

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي - سكيكدة
Ecole Normale Supérieure d'enseignement technologique, Skikda

Département de Mathématiques

قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم المتوسط

دراسة بعض خصائص الدوال الميرومورفية و الدوال المطابقة

من إعداد :

تحت إشراف الأستاذ :

★ قواسمية عقبة

★ زين إكرام

★ بلعابد زينب

★ بوكردون زكرياء

من طرف لجنة المناقشة :

◆ كيباش خدير أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة رئيسا.

◆ قواسمية عقبة أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة مشرفا.

◆ فراق عزوز أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة مناقشا.

◆ بن حيونة صالح أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة مناقشا.

السنة الجامعية : 2021/2025

دفعة جوان 2025

❖ شكر و تقدير

قال رسول الله صلى الله عليه و سلم

« من لا يشكر الناس لا يشكر الله »

رواه " أحمد و الترمذي".

قبل كل أحد، وبعد كل أحد، الشكر للواحد الأحد، الفرد الصمد، الذي أمدنا بالقوة والعون والسداد لإنجاز هذا العمل، ندعوه عزوجل أن يجعله خالصا لوجهه الكريم.

نتقدم بالشكر إلى لجنة المناقشة التي تكرمت علينا بمناقشة هاته المذكرة،

إلى من كانوا بفكرهم علماء وبتواضعهم رفقاء أساتذتنا

" أساتذة المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي بسكيكدة".

تحية عطرة و شكر خاص لرئيس قسم الرياضيات الأستاذ " عزوز فراق".

تحية طيبة لمدير مدرستنا الأستاذ الدكتور " بوجعدار جمال".

إلى جميع الحضور الكرام زملاء وزميلات الذين تشرفنا بوجودهم اليوم

أخيرا، خالص الشكر لكل من ساهم في مساعدتنا في إنجاز هذا

العمل المتواضع من قريب أو من بعيد و لو بكلمة طيبة.

❖ إهداء

قال تعالى:

﴿ وَقُلْ أَعْمَلُوا فَسِرِّيَ اللَّهِ عَمَلَكُمْ ﴾ [التوبة: 105]

فما ختم جهد، ولا تم سعي، ولا استقام طريق إلا بفضل الله وبتوفيقه.
الحمد لله حُباً، وشكراً، وامتناناً على كل بداية مباركة، وكل نهاية مشرفة.

﴿ وَقَضَىٰ رَبُّكَ أَلَّا تَعْبُدُوا إِلَّا إِيَّاهُ وَبِالْوَالِدَيْنِ إِحْسَانًا ﴾
[الإسراء: 23].

إلى أبي الحبيب " أحمد زين "

إلى من ارتبط اسمي عزاً باسمه، إلى من غرس في قلبي القوة،
وسقاني حباً وثقة... ها أنا اليوم أعود إليك بنجاح نسج من دعائك
وجهدك، يا من كنت بعد الله ظلي وسندي، فكل خطوة خطوتها
كانت بدعائك، وكل نجاح نلته كان ثمرة إيمانك بي.
أبي، جزاك الله عني خير الجزاء، وبارك لي في عمرك، ورفع قدرك
في الدنيا والآخرة.

إلى أميرتي وجنتي وجميأتي " أمي ثم أمي ثم أمي "

دعاؤك جواز عبوري، ورضاك أمان طريقي. يا من جعل الله الجنة
تحت قدميها، كنت النور في كل ظلمة، والمرفاً في كل تعب،
والحب في كل وقت. أسأل الله أن يبارك فيك، ويرزقني برك ما
حييت. ماما الحبيبة جميلة الاسم والمعنى.

إكرام زين

❖ إهداء

﴿سَنَشُدُّ عَضُدَكَ بِأَخِيكَ﴾ [القصص: 35]

إلى إخوتي سندي : ” خالد، محمد، حسام، سفيان ”
كنتم عوناً لا يُكل، وظهراً لا ينكسر، وحصناً لا يُحترق ، أسود
احتमित بقلوبكم قبل أكتافكم. رزقني الله بكم نعمةً، فكنتم لي بعد
الله عضداً وذخراً. فشكراً لأنكم دائماً كنتم الأمان في وجه الحياة.

إلى أختي الراحلة ” كريمة ” غبتِ عن العين، لكن لم تغيبني عن
القلب. رحمك الله رحمةً واسعة، وجعل مقامك في أعلى عليين،
وأكرمني بقلبك في الفردوس الأعلى.

إلى زوجة أخي الغالية ” رشا ” ، إلى من دخلت العائلة قلباً قبل أن
تكون صلة، دمتِ قريبة من القلب، وعزيزة على الروح. سقى الله
قلبك سعادة لا تزول.

إلى صغيري العزيزين: ” آدم وأريج ” وزهرتا الفرح في عائلتنا ،
كنتما ولا زلتما الأيدي الصغيرة التي ترافقني بدفء، جعل الله لكم
درباً مملوءاً بالخير والنجاح.

إكرام زين

❖ إهداء

إلى ظل روعي في كل درب " زينب " يا من جبر الله بها خاطري
كنت رفيقة دربي و نعم العوض، أسأل الله أن يرزقك سعادة لا
تزل و طمأنينة تسكن روحك دائماً.

إلى صديقات العمر " رونق ، ولدان ، أريج، أمل، رجاء "
إلى من كبرت قلوبنا معاً قبل أن تكبر أعمارنا،
أحتفظ بكن في قلبي كما تحتفظ الطفولة بأحلامها النقية.

إلى قطعة من قلبي "صديقتي يسر"
يا من لم يبعدك البعد، ولم يغيبك الغياب دعوت الله أن يحفظ
قلبك، ويجمعني بك على درب الخير ما حيننا.

