكل 2.7: السلسلة المستقرة DDIABETE

4.3.2 تطبيق منهجية Box-Jenkins على السلسلة DDIABETE

يمكننا الآن تطبيق منهجية Box-Jenkins على السلسلة المستقرة DDIABETE.

مرحلة التعرف على النموذج

في هذه المرحلة نقوم بتحديد الرتب (p, q) للنموذج AR و MA على الترتيب انطلاقا من دالتي الارتباط الذاتي و الارتباط الذاتي الجزئي للسلسلة DDIABETE ، حيث نأخذ القيم التي تكون خارج مجال الثقة انطلاقا من الشكل التالي:



شكل 2.8: التمثيل البياني لدالتي الارتباط الذاتي و الجزئي للسلسلة DDIABETE

لتحديد النموذج الأفضل الذي يمثل السلسلة، نلاحظ الارتباطات البسيطة (من أجل تحديد درجة التأخير للنموذج MA) و الارتباطات الجزئية (من أجل تحديد درجة التأخير للنموذج AR). من خلال الشكل أعلاه الذي يمثل التمثيل البياني لدالتي الارتباط الذاتي و الجزئي للسلسلة المستقرة DDIABETE. الارتباط البسيط الأول يختلف معنويًا عن الصفر (تمتد خارج مجال الثقة)، أي أن في هذه الحالة $q = 1$ ، و أيضا الارتباطات الجزئية الثلاثة الأولى تختلف معنويًا عن الصفر (تمتد خارج مجال الثقة) أي أن $p = 1, 2$ ومنه سنقوم بتحديد $AR(1), AR(2), MA(1)$ و المختلطة $ARMA(1, 1), ARMA(2, 1)$.

5.3.2 مرحلة التقدير

بعدما اقترحنا عدة نماذج نقوم بتقديرها باستعمال طريقة المعقولية العظمي لوجود $ARMA$. ندرس معنوية معاملات كل نموذج كمايلي:

Dependent Variable: DDIABETE
 Method: ARMA Maximum Likelihood (BFGS)
 Date: 06/07/24 Time: 23:00
 Sample: 2011M02 2018M12
 Included observations: 95
 Convergence achieved after 4 iterations
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.451728	0.062400	-7.239287	0.0000
SIGMASQ	216.9553	22.89352	9.476713	0.0000
R-squared	0.207925	Mean dependent var		-0.336842
Adjusted R-squared	0.199408	S.D. dependent var		16.63795
S.E. of regression	14.88694	Akaike info criterion		8.262076
Sum squared resid	20610.75	Schwarz criterion		8.315842
Log likelihood	-390.4486	Hannan-Quinn criter.		8.283801
Durbin-Watson stat	2.353498			
Inverted AR Roots	-0.45			

شكل 2.9: النموذج AR(1)

Dependent Variable: DDIABETE
 Method: ARMA Maximum Likelihood (BFGS)
 Date: 06/07/24 Time: 23:02
 Sample: 2011M02 2018M12
 Included observations: 95
 Convergence achieved after 4 iterations
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.623781	0.074195	-8.407280	0.0000
AR(2)	-0.373786	0.104676	-3.570875	0.0006
SIGMASQ	185.4332	21.59796	8.585682	0.0000
R-squared	0.323008	Mean dependent var		-0.336842
Adjusted R-squared	0.308291	S.D. dependent var		16.63795
S.E. of regression	13.83763	Akaike info criterion		8.129328
Sum squared resid	17616.16	Schwarz criterion		8.209977
Log likelihood	-383.1431	Hannan-Quinn criter.		8.161917
Durbin-Watson stat	2.191398			

شكل 2.10: النموذج AR(2)

Dependent Variable: DDIABETE
Method: ARMA Maximum Likelihood (BFGS)
Date: 06/07/24 Time: 23:02
Sample: 2011M02 2018M12
Included observations: 95
Convergence achieved after 5 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.717135	0.081749	-8.772377	0.0000
AR(2)	-0.525556	0.125382	-4.191624	0.0001
AR(3)	-0.240216	0.156633	-1.533630	0.1286
SIGMASQ	174.4457	20.41128	8.546532	0.0000
R-squared	0.363122	Mean dependent var		-0.336842
Adjusted R-squared	0.342126	S.D. dependent var		16.63795
S.E. of regression	13.49495	Akaike info criterion		8.091222
Sum squared resid	16572.34	Schwarz criterion		8.198753
Log likelihood	-380.3330	Hannan-Quinn criter.		8.134673
Durbin-Watson stat	2.039443			
Inverted AR Roots	-08-.65i	-.08+.65i		-.55

شكل 2.11: النموذج AR(3)

Dependent Variable: DDIABETE
Method: ARMA Maximum Likelihood (BFGS)
Date: 06/07/24 Time: 23:03
Sample: 2011M02 2018M12
Included observations: 95
Convergence achieved after 4 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.772941	0.068876	-11.22217	0.0000
SIGMASQ	172.6879	16.96397	10.17969	0.0000
R-squared	0.369540	Mean dependent var		-0.336842
Adjusted R-squared	0.362761	S.D. dependent var		16.63795
S.E. of regression	13.28163	Akaike info criterion		8.041046
Sum squared resid	16405.35	Schwarz criterion		8.094812
Log likelihood	-379.9497	Hannan-Quinn criter.		8.062771
Durbin-Watson stat	1.984086			

شكل 2.12: النموذج MA(1)

نلاحظ أن الاحتمالية الاحصائية لكل من النماذج $AR(1)$, $AR(2)$, $AR(3)$, $MA(1)$ أصغر من 0.05 إذن معاملاتها معنوية.

6.3.2 مرحلة التشخيص

بعد تقدير النماذج نختار نموذج واحد فقط و ذلك باستخدام معايير الأفضلية : AIC و SC ونلاحظ أن النموذج الأفضل هو $MA(1)$ لأن فيه يكون المعيارين أصغر مايمكن.

اختبار البواقي

حتى يكون النموذج ملائم من الأفضل أن تكون البواقي ضجة بيضاء تتبع توزيع طبيعي، و ذلك انطلاقاً من التمثيل البياني لدالتي الارتباط الذاتي ACF و الارتباط الذاتي الجزئي PACF للبواقي كما يلي:

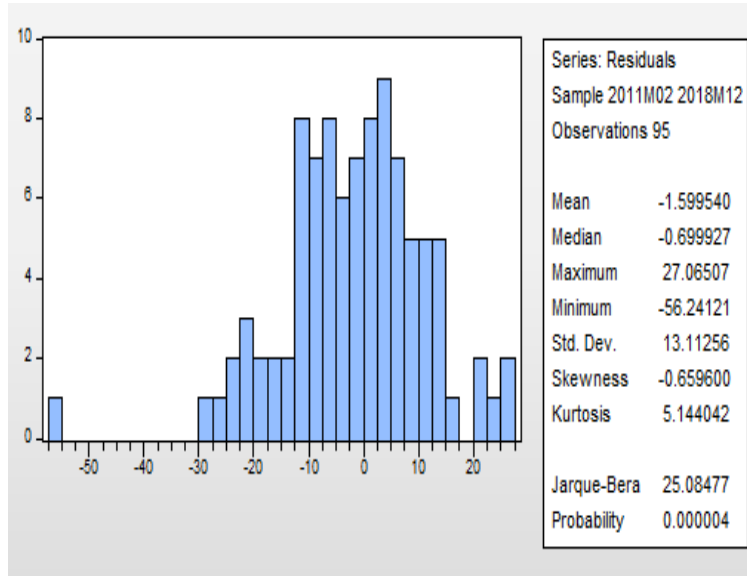
Included observations: 95
Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term

	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.008	-0.008	0.0069			
2	-0.065	-0.065	0.4276	0.513		
3	0.069	0.068	0.9031	0.637		
4	0.064	0.061	1.3134	0.726		
5	-0.071	-0.062	1.8282	0.767		
6	-0.186	-0.187	5.4018	0.369		
7	0.087	0.071	6.1994	0.401		
8	-0.131	-0.151	8.0069	0.332		
9	-0.144	-0.110	10.218	0.250		
10	-0.093	-0.114	11.163	0.265		
11	0.090	0.065	12.062	0.281		
12	0.077	0.076	12.713	0.313		
13	0.059	0.120	13.104	0.362		
14	-0.129	-0.213	14.991	0.308		
15	-0.055	-0.118	15.339	0.355		
16	0.040	-0.037	15.524	0.414		
17	0.013	0.052	15.544	0.485		
18	-0.001	0.008	15.544	0.556		
19	-0.083	-0.091	16.379	0.566		
20	0.053	-0.016	16.724	0.609		
21	-0.003	0.062	16.725	0.671		
22	-0.072	-0.061	17.383	0.688		
23	0.037	-0.031	17.558	0.732		
24	0.083	-0.029	18.452	0.733		
25	0.142	0.171	21.117	0.632		

شكل 2.13: التمثيل البياني لدالتي الارتباط الذاتي و الجزئي للبواقي

نلاحظ أن كل المعاملات داخل مجال الثقة لأن قيمة الاحتمالية ($P - value > 0.05$) ومنه لا يوجد ارتباط داخل السلسلة و بالتالي البواقي تمثل ضجة بيضاء و هذا يؤكد أن السلسلة مستقرة.

