الجمهـوريـــة الجزائـريـــة الديـمـقـراطيـــة الشـعـبـيـة

République Algérienne Démocratique et Populaire

التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientfiique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي سكيكدة

Ecole normale supérieure d'Enseignement Technologique de Skikda

قسم الرياضيات

Département de Mathématiques

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ تعليم متوسط-رياضيات-

تحت عنوان

نماذج من المعادلات التفاضلية في الحياة اليومية

من إعداد :

- مجبور أنفال
- بوزنزن وفاء
- جموعي لينة

الأستاذالمشرف :

- بن حيونة صالح

لجنة المناقشة

- خشمان حسام الدين — أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة — رئيسا
- بوزيد منصوري — أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة — مناقشا
- بن تيمامة وئام — أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة سكيكدة — مناقشا

السنة الجامعية: 2025-2024

ملخص

يتمحور محتوى هذه المذكرة حول أهمية المعادلات التفاضلية، بمختلف أنواعها و رتبها في الحياة اليومية. عرضنا نماذج لمعادلات تفاضلية عادية، معادلات تفاضلية جزئية، معادلات تفاضلية ستوكاستيكية وأخرى تكاملية تفاضلية. كما حاولنا أن نغطي أكبر قدر من ميادين استعمال هذه المعادلات، حيث قدمنا نماذج في المجال الصحي والبيئي، الأقتصاد و المالية ونماذج أخرى لمجالات متنوعة. لكل نموذج ارفقنا حلا للمعادلة التفاضلية وعرضنا طريقة حلها.

الكلمات المفتاحية: المعادلة التفاضلية الجزئية، المعادلة التفاضلية العادية، محولة لابلاس، طريقة فصل المتغيرات، المعادلات التفاضلية العشوائية.

شهادة تعليم أستاذ متوسط رياضيات: بعض نماذج المعادلات التفاضلية في الحياة اليومية

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي سكيكدة
ENSET-Skikda
قسم الرياضيات والإعلام الآلي

شكر وعرفان

الحمد لله و الصلاة و السلام على رسول الله .

الحمد لله على عونه أن وفقنا لإنجاز هذا العمل.

كل عبارات الشكر و التقدير إلى كل أساتذة و طاقم إدارة المدرسة على كل ما بذلوه في سبيل توفير كل الظروف لأجل ضمان تكوين أفضل لنا خلال فترة تمدرسنا لمدة السنوات الأربع التي قضيناها في أحضان المدرسة. الشكر موصول إلى الأستاذ بن حيونة صالح على مابذله من جهد متواصل، إلى كل من الأساتذة خشمان حسام، منصوري بوزيد و الأستاذة بن تيمامة وئام على كل نصيحة و توجيه قدموه لنا.

الشكر إلى كل الذين ساعدونا و شجعونا من قريب و من بعيد .

الإهداء

الحمد لله على عونه أن وفقنا لإنجاز هذا العمل.

الشكر إلى الأستاذ بن حيونة صالح على مابذله من جهد في سبيل توجيهنا من خلال ملاحظاته ونصائحه الهادفة.

الشكر إلى كل أفراد عائلتي الذين قدموا لي كل ما أحتاجه من دعم مستمر خلال هذه المرحلة وطيلة المسار الدراسي.

الشكر إلى كل الذين ساعدوني و شجعوني وقدموا لي ولو اليسير.

الشكر لكم جميعا، وهذا العمل المتواضع مهدى لكم.

الطالبة: لينة جموعي

الاهـــداء

قال الله تعالى: (وَقُل اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالمُؤْمِنُون)

الحمد لله حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه كما ينبغي لجلال وجهك وعظيم سلطانك

الى من بلّغ الرسالة وأدّى الأمانة.. ونصح الأمة..الى نبي الرحمة ونور العالمين

سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم

الى من كلّله الله بالهيبة والوقار.. الى من علمني العطاء بدون انتظار.. الى من كافح وتعب وبذل جهد السنين من أجلنا.. الى من كان سندا لي في كل حين، الى من احمل اسمه بكل افتخار..

"أبي العزيز"

الى داعمتي الأولى والأبدية، قرّة عيني وأعز ما أملك، الى من كانت دعواتها الصادقة سرّ نجاحي، الى جنة قلبي وبسمة حياتي وسرّ الوجود.. كل لحظة نجاح أقدمها لك، وكل ما أنا عليه هو امتداد لوهجك الذي لا ينطفئ..

"أمي الغالية"

الى ضلعي الثابت الذي لا يميل، الى من رزقت بهم سندا في الحياة، الى من أعتز وأفتخر بوجودهم من حولي، لكم في دعائي مكان، وفي فخري مقام حفظكم الرحمان ووفقكم لكل خير..

"اخوتي: أسامة، عبد الجليل، صلاح الدين، إلياس، واخر العنقود عبد اللطيف"

الى "عائلتي الكبيرة" كلٌّ باسمه وكلٌّ بجليل قدره.. والى "الراحلين منكم" طبتم وطاب مقامكم وتبوأتم من الجنة مقعدا..

الى رفيقة العمر "آية" ذات القلب الطيب والنقي .. كل الحب والتقدير مني، فانت فصل جميل في روايتي لا ينتهي..

الى صديقتيّ وأختيّ والغاليتان على قلبي "جميلة" و"شيماء" اللتين كانتا سندا حقيقيا في لحظات التعب والفرح، امتنانا لا تسعه الكلمات ولا تكفيه العبارات، ومحبة لا توصف أضعها بين ايديكما اليوم وفاءً لكل لحظة عشناها معا وكنتما فيها بجانبي..

الى من جمعتني بهم اللحظات والمواقف الجميلة رفيقات الرحلة "أنفال"، "أمينة "، "آية، وصال"،" نهال، يسرى"، "هديل، هدى، نورين "كنتن حقا من خيرة الرفقة التي جمعتني بها الايام ..

الى زميلتيّ "لينة وأنفال" اللتان شاركاني في هذا العمل شكرا لكل لحظة تعب تقاسمناها ولكل فكرة بنيناها معا.

وفي الأخير ما عليَّ الا أن أتقدم بجزيــل الشكر الى **"الأستاذ بن حبونة"** على اشرافه على هذا العمل وعلى ما بذله من جهد في سبيل توجيهنا وأشكر كل من قدم لنا يد العون من أساتذة وزملاء.

الطالبة: بوزنزن وفاء

الإهداء

الحمد لله الذي أنار طريقي و كان لي خير العون، والذي بنعمته تتم الصالحات، والصلاة و السلام على الحبيب المصطفى و على آله وصحبه.

أهدي عملي هذا إلى التي بحنانها ارتويت و بدفئها احتميت، إلى الشمعة التي تحترق من أجل أن تضيئ لي الدرب <أمي الحبيبة>.

إلى والدي الغالي حفظه الله لي، سندي وعزوتي في الحياة و مصدر الأمان.

إلى كل أفراد عائلتي: أخواتي، أخي.

إلى جميع أساتذة المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي بسكيكدة، و خاصة الأستاذ الفاضل بن حيونة صالح، الذي قدم لنا توجيهات قيمة و نصائح ثمينة، شكرا أستاذنا.

الطالبة: مجبور أنفال

المحتويات

مقدمة

كثير من الظواهر الفيزيائية أو البيولوجية أو حتى بعض المسائل في مجالات أخرى كالإقتصاد و المالية والمرتبطة بالزمان أو المكان أو كلاهما، يمكن ترجمتها أو التعبير عنها برموز و علاقات رياضياتية، حيث يتسنى للمختص تحليلها ودراستها واستخلاص نتائج وحلول من خلال معالجة علمية نظرية أو تطبيقية، وبعبارة أخرى صياغة مثل هذه الظواهر في قالب رياضياتي أو نموذج رياضياتي، وهذا مايصطلح عليه بالنمذجة.

"جميع القوانين تخضع للتجربة، ولكن للتعبير عنها، هناك حاجة إلى لغة خاصة، فاللغة العادية فقيرة جدًا، وغامضة جدًا أيضًا، للتعبير عن علاقات معقدة ودقيقة جدًا. وهذا هو السبب الأول الذي يجعل الفيزيائي غير قادر على تجاوز الرياضيات. إنها اللغة الوحيدة التي يمكنه التحدث بها." (بوينكاريه،1910).

أدت محاولة حل المشكلات الفيزيائية تدريجيًا إلى ظهور نماذج رياضياتية، أساسها معادلة تلعب فيها الدالة ومشتقاتها دورًا مهمًا. ومع ذلك، فإن التطور النظري لهذا الفرع الجديد من الرياضيات - المعادلات التفاضلية العادية - لها أصولها في عدد من المسائل الرياضياتية . نتج عن هذه المسائل وحلولها ظهور ميدان مستقل.

وفقا لبعض مؤرخي الرياضيات، فإن دراسة المعادلات التفاضلية بدأت في عام 1675، عندما كتب جوتفريد فيلهلم فون لايبنتز (Leibnitz) المعادلة:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}. \tag{1}$$

بهذه النتيجة فإن لايبنتز لم يحل معادلة تفاضلية فحسب، بل استحدث أداة مهمة هي إشارة التكامل. وتمة لنفس المسار، وضع نيوتن الأساس لتطوير الحساب التفاضلي و التكامل فكان ذلك سبيلا إلى إحداث قفزة نوعية أثرى بها مفاهيم وقواعد تطبيقات المعادلات التفاضلية.

ظهر بعد ذلك الإخوة برنولي وابن يوهان، الذين استطاعوا بفضل التفاضل و التكامل صياغة وحل العديد من المعادلات في الميكانيكا. مع هؤلاء كانت الطرق الأولية لحل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى معلومة و معروفة، [5, 6, 23, 2, 22, 35, 18, 31].

وكان لكل من ريكاتي، أيلر، لاكرانج، لابلاس وغيرهم من علماء الرياضيات الذين أبدعوا وطوروا نظرية المعادلات التفاضلية، في عصرهم بدأ مفهوم المعادلات التفاضلية الجزئية وكيفيات معالجتها بطرق علمية و أصبحت المعادلات التفاضلية أساسية لفهم الكثير من الظواهر الفيزيائية و المسائل الرياضياتية، وقد تطور هذا الفرع من الرياضيات وتوسع أكثر بفضل علماء اخرين أضافوا الكثير إلى هذا الميدان، نذكر منهم بيركوف، كوشي، ليابونوف، بيكار، بوينكاري و ريمان، ... وغيرهم.

نظرا للتطور الذي شهدته مختلف العلوم، ظهرت مفاهيم جديدة للمعادلات التفاضلية، كالمعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية والمعادلات التفاضلية العشوائية، حيث توفر المشتقات الكسرية وصفا دقيقا لكثير من الظواهر، مثل، الانتشار غير الطبيعي ، السوائل اللزجة و التحكم في الأنظمة ذات الذاكرة[33, 39, 8].

في بدايات القرن العشرين، ومع ادخال مفهوم الضوضاء العشوائية، ظهرت المعادلات التفاضلية العشوائية تزامنا مع الأعمال التي قام بها العالم براون أو مايطلق عليه اسم حركة براون. يستخدم هذا النوع من المعادلات في المسائل التي تخضع لتأثير الضوضاء أو التقلبات العشوائية، كما هو الحال في الأسواق المالية، في علم الأحياء، الاحصاء، وأنظمة التحكم وغيرها من الظواهر المماثلة التي نعيشها يوميا. و يمكن القول بأن هذا الميدان ما يزال حديثا، ويشهد تطورا ملفتا خصوصا مع دمج المفهومين معا، الرتب الكسرية وظاهرة العشوائية [41].

نوع اخر من المعادلات التفاضلية برز ولفت انتباه الكثير من الباحثين، وهو المعادلات التفاضلية ذات التأخير. وهي معادلات يعتمد فيها المشتق عند لحظة زمنية معينة على حل المعادلة في أوقات سابقة، و من خصائصها، الإحتفاظ بذاكرة النظام من خلال التأخيرات. يستخدم هذا النوع من المعادلات في علم الأحياء و وظائف الأعضاء، ديناميكيات السكان، دراسة انتشار الأمراض و الشبكات العصبية وغيرها من المجالات خاصة التي يكون فيها للذاكرة دور.

إن تطور دراسة المعادلات التفاضلية رافقه تطور الحلول و المعالجة، فاعتمد الكثير من الباحثين طرقا عددية حديثة وقد كان للحاسوب دورا هاما في تحسين الاداء و النتائج، لاسيما في تحليل و معالجة المسائل الصعبة والمعقدة.

تكتسي المعادلات التفاضلية أهمية بالغة في حياتنا اليومية، رغم أننا لا ندرك ذلك و لا نولي اهتماما كافيا، فنرى يوميا حركة الأشياء، كالكواكب و السيارات من حولنا، كما نشهدالتغيرات الجوية و البئية.

فكل هذه الظواهر و المشاهد إذا ما أسقطنا عليها ظل المعادلات التفاضلية بالمفهوم العلمي السليم، فهي تساعدنا في اتخاذ القرارات المناسبة فى شتى المجالات، الصحية، الإجتماعية والإقتصادية.

المعادلة التفاضلية هي لغة التغيير، فحيثما وجد تغير وجدت المعادلة لتصفه، فهي تحول الظواهر إلى نماذج والتنبؤات إلى حقيقة علمية. فإذا شئنا أن نفهم العالم من حولنا ونتخذ القرارات الصائبة، علينا أن نهتم ونغوص في عالم المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها.

إدراكا منا لأهمية المعادلات التفاضلية الكبرى في حياتنا اليومية وفي أثرها الأيجابي على مستقبلنا نبع اختيارنا لهذا الموضوع واتخذناه عنوانا لمذكرتنا.