في الختام
في القلب أمنيات جمّة ، لكنها لا تكفي وحدها،
سعيْتُ كي لا يكون النجاح مجرد حظٍ عابر،
بل ثمرةً جهدٍ أستحقّه، وغايةً أرتقي بها،
لأكون جديرةً بلقي،
جديرةً بوطني،
جديرةً بأن يُقال عني:

“الأستاذة زين إكرام”

❖ إهداء

بسم الله خالقي وميسر أموري
وعصمت أمري لك الحمد والإمتنان
إذا كان الإهداء يعبر ولو بجزء من الوفاء فالإهداء إلى معلم البشرية
وقائدها نحو الخير والأفضل نبينا محمد صلى الله عليه وسلم
جميلة أنتِ فلسطين، جميلة لدرجة أن الثمانية والعشرون حرفاً لا
تكفي لوصفك. سلام لأرض خلقت لسلام وما رأيت يوماً سلاماً.
فلسطين قلبي بالدعاء يركعك.

إلى "أرواح الشهداء" الخالدين الذين جاهدوا بأرواحهم في سبيل
فلسطين.

إلى "طلبة فلسطين" الذين رحلوا قبل أن يتوج كفاحهم بتخرج.
سلامً على أرواحهم الطاهرة، وعزائناً أنهم خالدون في ذاكرة
الوطن والعلم.

لم تكن الرحلة قصيرة، ولا ينبغي لها أن تكون. لم يكن الحلم قريباً،

ولا الطريق كان محفوفاً بالتسهيلات، لكنني فعلتها ونلتها.

إلى الرقم الصعب في حياتي، من مهد لي الطريق قبل أن أتعلم
خطواتي الأولى، ومن سار أمامي كاشفاً مخاطر الحياة، حاميني منها.

إلى سندٍ لا عمر له، إلى من زين اسمي بأجمل الألقاب، داعمي

الأول في مسيرتي، سندي وقوتي وملاذي بعد الله، نفري

واعزازي، "والدي" حفظه الله

زينب بلعابد

❖ إهداء

إلى معلّمتي الأولى، طبيّتي التي تضمّد وجعي دون ألم، مهندستي التي ترسم تفاصيل حياتي بحب، محاميتي التي تدافع عني حتى في غيابي، قاضيتي العادلة التي لا تظلمني أبداً، صديقتي التي تحفظ أسرارتي، أختي التي تشاركني كل شيء.. إلى من جعل الله الجنة تحت أقدامها، "والدتي" حفظها الله.

إلى أسود حياتي الثلاثة الذين سندوني ودعموني وكانوا لي خير رفيق، "إخوتي" الأعرّاء حفظكم الله.

إلى نصفي الثاني ورفيقة أيامي، إلى من ساندتني بكل حب عند ضعفي، "أختي" الحبيبة حفظك الله.

إلى صديقة الروح ورفيقة الدرب، من تقاسمنا حلو الأيام ومرّها، "إكرام" وفقك الله في حياتك ورعاك.

إلى أستاذتي ومن دعمتني لأكون هنا اليوم، لم تكوني يوماً أستاذتي بل كنتِ صديقتي، "مرواني كريمة"، حفظك الله ورعاك.

إلى من تسكن الروح، إلى صديقتي العمر "هديل".

إلى كل من دعمني ولو بكلمة، حفظكم الله ورعاكم.

إلى كل من قال لي أنني لا أستطيع أن أصل، أهديك هذا العمل لأنكم كنتم أحد أسباب نجاحي.

وأخيراً، نحمد الله الذي وفقنا لنصل إلى مشارف التخرج. لم تكن الرحلة قصيرة ولا سهلة، لكن بعون الله وتوفيقه ها نحن نلامس ختامها.

فالحمد لله رب العالمين

❖ إهداء

إلى من غرسا فيّ بذور الطموح ، وسقياها بالصبر والدعاء ، إلى من حملاني في القلب قبل أن أحمل اسمي ، وكانا لي العون والسند في كل حين ... إلى "والدي العزيزين" كلمات الشكر تقف عاجزة أمام عطائكما ، وقلبي يفيض حباً وامتناناً لكما ... فلما أُهدي هذا العمل ، عربون وفاء وتقدير لما قدمتماه لي من حبٍّ لا يُقاس، ودعمٍ لا ينتهي .

إلى "أساتذتي الأفاضل" الذين لم يخلوا بعلمهم، وفتحوا لنا أبواب المعرفة ، فلکم کل الاحترام والتقدير، فأنتم منارات علم أضاءت لي دروب الحيرة والبحث .
إلى "زملائي وأصدقائي"الذين شاركوني لحظات التعب والسهر ، كنتم خير رفقة في هذه الرحلة ، أشكرکم على المساندة وعلى كل لحظة تقاسمناها في هذا المشوار .

وإلى كل من علمني درساً، أو قدّم لي كلمة طيبة، أو كان له أثر في طريقي ، أهديكم ثمرة هذا الجهد ، عسى أن يكون فيه ما يعبر عن امتناني لكم .