اختبار التوزيع الطبيعي



شكل 2.14: نتائج اختبار التوزيع الطبيعي للبقايا

بالاستعانة باختبار توزيع الأخطاء ل Jarque-berra نلاحظ أن $(p - value < 0.05)$ و هذا يدل على أن الضجة البيضاء لا تتبع توزيع طبيعي. معادلة النموذج لهذه السلسلة هي:

$$DDIABETE_t = -0.772\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$DIABETE_t - DIABETE_{t-1} = -0.772\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$DIABETE_t = DIABETE_{t-1} = -0.772\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

7.3.2 خلاصة

نستخلص من هذه الدراسة أن سلسلة مرض السكري تمت نمذجتها باستخدام منهجية Box-Jenkins بالنموذج $MA(1)$.

الفصل 3

نماذج الانحدار الذاتي المتعدد $VAR(p)$

تمهيد

سنقوم في هذا الفصل بتقديم نموذج الانحدار الذاتي المتعدد $VAR(p)$ لنمذجة السلاسل الزمنية متعددة المتغيرات الذي يشرح كيف تؤثر هذه المتغيرات على بعضها باستخدام قيمها الحالية والماضية، سنتطرق فيه أيضا إلى شروط استقرارية النموذج وعلاقة السببية بين المتغيرات حيث تسمح بالتنبؤ بالقيم المستقبلية لمختلف متغيرات السلسلة وتفسير أفضل للظواهر.

1.3 تقديم النموذج VAR(p)

يعطى نموذج شعاع الانحدار الذاتي VAR لـ n متغير من الرتبة p و نكتب $VAR(p)$ على الشكل :

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (1.3)$$

حيث:

$$X_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{nt} \end{bmatrix}; \phi_0 = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}; \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix}; \phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(i)} & \phi_{12}^{(i)} & \dots & \phi_{1n}^{(i)} \\ \phi_{21}^{(i)} & \phi_{22}^{(i)} & \dots & \phi_{2n}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1}^{(i)} & \phi_{n2}^{(i)} & \dots & \phi_{nn}^{(i)} \end{bmatrix};$$

X_t : سلسلة متعددة المتغيرات ذات n بعد ، مستقرة من الرتبة الثانية،

ε_t : شعاع الضجيج الأبيض ذو n بعد،

بإدخال معامل التأخر على الشكل (1.3) نتحصل على:

$$\Phi(B)X_t = \phi_0 + \varepsilon_t, \quad (2.3)$$

$\Phi(B)$: كثير حدود مصفوفي من الدرجة p بمعامل التأخر الزمني B و يكتب كما يلي :

$$\Phi(B) = I - B\phi_1 - B^2\phi_2 - \dots - B^p\phi_p = I - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i.$$

كما يمكن كتابة النموذج VAR على شكل مجموعة من المعادلات كما يأتي:

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \phi_1 + \phi_{11}^{(1)} X_{1,t-1} + \dots + \phi_{11}^{(p)} X_{1,t-p} + \dots + \phi_{1n}^{(1)} X_{n,t-1} + \dots + \phi_{1n}^{(p)} X_{n,t-p} + \varepsilon_{1t} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$X_{nt} = \phi_n + \phi_{n1}^{(1)} X_{1,t-1} + \dots + \phi_{n1}^{(p)} X_{1,t-p} + \dots + \phi_{nn}^{(1)} X_{n,t-1} + \dots + \phi_{nn}^{(p)} X_{n,t-p} + \varepsilon_{nt}$$

مثال

ليكن المتغيرين المستقرين X_{1t} و X_{2t} ، و لنفرض $p = 3$ ، النموذج $VAR(3)$ حيث $n = 2$ و $P = 3$ يكتب على الشكل:¹

$$\begin{cases} X_{1t} = \phi_1 + \phi_{11}^{(1)} X_{1,t-1} + \phi_{11}^{(2)} X_{1,t-2} + \phi_{11}^{(3)} X_{1,t-3} + \phi_{12}^{(1)} X_{2,t-1} + \phi_{12}^{(2)} X_{2,t-2} + \phi_{12}^{(3)} X_{2,t-3} + \varepsilon_{1t}, \\ X_{2t} = \phi_2 + \phi_{21}^{(1)} X_{1,t-1} + \phi_{21}^{(2)} X_{1,t-2} + \phi_{21}^{(3)} X_{1,t-3} + \phi_{22}^{(1)} X_{2,t-1} + \phi_{22}^{(2)} X_{2,t-2} + \phi_{22}^{(3)} X_{2,t-3} + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

¹Mezhoud Ibtissam, "Les modèles véctoriels Autoregréssifs VAR(p), Univ Seddik Ben Yahia, Jijel, .2022

$$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(1)} & \phi_{12}^{(1)} \\ \phi_{21}^{(1)} & \phi_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(2)} & \phi_{12}^{(2)} \\ \phi_{21}^{(2)} & \phi_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-2} \\ X_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(3)} & \phi_{12}^{(3)} \\ \phi_{21}^{(3)} & \phi_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-3} \\ X_{2,t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_{1t} = \phi_1 + \sum_{i=1}^3 \phi_{11}^{(i)} X_{1,t-i} + \sum_{i=1}^3 \phi_{12}^{(i)} X_{2,t-i} + \varepsilon_{1t}, \\ X_{2t} = \phi_2 + \sum_{i=1}^3 \phi_{21}^{(i)} X_{1,t-i} + \sum_{i=1}^3 \phi_{22}^{(i)} X_{2,t-i} + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

الشكل القانوني لنموذج VAR(p)

ليكن النموذج $VAR(p)$ حيث: $\phi_0 = 0$ فإن:

$$\Phi(B)X_t = \varepsilon_t,$$

يمكن كتابته على الشكل:

$$X_t = \Phi^{-1}(B)\varepsilon_t,$$

حيث:

X_t : الشكل القانوني للنموذج

ε_t : التغيرات المهمة (الأخطاء)

2.3 شعاع الضجيج الأبيض

تعريف 1.2.3 لتكن ε_t السلسلة الزمنية متعددة ذات k بعد تكتب كمايلي:

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{kt} \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

تسمى السلسلة ε_t شعاع ضجيج أبيض ضعيف بعده k إذا كان:

$$E[\varepsilon_t] = 0, \forall t \in \mathbb{Z} \bullet$$

$$E[\varepsilon_t \varepsilon'_s] = 0, \forall s \neq t \in \mathbb{Z} \bullet$$

$$E[\varepsilon_t \varepsilon'_t] = \Omega_\varepsilon \bullet$$

حيث Ω_ε هي مصفوفة التباينات-التباينات المشتركة لـ k مركبة للعملية ε_t .

3.3 مصفوفة التباين $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t')$

إن بناء النموذج $VAR(p)$ يتطلب ان تستوفي المتغيرات العشوائية المهمة (الأخطاء) في النموذج مايلي:²

• المتوسط الحسابي لها معدوم $E(\varepsilon_t) = 0$

$$E(\varepsilon_t) = E \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ \cdot \\ E(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

• أن لا تكون الأخطاء مرتبطة ببعضها أي أن نتيجة إحداها لا تؤثر على بقية النتائج ويمكن التعبير عنها كمايلي:

$$\begin{cases} Var(\varepsilon_t) = \sigma^2, & \forall i = 1, \dots, n \\ Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_j) = 0, & \forall i \neq j \end{cases}$$

يمكن التعبير عن الشرطين بالشكل المصفوفي كمايلي:

$$Cov(\varepsilon, \varepsilon') = E(\varepsilon \cdot \varepsilon') - E(\varepsilon) \cdot E(\varepsilon')$$

لكن

$$E(\varepsilon) = E(\varepsilon') = 0.$$

ومنه

$$Cov(\varepsilon, \varepsilon') = E(\varepsilon \varepsilon').$$

$$E(\varepsilon \varepsilon') = E \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_n].$$

²د. حاشي نوري، "نماذج قياسية في التجارة الدولية"، 2020

$$E(\varepsilon\varepsilon') = E \begin{bmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_1\varepsilon_n \\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2\varepsilon_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & \cdots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_n^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Var(\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & Cov(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ Cov(\varepsilon_2\varepsilon_1) & Var(\varepsilon_2) & \cdots & Cov(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ Cov(\varepsilon_n\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_n\varepsilon_2) & \cdots & Var(\varepsilon_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2, \\ Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad \forall i \neq j. \end{cases}$$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sigma^2 I_n.$$

تسمى مصفوفة التباين بمصفوفة التباينات-التباينات المشتركة للأخطاء ويرمز لها بـ Ω_ε .

4.3 بناء النموذج VAR(p)

1.4.3 استقرارية السلاسل الزمنية المتعددة

تعريف 1.3.3

تكون سلسلة زمنية متعددة المتغيرات مستقرة إذا تحقق:

- $E(X_t) = \mu, \forall t$, الشعاع μ مركباته ثوابت هي متوسطات مركبات السلسلة،

- $Var(X_t) = E([X_t - \mu][X_t - \mu]') = \Gamma$ تباينها شعاع ثابت،

- التباين المشترك مستقل عن الزمن ويتعلق فقط بالفجوة الزمنية

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = E([X_t - \mu][X_{t+h} - \mu]) = \Gamma_h.$$

من الواضح أن دالة التغير الذاتي مستقلة تماما عن الزمن وتتعلق فقط بالفجوة الزمنية h وهذا يدل

على أن كل عنصر من عناصر مصفوفة التغير يتعلق فقط بالفجوة الزمنية h .