يتألف محتوى هذه المذكرة من أربعة فصول، تناولنا في الأول منها، أهم الأدوات من تعاريف ونظريات التي رأيناها ضرورية لدراسة المعادلات التفاضلية وتحليلها. في الفصل الثاني عرضنا نماذج لمعادلات تفاضلية بأنواع مختلفة مع حلولها في المجال البيولوجي، الصحي و البيئي. الفصل الثالث شمل نماذج لمعادلات تفاضلية في ميدان الإقتصاد والمالية، وهي معادلات تفاضلية مختلفة الأنواع تصف ظواهر عدة في هذا المجال. في الفصل الرابع أدرجنا نماذج من مجالات مختلفة لوصف ظواهر متعددة باستعمال معادلات تفاضلية متمايزة النوع والرتبة.

باب 1

مفاهيم أولية

نستعرض في هذا الفصل جملة من التعاريف والأدوات الرياضياتية ذات الصلة بموضوع المذكرة والتي تعتبر كإجابات للعديد من الأسئلة التي تبدو غير واضحة في هذا المحتوى. [[33]،[39]].

1.1 المعادلات التفاضلية

نعلم سابقا أنه إذا كانت $y = f(x)$ دالة تفاضلية حيث x المتغير المستقل و y المتغير التابع فإنه يمكن حساب $\frac{dy}{dx}$ و هي هندسيا تمثل ميل المماس للمنحنى $y = f(x)$ و جبريا معدل تغير التابع f بالنسبة للمتغير x. أيضا يمكن حساب $\frac{d^2y}{dx^2}$ و كذلك يمكن حساب المشتقات الأعلى رتبة إن كان ذلك ممكنا.

تعريف 1.1.1 نسمي العلاقة بين المتغير التابع f ومشتقاته و المتغير المسقل x معادلة تفاضلية.

تعريف 2.1.1 حل المعادلة التفاضلية بشكل عام هو البحث عن المتغير التابع كدالة في المتغير المستقل بحيث يحقق و مشتقاته أطراف المعادلة التفاضلية المعطاة.

مثال 1.1.1 لدينا خزان مملوء بالماء ونريد معرفة معدل تغير حجم الماء في الخزان بمرور الوقت.

نرمز بـ V لحجم الماء في الخزان عند اللحظة t، و α معدل تسرب الماء (ثابت سلبي).
إن معدل تغير حجم الماء بالنسبة للزمن هو $\frac{dV}{dt}$ يساوي $-\alpha V$، أي

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha V$$

و هي معادلة تفاضلية حلها العام يعطى بـ

$$V(t) = Ke^{-\alpha t}.$$

مثال 2.1.1 نظام كتلة - نابض - مخمد
جسم مادي كتلته M متصلة بنابض له ثابت قوة K ومثبت من إحدى طرفيه، ينتج قوة مقاومة تتناسب مع سرعة الكتلة بثابت C.
باستخدام قانون نيوتن الثاني للحركة، يمكن صياغة المعادلة التفاضلية التي تصف حركة كتلة الجسم على النحو التالي:

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+C\frac{dx}{dt}+Kx=f(t),$$

حيث x يمثل إزاحة الكتلة عن وضع التوازن، و f القوة الخارجية المؤثرة على الجسم. حل هذه المعادلة مرتبط بقيم M،C،K و f، التي تحدد إشارة العبارة $\Delta = C^2 - 4KM$. فإذا كانت إشارة العبارة الواردة أعلاه موجبة، كان الحل العام على الشكل

$$x(t)=Ae^{\alpha t}+Be^{\beta t}.$$

α و β هما جذران حقيقيان متمايزان للعبارة Δ، في هذه الحالة تعود الجملة إلى وضع التوازن ببطء ودون تذبذب
في الحالة التي تنعدم فيها عبارة المميز، فإن الحل يكون ممثلا على الشكل

$$x(t)=(A+Bt)e^{rt}.$$

حيث r هو جذر مكررلعبارة المميز.
أما إذا كان المييز سالبا، فإن النظام يكون متذبذبا حول موضع التوازن قبل أن يستقر، ويكون الحل العام على الصورة

$$x(t)=e^{-\alpha t}[A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)]$$

حيث يمثل α معدل اضمحلال التذبذبات، و ω التردد.

مثال 3.1.1 المعادلة التفاضلية الموالية، هي معادلة من الدرجة الثالثة، تصف حركة جسم مادي كتلته M، مع مقاومة الهواء المتغيرة

$$M\frac{d^3x}{dt^3}+2K\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}=0,\ \ K>0.$$

حل هذه المعادلة يتطلب غالبا طرقا عددية أو تقريبية.

مثال 4.1.1 لدرسة انحناء قضيب مرن تحت تأثير قوة خارجية، نعتبر المعادلة

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{q(x)}{EI},$$

حيث، y انحناء القضيب، x المسافة على طول القضيب، $q(x)$ توزيع القوة الخارجية على القضيب، E معامل يونغ للمادة(مقياس المرونة) و I عزم المساحة الخاصة بالقضيب.

إذا ما اعتبرنا أن الطرف الثاني من المعادلة قيمة ثابتة، فإن حل هذه المعادلة هو كثيرحدود من الدرجة الرابعة.

2.1 تصنيف المعادلات التفاضلية

تصنف المعادلات التفاضلية بشكل عام اعتمادا على عدة معايير، من بينها:

- نوع المتغيرات

1. **المعادلات التفاضلية العادية**
المعادلة التفاضلية العادية هي علاقة تربط دالة ذات متغير واحد بمشتقاتها العادية و المتغير المستقل.
2. **المعادلات التفاضلية الجزئية**
و هي من أهم المعادلات التفاضلية التي تعطي تفسيرا معمقا لجملة من الظواهر الفيزيائية و الطبيعية، واختصارا نقول هي معادلة تحتوي على تابع يرتبط بعدة متغيرات مستقلة ومشتقاته الجزئية. من أهم هذه المعادلات، معادلة الحرارة، معادلة الأمواج و معادلة لابلاس.

- الخطية و غير الخطية
تصنف المعادلات التفاضلية بناء على خصائصها، ومن أهم هذه التصنيفات

1. المعادلات التفاضلية الخطية

تكون المعادلة التفاضلية خطية إذا كانت تحقق الشرطين التاليين:
• الخطية في التابع ومشتقاته: يجب أن تظهر الدالة ومشتقاتها في المعادلة بصورة خطية، أي أن تكون من الدرجة الأولى. هذا يعني أنه لا يجوز وجود قوى أو جذور أو دوال أخرى (مثل الجيب أو جيب التمام) للتابع أو مشتقاته.
• معاملات التابع ومشتقاته: يجب أن تكون معاملات التابع ومشتقاته إما ثوابت أو دوال في المتغير المستقل فقط.

2. المعادلات التفاضلية غير الخطية

تكون المعادلة التفاضلية غير خطية إذا لم تحقق أحد الشرطين السابقين أو كلاهما. هذا يعني أنه قد يظهر التابع أو مشتقاته بقوى غير الواحد أو داخل دوال أخرى.

- الرتبة
رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتق في المعادلة. أي أن أكبر عدد مرات اشتقاق الدالة في المعادلة هو الذي يحدد رتبتها.

- التجانس
مفهوم التجانس في المعادلات التفاضلية يحدد علاقة الحدود المختلفة فيها.

1. المعادلات التفاضلية المتجانسة
نقول عن معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى على الصورة $dy/dx = f(x, y)$ أنها متجانسة إذا كان بالإمكان كتابة الدالة $f(x, y)$ على الشكل $f(y/x)$، أي كدالة لنسبة $\frac{y}{x}$ فقط. بعبارة أخرى، إذا استبدلنا x بـ tx و y بـ ty حيث t ثابت غير صفري، فإن المعادلة لا تتغير.

وإذا ما تعلق الأمر بالمعادلات التفاضلية الخطية، نقول عن معادلة أنها متجانسة إذا كان الطرف الأيمن من المعادلة يساوي صفراً.

2. المعادلات التفاضلية غير المتجانسة
بشكل دقيق، نقول عن معادلة تفاضلية عاديةأنها غير متجانسة، إذا كانت تحتوي على حد ثابت ، أي حد لا يحتوي على الدالة أو أي من مشتقاتها أو إذا كانت الحدود التي تحتوي على الدالة أو مشتقاتها ليست من نفس الدرجة.

- معاملات المعادلة
معاملات المعادلة هي الدوال و الثوابت التي تضرب في تابع المعادلة ومشتقاته.

 1. المعادلات ذات المعاملات الثابتة
 لما تكون المعاملات مقادير سلمية لا تتعلق بالمتغير المستقل x.
 2. المعادلات ذات المعاملات غير الثابتة
 عندما تكون المعاملات دوال متغيرة، أي دوال مرتبطة بالمتغير x.

- المعادلات التفاضلية التكاملية

تعريف 1.2.1 المعادلة التفاضلية التكاملية هي معادلة يظهر فيها تابع مجهول g تحت رمز التكامل، وتحتوي على المشتق النوني $g^{(n)}$، حيث n عدد طبيعي.

تكتب المعادلة التفاضلية التكاملية في الحالة العامة على الشكل

$$g^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)g(t)dt,$$

حيث λ وسيط حقيقي، $K(x, t)$ تسمى نواة المعادلة التكاملية، $a(x)$, $b(x)$ و $f(x)$ دوال معطاة. تصنف المعادلات التفاضلية التكاملية إلى أنواع متمايزة وفقا لحدود التكامل و طبيعةالنواة $K(x, t)$. من بين أهم هذه المعادلات:

(i) معادلة فريدهولم (Fredholm) و تكتب على الشكل:

$$g^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x, t)g(t)dt.$$

(ii) معادلة فولتيرا (Volterra) و تكتب على الشكل:

$$g^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)g(t)dt.$$

(iii) معادلة فولتيرا-فريدهولم (Volterra-Fredholm) و تكتب على الشكل:

$$g^{(n)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)g(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)g(t)dt.$$

(iv) المعادلات التفاضلية التكاملية الشاذة و تسمى كذلك إن تحقق أحد الشرطين أو الإثنين معا:
- أحد طرفي التكامل أو كلاهما غير منته،
- النواة غير معرفة في جوار نقطة واحدة أو أكثر من مجال التكامل.

- المعادلات التفاضلية العشوائية

المعادلات التفاضلية التقليدية لا تستطيع وصف بعض الظواهر في مجال الاقتصاد و المالية مثلا كالتي تطبعها التقلبات العشوائية، هنا يأتي دور المعادلات التفاضلية العشوائية.

المعادلات التفاضلية العشوائية (بالإنجليزية - Stochastic Dffierential Equations) أو(SDEs) هي نوع من المعادلات التفاضلية التي يكون فيها واحد أو أكثر من الحدود عبارة عن عملية عشوائية (تصادفية)، مما يعني أن حل المعادلة هو أيضًا عملية عشوائية. ببساطة، هي معادلات تصف كيفية تغير نظام ما بمرور الزمن عندما يتأثر هذا التغير بعوامل عشوائية أو ضوضاء.

تُستخدم المعادلات التفاضلية العشوائية في عدد من المجالات، منها: نمذجة أسعار الأسهم، أسعار الفائدة، تقييم المشتقات المالية، وصف حركة الجسيمات في السوائل (الحركة البراونية)، وديناميكا الموائع، نمذجة انتشار الأمراض، نمو السكان، التحكم الآلي، ومعالجة الإشارات.

صيغتها العامة

$$dX(t) = \mu(X(t),t)dt + \sigma(X(t),t)dW(t),$$

حيث:
- $X(t)$: المتغير التابع عند الزمن t .
- $(X(t), t)$ دالة "الانجراف"، (drfit) وهي تصف الاتجاه العام لتغير X .
- $(X(t), t)$ دالة "التقلب"، (volatility) وهي تصف قوة التقلبات العشوائية.
- $dW(t)$ تمثل التغير في عملية وينر (الحركة البراونية)، وهي تمثل الضوضاء العشوائية.

- المعادلات التفاضلية ذات التأخير
و هي معادلات تعتمد على تجسيد الذاكرة أي فكرة وجود تأخير زمني في مشتقات الدالة، ويمكن التعبير عنها كمايلي:
لتكن $X(t)$ و f دالتين شعاعيتين تأخذان قيمهما في الفضاء $\mathbb{R}^n$، فالمعادلة التفاضلية ذات التأخير لها الصيغة التالية:

$$X'(t) = f(t, X(t), X(t-\tau), X(t-\eta), X(t-\gamma), \ldots),$$

حيث:
$\tau, \eta, \gamma, \ldots$ هي التأخيرات الزمنية.

3.1 فضاءات دراسة المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية تظهر في نماذج متنوعة، وبالتالي الفضاءات التي تُعرّف عليها تعتمد على نوع المعادلة التفاضلية والتطبيق أو الميدان الذي تُستخدم فيه. بشكل عام، يمكن تحديد بعض الفضاءات الهامة التي تُستخدم في دراسة المعادلات التفاضلية. للإطلاع على المزيد، انظر [15, 17, 21, 32, 36]

1.3.1 الفضاءات الإقليدية

تُعتبر الفضاءات الإقليدية مثل $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ أبسط أنواع الفضاءات التي تُعرّف عليها المعادلات التفاضلية. في هذه الفضاءات، تكون المتغيرات دوالًا لمتغير حقيقي واحد (في المعادلات التفاضلية العادية) أو لعدة متغيرات حقيقية (في المعادلات التفاضلية الجزئية).

تساعد فضاءات تابعية أخرى كفضاء هلبرت،الفضاء النظيمي والفضاء المتري في دراسة خواص حلول المعادلات التفاضلية، مثل وجود الحل ووحدانيته واستقراره، بالإضافة إلى الفضاءات المترية و الفضاءات الطبولوجية التي تعمم مفهوم التقارب والاستمرار وفي هذه الفضاءات تتم دراسة نظريات المعادلات التفاضلية بشكل أكثر تجريدا.
فيما سيأتي، سندرج بعض التعاريف والمفاهيم ونترك أخرى.