زكرياء بوكردون

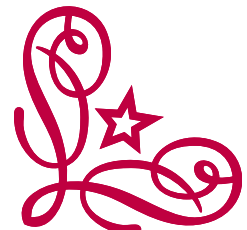
الفهرس

2	مقدمة
3	1 مفاهيم أساسية
4	1.1 المجموعات في المستوى
10	1.2 الدالة المركبة
10	1.3 الدالة التحليلية
12	1.4 بعض الدوال الأساسية
14	1.5 المسارات في المستوى
14	1.6 التكامل المركب
21	2 الدوال الميرومورفية
22	2.1 تصنيف النقاط الشاذة المنعزلة
27	2.2 نظرية البواقي
30	2.3 الدوال الميرومورفية
35	3 الدوال المطابقة
36	3.1 الزاوية بين مسارين
41	3.2 الدالة العكسية المحلية
44	3.3 التحويلات الخطية الكسرية
45	3.4 النقاط الصامدة للتحويل الكسري الخطي
47	3.5 النسبة الثنائية
48	3.6 بعض التحويلات الخطية الكسرية
51	4 تفكيك بعض الدوال الميرومورفية إلى كسور جزئية
52	4.1 الدوال المتسامية والدوال الميرومورفية - الدوال المثلية
54	4.2 تفكيك دوال ميرومورفية تملك أقطاب بسيطة
64	خاتمة
65	المراجع العلمية
66	ملخص



مقدمة

يعد التحليل المركب أحد الفروع الأساسية في الرياضيات، وقد بدأ تطوره بشكل فعلي في النصف الثاني من القرن التاسع عشر إبان الثورة الصناعية الأوروبية، نتيجةً للحاجة المتزايدة إلى أدوات رياضية دقيقة لنمذجة الظواهر الفيزيائية والهندسية المعقدة. وتعد الدوال الميرومورفية والدوال المطابقة من أهم المواضيع التي يدرسها التحليل المركب، لما تتصف به من خصائص دقيقة ونتائج رياضية عميقة، تساهم في فهم بنية الدوال المركبة وسلوكها. في هذه المذكرة سندرس صنفاً معيناً من الدوال المركبة وهي الدوال الميرومورفية والمطابقة حيث تم تقسيم هذا العمل إلى أربعة فصول رئيسية: في الفصل الأول المعنون بـ «مفاهيم أساسية» قدمنا المفاهيم الأساسية التي تُعد قاعدة ضرورية لفهم باقي الفصول؛ أما الفصل الثاني فنخصصناه لدراسة النقاط الشاذة وتصنيفها، وقدمنا فيه نظرية البواقي، ثم انتقلنا إلى تعريف الدوال الميرومورفية وخصائصها، مع التطرق إلى التحليل إلى كسور جزئية لهذه الدوال في المستوى العقدي وفي الفصل الثالث تناولنا موضوع الدوال المطابقة، حيث قمنا بدراسة خصائصها الأساسية، مع التركيز على الجانب النظري والتطبيقي لهذه الدوال في التحليل العقدي. وأخيراً، جاء الفصل الرابع مكتملاً لما سبق، إذ عرضنا فيه بعض الخصائص الإضافية للدوال الميرومورفية.





الفصل الأول

مفاهيم أساسية



في هذا الفصل سنذكر بعض التعاريف المتعلقة بمجموعات الأعداد المركبة في المستوى المركب z ، كذلك الدوال المركبة، التحليلية و التوافقية . مع إدراج بعض النظريات الهامة في التكامل المركب و كذا سلاسل القوى الصحيحة، لأكثر تعمقا أنظر ([1], [2], [5], [6]).

1.1 المجموعات في المستوى

الدائرة

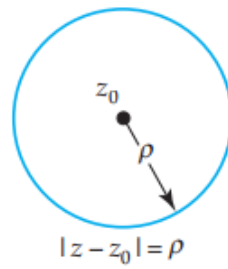
لنفرض أن $z_0 = x_0 + iy_0$ بما أن

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

هي المسافة بين النقطتين $z = x + iy$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ ، فإن النقط $z = x + iy$ و التي تحقق المعادلة

$$|z - z_0| = \rho, \rho > 0$$

تقع على الدائرة التي مركزها $z_0 = x_0 + iy_0$ و نصف قطرها ρ . شكل 1.1



شكل 1.1

القرص

تعريف 1.1.1: نعرف قرص مفتوح في \mathbb{C} و الذي مركزه z_0 و نصف قطره r بـ

$$D(z_0, r) = \{z; |z - z_0| < r\}$$

تعريف 1.1.2: نعرف قرص مغلق في \mathbb{C} و الذي مركزه z_0 و نصف قطره r بـ

$$\bar{D}(z_0, r) = \{z; |z - z_0| \leq r\}$$

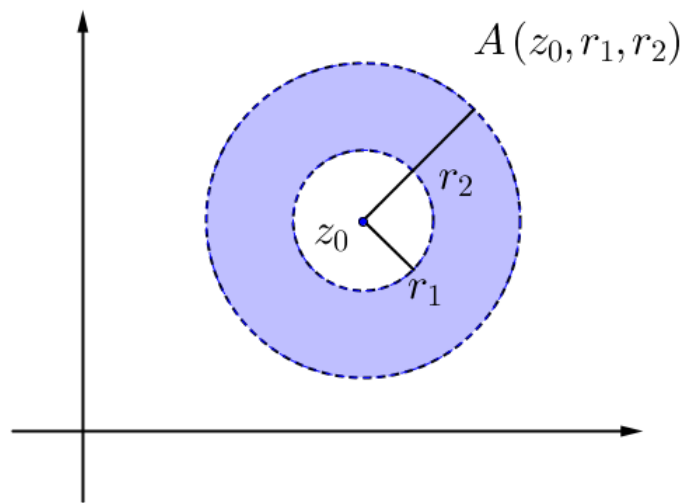
الحلقة

تُعرّف الحلقة (Annulus) في المستوى المركب على أنها مجموعة الأعداد المركبة z التي تقع بين دائرتين مركزهما نفس النقطة z_0 ولكن بنصفي قطرين مختلفين، بحيث تكون المسافة بين z و z_0 أكبر من نصف القطر الداخلي وأقل من نصف القطر الخارجي. ونكتب رياضيا كما يلي.

$$A(z_0; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

حيث

- z_0 هو مركز الحلقة.
- r_1 هو نصف القطر الداخلي، و r_2 هو نصف القطر الخارجي.
- $0 < r_1 < r_2$



شكل 2.1

جوار نقطة

تعريف 1.1.3:

لتكن z_0 نقطة من المستوى العقدي و ليكن r عدد حقيقي موجب تماماً ($r > 0$)، نسمي مجموعة الأعداد المركبة z حيث $|z - z_0| < r$ بجوار النقطة z_0 و هو مجموعة كل نقاط المستوى التي تنتمي إلى القرص المفتوح

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

النقطة الداخلية بالنسبة لمجموعة A

تعريف 1.1.4: لتكن A مجموعة من المستوى العقدي. نقول عن z_0 أنها نقطة داخلية بالنسبة لـ A ، إذا وجد جوار للنقطة z_0 محتوي في A . أي

$$D(z_0, r) \subset A, \quad r > 0$$

نرمز لمجموعة كل النقاط الداخلية بـ \mathbb{E}°

النقطة الخارجية بالنسبة لمجموعة A

تعريف 1.1.5:

نقول عن نقطة z_0 أنها نقطة خارجية بالنسبة للمجموعة A ، إذا وُجد جوار لـ z_0 منفصل عن A و نكتب

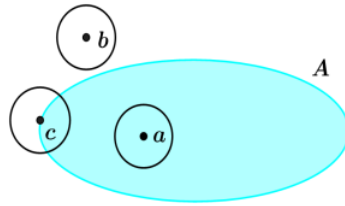
$$r > 0$$

$$A^c = \mathbb{C} \setminus A \text{ أي } A^c \text{ نرمز لها بـ } AD(z_0, r) \cap A = \emptyset,$$

النقطة المحيطة

تعريف 1.1.6:

نقول عن z_0 أنها نقطة محيطة إذا لم تكن نقطة داخلية أو خارجية بالنسبة لمجموعة A ، بمعنى أنه من أجل كل جوار لـ z_0 فإنه يحوي نقاط داخلية وخارجية معاً. نرسم لمجموعة النقط المحيطة بـ ∂A



شكل 3.1

• a نقطة داخلية

• b نقطة خارجية

• c نقطة محيطة

المجموعة المفتوحة

تعريف 1.1.7: نقول عن مجموعة A أنها مفتوحة إذا وفقط إذا كانت كل نقطة من نقاطها نقطة داخلية. كذلك، تكون A مفتوحة إذا كانت جوار لجميع نقاطها.

مثال 1.1.1

المجموعات التالية مفتوحة.

- المجموعة الخالية
- مجموعة كل الأعداد المركبة \mathbb{C}
- تقاطع كل مجموعتان مفتوحتان
- الاتحاد الكيفي لمجموعات مفتوحة

المجموعة المغلقة

تعريف 1.1.8:

نقول عن المجموعة A أنها مغلقة إذا كانت متممتها بالنسبة إلى \mathbb{C} مفتوحة. أو إذا احتوت على كل نقاطها المحيطة والداخلية ونرمز لها بالرمز \bar{A} ، ونكتب: $\bar{A} = A \cup \partial A$

مثال 1.1.2

المجموعة: $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ مغلقة.

المجموعة المحدودة

تعريف 1.1.9:

نقول عن مجموعة A أنها محدودة إذا وجد عدد حقيقي r موجب تماماً $r > 0$ حيث $|z| < r$ مهما كان z من A ، بمعنى تكون A محدودة إذا أمكن وضعها بالكامل في جوار لـ 0 .

مثال 1.1.3

المجموعة $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + i| \leq 1\}$ محدودة.
لأن

$$\forall z \in A: |z| = |z - 2 + i + 2 - i|$$

$$|z| \leq |z - 2 + i| + |2 - i| \leq 1 + \sqrt{5}$$

المجموعة المتراسة

تعريف 1.1.10:

نقول عن مجموعة A أنها متراسة في المستوى العقدي، إذا كانت مغلقة ومحدودة في آن واحد.

المجموعة المترابطة

تعريف 1.1.11: نقول عن مجموعة A أنها مترابطة إذا أمكن وصل أي نقطتين منها بواسطة خط منكسر يقع كلياً داخل A .

لتكن $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ مجموعة من النقاط على المستوي \mathbb{C} . ندعو مجموعة القطع المستقيمة التي تكون نهاية إحداها بداية للأخرى أي المجموعة

$$[z_1, z_2], [z_2, z_3], \dots, [z_{n-1}, z_n]$$

بالخط المنكسر ذي الرؤوس z_1, z_2, \dots, z_n

مثال 1.1.4

المجموعة $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ مترابطة.

ملاحظة (1)

إذا كانت A^c مترابطة فإن A مترابطة ترابطاً بسيطاً، أما إذا كانت A^c ليست مترابطة فإن A متعددة الترابط.

مثال 1.1.5

لدينا $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 1\}$ بسيطة الترابط. أما $B = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ فهي متعددة الترابط.

1.2 الدالة المركبة

لتكن D, R منطقتان من المستوى \mathbb{C} .

تعريف 1.2.1:

نقول عن f أنها دالة مركبة معرفة من D نحو R إذا ارفق بكل عدد مركب $z \in D$ نقطة وحيدة $w \in R$ ، ونكتب

$$f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow R \subset \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto w = f(z)$$

إذا كان $z = x + iy$ فإن

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ومنه

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$$

مثال 1.2.1

لتكن

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$z \longmapsto w = \frac{1}{z}$$

من أجل $z = x + iy$ نجد

$$w = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

إذن

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

1.3 الدالة التحليلية

لتكن D منقطة مفتوحة من \mathbb{C} .

تعريف 1.3.1: إذا كانت f قابلة للاشتقاق من أجل كل عدد مركب $z \in \mathbb{C}$ أي أن النهاية

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

موجودة ومنتية مهما كان $z \in D$ فإن f دالة تحليلية على D .