من هنا يمكننا ان نستنتج أن استقرارية السلاسل الزمنية المتعددة يتطلب الاستقرارية الفردية لكل مركبة من مركباتها، لكن العكس عموما غير محقق وبذلك فإن الاستقرارية الفردية لكل مركبة هو شرط لازم وغير كاف لاستقرارية السلسلة.

مثال مضاد

لتكن X_{1t} و X_{2t} سلسلتين مستقرتين ولتكن السلسلة الثنائية المتغيرات:³

$$X_t = \begin{cases} X_{1t} = \varepsilon_{1t}, \\ X_{2t} = \varepsilon_{2t} + (-1)^t \varepsilon_{1t}, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

حيث كل من ε_{1t} و ε_{2t} عبارة عن ضجيج أبيض ضعيف ومستقلين عن بعضهما. لدينا:

$$E(X_{1t}) = 0$$

$$Cov(X_{1t}, X_{1,t+h}) = E[X_{1t}X_{1,t+h}] = E[\varepsilon_{1t}\varepsilon_{1,t+h}] = \gamma_{\varepsilon_1}(h)$$

إذن X_{1t} مستقرة.

ولدينا أيضا:

$$E(X_{2t}) = 0$$

³tiré des notes du Professeur Carbon, 2017

$$\begin{aligned} Cov(X_{2t}, X_{2,t+h}) &= E[X_{2t}X_{2,t+h}] \\ &= E[(\varepsilon_{2,t+h} + (-1)^{t+h}\varepsilon_{1,t+h})(\varepsilon_{2t} + (-1)^t\varepsilon_{1t})] \\ &= \gamma_{\varepsilon_2}(h) + (-1)^h\gamma_{\varepsilon_1}(h) \end{aligned}$$

بما أن ε_{2t} و ε_{1t} مستقلتان فإن X_{2t} هي سلسلة مستقرة.
لكن

$$\begin{aligned} E[(X_{t+h} - \mu)(X_t - \mu)'] &= E[X_{t+h}X_t'] \\ &= E \left[\begin{bmatrix} X_{1,t+h} \\ X_{2,t+h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1t} & X_{2t} \end{bmatrix} \right] \\ &= E \begin{bmatrix} X_{1,t+h}X_{1t} & X_{1,t+h}X_{2t} \\ X_{2,t+h}X_{1t} & X_{2,t+h}X_{2t} \end{bmatrix} \\ &= E \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t+h}\varepsilon_{1t} & \varepsilon_{1,t+h}(\varepsilon_{2t} + (-1)^t\varepsilon_{1t}) \\ (\varepsilon_{2,t+h} + (-1)^{t+h}\varepsilon_{1,t+h})\varepsilon_{1t} & (\varepsilon_{2,t+h} + (-1)^{t+h}\varepsilon_{1,t+h})(\varepsilon_{2t} + (-1)^t\varepsilon_{1t}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_{\varepsilon_1}(h) & (-1)^t\gamma_{\varepsilon_1}(h) \\ (-1)^{t+h}\gamma_{\varepsilon_1}(h) & \gamma_{\varepsilon_2}(h) + (-1)^h\gamma_{\varepsilon_1}(h) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

من الواضح أن $E[(X_{t+h} - \mu)(X_t - \mu)']$ يتعلق بالزمن t ومنه السلسلة ثنائية المتغيرات X_t غير مستقرة.

2.4.3 استقرارية النموذج VAR(p)

خاصية 1.3.3

• يكون النموذج $VAR(p)$ مستقرا إذا كان:

$$det\Phi(B) = 0, \quad |B| > 1$$

أي عندما تكون جذور كثير الحدود $det\Phi(B) = det(I - \phi_1B - \phi_2B^2 - \dots - \phi_pB^p)$ بالقيمة المطلقة أكبر من الواحد الصحيح.

• إذا كان:

$$\det\Phi(B) = 0, \quad |B| < 1$$

أي غير مستقرة، يمكننا تبديل جذور كثير الحدود المميز بمقلوبها وتعديل الضجيج الأبيض المرافق لها لتتحصل على الشكل القانوني للنموذج.

• إذا كان:

$$\exists B \in \mathbb{C}, \quad |B| = 1 : \det\Phi(B) = 0$$

فإن النموذج غير مستقر ولا يمكن كتابته على الشكل القانوني.

مثال

ليكن النموذج $VAR(1)$ ذو متغيرين:

$$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

لدينا كثير الحدود المميز للنموذج:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} B \right) = \begin{bmatrix} 1 - 0.2B & -0.7B \\ -0.3B & 1 - 0.4B \end{bmatrix} = 1 - 0.6B + 0.13B^2$$

كثير الحدود يقبل الجذرين $B = 1.3$ و $B = -5.91$ ومنه النموذج مستقر.

ملاحظة:

النموذج VAR دائما قابل للقلب.

3.4.3 تحديد رتبة التأخر

عند دراسة النموذج $VAR(p)$ يلزمنا تحديد رتبة التأخر p (عدد الفجوات) لهذا النموذج من أجل السلاسل المستقرة و ذلك للحصول على نتائج أكثر دقة و نستعملها للقيام باختبار سببية Granger و الوقوف على مدى صحة نموذج VAR في التقدير. ولتحديد درجة التأخر يمكننا الاستعانة بمعيارى Akaike و Schwartz بالإضافة إلى :

• معيار خطأ التنبؤ FPE

يعطى بالعلاقة الآتية :

$$FPE = \left(\frac{N + P - n}{n - P.n} \right)^n \cdot \det\Omega(p), \quad (4.3)$$

حيث:

Ω : مصفوفة التباين المقدر للبواقي,

n : عدد المتغيرات الداخلية,

N : عدد المشاهدات الكلية.

نحسب FPE للقيم المتتالية ل p حتى $K = \frac{N}{10}$ على الأكثر ثم نقوم بتحديد قيمة FPE الأصغر و نأخذ منها رتبة التأخر، أي:

$$FPE(P_0) = \min FPE(P).$$

• معيار المعلومات البايزية BIC

يعطى بالعلاقة التالية:

$$BIC(P) = \log(\det\Omega(P)) + \left(\frac{n^2 \cdot P \cdot \log N}{N}\right) \quad (5.3)$$

نأخذ رتبة التأخر بحيث:

$$BIC(P_0) = \min BIC(P)$$

4.4.3 تقدير معلمات النموذج باستعمال طريقة المربعات الصغرى

لدينا النموذج $Y = \beta X + \epsilon$ بحيث X مصفوفة ذات متغيرات مستقلة و Y شعاع وهي معطيات النموذج، و شعاع الأخطاء غير مشاهد. نستعمل هذه الطريقة من أجل إيجاد تقدير للشعاع β الذي يسمح بتصغير مجموع مربعات الانحراف $\hat{\epsilon}$ بين القيمة الحقيقية Y و القيمة المقدر \hat{Y} .

$$\hat{\epsilon} = Y - \hat{Y} = \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_1 \\ \hat{\epsilon}_2 \\ \vdots \\ \hat{\epsilon}_n \end{pmatrix}$$

$$\min \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2 = \min \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

$$\hat{\epsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i \quad i = 1 \dots n$$

$$\min \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \min (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y}) = \min \epsilon' \hat{\epsilon}$$

نضع:

$$\Gamma(Y, X, \hat{\beta}) = (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y}) = \hat{Y}'\hat{Y} - 2\hat{Y}'Y + Y'Y = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - 2\hat{\beta}'X'Y + Y'Y.$$

حيث: $\hat{Y} = X\hat{\beta}$. الهدف هنا هو

$$\min_{\hat{\beta}} \Gamma(Y, X, \hat{\beta})$$

إذا وجد $\hat{\beta}$ يجب أن يحقق الشرط الضروري :

$$\frac{\partial \Gamma(Y, X, \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}'} = 0 \Leftrightarrow 2(X'X)\hat{\beta} - 2X'Y = 0$$

نعوض \hat{Y}_i بما يساويها و نأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة إلى $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ و نساويها بالصفر ، فنحصل على : بما أن رتبة (X) هي p فإن $(X'X)$ هي مصفوفة مربعة $((p) \times (p))$ ربتها p فهي تقبل معكوس $(X'X)^{-1}$.

و منه:

$$2(X'X)\hat{\beta} - 2X'Y = 0 \Rightarrow (X'X)\hat{\beta} - X'Y = 0,$$

نضرب طرفي المعادلة ب $(X'X)^{-1}$ فنحصل على

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

و هو تقدير ل β . و من أجل أن نتأكد أن $\hat{\beta}$ الذي تحصلنا عليه هو قيمة صغرى ل $\sum \varepsilon_i^2$ ، يجي أن نتأكد من تحقق الشرط من الدرجة الثانية:

$$\frac{\partial^2 \sum \varepsilon_i^2}{\partial \hat{\beta}' \partial \hat{\beta}} = (X'X) > 0$$

و هي مصفوفة معرفة موجبة ، أي أن $\hat{\beta}$ وهي قيمة صغرى. المصفوفة $(X'X)$ تكتب على الشكل التالي:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{1i} & \sum X_{ki}X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{pmatrix}$$

المصفوفة $(X'Y)$ تكتب على الشكل التالي:

$$(X'Y) = \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \\ \cdots \\ \sum Y_i X_{ki} \end{pmatrix}$$

5.4.3 السببية

تعريف Granger للسببية

نقول عن المتغير العشوائي X أنه يسبب المتغير العشوائي Y إذا كانت هناك معلومات في ماضي X تفيد في التنبؤ بـ Y ، وهذه المعلومات غير موجودة في ماضي Y .⁴ لدينا هنا مسلمتان هما:

1- السببية لا تطبق إلا على متغيرات عشوائية.