2.3.1 الفضاءات النظيمية

تعريف 1.3.1 (النظيم)
ليكن X فضاء شعاعي مزود بالحقل $\mathbb{K}$، نسمي النظيم كل تطبيق $N : X \longmapsto \mathbb{R}_+$ يحقق الخواص التالية :

$$\forall x \in \mathcal{X}; \quad N(x) = 0 \iff x = 0 \quad (1$$

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall \lambda \in \mathbb{K}; \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad (2$$

$$\forall x, y \in \mathbb{K}; \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \quad (3$$

من أجل كل $x \in \mathcal{X}$ العدد الحقيقي الموجب $N(x)$ يسمى نظيم x ونرمز له بالرمز $\|x\|_{\mathcal{X}}$
-الثنائية $(\mathcal{X}, \|.\|)$ تسمى فضاء شعاعي نظيمي .

مثال 1.3.1

1 ☜

$$\begin{aligned} |.| : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longrightarrow |x|. \end{aligned}$$

تعرف نظيم على $\mathbb{R}$ أي $(\mathbb{R}\ ,|.|)$ فضاء نظيمي .

2 ☜ في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^n$ نعرف النظم التالية :

- النظيم الاقليدي :

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_2 = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

- النظيم الجمعي :

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|.$$

حيث $x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$.
هذه النظم هي حالات خاصة من $\|.\|_p$.

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

3 ☜ النظيم الأعظمي :

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \max(|x_1|, ..., |x_n|).$$

فضاء بناخ

تعريف 2.3.1 ليكن $\mathcal{X}$ فضاء شعاعي مزود بالحقل $\mathbb{K}$، نقول عن $\mathcal{X}$ أنه فضاء بناخ إذا وفقط إذا كان فضاء نظيمي تام [1] .

[1] ⚠أي كل متتالية كوشية منه متقاربة فيه

العلاقة بين النظيم والمسافة

إذا كان E فضاء شعاعي مزود بنظيم $||.||$، فإنه يمكن تعريف المسافة d على E بالعلاقة:

$$d(x,y) = ||x-y||.$$

ملاحظة 1.3.1 بهذه العلاقة يمكن التحقق من أن كل خواص المسافة محققة، وعليه يمكن القول أن النظيم يستخدم لتعريف المسافة.

تعريف 3.3.1 إذا كانت كل متتالية كوشي في أي فضاء متري هي متتالية متقاربة، نقول عنه أنه فضاء متري تام.

معايير التراص

لتكن M مجموعة غير خالية من فضاء متري (X,d).

تعريف 4.3.1 التغطية المفتوحة
نسمي تغطية مفتوحة للمجوعة M، كل اتحاد للمفتوحات V_i من الفضاء (X,d)، بحيث $M \subset \bigcup_{i\in I} V_i$.

تعريف 5.3.1 المجموعة المتراصة
نقول عن المجوعة $M \subset X$، أنها متراصة إذا وفقط إذا كان من أجل كل تغطية مفتوحة لـ M من الفضاء (X,d)، بحيث $M \subset \bigcup_{i\in I} V_i$، توجد مجموعة جزئية منتهية J، بحيث $M \subset \bigcup_{i\in j} V_i$.

تعريف 6.3.1 المجموعة المتراصة نسبيا
نقول عن المجموعة $M \subset X$، أنها متراصة نسبيا من فضاء باناخ X،إذا كانت الملاصقة $\bar{M}$ هي جزء متراص من X.

النظرية الموالية، وهي نظرية اسكولي أرزيلا، وتحدد هذه النظرية شروط التراص النسبي لمجموعة من الدوال المستمرة. بمعنى اخر تمكننا هذه النظرية من اختيار متتالية جزئية متقاربة من الدوال المستمرة وفق شروط معينة.

نظرية 1.3.1 (أسكولي أرزيلا)
ليكن X فضاء باناخ، M مجموعة جزئية من الدوال المستمرة على X. فإن M تكون متراصة نسبيا إذا تحقق الشرطان التاليان:

1. الحد المنتظم: أي أن كل دالة من M هي دالة محدودة.
2. الاستمرار المنتظم: $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : ||x-y|| < \delta \Rightarrow ||f(x)-f(y)|| < \epsilon$, من أجل كل دالة f من M.

ملاحظة 2.3.1 إن تعميم مفهوم الاستمرار المنتظم بالنسبة لدالة واحدة هو ما يسمى باللغة الفرنسية (*Equicontinuité*) و يطبق على عائلة من الدوال (الشرط الثاني من نظرية أسكولي ـ أرزيلا).

ليكن E_1، E_2 فضاءان بناخيان مزودان بالنظيمين $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ على الترتيب، ولتكن X مجموعة متراصة من E_1.

تعريف 7.3.1 نقول عن عائلة الدوال المستمرة ذات المشتقة الأولى F، المعرفة من X نحو E_2، أنها متساوية الإستمرار إذا كان

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left\|f(x) - f(y)\right\|_2 < \epsilon \text{ و } \left\|f'(x) - f'(y)\right\|_2 < \epsilon, \forall x, y \in X,$$

يحققان

$$\|x - y\|_1 < \delta.$$

و نقول عن F أنها عائلة محدودة بالتساوي، إذا وجد عدد ثابت M، بحيث

$$\left\|f(x)\right\|_2 < M, \quad \forall f \in F, \quad \forall x \in X.$$

تعريف 8.3.1 ليكن E فضاء بناخ، A مؤثر معرف على E في نفسه، نقول عن A أنه متراص إذا كان مستمرا و من أجل كل مجموعة C محدودة من E تكون المجموعة الجزئية $A(C)$ متراصة نسبيا.

تعريف 9.3.1 (التطبيق الليبشيتزي)
ليكن (X, d_X) و (Y, d_Y) فضاءين متريين . نقول أن التطبيق $T : X \to Y$ ليبشيتزيا إذا وجد عدد حقيقي موجب α، بحيث،

$$\forall x, y \in X, d_Y(T(x), T(y)) \leq \alpha . d_X(x, y)$$

تعريف 10.3.1 التطبيق المقلص
ليكن (X, d) فضاء متري، نقول أن $T : X \to X$ تطبيق مقلصا على X إذا وجد عدد حقيقي موجب $1 > \alpha$، بحيث،

$$\forall x, y \in X, d(Tx, Ty) \leq \alpha . d(x, y).$$

3.3.1 الفضاءات الهيلبرتية

تعريف 11.3.1 الجداء السلمي
ليكن $\mathcal{X}$ فضاء شعاعي المزود بالحقل $\mathbb{K}$، نعرف الجداء السلمي على $\mathcal{X}$ بأنه التطبيق :

$$\begin{aligned} \langle ., . \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longrightarrow \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

و الذي يحقق الخواص التالية:
لدينا $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ و $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$

1) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in \mathcal{X}; \langle x, x\rangle \geqslant 0$

2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

3) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

4) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

تعريف 12.3.1 الفضاء الشبه هلبرتي
إذا كان $\mathcal{X}$ فضاء شعاعي مزود بالجداء السلمي، نقول أنه فضاء شبه هلبرتي، و نرمز له بالثنائية $(\mathcal{X}, \langle .,.\rangle)$.

تعريف 13.3.1 فضاء هلبرت
فضاء هلبرت هو كل فضاء شبه هلبرتي تام ، يرمز له عادة بالرمز $\mathcal{H}$.

تسمح هذه المتطابقة بتمييز الفضاءات الشبه هلبرتية عن الفضاءات النظيمية.

نتيجة 1.3.1
كل فضاء نظيمي يحقق نظيمه متطابقة متوازي الأضلاع هو فضاء شبه هلبرتي.

4.1 طرق حل المعادلات التفاضلية

تختلف طرق حل المعادلات التفاضلية باختلاف أنواعها، حسب ما ذكرنا أعلاه في تصنيفاتها. فمنها ما هو خاص بالمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، كالتكامل المباشر، طريقة الفصل، طريقة معادلة برنولي، وطريقة المعادلات الخطية، طريقة رونج كيتا وغيرها. طرق أخرى يتم اعتمادها لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية أو أكثر، نذكر منها طريقة المعادلة المميزة، طريقة حل المعادلات غير المتجانسة، طريقة اختزال الرتبة، طريقة فريبينيوس، وهناك كيفيات أخرى، كاستعمال السلاسل الصحيحة و تحويلات فورييه ولابلاس، ناهيك عن وجود سبل أخرى مثل فصل المتغيرات، تحويل المتغيرات، طريقة العناصر المحدودة وغيرها من الطرق الأخرى، للحصول على التفاصيل الخاصة والشروحات الدقيقة لهذه الطرق طالع [37, 16]

إلا أن هذا لايعني بالمطلق أن لكل معادلة تفاضلية طريقة حل، هذا حفز الباحثين على تبني افكار أخرى تمكن من تجاوز هذا الإشكال و تساعد على دراسة خصائص حلول المعادلات التفاضليةدون معرفة شكل الحلول الظاهرية.

نظرية النقطة الصامدة تعتبر أداة قوية في التحليل الرياضي، لاسيمافي دراسة وجود ووحدانية حلول المعادلات التفاضلية والتكاملية و باقي الأصناف. ولهذه النظرية عدة سياقات.

نظريات النقطة الصامدة

قبل التطرق إلى الصيغ المختلفة لنظرية النقطة الصامدة، نورد بعض التعاريف و المفاهيم اللازمة المتعلقة بدراسة هذه النظريات.

تعريف 1.4.1 (النقطة الصامدة) ليكن X مجموعة غير خاليةو$T : X \to X$ تطبيق. نقول أن x نقطة صامدة بالنسبة لـ T إذا كان $Tx = x$، أي أن النقطة الصامدة هي نقطة لا تتغير صورتها بتأثير التطبيق.

نظرية 1.4.1 (نظرية النقطة الصامدة لباناخ)

ليكن (X, d) فضاء متري تام، و ليكن $T : X \to X$ تطبيقا مقلصا على X، فإن T يقبل نقطة صامدة وحيدة.

ملاحظة 1.4.1 تعتبر هذه النظرية من أهم نظريات النقطة الصامدة، وتستخدم بشكل واسع في حل المعادلات التفاضلية والتكاملية.

نظرية 2.4.1 (نظرية النقطة الصامدة لبروير)

ليكن K مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء $\mathbb{R}^n$، متراصة ومحدبة، و ليكن $T : K \to K$ تطبيقا مستمرا ، فإن T يقبل نقطة صامدة $x \in K$.

ملاحظة 2.4.1 هذه النظرية تستخدم في إثبات وجود حل المعادلات التفضلية.

النظرية الموالية تعتبر تعميما لنظرية بروير بالنسبة لدالة مستمرةعلى مجموعة متراصة و محدبة في فضاء باناخ.

نظرية 3.4.1 (نظرية النقطة الصامدة لشودار)

ليكن K مجموعة جزئية غير خالية من فضاء باناخ، متراصة ومحدبة، و ليكن $T : K \to K$ تطبيقا مستمرا ، فإن T يقبل نقطة صامدة $x \in K$.

نظرية 4.4.1 (نظرية النقطة الصامدة لكراسنوسلسكي)

ليكن K مجموعة جزئية غير خالية من فضاء باناخ $(X, ||.||)$، مغلقة ومحدبة، و ليكن $T, S : K \to X$ تطبيقان، بحيث:

- $\forall x, y \in K, \quad Tx + Sy \in K,$
- T، TK مستمران على مجموعة متراصة،
- S تطبيق مقلص .

فإنه، توجد نقطة $z \in K$ بحيث: $Tz + Sz = z$.

نظرية النقطة الصامدة لـ بيروف في الفضاءات المعممة

نظرية النقطة الصامدة لبيروف هي تعميم لنظرية النقطة الصامدة لباناخ، وتطبق في الفضاءات المعممة. أدرج بيروف تعديلا على تعريف التطبيق المقلص، حيث استبدل الثابت α بمصفوفة من الدوال.

تعريف 2.4.1 الفضاءات المعممة

الفضاءات المعممة هي تعميم لمفهوم الفضاء المتري، حيث يعوض تطبيق المسافة d بين نقطتين بتطبيق اخر يأخذ قيمه في $\mathbb{R}^n$. مما يسمح بتطبيق النظرية في سياقات أوسع. تعتبر هذه النظرية أداة قوية في غياب وجود و وحدانية حلول المعادلات التفاضلية و التكاملية.

تعريف 3.4.1 التطبيق المقلص في الفضاءات المعممة. [34]

ليكن (X, d_G) فضاء متري معمم، يسمى التطبيق $T : X \to X$، تطبيقا مقلصا إذاوجدت مصفوفة متقاربة نحو الصفر$A \in \mathbb{M}_{nxn}$، بحيث:

$$d_G(T(x), T(y)) \leq Ad_G(x, y), \forall x, y \in X.$$

نظرية 5.4.1 (نظرية بيروف في الفضاءات المعممة) [34]

ليكن (X, d_G) فضاء متري معمم تام، و $T : X \to X$، تطبيقا مقلصا مصفوفته $A \in \mathbb{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ ، قيمها الذاتية محصورة في المجال $(0, 1)$ ، فإن التطبيق T يقبل نقطة صامدة وحيدة $x^* \in X$، بحيث أن متتالية التقريبات المتتابعة $x_m = T^m(x_0), m \in \mathbb{N}$ تتقارب نحو x^* من أجل كل $x_0 \in X$ زيادة على ذلك فإن:

$$d_G(x^m, x^*) \leq A^m(I - A)^{-1} d_G(x_0, T(x_0)), \forall m \in \mathbb{N}.$$

محولة لابلاس

حل بعض أنواع المعادلات التفاضلية يتطلب منا البحث عن طرق أخرى للحل (عددية كانت أو تحليلية) نظرا لعدم استجابة الطرق التقليدية، إحدى هذه الأساليب طريقة تحويل لابلاس.