معادلتى كوشي-ريمان

تعريف 1.3.2: معادلات المشتقات الجزئية التالية

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

تسمى بمعادلتى **Cauchy-Riemann** كوشي ريمان.

نظرية 1.3.1: إذا كانت $f = u + iv$ قابلة للاشتقاق عند z_0 ، فإن المشتقات الجزئية لـ u و v بالنسبة لـ x و y

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

تكون موجودة عند z_0 وتحقق معادلتى كوشي-ريمان

$$u_x \Big|_{z_0} = v_y \Big|_{z_0}, \quad u_y \Big|_{z_0} = -v_x \Big|_{z_0}$$

عندئذ يكون لدينا

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$$

الدوال التوافقية

المعادلة التالية

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

تعرف بمعادلة لابلاس وهي من بين أهم المعادلات التي تظهر في العلوم الفيزيائية و العلوم الهندسية.

كل دالة حقيقية $u(x, y)$ التي تحقق معادلة لابلاس تُسمى دالة توافقية

نظرية 1.3.2: إذا كانت $f = u + iv$ تحليلية على المنطقة D فإن الدالتين u و v توافقيتان.

برهان. لدينا f تحليلية على D تكافئ u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ، مستمرة و تحقق معادلتى كوشي ريمان

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

نمر للاشتقاق بالنسبة ل x و y نجد

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

إذن أي دالة v قابلة للاشتقاق من الرتبة الثانية فهي تحقق

$$v_{yx} = v_{xy}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0 \text{ ومنه}$$

أي أن u توافقية.

□

1.4 بعض الدوال الأساسية

الدالة الخطية

ليكن $a \neq 0$ و b عدنان مركبان ثابتان. و نعتبر الدالة الخطية $w = f(z) = az + b$

• من أجل $a = 1$ فإن $w = z + b$ عبارة عن انسحاب.

• من أجل $a > 0, b = 0$ فإن $w = az$ تصبح تحاكي معامله a .

- إذا كان $b = 0$ و $|a| = 1$ فإن $w = az$ يكون دوران زاويته $\alpha = \arg a$ حول المبدأ.
- أما في الحالة العامة فإن $w = az + b$ تمثل تحاكي ودوران ثم انسحاب.

الدالة الأسية

نعرف الدالة الأسية $\exp(z) = e^z$ للعدد المركب z كما يلي

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

نلاحظ أن

$$|e^z| = |e^x| |e^{iy}| = e^x > 0$$

كذلك

$$\arg(e^z) = \text{Im}(z) + 2\pi k$$

نظرية 1.4.1: الدالة الأسية دالة تحليلية على كامل \mathbb{C} بحيث

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

الدوال المثلثية

نعرف الدالتين \cos و \sin من أجل كل عدد مركب z كما يلي

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

نظرية 1.4.2: الدالتان \cos و \sin تحليليتان على \mathbb{C} بحيث

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

1.5 المسارات في المستوى

المنحى C أو المسار في المستوى معرف بالتطبيق المستمر

$$Z : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto Z(t) = X(t) + iY(t)$$

• إذا كانت نقطة البداية $Z(a)$ هي نفسها نقطة النهاية $Z(b)$ فإن C يكون مساراً مغلقاً.

• إذا كان المسار C لا يقطع نفسه فإننا نقول أنه مسار بسيط.

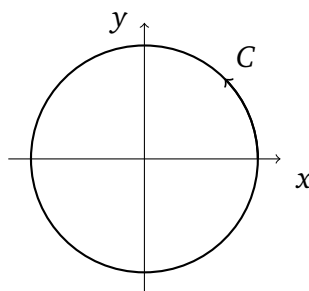
نقول عن C أنه مسار أملس إذا كان $Z'(t)$ مستمر ولا ينعدم على $[a, b]$

مثال 1.5.1

ليكن C مسار معادلته الوسيطة

$$z(t) = \cos(t) + i \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

هو مسار أملس بسيط مغلق



شكل 4.1

1.6 التكامل المركب

لتكن

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

دالة مركبة و C مسار معرف بالمعادلة

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b]$$

تعريف 1.6.1: إذا كانت f مستمرة على C فإن العدد المركب

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

يسمى بالتكامل الخطي للدالة f على طول المسار C .

نظرية 1.6.1: نظرية كوشي كورسات
إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على منطقة بسيطة الترابط D ، فإن

$$\int_C f(z) dz = 0$$

من أجل كل مسار C مغلق بسيط محتوي كلياً في D .

مثال 1.6.1

لتكن $f(z) = \cos z$ ، وبما أن f دالة تحليلية على كامل C فإن

$$\int_C \cos z dz = 0$$

من أجل كل مسار مغلق بسيط C .

صيغة كوشي التكاملية

نظرية 1.6.2:

لتكن f دالة تحليلية في منطقة بسيطة الترابط D ، ومن أجل كل مسار مغلق بسيط C داخل D ، ومن أجل كل نقطة z_0 داخل C لدينا

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

تُستخدم صيغة كوشي التكاملية في حساب بعض تكاملات الدوال من خلال معرفة قيمتها في نقاط معينة.

صيغة كوشي التكاملية المعممة

نظرية 1.6.3:

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة بسيطة الترابط D .
إذا كان C مساراً مغلقاً بسيطاً داخل D فإن

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\varepsilon)}{(\varepsilon - z)^{n+1}} d\varepsilon, \quad n = 0, 1, \dots$$

من أجل أي نقطة z داخل المسار C .

سلاسل القوى الصحيحة

تعريف 1.6.2:

نسمي سلسلة قوى صحيحة كل سلسلة من الشكل

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad (1.1)$$

ذات المركز z_0 حيث $z, z_0 \in \mathbb{C}$ و a_n معاملات مركبة.