2- الماضي والحاضر يمكن أن يسبب المستقبل والعكس غير ممكن.

فإذا رمزنا للمعلومات المحتواة في ماضي المتغير العشوائي X و Y على التوالي كما يأتي:

$$\begin{cases} \tilde{X}_t = X_t, X_{t-1}, \dots \\ \tilde{Y}_t = Y_t, Y_{t-1}, \dots \end{cases}$$

ورمزنا إلى خطأ التنبؤ بالاعتماد على المعلومات المتوفرة كما يلي:

$$\begin{cases} e(X/\tilde{X}_t) = X - E(X/\tilde{X}_t) \\ e(Y/\tilde{Y}_t) = Y - E(Y/\tilde{Y}_t) \end{cases}$$

يعتمد Granger على تباين خطأ التنبؤ $V[e]$ لدراسة السببية، فهو يرى أنه كلما كان هذا التباين ضعيفا كان المتغير مفسرا تفسيراً جيداً، وبناء على ذلك فهو يميز بين ثلاثة أنواع من السببية:

1- السببية وحيدة الاتجاه: نقول أن X يسبب Y إذا تحققت المتراجحة التالي:

$$V[e(Y_t/\tilde{Y}_{t-1}, \tilde{X}_{t-1})] < V[e(Y_t/\tilde{Y}_{t-1})]$$

وهذا يعني ان ماضي X يحسن من تنبؤ Y في اللحظة t ، وهو أفضل من الاعتماد فقط على ماضي Y .

2- السببية بالاتجاهين: وهي تعني ان X يسبب Y و Y يسبب X ، إذا تحققت مايلي:

$$V[e(Y_t/\tilde{Y}_{t-1}, \tilde{X}_{t-1})] < V[e(Y_t/\tilde{Y}_{t-1})]$$

$$V[e(X_t/\tilde{X}_{t-1}, \tilde{Y}_{t-1})] < V[e(X_t/\tilde{X}_{t-1})]$$

وهذا يعني أن ماضي X يحسن من تنبؤ Y وأن ماضي Y يحسن من تنبؤ X .

⁴GOURIEROUX C. et MONFORT A., "Séries temporelles et Modèles Dynamiques", Ed. Economica-Paris. pp. [442-446]

3- السببية الآتية: وهي تعني أن القيمة الحالية لـ X تسبب القيمة الحالية لـ Y ، إذا تحقق:

$$V[e(Y_t/\tilde{Y}_{t-1}, \tilde{X}_t)] < V[e(Y_t/\tilde{Y}_{t-1}, \tilde{X}_{t-1})]$$

4- عد وجود السببية: يعني أن X لا يسبب Y إذا تحققت المساواة التالية:

$$V[e(Y_t/\tilde{Y}_{t-1}, \tilde{X}_{t-1})] = V[e(Y_t/\tilde{Y}_{t-1})]$$

خطوات اختبار السببية Granger

نقوم باختبار علاقة السببية بين متغيرات النموذج كمايلي⁵

- تقدير المعادلة التالية باستعمال طريقة المربعات الصغرى:

$$Y_t = \Phi_1(B)Y_t + \Phi(B)X_t + \varepsilon_t,$$

حيث: $\Phi_1(B) = \sum_{i=1}^q \phi_{2i}B^i$ و $\Phi(B) = \sum_{i=1}^p \phi_{1i}B^i$ بعدها نقوم بحساب مجموع مربعات انحرافات القيم الفعلية عن المقدرة و نرمز لها: $SCR1$.

- تقدير المعادلة الآتية:

$$Y_t = \Phi_1(B)Y_t + \varepsilon_t$$

بعدها نقوم بحساب مجموع مربعات انحرافات القيم الفعلية عن المقدرة و نرمز لها: $SCR2$.

- حساب إحصائية الاختبار F_c من العلاقة:

$$\frac{(SCR2 - SCR1)/p}{SCR1/(M - N)}$$

حيث: $M = T - \max(p, q)$ و $N = p + q + 2$: عدد المشاهدات p : عدد التأخرات الزمنية للمتغيرات الداخلية، q : عدد التأخرات الزمنية للمتغيرات الخارجية،

- وضع فرضية العدم H_0 وهي: X_t لا تسبب Y_t ، بعدها تتم المقارنة بين F_c المحسوبة و F_α الجدولية و قبول فرضية العدم إذا كان: $F_c < F_\alpha(p, (M - N))$.

مثال

ليكن النموذج $VAR(p)$ بمتغيرين X_t و Y_t :

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^{(1)} & \phi_{12}^{(1)} \\ \phi_{21}^{(1)} & \phi_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \phi_{11}^{(p)} & \phi_{12}^{(p)} \\ \phi_{21}^{(p)} & \phi_{22}^{(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-p} \\ X_{t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

⁵عثمان نقار، منذر العواد، "استخدام نموذج VAR(p) في التنبؤ"، مجلة جامعة دمشق للعلوم الاقتصادية، 2012

لاختبار غياب سببية X لـ Y نختبر الفرضيات التالية:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \phi_{12}^{(1)} = \phi_{22}^{(1)} = \dots = \phi_{22}^{(p)} = 0 \\ \text{أو} \\ H_1 : \phi_{11}^{(1)} = \phi_{21}^{(1)} = \dots = \phi_{21}^{(p)} = 0 \end{array} \right.$$

الفرضية H_0 تعني أن X_t لا يسبب Y_t . الفرضية H_1 تعني أن Y_t لا يسبب X_t . إذا تم رفض الفرضيتين معاً، فالمتغيران يسببان بعضهما (سببية بالإنجهاين).

الفصل 4

نمذجة علاقة مرضى السكري و تصفية الكلى بوفاة الشخص

1.4 تمهيد

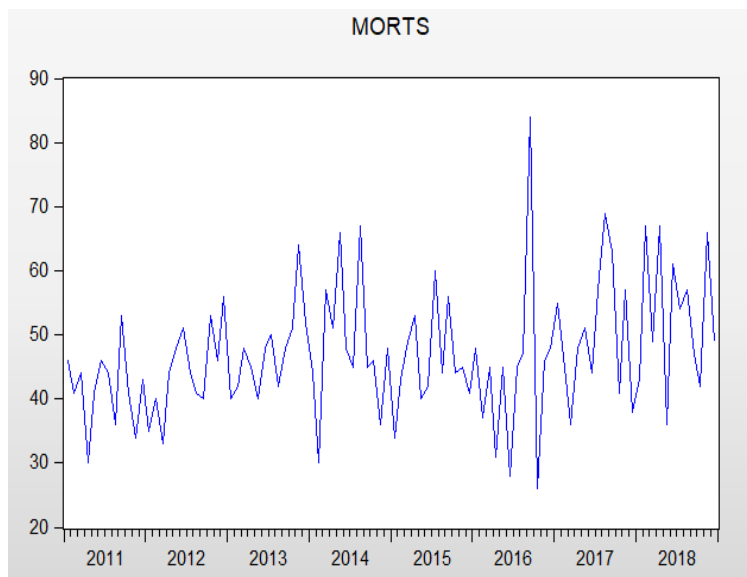
في هذه الدراسة سندرس سلوك السلاسل الزمنية الثلاثة التالية: عدد الوفيات، عدد المرضى المصابين بالسكري والذين يقومون بتصفية الكلى شهريا خلال ثمان سنوات ابتداء من الفتح جانفي 2011 إلى نهاية شهر ديسمبر 2018.

هذه المشاهدات الإحصائية مأخوذة من مستشفى محمد الصديق بن يحيى بولاية جيجل. الهدف من هذه الدراسة هو إمكانية إيجاد علاقة بين هذه السلاسل و هل يوجد تأثير بينها (واحدة تكون سبب للآخرى وتؤثر على السلسلتين الباقيتين) وهذا باستخدام نموذج الانحدار الذاتي المتعدد $VAR(p)$.