تعريف 4.4.1 يعرف تحويل لابلاس لدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ مستمرة بتقطع بـ:

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx = F(s)$$

نظرية 6.4.1 (الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس)
ليكن $a > 0$، و f دالة مستمرة بتقطع على المجال $[0, a]$ و كان:

$$|f(x)| \leq M e^{\alpha x}, \quad \forall x \geq x_0.$$

حيث: M, α, x_0 ثوابت، فإن الدالة f تقبل تحويل لابلاس.

تعريف 5.4.1 (تحويل لابلاس العكسي)
إذا كان $\mathcal{L}\{f(x)\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx = F(p)$، فإن $f(x)$ تسمى محولة لابلاس العكسية و نكتب:

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}(x),$$

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}(x) \Leftrightarrow \mathcal{L}\{f(x)\}(p) = F(p)$$

بالاعتماد على نظرية البواقي، نجد

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

خصائص محولة لابلاس

1. $\mathcal{L}\{(\alpha f+\beta g)(x)\}(p)=\alpha\mathcal{L}\{f(x)\}(p)+\mathcal{L}\{g(x)\}(p),$
2. $\mathcal{L}\{f^{'}(x)\}(p)=p\mathcal{L}\{f(x)\}(p)-f(0),$
3. $\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(x)\}(p)=p^{k+1}\mathcal{L}\{f(x)\}(p)-\sum_{i=0}^{k}p^{i}f^{(k-i)}(0),$
4. $\mathcal{L}\{f(bx)\}(p)=\frac{1}{b}\mathcal{L}\{f(x)\}(\frac{p}{b})=\frac{1}{b}F(\frac{p}{b}),$
5. $\mathcal{L}\{f(x-a)\}(p)=e^{-ax}F(p).$

مسألة كوشي

تعريف 6.4.1 ليكن J و I مجالين مفتوحين من $\mathbb{R}$، و ليكن $f: I\times J\rightarrow\mathbb{R}$ تابعا حقيقيا، ولتكن (x_0,y_0) نقطة من $I\times J$، نسمي مسألة إيجاد تابع حقيقي g معرف وقابل للإشتقاق على مجال I و يحقق من أجل كل x من I المسألة

$$\begin{cases}\frac{dg(x)}{dx}=f\left(x,g(x)\right),\\ g(x_0)=y_0.\end{cases}\qquad(1.1)$$

بمسألة كوشي، و يسمى $g(x_0)=y_0$ بالشرط الإبتدائي.

باب 2

نماذج من تطبيقات المعادلات التفاضلية في المجال البيولوجي، الصحي و البيئي

1.2 نماذج من المعادلات في المجال البيولوجي و الصحي

نستعرض فيما سيأتي بعض النماذج الكلاسيكية و التي يتم استخدامها في دراسة النمو الديموغرافي. نماذج النمو أو التزايد تم استخدامها في جوانب عدة في الدراسات البيولوجية، من بين أهم النماذج في هذا المجال نذكر النموذج الأسي و النموذج اللوجيستي [13, 14]

2.2 النموذج الأسي (Malthus)

تمت صياغة هذا النموذج سنة 1798 [30]، لأجل دراسة تطور النمو الديموغرافي. لا حظ عالم الاقتصاد الانجليزي أن السكان يتزايدون بمعدل أسي مع مرور الوقت، في حين أن الموارد الغذائية تزداد خطيا أي بمعدل ثابت. يرتكز مبدأ النموذج على فرضية أن عدد السكان يتزايد بوتيرة تناسبية طردية قياسا بالتعداد السكاني الحالي. يعطى هذا على الشكل

$$\frac{dN}{dt} = rN, \tag{1.2}$$

حيث $N(t)$ هو التعداد عند اللحظة t، r هو معدل النمو.
للمعادلة (1.2) حل يعطى على الشكل

$$N(t) = N_0 e^{rt},$$

N_0 هو عدد السكان عند اللحظة $t = t_0$

يستخدم هذا النموذج في تقاطع الظواهر البيولوجية والصحية، مثل نمو الخلايا الورمية.

ففي هذه الحالة يمثل $N(t)$ عدد الخلايا الورمية الحية عند اللحظة الزمنية t، يمثل r سرعةالنمو التي عادة ما يفترض أن تكون ثابتة، وعدد الخلايا عند اللحظة الابتدائية يرمز له بـ N_0.
أما في حالة الاضمحلال الأشعاعي (حالة نظام يتناقص بمعدل يتناسب مع قيمته الحالية)، والذي يمذج كالتالي

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

حيث N يمثل عدد الأنوية المشعة المتبقية، λ هو ثابت الاضمحلال.

3.2 النموذج اللوجيستي (Verhulst)

هذا النموذج الممثل بمعادلة تفاضلية، وضعه عالم الرياضيات البلجيكي بيير فرانسوا فير هولست سنة 1838، خلال فترة فيرهولست، أثارت نظرية مالتوس حول النمو السكاني الأسي اهتمامًا كبيرًا. ومع ذلك، أشار فيرهولست إلى أن نمو السكان لا يمكن أن يكون لانهائيًا بسبب الحدود التي تفرضها الموارد الطبيعية. ولذلك سعى إلى تطوير نموذج أكثر واقعية يأخذ هذه القيود بعين الاعتبار [30].

وفي أوائل القرن العشرين أعاد العالمان لويل ريد و ريموند بيرل ابتكار النموذج و طبقاه على دراسة النمو السكاني، بعدها انتشر استعمال النموذج في مجالات أخرى، كعلم الأحياء، الاقتصاد والعلوم الاجتماعية وغيرها...
يعبر عن النموذج اللوجيستي بالمعادلة التفاضلية

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \tag{2.2}$$

حيث N الكمية المتغيرةالمرتبطة بالزمن، r معدل النمو و يرمز بـ K للقدرة الاستيعابية أو الحد الأقصى للنمو.

حل معادلة النموذج اللوجيستي يعطى بالشكل

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-N_0}{N_0}\right) e^{-rt}} \to K \text{ عندما } t \to \infty. \tag{3.2}$$

لحل المعادلة أعلاه، نستخدم طريقة فصل المتغيرات، أي نحول المعادلة على الشكل

$$\frac{dN}{N(1 - \frac{N}{K})} = rdt,$$

ثم نحلل الطرف الأيسر على شكل عوامل بسيطة، أي على الصورة

$$\frac{dN}{N(1-\frac{N}{K})} = \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}\right) dN.$$

4.2 نموذج تورنر للنمو

اقترح تورنر واخرون [20] هذا النموذج سنة 1976 والذي يعتبر نسخة معدلة من النموذج اللوجيستي، وقد تمت صياغته في شكل معادلة تفاضلية على النحو التالي:

$$\frac{dN}{dt} = rN^{1+\beta(1-\gamma)} \left[1 - \left(\frac{N}{K}\right)^{\beta}\right]^{\gamma}, \quad N(0) = N_0. \qquad (4.2)$$

حيث β و γ أعداد حقيقية موجبة و $\gamma < 1 + \frac{1}{\beta}$ بحل الجملة أعلاه، نجد

$$N(t) = \frac{K}{\left[1 + \left[(\gamma-1)\beta r K^{\beta(1-\gamma)} t + [\frac{K}{N_0} - 1]^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}\right]^{\frac{1}{\beta}}}. \qquad (5.2)$$

5.2 دراسة نموذج النمو العام

يمثل هذا النموذج حالة عامة، يمكن أن نستخلص منه مجموعة متنوعة من النماذج بما في ذلك الحالات الكلاسيكية [4].

نرمز بـ $x(t)$ للكتلة الحية أو التعداد في اللحظة الزمنية t. لنفرض أن $x(t)$ هو حل المعادلة التفاضلية الاتية:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma K^{n(p-1)} x^{1+n(p-1)} \left[1 - \left(\frac{x}{K}\right)^{n}\right]^{p}, \quad x(t_0) = x_0, \qquad (6.2)$$

حيث، x_0 يرمز لمقدار العينة عند اللحظة الزمنية t_0، و n ، p، k ، γ أعداد موجبة مع $p < 1 + \frac{1}{n}$.
و يمثل الوسيط K القدرة الستيعابية للنظام، وله هنا عدة تفسيرات مرتبطة اساسا ببقية الوسطاء.

توطئة 1.5.2 حل المعادلة (6.2) يعطى بالشكل

$$x(t) = \frac{K}{\left[1 + \left(\gamma n(p-1)(t-t_0) + ((\frac{K}{x_0})^n - 1)^{\frac{1}{1-p}}\right)^{\frac{1}{1-p}}\right]^{\frac{1}{n}}}. \qquad (7.2)$$

البرهان 1.5.2 بتكامل طرفي المعادلة (6.2)، نجد

$$\int x^{-1-n(1-p)}\left[1-\left(\frac{x}{K}\right)^{n}\right]^{-p}dx=\gamma K^{n(p-1)}t+C, \tag{8.2}$$

و C ثابت التكامل.
نضع

$$v=\left(\frac{x}{K}\right)^{n}-1,$$

إذن

$$dx=-\frac{K}{n}\left(\frac{1}{(v+1)^{\frac{-n-1}{n}}}\right),$$

و منه

$$\int x^{-1-n(1-p)}\left[1-\left(\frac{x}{K}\right)^{n}\right]^{-p}dx=-\frac{K^{-n(1-p)}}{n}\int v^{-p}dv=\frac{K^{-n(1-p)}}{n(p-1)}v^{-p+1}. \tag{9.2}$$

من (9.2) وباستخدامالتحويل العكسي، نحصل على

$$\int x^{-1-n(1-p)}\left[1-\left(\frac{x}{K}\right)^{n}\right]^{-p}dx=\frac{K^{-n(1-p)}}{n(p-1)}\left(\frac{K^{n}-x^{n}}{x^{n}}\right)^{-p+1}. \tag{10.2}$$

باستعمال الشرط الابتدائي $x(t_0=x_0)$ ينتج

$$C=\frac{K^{n(p-1)}}{n(p-1)}\left(\frac{K^{n}-x_0^{n}}{x_0^{n}}\right)^{1-p}-\gamma K^{n(p-1)}t_0.$$

بتعويض قيم كل من C و التكامل (10.2)، نجد

$$\frac{K^{n(p-1)}}{n(p-1)}\left[\left(\frac{K^{n}-x^{n}}{x^{n}}\right)^{1-p}-\left(\frac{K^{n}-x_0^{n}}{x_0^{n}}\right)^{1-p}\right]=\gamma K^{n(p-1)}(t-t_0).$$

و من ثم فإن

$$\left(\frac{K}{x}\right)^{n}=1+\left[\gamma n(p-1)(t-t_0)+\left((\frac{K}{x_0})^{n}-1\right)^{1-p}\right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

برفع الطرفين إلى الأس $\frac{1}{n}$ وبقلب الكسر نحصل على صيغة الحل.

6.2 نموذج لانتشار بعض الأمراض المعدية

المعادلة الرئيسية للنموذج صيغتها تكتب بالشكل

$$x(t) = \gamma x(t - \sigma(t)) + (1 - \gamma) \int_{t-\sigma(t)}^{t} f\left(s, x(s), x'(s)\right) ds, \tag{11.2}$$

حيث،

هي نسبة الإصابات في السكان في الوقت t : $x(t)$

هي المدة التي يظل فيها الفرد مصاباً بالعدوى : $\sigma(t)$

وسيط مستقل : γ

سرعة انتشار العدوى : $x'(t)$

هي نسبة الإصابات الجديدة في وحدة الزمن : $f\left(s, x(s), x'(s)\right)$

المعادلة (11.2) هي معادلة تكاملية تفاضلية معقدة ذات تأخير. يتطلب تحليلها تقنيات متقدمة من نظرية المعادلات التفاضلية والتكاملية. يعتمد وجود حلها، ووحدانيته، واستقراره، وخصائصه الأخرى بشكل حاسم على المعامل γ، ودالة التأخير σ، والدالة غير الخطية f [7].
تستخدم هذه المعادلة في عدة مجالات، من أهمها نمذجة انتشار الأمراض. يمكن أن يمثل التأخير فترة الحضانة أو الوقت اللازم للشخص ليصبح معدياً.

تعريف 1.6.2 نعرف $C^1(X, E)$ على أنه فضاء كل الدوال التي مشتقاتها ذات الرتبة الأولى مستمرة. نزود هذا الفضاء بالنظيم

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \left\|f'\right\|_\infty,$$

حيث

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|\{f(x)\}\|_2 .$$

لدراسة وجود حل المعادلة (11.2)،في الفضاء C^1 نحتاج إلى الشروط التالية

1. $f \in C\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, (0, +\infty)\right)$ و يوجد $\omega > 0$:

$$f(t + \omega, x, y) = f(t, x, y), \forall (t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

2. يوجد $a, b > 0$:

$$\left|f(t,u,v) - f(t',u',v')\right| \le a\left|t - t'\right| + b\left|u - u'\right|,$$

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, \ \ \forall u, u' \in \mathbb{R}^+, \ \ \forall v, v' \in \mathbb{R}^+.$$

3. $\sigma \in C^1(\mathbb{R})$ دورية ودورها ω و $\sigma(t) \le t, \ t \in [0, \omega].$

تعريف 2.6.2

$$\sigma_1 = \sup_{t\in[0,\omega]} \sigma(t), \quad \sigma_2 = \sup_{t\in[0,\omega]} \sigma'(t).$$

ملاحظة 1.6.2 تحت الشروط الواردة أعلاه، يمكن تطبيق نظرية النقطة الصامدة لكراسنوسالسكي لإثبات وجود و وحدانية حل المعادلة (11.2).

نظرية 1.6.2 إذا تحققت الشروط $1, 2$ و 3، و إذا كان

$$\max\left(\gamma + (1-\gamma)(\sigma_1 + \sigma_2 + 2)b, \gamma(1+\sigma_2)\right) < 1,$$

فإن، المعادلة (11.2) تقبل حلا موجبا دوريا وحيدا في $C^1(\mathbb{R})$.