نقول عن السلسلة (1) أنها متقاربة ومجموعها S إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n (z - z_0)^n$$

متقاربة إلى S ونكتب

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n = S$$

العدد $R = \frac{1}{L}$ بحيث

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

يسمى نصف قطر تقارب السلسلة (1).
عندئذ تصبح السلسلة (1) متقاربة في المنطقة

$$|z - z_0| < R$$

سلسلة تايلور

نظرية 1.6.4:

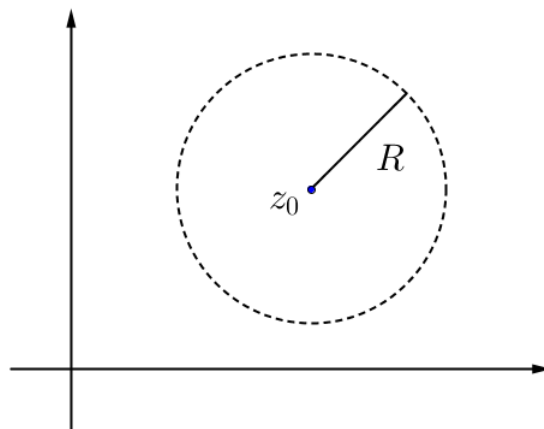
لنفرض أنّ الدالة f تحليلية داخل القرص $|z - z_0| < R_0$ ذو المركز z_0 و نصف القطر R_0 الشكل 3.1. إذن الدالة $f(z)$ تملك تمثيلا بسلسلة قوى

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (|z - z_0| < R_0) \quad (1.2)$$

بحيث

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (1.3)$$

أي أنّ ، السلسلة (1.2) تتقارب نحو $f(z)$ لما z تقع داخل قرص التقارب .
وهذا ما يعرف بتفكيك $f(z)$ إلى سلسلة تايلور عند النقطة z_0 .



شكل 5.1

مع إعتبار أنّ

$$f^{(0)}(z_0) = f(z_0), \quad 0! = 1$$

وبالتالي ، السلسلة (1.2) يمكن أن تكتب على الشكل

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1}(z-z_0) + \dots + \frac{f^n(z_0)}{n}(z-z_0)^n + \dots \quad (|z-z_0| < R_0) \quad (1.4)$$

أي دالة تحليلية عند النقطة z_0 يجب أن تقبل نشر تايلور في جوار z_0 . إذا كانت f تحليلية عند z_0 فهي تكون تحليلية في بعض الجوارات $|z-z_0| < \varepsilon$ لهذه النقطة ، ε يمكن أن تأخذ قيمة R_0 في شروط نظرية تايلور . أيضا ، إذا كانت f تامة ، فإن R_0 يمكن أن يختار كبيرا كفاية و شروط التحقق تصبح $|z-z_0| < \infty$ السلسلة إذن متقاربة إلى $f(z)$ عند كل نقطة z في المستوي \mathbb{C} .

عندما نعلم أنّ f تحليلية مهما كان داخل دائرة ممرّكة عند z_0 ، فإن تقارب سلسلة تايلور حول z_0 إلى $f(z)$ من أجل كل نقطة z داخل هذه الدائرة يكون محقق . لا يتطلب إختبار تقارب لهذه السلسلة . في الواقع ، حسب نظرية تايلور ، السلسلة تتقارب إلى $f(z)$ داخل دائرة ممرّكة في z_0 و نصف قطرها R وهو المسافة من z_0 إلى أقرب نقطة شاذة z_1 لـ f .

من أجل $z_0 = 0$ في هذه حالة نفرض أنّ f تحليلية داخل القرص $|z| < R_0$ و السلسلة (1.3) تصبح سلسلة ماك لورن

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (|z| < R_0) \quad (1.5)$$

سلسلة لوران

إذا كانت f غير تحليلية عند z_0 ، لا نستطيع تطبيق نظرية تايلور عند z_0 . مع ذلك ، غالباً ما يمكن إيجاد تمثيل لـ $f(z)$ يشمل قوى موجبة وسالبة لـ $z-z_0$. نحن نعلم أنّ كل دالة تحليلية $f(z)$ عند z_0 تملك تمثيل بسلسلة قوى $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n$ والتي تكون محققة في جوار ما لـ z_0 . ومنه السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

يمكن اعتبارها سلسلة قوى صحيحة للمتغير $\frac{1}{z-z_0}$.

إذا كان R يمثل نصف قطر تقاربها إذن السلسلة تتقارب مطلقاً من أجل

$$\frac{1}{|z-z_0|} < R$$

أي أنه من أجل

$$|z - z_0| > R_1 = \frac{1}{R}$$

إذن السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

تمثل دالة تحليلية $f_1(z)$ خارج الدائرة $|z - z_0| = R_1$
 لنفرض أيضا أن السلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

لديها نصف قطر تقارب R_2 إذن

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

تكون تحليلية من أجل

$$|z - z_0| < R_2$$

إذا كان $R_2 > R_1$ فإن كل من $f_1(z)$ و $f_2(z)$ تحليليتين في الحلقة $R_1 < |z - z_0| < R_2$ و بالتالي تكون الدالة

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

تحليلية من أجل كل z ينتمي للحلقة

$$R_1 < |z - z_0| < R_2$$

بوضع

$$a_n = b_n$$

يمكننا أن نكتب

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1.6)$$

عبارة من الشكل (4.1) تسمى بسلسلة لوران حول النقطة z_0 .

نظرية 1.6.5: (نظرية لوران)

نفرض أن دالة تحليلية في الحلقة $R_1 < |z - z_0| < R_2$ إذن التمثيل
 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ محقق على طول الحلقة أكثر من ذلك المعاملات تعطى كما
 يلي

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.7)$$

حيث C يمثل أي مسار مغلق بسيط محتوي في الحلقة و الذي يجعل دورة كاملة
 حول z_0 عكس اتجاه دوران عقارب الساعة .