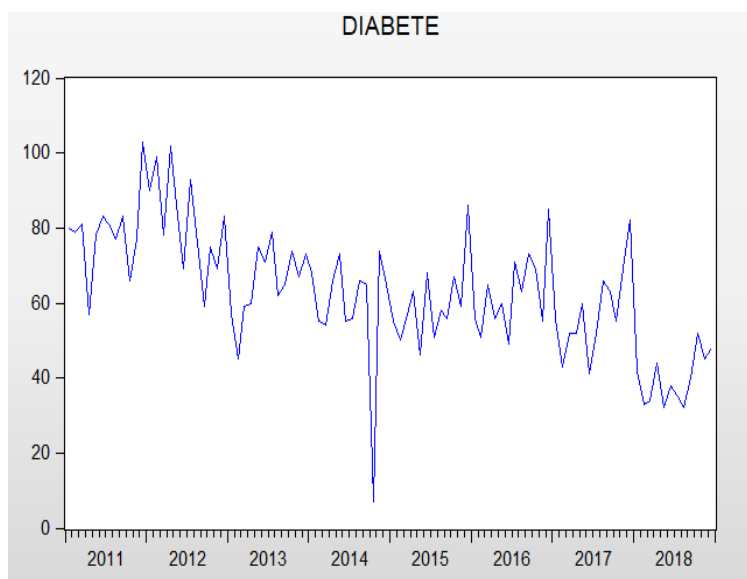
1.1.4 دراسة استقرارية السلاسل

عرض السلاسل الزمنية

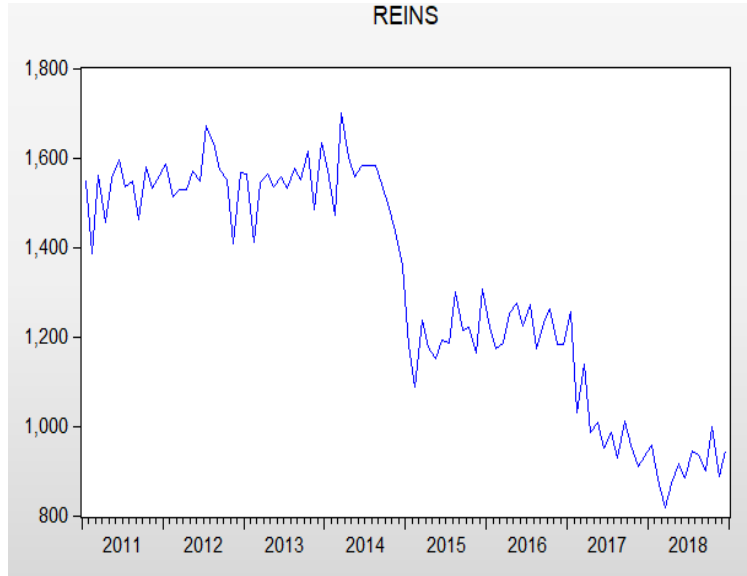
نبدأ أولا بالتعرف على الشكل البياني لكل من السلاسل الثلاث،



شكل 4.1: عدد الوفيات في مستشفى محمد الصديق بن يحيى - جيجل من عام 2011 إلى 2018



شكل 4.2: عدد المرضى بالسكري في مستشفى محمد الصديق بن يحيى - جيجل من عام 2011 إلى 2018



شكل 4.3: عدد مرضى تصفية الكلّي في مستشفى محمد الصديق بن يحيى-جيجل من عام 2011 إلى 2018

تظهر السلسلة *MORTS* أنها مستقرة من خلال التمثيل البياني و تمثيل دالتي الارتباط الذاتي البسيط و الجزئي .

أما سلسلتي *DIABETE* و *REINS* فتظهران عدم إستقرارية من خلال منحني دالتي الارتباط الذاتي البسيط و الجزئي (تباطؤ أسي في الأولى و معامل معنوي واحد خارج مجال الثقة في الثانية) ولكنها لا تبين هل يعود ذلك إلى وجود جذر الوحدة أم لا وللتحقق من ذلك نطبق اختبار جذر الوحدة التالي:

اختبار الاستقرار

بتطبيق اختبار *Dickey – Fuller* الموسع *ADF* على كل سلسلة نتحصل على النتائج التالية:

Null Hypothesis: <i>MORTS</i> has a unit root		
Exogenous: Constant, Linear Trend		
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=11)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-10.70050	0.0000
Test critical values:		
1% level	-4.057528	
5% level	-3.457808	
10% level	-3.154859	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

الجدول (2): اختبار *ADF* للسلسلة *MORTS*

نجد من الجدول (2) أن القيمة المطلقة لـ *ADF* المحسوبة (10.7) أكبر من القيم المطلقة لقيم *Mackinnon* الجدولية عند مستويات المعنوية المختلفة، إذا نرفض فرضية العدم أي عدم وجود جذر الوحدة في السلسلة *MORTS* وبالتالي السلسلة مستقرة.

Null Hypothesis: DIABETE has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=11)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.523970	0.1131
Test critical values:		
1% level	-3.502238	
5% level	-2.892879	
10% level	-2.583553	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

الجدول(3): اختبار ADF للسلسلة $DIABETE$

نجد من الجدول(3) أن الاحتمالية المحسوبة p_c أكبر من 0.05 وبالتالي لا نستطيع رفض فرضية العدم أي وجدو جذر الوحدة في السلسلة $DIABETE$ فهي غير مستقرة.

Null Hypothesis: REINS has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=11)

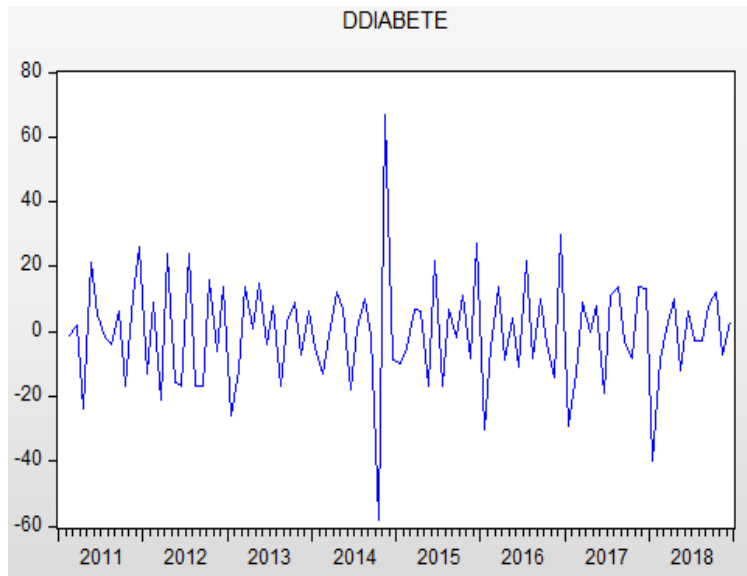
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.960910	0.1489
Test critical values:		
1% level	-4.058619	
5% level	-3.458326	
10% level	-3.155161	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

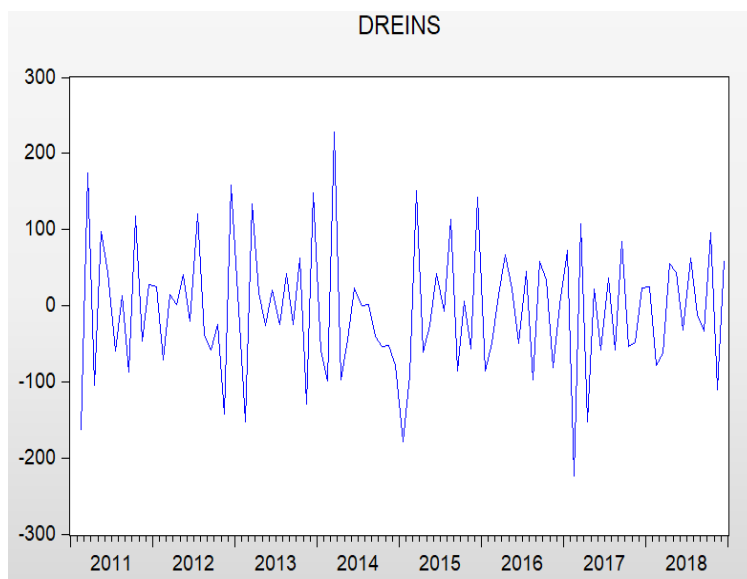
الجدول(4): اختبار ADF للسلسلة $REINS$

نجد من الجدول(4) أن الاحتمالية المحسوبة p_c أكبر من 0.05 وبالتالي لا نستطيع رفض فرضية العدم أي وجود جذر الوحدة في السلسلة $REINS$ فهي غير مستقرة.

للتخلص من جذر الوحدة نطبق معامل الفروق الأولى على كل من السلسلتين $DIABETE$ و $REINS$ فنحصل على سلسلتين مستقرتين كما يبين الشكلان



شكل 4.4: تمثيل سلسلة الفروق الاولى للسلسلة *DIABETE*



شكل 4.5: تمثيل سلسلة الفروق الأولى للسلسلة *REINS*

وبتطبيق اختبار جذر الوحدة مرة اخرى على سلاسل الفروق الأولى نجد أن النتائج تؤكد عدم وجود جذر الوحدة واستقرار هاتين السلسلتين.

2.1.4 تحديد رتبة التأخر الزمني

لتحديد رتبة التأخر الزمني نعتمد على المعايير التي عرضناها سابقا و التي تظهر في الجدول الآتي:

VAR Lag Order Selection Criteria
 Endogenous variables: DDIABETE DREINS MORTS
 Exogenous variables: C
 Date: 06/04/24 Time: 21:49
 Sample: 2011M01 2018M12
 Included observations: 87

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-1196.699	NA	1.91e+08	27.57928	27.66431	27.61352
1	-1174.479	42.39511	1.41e+08	27.27539	27.61552*	27.41235*
2	-1163.802	19.63747*	1.35e+08*	27.23682*	27.83204	27.47650
3	-1158.631	9.152725	1.48e+08	27.32485	28.17516	27.66724
4	-1156.584	3.482486	1.75e+08	27.48468	28.59009	27.92980
5	-1150.104	10.57629	1.86e+08	27.54262	28.90312	28.09045
6	-1145.798	6.731822	2.09e+08	27.65052	29.26611	28.30107
7	-1139.735	9.058355	2.26e+08	27.71806	29.58874	28.47132
8	-1134.520	7.434018	2.51e+08	27.80505	29.93083	28.66104

* indicates lag order selected by the criterion
 LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)
 FPE: Final prediction error
 AIC: Akaike information criterion
 SC: Schwarz information criterion
 HQ: Hannan-Quinn information criterion

الجدول(5): معايير تحديد رتبة التأخر الزمني

نلاحظ أن $p = 2$ هي التي تعطي أدنى قيمة للمعايير AIC ، FPE ما أن المعايير عند هذه الفجوة مرفقة بالعلامة * دلالة على مدى ملاءمتها.