البرهان 1.6.2 لحل المعادلة (11.2) ، نبحث عن النقطة الصامدة للمؤثرين التاليين

$$Sx(t) = \gamma x(t - \sigma(t)), \quad Tx(t) = (1-\gamma)\int_{t-\sigma(t)}^{t} f\left(s, x(s), x'(s)\right) ds.$$

المعرفين على الفضاء

$$E = \left\{x \in C^1(\mathbb{R}) : x(t+\omega) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}\right\}.$$

واضح أن $A = S + T$ هو مؤثر معرف بشكل جيد من E في نفسه. زيادة على ذلك فإن

$$\begin{aligned}(Ax)'(t) &= \gamma(1-\sigma'(t))x'(t-\sigma(t)) \\ &+ (1-\gamma)\left[f(t, x(t), x'(t)) - (1-\sigma'(t))f\left(t-\sigma(t), x(t-\sigma(t)), x'(t-\sigma(t))\right)\right].\end{aligned}$$

لمعرفة المزيد عن مراحل البرهان تصفح [7].

7.2 نماذج من المعادلات التفاضلية في المجال البيئي

تُعد المعادلات التفاضلية أداة فعالة ومناسبة لفهم وتحليل الظواهر البيئية المعقدة. حيث يمكن صياغة هذه العمليات في قوالب رياضياتية، تساعد في الحصول على أفكار ناجعة تبرز كيفية عمل النظم البيئية، وكيف تتأثر بالأنشطة البشرية، وكيف يمكن إدارتها بشكل أكثر فعالية.

تُستخدم المعادلات التفاضلية الجزئية لنمذجة كيفية انتشار الملوثات في الهواء والماء والتربة. تساعد هذه النماذج في فهم كيفية انتقال الملوثات وتفاعلها مع البيئة، وتقييم تأثيرها على النظم البيئية وصحة الإنسان.

8.2 وصف التلوث البحري

يمكن نمذجة ظاهرة التلوث البحري بواسطة أنواع مختلفة من المعادلات التفاضلية و ذلك بحسب اختلاف العوامل المراد أخذها في الحسبان مثل درجة الامتزاج و معدل التصريف. فيما سيأتي سنعرض نموذجا مبسطا لتجسيد هذا المفهوم.
لنعتبر مادة ملوثة لا تحلل بصورةطبيعية، ويتم تصريفها في البحر، فإنه يمكن نمذجة تطور تركيز هذه الظاهرة بمعادلة تفاضلية.

$$\frac{dC}{dt} = r - vC, \quad C(t=0) = C_0, \tag{12.2}$$

يمثل $C(t)$ تركيز المادة الملوثة في اللحظة الزمنية t ، r معدل تصريف الملوث، و يرمز لمعامل التبادل بين الماء و الوسط الخارجي بـ v.
المعادلة الرئيسية هي معادلة تفاضليةخطية من الرتبة الأولى بمعاملات ثابتة.
للبحث عن الحل العام، نحل المعادلة المتجانسة، ثم نبحث عن حل خاص لها،
حل المعادلة المتجانسة يعطى بالشكل

$$C(t) = C_0 e^{-vt}, \tag{13.2}$$

بما أن الحد r ثابت، نبحث عن خاص ثابت، في هذه الحالة يكون $\frac{dC}{dt} = 0$، وهو مايعطي حلا خاصا من الشكل

$$C_p(t) = \frac{r}{v}.$$

و عليه فإن عبارة الحل العام تعطى بالصيغة

$$C(t) = C_0 e^{-vt} + \frac{r}{v}. \tag{14.2}$$

9.2 دراسة نموذج لانتشار ملوث في التربة

المثال الحالي هو دراسة واقعية، أجريت سنة 2009، المكان المستهدف هو إحدى الخلجان بالولايات المتحدة الأمريكية. مساحة هذا الخليج 166434 كلم مربع، حيث يصب فيه أكثر من 150 نهر و واد. قبل سنوات السبعينات كان هذا الخليج مكانا للتنوع البيئي، مكان ملجأ لأنواع كثيرة من الأسماك، وغيرها من فواكه البحر. لكن سرعان ماتحول هذا المكان منطقة موت بحرية بسبب الملوثات الأرضية التي مصدرها المساحات الفلاحية المجاورة، أين كانت تستعمل مختلف أنواع المبيدات

و الأسمدة الكيميائية الزراعية[3].
في هذا النموذج تمت دراسة انتشار أحد الملوثات الذي يخترق الأرض، وانطلاقا من مصدر التلوث وصولا إلى الماء، حاول المختصون استخلاص المعادلة التفاضلية التي تمذج هذه الظاهرةالبئية.
بالإعتماد على قانون فيك (Fick) المعروف في الفيزياء، وهو عبارة عن قانون يمثل انتشار المواد عبر طبقة نفوذة، ومن خلاله يتم حساب تدفق الكتلة عبر الغشاء، كما يمثل أيضا الانتشار الذاتي لمادة في محلول أو خليط ما.
يعطى قانون فيك بالعلاقة

$$J = -D\frac{dc}{dx} + uc, \tag{15.2}$$

حيث، J هو تدفق الملوث، c تركيز الملوث المتعلق بعامل الزمن والمكان، D معامل الانتشار و u يمثل سرعة نفاذ الملوث.
من جهة أخرى، فإن معدل تغير التركيز الموافق لفارق التدفق بين x و $x + \Delta X$ يعطى بالعلاقة

$$\Delta x\frac{dc}{dt} = \Delta x\frac{dJ}{dt} \approx -\Delta x\frac{d}{dx}\left(-D\frac{dc}{dx} + uc\right).$$

بالقسمة على Δx نحصل على المعادلة التفاضلية

$$\frac{dc}{dt} + u\frac{dc}{dx} = D\frac{d^2c}{d^2x}. \tag{16.2}$$

تم اختيار الشروط الابتدائية، على أساس أن الوسط عند اللحظة الزمنية صفر غير ملوث أي أن $c(x,0) = 0$.
كما تم اعتبار أن التركيز عند بدء عملية الصب والتلامس مع التربة ثابت و يساوي $c(0,t) = c_0$.

نهتم الان بحل الجملة

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt} + u\frac{dc}{dx} = D\frac{d^2c}{d^2x}, \\ c(x,0) = 0, \\ c(0,t) = c_0. \end{cases} \tag{17.2}$$

لحل الجملة أعلاه، نستعمل محولة لابلاس. بتطبيق محولة لابلاس على طرفي المعادلة (17.2) بالنسبة للمتغير t، نجد

$$sC(x,s) - c(x,0) + u\frac{dC(x,s)}{dx} = D\frac{d^2C(x,s)}{d^2x}, \quad c(x,0) = 0.$$

C هي محولة لابلاس بالنسبة للتركيز c.

وعليه، فإنه يمكن كتابة المعادلة الأخيرة على الصورة

$$D\frac{d^2C(x,s)}{d^2x}-u\frac{dC(x,s)}{dx}-sC(x,s)=0,$$

و بعد حساب المعادلة المميزة، فإن الحل يعطى بالشكل

$$C(x,s)=A(s)e^{\lambda_1(s)x}+B(s)e^{\lambda_2(s)x},$$

بحيث:

$$\lambda_1(s)=\frac{u+\sqrt{u^2+4Ds}}{2D}>0$$

و

$$\lambda_2(s)=\frac{u-\sqrt{u^2+4Ds}}{2D}<0$$

هما جذري المعادلة المميزة $D\lambda^2-u\lambda-s=0$. باستعمال الشروط المرافقة، يمكن تحديد قيم المعاملات A و B.

عندما يؤول x إلى مالانهاية، فإننا نبتعد عن مصدرالتلوث، حينها يمكن أن نعتبر تركيزالتلوث معدوم، بعبارة أخرى

$$\lim_{x\to\infty}C(x,s)=0.$$

إذا كان $x\to\infty$،فإن $e^{\lambda_1(s)x}\to\infty$ وهذا يناقض الفرضية أعلاه، إلا إذا كان $A(s)=0$.
عند منبع التلوث،يكون $c(0,0)=c_0$

و بما أن

$$\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s},$$

فإن

$$C(0,s)=\mathcal{L}\left\{c(0,t)\right\}=\mathcal{L}\{c_0.1\}=\frac{c_0}{s}.$$

و لما كان $A(s)=0,$ فإنه، من العلاقة الأخيرة، نحصل على

$$C(0,s)=B(s)e^{\lambda_2(s).0}=B(s),$$

و منه

$$C(x,s)=\frac{c_0}{s}e^{\frac{u-\sqrt{u^2+4Ds}}{2D}x}. \qquad (18.2)$$

للحصول على الحل $c(x,t)$، نطبق محولة لابلاس العكسية، حيث

$$
\begin{aligned}
c(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{C(x,s)\right\} \qquad (19.2)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c_0}{s}e^{\frac{u-\sqrt{u^2+4Ds}}{2D}x}\right\}\\
&= \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{\frac{ux}{2D}}e^{\frac{-x}{\sqrt{D}}\sqrt{\frac{u^2}{4D}+s}}\right\}d\tau\\
&= e^{\frac{ux}{2D}}\int_0^t e^{\frac{-u^2}{4D}\tau}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{\frac{-x}{\sqrt{D}}\sqrt{s}}\right\}d\tau\\
&= e^{\frac{ux}{2D}}\int_0^t \frac{\frac{x}{\sqrt{D}}}{2\sqrt{\pi\tau^3}}e^{\frac{-x^2}{4D\tau}}e^{\frac{-u^2}{4D}\tau}d\tau\\
&= e^{\frac{ux}{2D}}\int_0^t \frac{x}{2\sqrt{D\pi\tau^3}}e^{\frac{-x^2}{4D\tau}-\frac{-u^2\tau}{4D}}d\tau. \qquad (20.2)
\end{aligned}
$$

بعد عدة مراحل من العمليات الحسابية، لاسيما تحويل المتغيرات، نحصل على

$$
c(x,t) = \frac{c_0}{2}\left[erfc\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{Dt}}\right)+e^{\frac{ux}{D}}erfc\left(\frac{x+ut}{2\sqrt{Dt}}\right)\right], \qquad (21.2)
$$

حيث:

$$
erfc(z) = \int_z^\infty e^{-t^2}dt.
$$

باب 3

نماذج من تطبيقات المعادلات التفاضلية في مجال الإقتصاد والمالية

المعادلات التفاضلية هي أدوات رياضياتية فعالة تستخدم لنمذجة الظواهر الديناميكية، أي الظواهر التي تتغير بمرور الزمن. وفي الاقتصاد، فإنها تتيح وصف وتحليل مجموعة متنوعة من العمليات، بدءًا من النمو الاقتصادي وحتى تطور الأسواق المالية. فيما يلي نظرة على بعض المعادلات التفاضلية واستخدامها في النماذج الاقتصادية و المالية.

تستخدم المعادلات التفاضلية العادية لنمذجة الظواهر مثل النمو الاقتصادي، والتغيرات في المخزونات، وتعديل الأسعار. • المعادلات التفاضلية الجزئية تستخدم لنمذجة ظواهر أكثر تعقيدا، مثل نشر المعلومات، وانتشار الأزمات المالية أو ديناميكيات السوق ذات البعد المكاني.

1.3 نمذجة نسب الفائدة واسعار المواد الأولية

المعادلة التفاضلية التي سنقترحها، هي معادلة تفاضلية عشوائية خطية، تستخدم في مجال الأسواق المالية لنمذجة معدلات الفائدة ، اسعار المواد الأولية و بعض المتغيرات الأخرى ذات الصلة [42].

$$dr(t) = v\,(\tau - r(t))\,dt + \sigma dW_t, \quad r(t=0) = r_0, \tag{1.3}$$

حيث، $r(t)$ يمثل متغير الربح عند اللحظة الزمنية t. سرعة العودة للمتوسط يرمز لها بـ v ، المتوسط على المدى البعيد ممثل بالرمز τ ، الانحراف المعياري يمثله الرمز σ، الحد dW_t يمثل المركبة العشوائية.
من بين الطرق التي تستعمل في حل المعادلة (1.3) طريقة معامل التكامل.
يمكن صياغة المعادلة الرئيسية على النحو التالي:

$$dr(t) + rvdt = v\tau dt + \sigma dW_t, \tag{2.3}$$

بضرب طرفي المعادلة (2.3) بالمقدار re^{vt}، ثم بالمكاملة من 0 إلى t، نجد

$$re^{vt} - r_0 = \tau(e^{vt} - 1) + \sigma \int_0^t e^{vs} dW_s.$$

وعليه، فإن عبارة الحل العام تكتب على الشكل

$$r(t) = r_0 e^{-vt} + \tau(1 - e^{-vt}) + \sigma \int_0^t e^{v(s-t)} dW_s. \tag{3.3}$$

2.3 نموذج ويلسون لتسيير المخازن

نموذج ويلسون هو نموذج يمكن صياغته في قالب معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية ويستخدم في تسيير المخازن بغية تحديد التحكم الأمثل في تحديد الطلب وتخفيض التكلفة [44].
المعادلة التفاضلية للنموذج:

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} = -\frac{DC_s}{2C_O}, \tag{4.3}$$

إذ يمثل $Q(t)$ كمية المخزون عند اللحظة t، يرمز D للطلب السنوي، فيما يمثل كل من C_s و C_o تكلفة تخزين الوحدة سنويا و تكلفة الطلب على الترتيب.
حل المعادلة (4.3) يعتمد على المعادلة المميزة المرافقة، والتي جذراها $\pm i\sqrt{\frac{DC_s}{2C_o}}$.
و بما أن جذري المعادلة المميزة هما جذران مركبان، فان الحل العام يكون من الشكل

$$Q(t) = A\cos\left(\frac{DC_s}{2C_O}t\right) + B\sin\left(\frac{DC_s}{2C_O}t\right), \tag{5.3}$$

بمعرفة الشروط الإبتدائية يتسنى تعيين الثابتين A و B، فإذا اعتبرنا أن كمية المخزون عند اللحظة الابتدائية هي Q_0 و سرعة تغير المخزون عند اللحظة الابتدائية هي $\frac{dQ_0}{dt}$، فيكون $Q_0 = A$ و $B = \frac{DC_s}{2C_O} = \frac{dQ_0}{dt}$.