مثال 1.6.2

لنحسب نشر لوران للدالة التالية

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

حول النقطة $z_0 = 0$ ، وذلك في الحلقة $0 < |z| < 1$.
 باستخدام السلسلة الهندسية

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z| < 1$$

إذن

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \left(-\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$$

نحصل على

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = -\left(\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots \right)$$

وهو نشر لوران لـ $f(z)$ في الحلقة $0 < |z| < 1$ ، ويتضمن حدوداً ذات أسس سالبة
 وموجبة، كما هو متوقع في متسلسلة لوران.



الفصل الثاني

الدوال الميرومورفية



2.1 تصنيف النقاط الشاذة المنعزلة

نقول عن دالة وحيدة القيمة أنها تملك نقطة شاذة إذا كانت الدالة ليست تحليلية عند هذه النقطة في حين أن كل جوار لهذه النقطة يحتوي على الأقل نقطة أين تكون الدالة تحليلية. أما إذا كانت الدالة المركبة تحليلية في جوار ما لنقطة بإستثناءها فإننا نقول عن هذه النقطة أنها شاذة منعزلة، وتنقسم النقاط الشاذة المنعزلة إلى ثلاثة أصناف نقاط قابلة للرفع، أقطاب و نقاط أساسية ([4], [6])

نقاط قابلة للرفع

نقول عن نقطة z_0 أنها قابلة للرفع (للإزالة) لدالة مركبة $f(z)$ إذا كانت

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \neq \infty.$$

نظرية 2.1.1: نظرية ريمان للنقاط الشاذة القابلة للرفع
لنفرض أن دالة تحليلية و محدودة في المنطقة

$$D(z_0, R) - \{z_0\} = \{z; 0 < |z - z_0| < R\}.$$

إذن

$$1 - \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ موجودة ومنتبهة.}$$

2- الدالة $g(z)$ المعرفة على $D(z_0, R)$ كما يلي

$$g(z) = \begin{cases} f(z); & z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z), & z = z_0 \end{cases}$$

هي دالة تحليلية

برهان. لنفرض المعطيات، إذن من أجل بعض قيم $R > 0$ الدالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة $0 < |z - z_0| \leq R$ لتكن z_1 داخل هذا القرص و لنختار $r > 0$ بحيث $r < |z_1 - z_0| < R$ الدالة $f(z)$ تحليلية في الحلقة المحدودة بالداائرتين $C: |z - z_0| = R$ و $C_1: |z - z_0| = r$ و

بالتالي حسب صيغة كوشي التكاملية

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta \quad (2.1)$$

نلاحظ أن قيمة (2.1) مستقلة عن اختيار r . سنبرهن أن التكامل الأخير على يمين (2.1) يساوي صفر و ذلك بإثبات أن طويلته تكون صغيرة بالقدر الكافي من أجل قيم صغيرة لـ r بالقدر الذي نريد.

بما أن $f(z)$ محدودة في القرص أي $|f(z)| \leq M$ لدينا

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta \right| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{c_1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|} \leq \frac{M}{2\pi} \frac{2\pi r}{|z_1 - z_0| - r} \rightarrow 0$$

لما $r \rightarrow 0$

وهكذا يمكن كتابة (2.1) كما يلي

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta \quad (2.2)$$

بما أن z_1 كفي في القرص $0 < |z - z_0| < R$ يمكننا كتابة (2.2) على الشكل

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.3)$$

وهي محققة مهما كان z بحيث $0 < |z - z_0| < R$.

لدينا التكامل في يمين العلاقة (2.3) يمثل دالة تحليلية من أجل $|z - z_0| < R$ و بالتالي عن طريق تعريف

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

□

تكون الدالة $f(z)$ تحليلية في كامل القرص $|z - z_0| < R$

نظرية ريمان تنص أن كل دالة والتي تكون تحليلية و محدودة في جوار ما للنقطة بإستثناءها تملك في أسوأ الأحوال نقطة شاذة قابلة للرفع عند هذه النقطة.

وهكذا عندما نتكلم عن $\frac{\sin z}{z}$ كدالة صحيحة، سنفهم أن $f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

لاحظ أن سلسلة ماك لوران بالنسبة لهذه الدالة معرفة بـ

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots, |z| > 0$$

أي أن الجزء الأساسي معدوم.

نظرية 2.1.2: تكون النقطة الشاذة المنعزلة z_0 قابلة للرفع لدالة $f(z)$ إذا فقط إذا كان الجزء الأساسي لنشر لوران لـ $f(z)$ في جوار z_0 معدوماً.

مثال 2.1.1

نأخذ الدالة:

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

الدالة غير معرفة عند $z = 0$ ، لكن نحسب النهاية:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$$

إذن، فإن $z = 0$ نقطة قابلة للإزالة.
بما أن

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

وبالتالي

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots$$

ثم

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{24} + \frac{z^4}{720} - \dots$$

وهذه هي سلسلة لوران حول $z = 0$ ، ولا تحتوي على أي حدود بأسس سالبة، مما يدل على أن $z = 0$ نقطة قابلة للإزالة.

الأقطاب

تعريف 2.1.1:

نسمي النقطة الشاذة المعزولة z_0 قطبا للدالة $f(z)$ إذا كانت

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

تعريف 2.1.2: نقول إن للدالة التحليلية $f(z)$ قطباً من الرتبة n عند النقطة z_0 ، إذا كانت $f(z)$ غير معرفة عند z_0 ، ولكن $(z-z_0)^n f(z)$ تحليلية عند z_0 و $(z-z_0)^{n-1} f(z)$ غير تحليلي.

نظرية 2.1.3: [تمييز القطب] إذا أمكن كتابة الدالة $f(z)$ على الشكل

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$$

حيث $g(z)$ دالة تحليلية في جوار z_0 و $g(z_0) \neq 0$ ، فإن للدالة $f(z)$ قطباً من الرتبة n عند z_0 .