3.1.4 إختبار السببية

Pairwise Granger Causality Tests
 Date: 06/05/24 Time: 11:52
 Sample: 2011M01 2018M12
 Lags: 2

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
DREINS does not Granger Cause DDIABETE	93	0.87342	0.4211
DDIABETE does not Granger Cause DREINS		0.85688	0.4280
MORTS does not Granger Cause DDIABETE	93	1.41493	0.2484
DDIABETE does not Granger Cause MORTS		0.38662	0.6805
MORTS does not Granger Cause DREINS	93	0.54524	0.5816
DREINS does not Granger Cause MORTS		0.13439	0.8744

الجدول(6): اختبار سببية Granger

يظهر الجدول(6) أن المتغير $D(REINS)$ لا يسبب $D(DIABETE)$ مع فجوتين زمنيتين عند مستوى المعنوية 0.05، إذ أننا نقبل فرضية العدم التي تقول: إن المتغير $D(REINS)$ لا يسبب $D(DIABETE)$.

كذلك المتغير $D(DIABETE)$ لا يسبب المتغير $D(REINS)$ عن مستوى المعنوية 0.05، إذ أننا لا نستطيع رفض فرضية العدم التي تقول: إن المتغير $D(DIABETE)$ لا يسبب المتغير $D(REINS)$. حيث يتضح من إختبار سببية *Granger* أن العلاقة بين المتغيرات ليست سببية لكن سنبرز العلاقة بينها أكثر من خلال صياغتها في شكل نموذج شعاع الانحدار الذاتي $VAR(2)$.

4.1.4 تقدير نموذج VAR

من خلال نتائج إختبار السببية و قيم معايير تحديد عدد الفجوات الزمنية نختار فجوتين زمنيتين عند تقدر VAR كما أشرنا سابقا و الجدول التالي يبين نتائج التقدير:

Vector Autoregression Estimates
Date: 06/05/24 Time: 12:26
Sample (adjusted): 2011M04 2018M12
Included observations: 93 after adjustments
Standard errors in () & t-statistics in []

	DDIABETE	DREINS	MORTS
DDIABETE(-1)	-0.602515 (0.10250) [-5.87807]	0.062014 (0.53084) [0.11682]	0.019950 (0.07477) [0.26683]
DDIABETE(-2)	-0.358665 (0.10127) [-3.54171]	-0.565974 (0.52445) [-1.07918]	-0.050621 (0.07387) [-0.68530]
DREINS(-1)	-0.019822 (0.02064) [-0.96029]	-0.526340 (0.10690) [-4.92371]	-0.006228 (0.01506) [-0.41366]
DREINS(-2)	0.005276 (0.02055) [0.25676]	-0.142443 (0.10642) [-1.33851]	0.003235 (0.01499) [0.21580]
MORTS(-1)	-0.017065 (0.14688) [-0.11619]	0.710927 (0.76065) [0.93463]	-0.009431 (0.10713) [-0.08803]
MORTS(-2)	-0.242409 (0.14987) [-1.61748]	-0.274734 (0.77613) [-0.35398]	0.173580 (0.10932) [1.58789]
C	11.36908 (10.0132) [1.13541]	-30.99738 (51.8561) [-0.59776]	39.35418 (7.30373) [5.38823]

R-squared	0.357528	0.263847	0.037374
Adj. R-squared	0.312705	0.212488	-0.029786
Sum sq. resid	16714.09	448268.5	8892.573
S.E. equation	13.94094	72.19712	10.16868
F-statistic	7.976333	5.137264	0.556494
Log likelihood	-373.3618	-526.3068	-344.0186
Akaike AIC	8.179823	11.46896	7.548787
Schwarz SC	8.370448	11.65959	7.739413
Mean dependent	-0.354839	-6.612903	47.04301
S.D. dependent	16.81591	81.35631	10.02054
<hr/>			
Determinant resid covariance (dof adj.)	97919674		
Determinant resid covariance	77431285		
Log likelihood	-1240.552		
Akaike information criterion	27.13015		
Schwarz criterion	27.70202		
Number of coefficients	21		

الجدول (7): المعاملات المقدرة للنموذج VAR

أما نموذج $VAR(2)$ المقدر فهو:

$$D(DIABETE)_t = -0.602515 * D(DIABETE(-1)) - 0.358665 * D(DIABETE(-2))$$

$$- 0.019822 * D(REINS(-1)) + 0.005276 * D(REINS(-2))$$

$$- 0.0177065 * MORTS(-1) - 0.242409 * MORTS(-2) + 11.36908$$

$$D(REINS)_t = 0.062014 * D(DIABETE(-1)) - 0.565974 * D(DIABETE(-2))$$

$$- 0.526340 * D(REINS(-1)) - 0.142443 * D(REINS(-2))$$

$$+ 0.710927 * MORTS(-1) - 0.274734 * MORTS(-2) - 30.99738$$

$$MORTS_t = 0.01995 * D(DIABETE(-1)) - 0.050621 * D(DIABETE(-2))$$

$$- 0.006228 * D(REINS(-1)) + 0.003235 * D(REINS(-2))$$

$$- 0.009431 * MORTS(-1) + 0.17358 * MORTS(-2) + 39.35418$$

أو يمكن كتابته على الشكل المصفوفي الآتي:

$$\begin{pmatrix} D(DIABETE)_t \\ D(REINS)_t \\ MORTS_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.602515 & -0.019822 & -0.0177065 \\ 0.062014 & -0.526340 & 0.710927 \\ 0.01995 & -0.006228 & -0.009431 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(DIABETE)_{t-1} \\ D(REINS)_{t-1} \\ MORTS_{t-1} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} -0.358665 & +0.005276 & -0.242409 \\ -0.565974 & -0.142443 & -0.274734 \\ -0.050621 & +0.003235 & 0.17358 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(DIABETE)_{t-2} \\ D(REINS)_{t-2} \\ MORTS_{t-2} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} 11.36908 \\ -30.99738 \\ +39.35418 \end{pmatrix}$$

5.1.4 دراسة البواقي

إختبار التوزيع الطبيعي للبواقي

VAR Residual Normality Tests
 Orthogonalization: Cholesky (Lutkepohl)
 Null Hypothesis: Residuals are multivariate normal
 Date: 06/05/24 Time: 15:56
 Sample: 2011M01 2018M12
 Included observations: 93

Component	Jarque-Bera	df	Prob.
1	9.413086	2	0.0090
2	2.968906	2	0.2266
3	18.51249	2	0.0001
Joint	30.89448	6	0.0000

الجدول (8): اختبار التوزيع الطبيعي للبواقي

يشير الاختبار إلى رفض فرضية العدم لكل من البواقي الخاصة بالمعادلات الثلاثة، أي عدم رفض فرضية التوزيع الطبيعي للبواقي عند مستوى المعنوية 0.05.

إختبار الارتباط الذاتي للبواقي



شكل 4.6: التمثيل البياني لدالتي الارتباط الذاتي البسيط و الجزئي للبواقي

نلاحظ أن أغلبية معاملات الارتباط الذاتي البسيط تقع داخل مجال الثقة و بالتالي المعاملات لا تختلف معنويا عن الصفر عند مستوي 0.05.

VAR Residual Portmanteau Tests for Autocorrelations
 Null Hypothesis: No residual autocorrelations up to lag h
 Date: 06/05/24 Time: 16:23
 Sample: 2011M01 2018M12
 Included observations: 93

Lags	Q-Stat	Prob.*	Adj Q-Stat	Prob.*	df
1	0.977643	---	0.988269	---	---
2	2.261588	---	2.300433	---	---
3	11.08312	0.2701	11.41602	0.2483	9
4	15.52382	0.6257	16.05630	0.5886	18
5	20.45335	0.8112	21.26592	0.7737	27
6	27.14216	0.8563	28.41602	0.8120	36
7	39.87718	0.6883	42.18761	0.5918	45
8	46.62207	0.7518	49.56731	0.6459	54
9	51.80013	0.8422	55.30016	0.7441	63
10	61.22669	0.8134	65.86246	0.6811	72
11	71.46320	0.7667	77.47216	0.5904	81
12	84.01020	0.6579	91.87797	0.4252	90

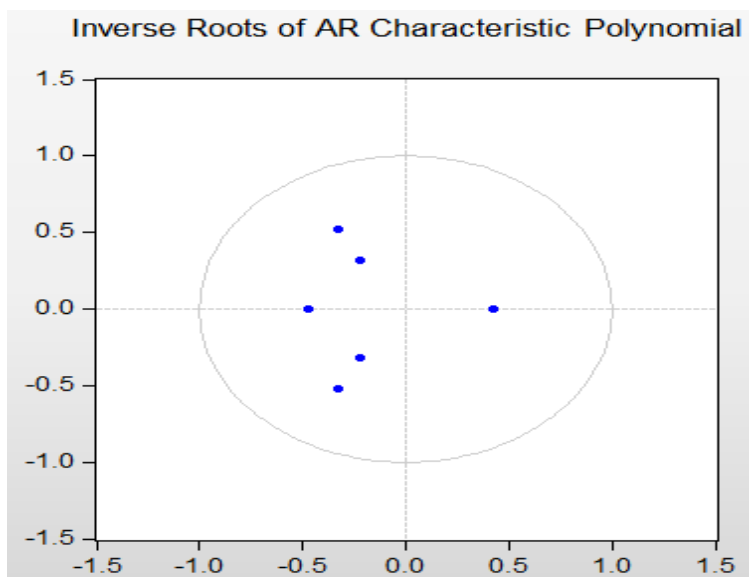
*Test is valid only for lags larger than the VAR lag order.
 df is degrees of freedom for (approximate) chi-square distribution