3.3 نموذج الطلب والعرض

في هذا المثال نستعرض مبدأ العرض و الطلب في الإقتصاد، وهو مايمكن تمثيله بجملة معادلتين تفاضليتين خطيتين من الرتبة الأولى [25] .
نرمز بـ $P(t)$ للسعر، و نرمز بـ $S(t)$ للعرض، P_0 و S_0 يمثلان على التوالي P و S عند التوازن.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = I - k_1(S - S_0), \quad P(0) = P_0, \\ \frac{dS}{dt} = k_2(P - P_0), \quad S(0) = S_0. \end{cases} \tag{6.3}$$

حيث k_1 و k_2 ثابتين، و I يمثل التضخم الإقتصادي.
عندما يكون فائض في العرض $S > S_0$ فإن الأسعار تنخفض إلى بيع المنتج بشكل أفضل. يتناسب معدل انخفاض الأسعار مع زيادة العرض $S - S_0$. إذا كان I هو معدل التضخم للمنتج و المستهلك فإن معدل الزيادة يتقلب حول هذه القيمة. عندما تكون الأسعار أكثر انخفاضا من سعر التوازن P_0 للمنتج الذي يبيع منتجات S_0، يكون البدء في تحقيق ربح عادل و معقول، $P < P_0$، إذا كان الناس يشعرون بالرضا، ويطلبون المزيد من المنتجات وبالتالي يقل العرض. وكتقريب أولي، فإن معدل تغير العرض يتناسب مع الربح $P - P_0$.
حل الجملة (6.3) يعطى بالشكل

$$\begin{cases} P(t) = P_0 + \frac{I}{\sqrt{k_1 k_2}} \sin \sqrt{k_1 k_2} t, \\ S(t) = S_0 + \frac{I}{k_1} - \frac{I}{k_1} \cos \sqrt{k_1 k_2} t. \end{cases} \tag{7.3}$$

4.3 نموذج لوصف تغيرات ظاهرة البطالة

يسمح مثل هذا النموذج الذي سنعرضه بتقدير التطورات التي قد تحصل في سوق العمل من حاجة إلى اليد العاملة أو نسب البطالة في المجتمع، تحديد أفق سياسات التكوين والشغل وكذا تحليل العلاقة بين المورد البشري، الانتاجية و النمو الإقتصادي مع أخذ القرارات السياسية الملائمة [26].
النموذج الموالي لا يأخذ بعين الإعتبار كل العوامل المؤثرة على معدل البطالة. حيث أن التغير في معدل البطالة يمكن التعبير عنه بالفارق بين معدل خلق مناصب الشغل ومعدل فقدان مناصب شغل أخرى، وتعطى معادلته بالشكل

$$\frac{du}{dt} = s(1 - u) - fu, \tag{8.3}$$

حيث، $u(t)$ هو معدل البطالة عند اللحظة الزمنية t ، s يمثل معدل فقدان مناصب الشغل و f معدل خلق مناصب الشغل.
لحل المعادلة (8.3) نستعمل طريقة فصل المتغيرات، وبالتالي فإن منحنى معدل البطالة يعطى بالشكل

$$u(t) = \frac{s + e^{C_1 - t(f+s)}}{f + s}, \tag{9.3}$$

حيث، C_1 هو ثابت التكامل المتعلق بالشرط الابتدائي، أي متعلق بقيمة معدل البطالة عند اللحظة الزمنية صفر.
من خلال ملاحظة شكل الحل، نفهم أن نسبة البطالة تستقر في المنظور البعيد عند القيمة $\frac{s}{f+s}$ أي لما يؤول t إلى ∞.

عندما يكون $s > f$، أي أن فقدان المناصب أكبر من فتح مناصب جديدة، يكون عندئذ معدل توازن البطالة أكبر من نسبة 50% . أما إذا كان $s < f$ فإن معدل توازن البطالة يفوق النصف.

5.3 نموذج سولو- سوان للنمو الإقتصادي

نموذج سولو - سوان [27] هو نموذج كلاسيكي متجدد يصف كيفية تطور الاقتصاد بمرور الوقت، ويعتمد على افتراضات بسيطة تشمل ادراج عدة عوامل، كرأس المال، العمالة، الانتاج وحتى التكنولوجيا.
يمكن استخدام المعادلة التفاضلية لنموذج سولو - سوان لتحليل مجموعة متنوعة من المسائل المرتبطة بالنموالإقتصادي، كتأثير معدل الإدخار، الاستهلاك ومعدل نمو السكان وغيرها من العوامل ذات الصلة. مايعاب على هذا النموذج أنه لايأخذ في الحسبان بعض العوامل مثل التطور التكنولوجي، حيث يعتبره ثابتا، كما أنه يعتبر أن الإقتصاد مغلق مما يعني أنه لا توجد تجارة دولية، إلا أنه إذا ما أخذت مثل هذه العوامل بعين الاعتبار يكون النموذج أكثر تعقيدا.
معادلته التفاضلية الأساسية تعطى بالعلاقة

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - (\delta + n(t))k, \tag{10.3}$$

حيث:
u هو رأس المال لكل عامل
t الزمن.
s معدل الادخار
f(k) دالة الانتاج
δ معدل الاستهلاك
n(t) معدل نمو السكان
المعادلة (10.3)، هي معادلة غير خطية من نوع برنولي.
لإنتاج سلعة نحتاج إلى عمل L وإلى رأس مال K بعملية توصف بدالة الانتاج $Y(t) = F(K(t), L(t))$.
يمكن كتابة الناتج على النحو التالي:

$$Y = F(K, L) = LF(\frac{K}{L}, 1) = Lf(k),$$

حيث $k=\frac{K}{L}$، هو نسبة رأس المال إلى العمل، و $y=\frac{Y}{L}$ هو ناتج الفرد، والدالة $f(k)$ معرفة لتساوي $F(K,1)$.
دالة الانتاج المعبر عنها بشكل مكثف هي $y=f(k)$، علاوة على ذلك

$$f(0)=0, f(\infty)=\infty, f^{'}(0)=\infty, f^{'}(\infty)=0.$$

لنفرض الان أن عدد السكان الحالي L(0)=1 وأن جميع معدلات السكان $n(t)=\frac{L}{L'}$، بشرط أن تكون بين قيمتين حديتين من الأعلى و من الأسفل.
لنعتبر الان مسألة كوشي الاتية

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt}=sf(k)-(\delta+n(t))k, \\ k(0)=K_0. \end{cases} \qquad (11.3)$$

لهذه المسألة حل وحيد معرف على $]0,\infty[$، تصفح Birkov و rota لسنة 1978.

قضية 1.5.3 ليكن $k(t)$ هو حل المعادلة (11.3) مع $n(t)=M$ حيث M ثابت موجب. فإنه عندما يؤول t إلى ∞، فإن $k(t)$ يتقارب إلى الحالة المستقرة غير المعدومة.

البرهان 1.5.3 البرهان تصفح .[27]

لنفرض دالة انتاج كلاسيكية جديدة بصيغة كوب ـ دوغلاس، $Y(t)=K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha}$، بحيث $0<\alpha<1$، فإنه يكننا ايجاد حل ظاهري للمسألة (11.3).

نظرية 1.5.3 [27] ليكن $k(t)$ هو حل المعادلة (11.3) حيث $y=k^{\alpha}$، فإن

$$k(t)=e^{-\delta t}L(t)^{-1}\left[k_0^{1-\alpha}+(1-\alpha)s\int_0^t e^{(1-\alpha)\delta u}L(u)^{1-\alpha}du\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad (12.3)$$

البرهان 2.5.3 نضع

$$z=k^{1-\alpha}$$

نحصل على معادلة تفاضلية خطية في z من الشكل

$$z^{'}=(1-\alpha)s-(1-\alpha)\left(\delta+\frac{L^{'}(t)}{L(t)}\right)z,$$

والتي حلها يكون من الشكل

$$z(t)=e^{-\int_0^t(1-\alpha)\left(\delta+(\frac{L^{'}(u)}{L(u)})\right)du}\left(z_0+\int_0^t(1-\alpha)se^{\int_0^u(1-\alpha)\left(\delta+(\frac{L^{'}(v)}{L(v)})\right)dv}du\right).$$

و بما أن

$$\int_0^t \left(\delta + (\frac{L'(u)}{L(u)})\right) du = \delta t + \ln L(t),$$

فإن

$$z(t) = \left(e^{\delta t} L(t)\right)^{-(1-\alpha)} \left(z_0 + (1-\alpha)s \int_0^t e^{(1-\alpha)\delta u} L^{1-\alpha}(u) du\right).$$

بتعويض $z(t)$ بـ $k^{1-\alpha}(t)$، نجد

$$k(t) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) = \left(e^{\delta t} L(t)\right)^{-1} \left(k_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)s \int_0^t e^{(1-\alpha)\delta u} L^{1-\alpha}(u) du\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

6.3 نموذج كاليكي (Kalecki) لدراسة العلاقة بين تأخر الإنتاج والدورات الإقتصادية الداخلية

كاليكي هو أول اقتصادي يدرس العلاقة بين تأخر الإنتاج والدورات الإقتصادية الداخلية، وذلك من خلال دراسة نظام اقتصادي مغلق لفترة زمنية قصيرة. $A(t)$ هو إجمالي تراكم رأس المال، أي السلع غير المستهلكة. هناك فترة نضج θ لأي استثمار $I(t)$. عمليات التسليم $L(t)$ تساوي طلبات الاستثمار $I(t-\theta)$ عند اللحظة $t-\theta$.[24]

$$L(t) = I(t-\theta).$$

تظل أي طلبات تم وضعها خلال الفترة $(t-\theta, t)$ غير مكتملة، وتساوي $A(t)$ الذي هو متوسط طلبات الاستثمار خلال الفترة $(t-\theta, t)$:

$$A(t) = \frac{1}{\theta} \int_{t-\theta}^t I(\tau) d\tau.$$

إذا كان $K(t)$ هو رأس المال، و U هو الإستهلاك الفعلي له، فإن

$$\frac{dK}{dt} = L(t) - U = I(t-\theta) - U.$$

معدل التغير في الاستثمار، لأجل $m > 0, n > 0$ هو

$$\frac{dI}{dt} = m\frac{dA}{dt} - n\frac{dK}{dt} = \frac{m}{\theta}\left(I(t) - I(t-\theta)\right) - n\left(I(t-\theta) - U\right).$$

نعبر عن انحراف $I(t)$ عن الطلب الثابت لاستعادة المعدات الصناعية المستهلكة U بـ

$$J(t) = I(t) - U,$$

بتفاضل $j(t)$ نجد

$$\frac{dJ}{dt}=\frac{m}{\theta}\left(J(t)-J(t-\theta)\right)-n\left(J(t-\theta)\right),$$

بصورة أخرى

$$\theta\frac{dJ}{dt}+(n\theta+m)J(t-\theta)-mJ(t)=0. \tag{13.3}$$

خلال الفترة $t\in[-\theta,\theta]$ افترض كاليكي أن $J(t)=0$.
إحدى الطرق لحل المعادلة التفاضلية (13.3) مع التأخير هي افتراض حل من الشكل

$$J(t)=De^{\alpha t}, \alpha\in\mathbb{C},$$

حيث D و α يطلب تعيينهما.
بتعويض الحل الخاص في المعادلة (13.3) نجد

$$D(m+n\theta)e^{\alpha(t-\theta)}=Dme^{\alpha t}-D\alpha\theta e^{\alpha t}.$$

بقسمة طرفي المعادلة الأخيرة على $De^{\alpha t}$، نحصل على

$$(m+\theta n)e^{-\alpha\theta}=m-\alpha\theta.$$

بادخال تعديل بسيط، يمكن أن نكتب

$$e^{-m}(m+\theta n)e^{m-\alpha\theta}=m-\alpha\theta.$$

بوضع

$$z=m-\alpha\theta, \quad w=e^{-m}(m+\theta n).$$

نجد الان

$$we^{z}=z,$$

حيث z يمكن اعتباره عددا مركبا:

$$z=x+iy,$$

بالتعويض عن z في المعادلة $z=m-\alpha\theta$، يكون

$$\alpha=\frac{m-x}{\theta}-i\frac{y}{\theta}.$$

وعليه

$$x+iy=we^{x}(\cos w+i\sin w).$$

اختصارا، فإن

$$J(t)=e^{bt}\left[C_1\cos wt+C_2\sin wt\right],$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت. للإطلاع على تفاصيل أكثر للحل تصفح [24].

باب 4

نماذج من تطبيقات المعادلات التفاضلية في مجالات أخرى

1.4 نموذج تشكل السحب و الأمطار

للمعادلات التفاضلية بمختلف أنواعها دور كبير في نمذجة الظواهرالطبيعية، كحركة الرياح، التبخر، التكاثف ونزول الأمطار و غيرها. نأخذ النموذج المبسط لتكوين السحب وهطول الأمطار [38].

تعطى المعادلة الأساسية بالشكل:

$$\frac{dP}{dt} = D - KP, \quad P(t=0) = P_0. \tag{1.4}$$

حيث يمثل $\frac{dP}{dt}$ معدل تغير كمية الماء في السحابة مع مرور الزمن.
p: كمية الماء في السحابة بوحدة معينة.
يمثل الرمز D كميةالماء التي تضاف إلى السحابة في كل وحدة زمنية،(من التبخر،...).
K: معامل التساقط ويمثل سرعة نقصان الماء من السحابة .

المفهوم الفيزيائي للمعادلة (1.4) هو أن التغير في كمية الماء في السحابة $\frac{dP}{dt}$ يساوي الفرق بين كمية الماء الوافدة D والكمية الضائعة KP.
لحل هذه المعادلة نتبع الخطوات التالية:
- نعيد كتابة المعادلة بالشكل

$$\frac{dP}{dt} + KP = D \tag{2.4}$$

- حساب معامل التكامل:

$$\mu(t) = e^{Kt}.$$

بضرب طرفي المعادلة (1.4) بـ e^{Kt} ثم بالمكاملة،نحصل على

$$P(t)e^{Kt} = e^{Kt}\frac{D}{K} + C. \tag{3.4}$$

باستعمال الشرط الابتدائي P_0، نجد الحل العام الذي يكتب على الشكل

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{D}{K}\right)e^{-Kt} + \frac{D}{K}. \tag{4.4}$$

2.4 نمذجة معركة حربية

يصف هذا النموذج [12] التفاعل بين قوتين متصارعتين X و y، يمثل بالمعادلتين

$$\frac{dx}{dt} = ky - ax + g, \quad \frac{dy}{dt} = lx - by + h \tag{5.4}$$

حالات يمكن أن تحدث أثناء المعركة

1. الجيش يخسر جنوده نتيجة القتال مع العدو.
2. الجيش يلحق خسائر بالعدو تؤثر على الجيش الاخر.
3. يكتسب جنود نتيجة الدعم الخارجي.

حيث، يمثل x عدد قوات الجيش الأول،
y عدد قوات الجيش الثاني،
k معدل تأثير الجيش الاول على الثاني (يتناسب مع عدد جنود الجيش الثاني)،
a معدل الخسائر في قوة الجيش الأول، ويتناسب مع مع عدد جنوده.
l معدل تعزيز قوة الجيش الأول، معدل تأثير الجيش الثاني في قوة الجيش الأول يرمز لها بـ g،
b تمثل معدل الخسائر في الجيش الثاني ، h تمثل معدل التعزيزات للجيش الثاني .

a, b, k, g, h, l عبارة عن ثوابت موجبة.
حل النموذج (5.4) يستوجب منا إعادة كتابته في شكل مصفوفي، ومن ثم حساب القيم والاشعة الذاتية المرافقة له.

حل الجملتين السابقتين ينطوي على العديد من الحالات وتشوبه الكثير من التعقيدات، لذلك وللتبسيط نختار حل الجملة الموالية وهي تمثل حالة خاصة من الجملة (5.4)

$$\frac{dx}{dt} = ky, \quad \frac{dy}{dt} = lx \tag{6.4}$$

الحل الموافق لـ (6.4) يعطى بالشكل

$$y(t) = Ae^{\sqrt{kl}t} + Be^{-\sqrt{kl}t}, \quad x(t) = \sqrt{\frac{k}{l}}\left[Ae^{\sqrt{kl}t} - Be^{-\sqrt{kl}t}\right]. \tag{7.4}$$

يقترب كل من $x(t)$ و $y(t)$ من اللانهاية في حالة $A > 0$ وهو ما يعني أنها حالة حرب.

3.4 وصف حركة جسم مادي في الفضاء

نمذجة حركة سيارة أو طائرة في الفضاء[40]، تمثل بمعادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثالثة. تعتمد أساسا هذه العملية على قانون نيوتن الثاني

$$F = ma, \tag{8.4}$$

أي أن، مجموع القوى الخارجية يساوي الكتلة في التسارع a.
حيث أنه للحصول على هذه المعادلة، ندرج تغير تسارع الجسم المتحرك، وبالرجوع إلى قانون نيوتن الثاني نكتب:

$$F\left(t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)\right) = ma'(t), \tag{9.4}$$

F يمكن أن تشمل قوة دفع المحركات، القوة المقاومة في الفضاء، الثقل وقوى خارجية أخرى. ولإعطاء نموذج مبسط، في فضاء أحادي البعد مع قوة مقاومة متناسبة مع سرعة الجسم وقوة الدفع التي تعتبر ثابتة، فإن المعادلة يمكن أن تأخذ الشكل

$$P - kx'(t) = mx'''(t), \tag{10.4}$$

إذ تمثل P قوة الدفع الثابتة، k معامل المقاومة، m الكتلة، $x'(t)$ سرعة الجسم عند اللحظة t، و $x'''(t)$ معدل تغير التسارع (النطر). يمكن كتابة المعادلة (10.4) على الصورة

$$P - k\frac{dx}{dt} = m\frac{d^3x}{dt^3}. \tag{11.4}$$

هناك حالات أكثر تعقيدا، مثلا، إذا ما أخذنا في الحسبان تغير الكتلة أثناء استهلاك الوقود أو التأثيرات الأخرى عند السرعات العالية. يجب الإشارة هنا إلى أن الدالة المتغيرة $\frac{d^3x}{dt^3}$ تلعب دورا مهما في استقرار المركب وبالتالي توفير راحةالمسافر، لأن أي تغيرات مفاجئة في التسارع قد تسبب أضرارا.
لحل المعادلة (11.4) وتحديد مسار الجسم،نعتمد الشروط الابتدائية التالية

$$x(0) = x_0, x^{'}(0) = x_1, x^{''}(0) = x_2$$

و نستعمل محولة لابلاس وخصائصها، نرمز بـ X لمحولة لابلاس لـ x. بتطبيق محولة لابلاس على طرفي المعادلة (11.4) نحصل على

$$X(s) = \frac{ms^2x(0) + msx^{'}(0) + mx^{''}(0) + kx(0) + \frac{P}{s}}{ms^3 + ks}.$$

للتبسيط أكثر نكتب، مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية

$$X(s) = \frac{sx_0}{s^2 + \frac{k}{m}} + \frac{x_1}{s^2 + \frac{k}{m}} + \frac{x_2}{s(s^2 + \frac{k}{m})} + \frac{\frac{k}{m}x_0}{s(s^2 + \frac{k}{m})} + \frac{Pm}{k}(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + \frac{k}{m}})$$

للحصول على الحل $x(t)$ نطبق محولة لابلاس العكسية، ، نجد

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + x_0\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + x_1\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + \frac{x_2}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \\ &+ \frac{Pm}{k}\left(t - \sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)\right) \end{aligned} \tag{12.4}$$

4.4 نمذجة انحناء دعامة

نعتبر أن الدعامة في وضع عمودي وخاضعة لتأثير قوة خارجية. الدعامة مثبتة من طرفها السفلي عند النقطة $x = 0$ بالأرض، ومثبتة من الأعلى بكتلة القوة الخارجية عند النقطة $x = L$. يمكن تدوير الدعامة، لكن دون حركة أفقية[10].
الإزاحة الأفقية $v(x)$ للدعامة تحقق الشروط الحدية التالية:

$$\begin{cases} v(L) = 0, \\ v^{''}(L) = 0, \\ v(0) = 0, \\ v^{''}(0) = 0 \end{cases} \tag{13.4}$$

للتذكير أن العزم هو قدرة القوةعلى تدوير جملة ميكانيكية حول محور. المعادلة التي نود النظر فيها تعتمد على المتغيرات التالية:
$v(x)$ الإزاحة الأفقية وهي المتغير المجهول، E معيار يونغ، I عزم عطالة مقطع، P الثقل المطبق على الدعامة، EI صلابة الإنحناء، و تعتبر كل هذه القيم معلومة.

مجموع القوى وفق المحور العمودي x والتي تحقق توازن الجملة، تكتب على النحو:

$$\frac{dU}{dx} = 0,$$

حيث U قوة عمودية على الدعامة "قوة القص" وتسبب القص على القوة المطبقة.
مجموع العزوم عند المبدأ هو:

$$\frac{dM}{dx} + P\frac{dv}{dx} = 0, U = \frac{dM}{dx}. \tag{14.4}$$

حيث M هو عزم الإنحناء، أي القوة التي تسبب انحناء الدعامة استجابة للقوة المطبقة.
نضع

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2},$$

ثم نشتق المعادلة (14.4) بالنسبة للمتغير x، نحصل على

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(P\frac{dv}{dx}\right) = 0. \tag{15.4}$$

وعليه، فإن وصف الإزاحة الجانبية v، يمثل بمعادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة بالصيغة

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} + P\frac{d^2v}{dx^2} = 0, \tag{16.4}$$

مع الشروط الحدية (13.4).
لحل المعادلة (16.4) نبحث عن المعادلة المميزة التي تكتب على الشكل

$$EI\lambda^4 + P\lambda^2 = 0,$$

ولها ثلاثة جذور 0 و $\pm i\sqrt{\frac{P}{EI}}$، حيث الصفر جذر مضاعف. بذلك، فإن الحل العام للمعادلة (16.4) يكتب على الصورة

$$v(x) = C_1 + C_2x + C_3\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_4\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x, \tag{17.4}$$

باستعمال الشروط الحدية الواردة أعلاه، يمكن تعيين C_4 و C_3, C_2, C_1.

5.4 نموذج لوصف تغير متوسط درجة الحرارة على سطح الأرض

درجة الحرارة من بين أهم العوامل التي تلعب دورا هاما في تغيير مجرى الحياة على سطح الكرة الأرضية، وقياس تغيراتها يمكن هي الأخرى تمثيله بمعادلة تفاضلية خطية بسيطة أو معقدة، فقد تكون بسيطة لا تأخذ في الحسبان عدة عوامل كعمق طبقات الثلج أو التغيرات في غلاف السحب مثلا [29].
المثال الذي سنقدمه، يمكن استعماله في تحليل تأثير مختلف الاشعاعات كالاحتباس الحراري، والتغيرات الشمسية على سبيل المثال. المعادلة التفاضلية التي تمثل هذا النموذج تكتب كمايلي

$$\frac{dT}{dt} = k(F - \lambda T), \tag{18.4}$$

T درجة الحرارة، F صافي الاشعاع الشمسي الواصل إلى سطح الأرض، k ثابت يمثل حساسية النظام المناخي، λ يمثل معامل ردود الفعل المناخية. هذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، يمكن حلها بعدة طرق، منها طريقة فصل المتغيرات أو استخدام عامل التكامل.
نضع حدود t في طرف وحدود T في الطرف الاخر، نحصل على

$$\frac{dT}{F - \lambda T} = kdt,$$

بتكامل الطرفين، و بوضع $u = F - \lambda T$ و منه فإن $du = -\lambda dT$، أي

$$dT = -\frac{1}{\lambda du},$$

بالتعويض نجد

$$-\frac{1}{\lambda}\frac{du}{u} = kdt,$$

بالمكاملة، يكون لدينا

$$-\frac{1}{\lambda}\ln|u| = kt + C,$$

أي

$$-\frac{1}{\lambda}\ln|F - \lambda T| = kt + C,$$

بصيغة أخرى

$$\ln|F - \lambda T| = -\lambda kt - \lambda C,$$

وبالتالي

$$T(t) = \frac{F}{\lambda} - \frac{C_1}{\lambda}e^{-\lambda kt},$$

حيث $C_1 = \pm e^{-\lambda C_1}$.

6.4 نموذج نمو مجتمع مع الذاكرة

في هذا المثال، نقدم نموذجا لظاهرة النمو لا تعتمد على العدد الحالي للعينة فحسب، بل ترتبط أيضا بمعطيات سابقة. يمكن نمذجة هذه الحالة بمعادلة فولترا التفاضلية التكاملية، التي من بين استخداماتها نمذجة ديناميكية السكان [9].
تعطى المعادلة بالشكل

$$\frac{dN}{dt} = rN - kz + \int_0^t N(\tau)d\tau, \qquad (19.4)$$

حيث N هو حجم العينة عند اللحظة الزمنية t ، N' يمثل معدل نمو العينة، r معدل النمو الجوهري، أي القدرة القصوى للعينة على الزيادة عندما تكون الموارد متوفرة و لا توجد عوائق، k هو الوسيط الذي يمثل الذاكرة أي المعطيات السابقة و N_0 الحجم الابتدائي للعينة.

في المعادلة (19.4) أخذنا نواة التكامل $K(t,\tau,N) = N$. لبرهان وجود الحل و وحدانيته، سنستخدم نظرية كوشي - ليبشيتز،
التحقق من شروط النظرية:
- الإستمرار:
واضح أن الدالة $f(t,N,z) = rN-kz$ مستمرة بالنسبة لكل من t, N و z، أيضا النواة $K(t,\tau,N) = N$ مستمرة بالنسبة لـ N.
- شرط ليبشيتز:
يجب أن نتأكد من أن الدالة f تحقق شرط ليبشيتز بالنسة للوسيطين N و z.

$$\left|f(t,N_1,z_1) - f(t,N_2,z_2)\right| = \left|r(N_1-N_2) - k(z_1-z_2)\right| \le |r|\,|N_1-N_2| + |k|\,|z_1-z_2|.$$

وعليه، فإن الدالةf تحقق شرط ليبشيتز مع ثابتي ليبشيتز $|r|$ و $|k|$.

واضح أن $K(t,\tau,N) = N$ تحقق هي الأخرى شرط ليشيتز مع ثابت ليبشيتز يساوي 1.
وجود الحل $N(t)$ يدل على أن نموذج النمو يصف واقع حقيقي و حدانيته، تدل على أنه توجد طريقة وحيدة التي بواسطتها تنمو العينة انطلاقا من حجم ابتدائي N_0.