الجدول (9): اختبار الارتباط الذاتي للبقائي

6.1.4 اختبار جودة النموذج VAR(2)

يكون النموذج مستقرا إذا كانت جميع الجذور كثير الحدود المميز للنموذج Φ بالقيمة المطلقة أكبر من الواحد الصحيح.
 لدينا:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.602515 & -0.019822 & -0.0177065 \\ 0.062014 & -0.526340 & 0.710927 \\ 0.01995 & -0.006228 & -0.009431 \end{bmatrix} B - \begin{bmatrix} -0.358665 & +0.005276 & -0.242409 \\ -0.565974 & -0.142443 & -0.274734 \\ -0.050621 & +0.003235 & 0.17358 \end{bmatrix} B^2 \right) = 0$$



شكل 4.7: مقلوب جذور كثير الحدود المميز للنموذج

يتضح من خلال الشكل (8.4) أن قيم مقلوب الجذور تقع داخل دائرة الوحدة و أن جميع المعاملات أقل من الواحد مما يعني أن النموذج مستقر.

7.1.4 خلاصة

استطعنا نمذجة السلاسل الثلاث بنموذج الانحدار الذاتي المتعدد $VAR(2)$ حيث وجدنا أنه مستقر اعتماداً على مقلوب جذوره داخل دائرة الوحدة، وبواقية تمثل ضجة بيضاء لكنها لا تتبع التوزيع الطبيعي. قد تظهر لنا علاقة بين هذه السلاسل للوهلة الأولى لكن إحصائياً وجدنا أنه لا يوجد تأثير بينها بشكل مباشر لأنه عند وفاة الشخص قد يكون ذلك لعدة أسباب (متغيرات أخرى خارجية) مثل: الأزمة القلبية أو الأمراض الانتهازية.

الخاتمة

في هذه المذكرة تناولنا دراسة نمذجة السلاسل الزمنية المتعددة بالانحدار الذاتي $VAR(p)$ ، كما تطرقنا إلى النماذج الخطية وحيدة البعد $ARMA(p,q)$ لـ Box-Jenkins و مراحل النمذجة. استخدمنا هذه المنهجية لنمذجة العلاقة بين السلاسل الزمنية الثلاث: عدد مرضى السكري، عدد المرضى لتصفية الكلى وعدد الوفيات. بعدما طبقنا الفرق الأول و تحويل السلاسل إلى سلاسل مستقرة باستعمال اختبار Dickey-Fuller و دراسة السببية حسب Granger و تحديد رتبة النموذج باستخدام معايير الاختيار AIC و SC توصلنا إلى أن النموذج المناسب هو $VAR(2)$. تبقى هذه الطريقة نسبية، قد تكون طرق أخرى أفضل لا تشترط الاستقرار كمرشح Kalman أو نماذج Engle غير الخطية التي تتميز بالتطير و عدم ثبوت التباين و تسمى نماذج GARCH.

المراجع العلمية

قائمة المراجع بالعربية

- [1] سمير مصطفى الشعراوي، مقدمة في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية، مركز النشر العلمي جامعة الملك عبد العزيز جدة، 2005.
- [2] خليدة دهنوم، أساليب التنبؤ بالمبيعات دراسة حالة، كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير جامعة الحاج لخضر، باتنة، 2009.
- [3] د. معتوق محمد، "إحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2007.
- [4] قليل محمد صغير، محاضرات في تحليل السلاسل الزمنية، 2020.
- [5] عثمان نقار، منذر العواد، استخدام نموذج $VAR(p)$ في التنبؤ ودراسة العلاقة السببية بين إجمالي الناتج المحلي وإجمالي التكوين الرأسمالي في سوريا، مجلة جامعة دمشق للعلوم الاقتصادية والقانونية، (28)2، 337-360، 2012.
- [6] فاضل عباس الطائي، التنبؤ والتمهيد للسلاسل الزمنية، المجلة العراقية للعلوم الإحصائية، 1(10)، 293-308، 2010.
- [7] صالح تومي، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر، 1999.
- [8] المشهداني، محمود حسن والدليمي، طرائق الإحصاء الأرقام القياسية والسلاسل الزمنية، كلية الاقتصاد جامعة بغداد، 1985.
- [9] د. حاشي نوري، محاضرات في تحليل السلاسل الزمنية، 2020.
- [10] محمد عبد القادر عطية، الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية و التطبيق، الطبعة الثالثة الدار الجامعية، مصر 2004.

قائمة المراجع بالإنجليزية

- [1] Box G.E.P, Jenkins G.M, Time Series Analysis Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco 1976.
- [2] Dickey D: and Fuller W., Distribution of the estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, Journal of the American Statistical Association, 427-4231, 1979
- [3] Dickey D. and Fuller W., The likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root, Econometrics, 1057-1072, 1981.

قائمة المراجع بالفرنسية

- [1] Chukunyere, Amenan Christiane, Les modèles VAR(p), Québec, 2019.
- [2] Régis Bourbonnais, Michel Terraza, Analyse des Séries Temporelles en Economie, Fenixx, 1998.
- [3] Mezhoud Ibtissam, Les modèles véctoriels Autoregrésifs VAR(p), Univ Seddik Ben Yahia, Jijel, 2022.
- [4] Gourieroux C. et Monfort A., Séries temporelles et Modèles Dynamiques, Ed. Economica-Paris, 442-446.

قائمة الملاحق

الملحق رقم 1

السلاسل الزمنية لعدد مرضى السكري، عدد مرضى تصفية الكلى والوفيات شهريا خلال الفترة الممتدة من جانفي 2011 إلى ديسمبر 2018، مأخوذة من مستشفى محمد الصديق بن يحي بولاية جيجل.

	DIABETE	MORTS	REINS
2011M01	80	46	1547
2011M02	79	41	1385
2011M03	81	44	1560
2011M04	57	30	1456
2011M05	78	41	1553
2011M06	83	46	1596
2011M07	81	44	1536
2011M08	77	36	1549
2011M09	83	53	1462
2011M10	66	41	1579
2011M11	77	34	1533
2011M12	103	43	1561
2012M01	90	35	1585
2012M02	99	40	1514
2012M03	78	33	1528
2012M04	102	44	1529
2012M05	86	48	1569
2012M06	69	51	1549
2012M07	93	44	1670
2012M08	76	41	1632
2012M09	59	40	1574
2012M10	75	53	1550
2012M11	69	46	1408
2012M12	83	56	1567
2013M01	57	40	1562
2013M02	45	42	1410
2013M03	59	48	1544
2013M04	60	45	1562
2013M05	75	40	1536
2013M06	71	48	1557

2012M07	93	44	1670
2012M08	76	41	1632
2012M09	59	40	1574
2012M10	75	53	1550
2012M11	69	46	1408
2012M12	83	56	1567
2013M01	57	40	1562
2013M02	45	42	1410
2013M03	59	48	1544
2013M04	60	45	1562
2013M05	75	40	1536
2013M06	71	48	1557
2013M07	79	50	1533
2013M08	62	42	1575
2013M09	65	48	1550
2013M10	74	51	1613
2013M11	67	64	1484
2013M12	73	52	1632
2014M01	68	44	1572
2014M02	55	30	1473
2014M03	54	57	1701
2014M04	66	51	1603
2014M05	73	66	1558
2014M06	55	48	1581
2014M07	56	45	1581
2014M08	66	67	1582
2014M09	65	45	1542
2014M10	7	46	1488
2014M11	74	36	1436
2014M12	65	48	1357

2015M01	55	34	1179
2015M02	50	43	1087
2015M03	57	49	1238
2015M04	63	53	1177
2015M05	46	40	1151
2015M06	68	42	1193
2015M07	51	60	1186
2015M08	58	44	1300
2015M09	56	56	1215
2015M10	67	44	1221
2015M11	59	45	1164
2015M12	86	41	1306
2016M01	56	48	1221
2016M02	51	37	1172
2016M03	65	45	1186
2016M04	56	31	1253
2016M05	60	45	1275
2016M06	49	28	1225
2016M07	71	45	1270
2016M08	63	47	1172
2016M09	73	84	1230
2016M10	69	26	1263
2016M11	55	46	1181
2016M12	85	48	1183
2017M01	56	55	1255
2017M02	43	45	1031
2017M03	52	36	1138
2017M04	52	48	986
2017M05	60	51	1008
2017M06	41	44	950

2017M07	52	57	986
2017M08	66	69	928
2017M09	63	63	1012
2017M10	55	41	958
2017M11	69	57	910
2017M12	82	38	933
2018M01	42	43	958
2018M02	33	67	880
2018M03	34	49	818
2018M04	44	67	873
2018M05	32	36	916
2018M06	38	61	884
2018M07	35	54	946
2018M08	32	57	934
2018M09	40	47	901
2018M10	52	42	997
2018M11	45	66	886
2018M12	48	49	945