7.4 نموذج التوصيل الحراري في النواقل

لنعتبر ناقل معدني متجانس، مستقيم وذي مقطع عرضي موحد، لنفرض أن طول الناقل هو L، نفرض أن الحرارة لا يمكن أن تتسرب عبر طرفي الناقل، كما نعتبر أن أبعاد المقطع العرضي صغيرة بما يكفي

حتى تظل الحرارة ثابتة في أي مقطع عرضي معين [19].
تغير درجة الحرارة في النافل يمكن تمثيلها بمعادلة تفاضلية جزئية تعطى بالشكل

$$\begin{cases} \alpha^2 \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dt}, & 0 < X < L, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le L. \end{cases} \tag{20.4}$$

الشرطان الحديان $u(0,t)$ و $u(L,t)$ المقصود بهما أن الحرارة لا تنتشر عند أطراف الناقل، أي معدومة. أما $f(x)$ تعبر عن انتشار درجة الحرارة عند اللحظة الزمنية صفر.
α^2 يسمى معامل الانتشار الحراري. ويعطى بالعلاقة

$$\alpha^2 = \frac{k}{\mu s},$$

حيث k يمثل معامل الناقلية، μ كثافة المعدن و s تمثل مساحة انتشار الحرارة.
المعادلة الرئيسية في (20.4) هي معادلة خطية متجانسة من الدرجة الثانية في x.
لحلها نستخدم طريقة فصل المتغيرات، حيث نكتب الحل على شكل جداء دالتين كل منهما ذات متغير واحد، أي نكتب

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad T(t) \neq 0, \ , X(x) \neq 0. \tag{21.4}$$

نعوض (21.4) في (20.4) نحصل على

$$\alpha^2 X'' T = X(x)T'(t). \tag{22.4}$$

بفصل المتغيرات، نجد

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T}. \tag{23.4}$$

حتى تكون المعادلة (23.4) صحيحة، يجب أن يكون كل من طرفيها مساوي لنفس الثابت. و إلاإذا تم إبقاء أحد المتغيرين ثابتا، فإن أحد طرفي المعادلة سيبقى دون تغيير، بينما يتغير الطرف الاخر، وبالتالي تصبح لا معنى للمساواة، إذا رمزنا لثابت الفصل الذي اتضح أن يكون سالبا بـ $-\lambda$، فإن المعادلة (23.4) تأخذ الشكل

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda, \tag{24.4}$$

و منه تنتج المعادلتين التفاضليتين الاتيتين

$$X^{''} + \lambda X = 0, \qquad (25.4)$$

$$T^{'} + \alpha^2 \lambda T = 0. \qquad (26.4)$$

باستعمال الشروط الحدية والتعويض في (21.4) نجد

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0. \qquad (27.4)$$

و منه نستخلص أن

$$X(0) = 0.$$

و بالمثل بأخذ $x = L$، نجد أن

$$X(L) = 0.$$

نحل الان النظام

$$\begin{cases} X^{''} + \lambda X = 0, & 0 < X < L, \\ X(0) = 0, \quad u(L) = 0. \end{cases} \qquad (28.4)$$

هذه المسألة عبارة عن مسألة القيم الذاتية، حلولها غير المعدومة هي الأشعة الذاتية

$$X_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{L}), \quad n = 1, 2, 3, ... \qquad (29.4)$$

المرفقة بالقيم الذاتية

$$\lambda_n(x) = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, ... \qquad (30.4)$$

لمزيد من التوضيح، تصفح [19] صفحة 607.
نحل المعادلة الثانية

$$T^{'} + \alpha^2 \lambda_n T = T^{'} + (\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2})T = 0, \quad n = 1, 2, 3, ... \qquad (31.4)$$

حلها يعطى بالشكل

$$T(t) = e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t}.$$

وبالتالي، فإن متتالية الحلول $u_n(x,t)$ تكتب كمايلي

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t} \sin(\frac{n\pi x}{L}), \quad n = 1, 2, 3, ... \qquad (32.4)$$

بالرجوع إلى الشرط الابتدائي $(x,0)=f(x)$ ، نكتب الحل العام

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nu_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-\frac{\alpha^2n^2\pi^2}{L^2}t}\sin(\frac{n\pi x}{L}), \qquad (33.4)$$

لتعيين c_n، نلجأ إلى الشرط الابتدائي، يكون لدينا

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(\frac{n\pi x}{L})=f(x), \qquad (34.4)$$

حيث c_n يمثل معامل فوريي في السلسلة (34.4) ويعطى بالشكل

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx.$$

8.4 نمذجة دارة كهربائية بسيطة

نصادفها يوميا وفي كل مكان، تتيح لنا الكثير من الخدمات، تدخل في تركيب كل جهاز مهما كان نوعه. الدارة الكهربائية البسيطة نجدها في ميدان الالكترونيك، الميكانيك، الاوتوماتيك، وغيرها من المجالات الأخرى [12].

نستعرض في هذا القسم نمذجة دارة كهربائية بسيطة مربوطة على التسلسل. يمثل الرمز E مصدرا للقوة الكهربائية، قد يكون هذا المصدر بطارية أو مولدا كهربائيا ينتج فرق جهد، مما يسبب تدفقا لتيار كهربائي I عبر الدارة عند إغلاقها. يمثل الرمز R مقاومة تدفق التيار الكهربائي، مثل تلك التي ينتجها مصباح كهربائي مثلا. L يرمز لوشيعة تعمل على توليد مجال مغناطيسي. C هو المكثف والذي يتكون عادة من لوحين معدنيين مفصولين بمادة عازلة.

$Q(t)$ هي شحنة المكثف عند اللحظة الزمنية t.

لاستنتاج المعادلة التفاضلية التي تحققها $Q(t)$ نستخدم مايلي:

- قانون كيرشوف الثاني الذي ينص على أن: في دارة مغلقة فإن مجموع فروق الجهد يساوي الصفر.
- الجهد بين طرفي المقاومة يساوي RI.
- الجهد بين طرفي الوشيعة يساوي $L\frac{dI}{dt}$.
- الجهد بين طرفي المكثف يساوي $\frac{Q}{C}$.

وعليه فإن

$$E(t)=L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C},$$

و بما أن

$$I(t)=\frac{dQ}{dt},$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E(t). \qquad (35.4)$$

المعادلة التفاضلية (35.4) هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الدرجة الثانية.

لحل الجملة

$$\begin{cases} L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E(t), 0<t<T, \\ Q(0)=a, \quad \frac{dQ(0)}{dt}(0)=b. \end{cases} \qquad (36.4)$$

و البحث عن قيمة الشحنة، نستخدم طريقة حساب المعادلة المميزة.

نقوم أولا بحل المعادلة المتجانسة

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

معادلتها المميزة

$$L\lambda^2+R\lambda+\frac{1}{C}=0.$$

جذراها

$$\lambda_1=\frac{-R+\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}, \quad \lambda_2=\frac{-R-\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}.$$

حسب إشارة المقدار $\Delta = R^2-\frac{4L}{C}$، نحدد شكل الحل.

الحالة الأولى: $\Delta > 0$، يكون شكل حل المعادلة المتجانسة على الصورة

$$Q_h(t)=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}$$

الحالة الثانية: $\Delta = 0$، يكون شكل حل المعادلة المتجانسة على الصورة

$$Q_h(t)=(A+Bt)e^{\lambda t}, \quad \lambda=\frac{-R}{2L}.$$

الحالة الثالثة: $\Delta < 0$، يكون شكل حل المعادلة المتجانسة على الصورة

$$Q_h(t)=e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t)\right)$$

الحلول الخاصة للمعادلة غير المتجانسة $Q_p(t)$، تكون مرتبطة أساسا بشكل الدالة $E(t)$.
إن كان شكلها كثير حدود، نختار حلا خاصا بنفس شكل كثير الحدود، وإن كان شكلها دالة أسية، نختار حلا خاصا من نفس الشكل. وإن كانت دالة جيبية، نختار حلا خاصا من الشكل $A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$.
و يكتب الحل العام على الصورة

$$Q(t)=Q_h(t)+Q_p(t).$$

باب 5

الخاتمة

نظرا للأهمية التي يكتسيها موضوع المذكرة، حاولناإبراز ذلك من خلال التركيز على بعض الجوانب التي تضفي طابعا متناسقا بين أجزاء هذا المحتوى.

تناولنا في هذا العمل نماذج لمعادلات تفاضلية ذات الصلة بالحياة اليومية. اجتهدنا لأجل إدراج جل أنواع وأنماط المعادلات التفاضليةوتصنيفاتها، حيث جاءت موزعة وفق مجالات حساسة و مهمة في مجريات حياتنا اليومية.

تمت المعالجة على مستويات ثلاثة، أولاها الجانب الصحي و البيئي، الثاني مجال الإقتصاد والمالية وفي الجزء الثالث قدمنا نماذج متنوعة حتى نلم بأكبر قدر ممكن من استخدامات المعادلات التفاضلية.

في كل نموذج مقترح، حاولنا إعطاء لمحة مبسطة عن نمذجة كل معادلة تفاضلية، طريقة حلها مع كتابة الشكل الظاهري لحلها.

المصادر

[1] S. ASFIJI, R. ISFAHANI, R. DASTJERDI, M. FAKHAR: Analyzing the population growth equation in the solow growth model including the population frequency, International Journal of Humanities and Social Science, 2(2012), 134–144.

[2] W. F. Ames, E. M. Harrell II , J. V. Herod , Differential Equations with Applications to Mathematical Physics Academic Press, 1993.

[3] L. Ait El Hadj-Bélisle, Pollution dans la Baie de Chesapeacke, Polytechnique Montréal. 2009.

[4] G. Albano, V. Giorno, P. Roman-Roman, F. Torres-Ruiz, Study of a general growth model, Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2024.

[5] Asmar, Nakhlé H. Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems. Courier Dover Publications, 2016.

[6] T. Archibald, C. Fraser, Ivor Grattan-Guinness, The History of Differential Equations, 1670–1950. Oberwolfach Rep. 1 (2004), no. 4, pp. 2729–2794

[7] S. Benhiouna, A. Bellour and R. Amiar, Existence and Uniqueness of Periodic Solution For Neutral Delay Integro-Differential Equations,

[8] Bernt K. Oksendal. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer, 2022.

[9] M. Bouizem, Modèles mathématiques pour des populations structurées en age, Univ-Abou Bekr Belkaid, Tlemcen, 2011.

[10] M. N. Bouchareb, Analyse modale d'une poutre encastrée-libre, https://biblio.univ-annaba.dz

[11] R. Buis, On the Generalization of the Logistic Law of Growth, Acta Biotheoreca, ,195-185 39(1991.

[12] M. Braun, Differential Equations and Their Applications, Spriger Science, 1993.

[13] A. A. Cioruta, B. Cioruta, Regarding the Population Dynamics Investigation Using Evironmental I nformation System, Scientific Research and Education in the AIR force Afases , ,416-411 2016.

[14] Ciotura, Bogdan, Coman, Mirela, Berinde, Vasile, Modeling possibilities of the population growth and its implication using biomathematics models , Scintific Bulletin of North University Center of Baia Mare, series D Mining, ,100-96 19(2015).

[15] C. Tisseron, Notons de Topologie - Introduction aux Espaces Fonctionnels, HERMANN, 1997.

[16] D. Claire & G. Pierre, Equations Aux Dérivées Partielles, Dunod, 2002.

[17] F et G. Demengel, Espaces fonctionnels (Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles) , EDP Sciences, 2007.

[18] J. Dieudonné, Abrégé d'histoire des mathématiques, ,1900-1700 tome 1, ´Editions Her- mann, 1978, pp. .395-1

[19] R.C. Diprima, W.E. Boyce, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Wiley John and Sons, Inc, 2005.

[20] B. Divia, K. Kavitha, A Review On mathematical Modelling In Biologiy And Medecine, Advances in Mathematics Scientific Journal, 2020.

[21] M. Hazi, Recueil de Topologie, OPU, 1994.

[22] D. Tournès L'intégration graphique des équations différentielles ordinaires, Historia Mathematica, 30 (2003), .493-457

[23] Fritz John, Partial Differential Equations, Springer, 2022

[24] M. Kalecki, A MACRODYNAMIC THEORY OF BUSINESS CYCLES, Econometrica Socety, 1933.

[25] M. Laforest, A. Saucier, L'offre et la demande, Polytechnique Montréal.

[26] L. Ljungqvist and T. J. Sargent, Recursive Macroeconomic Theory, Library of Congress, 2004.

[27] L. Guerrini, The Solow-Swan model with a bounded population growth rate, Journal of mathematical economics 42, ,21-14 2006.

[28] T. Maalej, Caractérisation d'une source de polluant en aéraulique à partir d'inversion de mesures de concentration, Thèse de doctorat, 2010.

[29] A. Michael, Savageau, Growth Equations: A General Equation and a Survey of Special Cases, Univ Michigan, 1979.

[30] J. D. Murray, Mathematical Biology, An introduction, 3rd, Springer-Verlag, New York, 2002.

[31] Ordinary differential equations, Courier Dover Publications, 1956, pp. 558.

[32] A. Pietsch, Banach Space Theory and Its Applications, Springer-Verlag, 1983A. Pietsch, Banach Space Theory and Its Applications, Springer-Verlag, 1983.

[33] I. Podlubny, Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. elsevier. 1998.

[34] R. Precup, Methods in nonlinear integral equation, Department of Applied Mathematics, Babes-Bolyai University, Cluj, Romania 2018.

[35] H. Poincaré, Œuvres, tome 1, première partie, Equations différentielles, Gauthier-Villars, 1951, p. III.

[36] B. Randrianantoanina , N. Randrianantoanina. Banach spaces and their applications in analysis. De Gruyter, 2007.

[37] H. Reinhard, Equations Aux Dérivées Partielles, Dunod, 2004.

[38] Stewart, Section 4.10 Models for population growth, Univ-Pennsylvania. https://www2.math.upenn.edu

[39] B.Tellab & K. Haouam, (2018). Résolution des équations différentielles fractionnaires (Doctoral dissertation, Université Frères Mentouri-Constantine 1) 2018.

[40] M. Tenenbaum, H. Pollard, Ordinary Differential Equations, Dover Publications, INC, New York, 1963.

[41] Edward L. Ince. Equations différentielles stochastiques Notes de cours TAF MCE - UE Stochastic Dynamical Models (SDM) thierry.chonavel@imt-atlantique.fr 2023-2011

[42] O. Vašíček, An equilibrium characterisation of the term structure, Journal of Financial Economics, 5(2), ,188-177 1977.

[43] Y. Watanabe, E. L. Dahlman, K. Z. Leder and S. K. Hui, A mathematical model of tumor growth and its response to single irradiation, 2016.

[44] R. H. Wilson, A scientific routine for stock control. Harvard Business Review, 13(1), ,128-116 1934.