الملحق رقم 2

القيم الجدولية لـ Makinon لاختبار Dickey-Fuller

Time span	Critical level			
	0.10	0.05	0.025	0.01
Model A				
$T = 25$	-1.60	-1.95	-2.26	-2.66
$T = 50$	-1.61	-1.95	-2.25	-2.62
$T = 100$	-1.61	-1.95	-2.24	-2.60
$T = 250$	-1.62	-1.95	-2.23	-2.58
$T = 300$	-1.62	-1.95	-2.23	-2.58
$T = \infty$	-1.62	-1.95	-2.23	-2.58
Model B				
$T = 25$	-2.62	-3.00	-3.33	-3.75
$T = 50$	-2.60	-2.93	-3.22	-3.58
$T = 100$	-2.58	-2.89	-3.17	-3.51
$T = 250$	-2.57	-2.88	-3.14	-3.46
$T = 500$	-2.57	-2.87	-3.13	-3.44
$T = \infty$	-2.57	-2.86	-3.12	-3.43
Model C				
$T = 25$	-3.24	-3.60	-3.95	-4.38
$T = 50$	-3.18	-3.50	-3.80	-4.15
$T = 100$	-3.15	-3.45	-3.73	-4.04
$T = 250$	-3.13	-3.43	-3.69	-3.99
$T = 500$	-3.13	-3.42	-3.68	-3.98
$T = \infty$	-3.12	-3.41	-3.66	-3.96

الملحق رقم 3

القيم الجدولية لاختبار Perron and Philips

Pre-break fraction λ	Critical level			
	0.10	0.05	0.025	0.01
Model A				
$\lambda = 0.1$	-3.40	-3.68	-3.93	-4.30
$\lambda = 0.2$	-3.47	-3.77	-4.08	-4.39
$\lambda = 0.3$	-3.46	-3.76	-4.03	-4.39
$\lambda = 0.4$	-3.44	-3.72	-4.01	-4.34
$\lambda = 0.5$	-3.46	-3.76	-4.01	-4.32
$\lambda = 0.6$	-3.47	-3.76	-4.09	-4.45
$\lambda = 0.7$	-3.51	-3.80	-4.07	-4.42
$\lambda = 0.8$	-3.46	-3.75	-3.99	-4.33
$\lambda = 0.9$	-3.38	-3.69	-3.97	-4.27
Model B				
$\lambda = 0.1$	-3.36	-3.65	-3.94	-4.27
$\lambda = 0.2$	-3.49	-3.80	-4.08	-4.41
$\lambda = 0.3$	-3.58	-3.87	-4.17	-4.51
$\lambda = 0.4$	-3.66	-3.94	-4.20	-4.55
$\lambda = 0.5$	-3.68	-3.96	-4.26	-4.56
$\lambda = 0.6$	-3.66	-3.95	-4.20	-4.57
$\lambda = 0.7$	-3.57	-3.85	-4.13	-4.51
$\lambda = 0.8$	-3.50	-3.82	-4.07	-4.38
$\lambda = 0.9$	-3.35	-3.68	-3.96	-4.26
Model C				
$\lambda = 0.1$	-3.45	-3.75	-4.01	-4.38
$\lambda = 0.2$	-3.66	-3.99	-4.32	-4.65
$\lambda = 0.3$	-3.87	-4.17	-4.46	-4.78
$\lambda = 0.4$	-3.95	-4.22	-4.48	-4.81
$\lambda = 0.5$	-3.96	-4.24	-4.53	-4.90
$\lambda = 0.6$	-3.95	-4.24	-4.49	-4.88
$\lambda = 0.7$	-3.86	-4.18	-4.44	-4.75
$\lambda = 0.8$	-3.69	-4.04	-4.31	-4.70
$\lambda = 0.9$	-3.46	-3.80	-4.10	-4.41

الملحق رقم 4 :

التقدير

هو عملية استنتاج لمعلم مجتمع معين (كالوسط الحسابي أو الانحراف المعياري مثلا) من الاحصائية المناظرة و الخاصة بعينة مسحوبة من مجتمع .

طرق التقدير

استعملنا الطريقة الطبيعية (الحدسية) لاختيار مقدر ل θ و ذلك مثل اختيار متوسط العينة \bar{X} كمقدار ل μ فكتبنا $\hat{\mu} = \bar{X}$ قبل السحب (و هو مقدر منصف) ، $\mu \hat{=} \bar{x}$ بعد السحب .

و هناك الطريقة شبه الطبيعية عندما اعتبرنا $\hat{\sigma}^2 = S^2$ ($\sigma^2 \hat{=} s^2$)

وجدنا أن S^2 مقدر غير منصف ل σ^2 $E(\sigma^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$ فكتبنا

$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}S^2$ و هو مقدر منصف ل σ^2 .

نستعرض بعض الطرق الأكثر عملية ووضوحا و لنفرض أننا أمام مجموعة من وسطاء المجتمع $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ نريد تقديرها (أو إيجاد مقدرات لها).

طريقة العزوم

إن إيجاد مقدرات الوسطاء يعود إلى حل جملة من المعادلات التقديرية التالية :

$$E(X^r) \hat{=} \frac{1}{n} x_k^r, r = 1, 2, \dots, R$$

و معناها أن عزم العينة المسحوبة (من المرتبة r) يمثل تقديرا لعزم المجتمع من نفس المرتبة .

طريقة المعقولة العظمى

نسمي تابع المعقولة قانون احتمال الشعاع (X_1, X_2, \dots, X_n) الذي يمثل العينة المأخوذة من المجتمع الذي يحتوي الوسيط المجهول θ و هو

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k, \theta)$$

لأن $\prod X_t$ مقدر المعقولة العظمى ل θ هو $\hat{\theta}$ الذي يجعل $L(\theta)$ أعظم ما يمكن .
فعندما يكون L

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0 \text{ نحصل على } \hat{\theta} \text{ يجعل}$$

و عندما تكون هناك عدة وسطاء مجهولة نريد تقديرها مثل $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ يصبح تابع المعقولة هو :

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{k=1}^n f(x_k, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

فلتقدير θ_i مثلاً نكتب :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i^2} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, R$$

التقدير بمجالات الثقة

هذا امتداد للتقدير النقطي فعندما أعطينا التقدير \bar{x} للوسيط θ مثلاً استبعدنا أن يكون $\bar{x} = \theta$ فكتبنا $\bar{x} \hat{=} \theta$ و تكون المساواة مصحوبة بخطأ صغير أو كبير هو $|\theta - \bar{x}|$ أو عموماً $|\theta - t|$ حيث t هو تقدير الوسيط θ و التقدير بمجال الثقة بطرح التساؤلات التالية :

1- نريد أن نقيم الخطأ $|\theta - t|$.

2- نحاول أن نجد حداً أعلى لهذا الخطأ و ذلك باحتمال معين .

3- نحاول إنشاء مجال $[a_n, b_n]$ حيث a_n, b_n كميتان تكتبان بدلالة مقادير معرفة من العينة و من المجتمع ، و بحيث $\theta \in [a_n, b_n]$ باحتمال معين نسمي عندئذ $[a_n, b_n]$ بمجال ثقة للوسيط θ و نسمي الاحتمال بمعامل الثقة و نكتب معامل الثقة و نكتب معامل الثقة $P(\theta \in [a_n, b_n]) = (1 - \alpha)$

سبب تسمية الضجيج الأبيض بهذا الاسم

كلمة الضجيج يقصد بها كل الأصوات التي تجمع كافة الترددات التي يستطيع الإنسان سماعها والتي تقع في المجال الطيفي الترددي ما بين 20 إلى 20 ألف هرتز، أما كلمة أبيض فتعود لتشابهه مع الضوء الأبيض في سمة جمع ألوان الطيف.

الملخص

يعتمد هذا العمل على دراسة نظرية وتطبيقية لنماذج الإنحدار الذاتي المتعدد $VAR(p)$ لدراسة العلاقة بين عدة سلاسل زمنية.

حيث قدمنا النماذج الخطية وحيدة البعد $ARMA(p, q)$ ثم متعددة البعد، وبعد استخدام معايير الاختيار وتحديد رتبة التأخر الزمني وجدنا أن النموذج المناسب هو $VAR(2)$.

الكلمات المفتاحية

السلاسل الزمنية، الاستقرار، النمذجة، التشخيص، السببية، نموذج $VAR(p)$.

abstract

This work is based on the theoretical and practical study of multivariate time series modeling using the vector autoregressive model $VAR(p)$ to specify the relationship among several chronological variables.

We have presented the univariate linear models then the multivariate linear model, after we have provided models diagnosis, the numbers of lags, we came to conclude that the most accurate model is $VAR(2)$.

Keywords

Time series, stationarity, modeling, causality, diagnosis, $VAR(p)$ model.

résumé

Ce travail dépend de l'étude théorique et pratique des séries temporelles multivariées à l'aide du modèle vectoriel autoregressif $VAR(p)$. Pour déterminer la relation entre plusieurs variables chronologiques. Nous avons présenté les modèles linéaires univariés et ensuite les modèles linéaires multivariés. Après le diagnostic, la détermination du nombre de retard nous avons trouvé le modèle adéquat qui convient à notre étude, le modèle $VAR(2)$.

Mots clés

Séries temporelles, stationnarité, modélisation, causalité, diagnostic, modèle $VAR(p)$.