نظرية 2.1.4: [التمثيل بسلسلة لوران] إذا كان للدالة $f(z)$ قطب من الرتبة n عند z_0 ، فإن تمثيلها بسلسلة لوران في جوار z_0 يحتوي على عدد من الحدود ذات الأسس السالبة حتى $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ ، أي

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{k \geq 0} a_k (z-z_0)^k, \quad a_{-n} \neq 0$$

مثال 2.1.2

لنعتبر الدالة

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}$$

نلاحظ أن $z=1$ قطب من الرتبة الثانية، وذلك لأن

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-1)^2}; \quad g(z) = \frac{1}{z+1}$$

الهدف هو إيجاد نشر لوران للدالة $f(z)$ في جوار $z = 1$.
من أجل ذلك نضع

$$w = z - 1 \Rightarrow z = w + 1,$$

تصبح الدالة

$$f(z) = \frac{1}{w^2(w+2)}.$$

باستعمال السلسلة الهندسية نجد

$$\frac{1}{w+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{w}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{w}{2}\right)^n \quad |w| < 2$$

إذاً

$$f(z) = \frac{1}{w^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{w}{2}\right)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} w^{n-2}$$

وبالرجوع إلى المتغير الأصلي

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^{n-2}.$$

ومنه الجزء الأساسي

$$\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{8(z-1)}$$

النقاط الأساسية.

تعريف 2.1.3:

إذا كانت نقطة شاذة منعزلة لدالة ليست قابلة للرفع ولا قطب فإنها تسمى نقطة أساسية أو بمعنى آخر تكون z_0 نقطة أساسية بالنسبة لدالة $f(z)$ إذا كانت $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ غير موجودة.

نظرية 2.1.5: إذا كانت z_0 نقطة أساسية لدالة $f(z)$ ، فإن نشر لوران لـ $f(z)$ في جوار z_0 يتكون من عدد غير منته من الحدود

مثال 2.1.3

نأخذ الدالة التالية:

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z}$$

وهي دالة تحليلية ما عدا في النقطة $z = 0$ ، التي تشكل نقطة أساسية منتهية. نقوم بتفكيك $e^{1/z}$ باستخدام متسلسلة ماكلورين

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n},$$

إذاً

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-(n+1)}$$

وبالتالي، فإن سلسلة لوران للدالة حول $z = 0$ هي

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1!z^2} + \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{3!z^4} + \dots$$

وهي تمثل متسلسلة لوران تحتوي فقط على الحدود ذات القوى السالبة، مما يؤكد أن $z = 0$ نقطة أساسية.

2.2 نظرية البواقي

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في جوار حلقي لـ z_0 ، فإن سلسلة لوران يمكن كتابتها على الشكل

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (0 < |z - z_0| < \delta)$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (n \in \mathbb{Z})$$

حيث C يمثل أي مسار مغلق بسيط حول z_0 و محتوي في الجوار الحلقي، كحالة خاصة يكون لدينا

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

أي أن

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1} \quad (2.4)$$

تعريف 2.2.1:

المعامل a_{-1} يسمى باقي الدالة $f(z)$ عند z_0 ويرمز له بـ

$$\text{Res}[f(z), z_0]$$

المعادلة (2.4) تشير إلى أن حساب تكامل الدالة $f(z)$ على مسار C لا يحتوي نقاط شاذة بخلاف z_0 يكافئ تحديد بعض المعاملات في سلسلة لوران

ملاحظة (1)

إذا كانت z_0 نقطة قابلة للرفع لـ $f(z)$ عندئذ يكون الجزء الأساسي لنشر لوران معدوماً أي أن الباقي أيضاً معدوم.

نظرية 2.2.1:

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية ما عدا في نقطة z_0 ، والتي تمثل قطباً من الرتبة $k \geq 1$. فإن الباقي (Residue) للدالة f عند النقطة z_0 يُحسب بالعلاقة التالية

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-z_0)^k f(z)]$$

إذا كان القطب بسيطاً (أي $k=1$) فإن

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z)$$

ملاحظة

في حالة كون $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ ، حيث $g(z)$ دالة تحليلية عند z_0 و $g(z_0) \neq 0$ ، فإن العلاقة أعلاه تطبق مباشرة لحساب الباقي.

نظرية 2.2.2: النظرية الأساسية للباقي

نفرض أن $f(z)$ دالة تحليلية داخل مسار مغلق بسيط C باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة z_1, z_2, \dots, z_n الواقعة داخل C . إذن

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k]$$

في الواقع، صيغة كوشي التكاملية هي حالة خاصة من نظرية البواقي. من أجل أن نلاحظ هذا، لنفرض أن الدالة $f(z)$ دالة تحليلية داخل وعلى مسار مغلق بسيط C حول z_0 . إذن $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)}$ لديها قطب بسيط عند z_0 شريطة أن يكون $f(z_0) \neq 0$. باقي الدالة $f(z)$ عند z_0 معطى كما يلي

$$\begin{aligned} \text{Res}[g(z), z_0] &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) g(z) \\ &= f(z_0) \end{aligned}$$

و كذلك

$$\begin{aligned} \int_C g(z) dz &= \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \\ &= 2\pi i f(z_0) \end{aligned}$$

إذن صيغة كوشي التكاملية هي حالة خاصة من نظرية البواقي. الحالة الخاصة التالية كثيرة الإستعمال

نظرية 2.2.3: الباقي عند قطب بسيط

لتكن $f(z)$ و $g(z)$ تحليلتان عند z_0 . إذا كان z_0 صفر بسيط لـ $g(z)$ و $f(z_0) \neq 0$ فإنه يكون لنا

$$\text{Res} \left[\frac{f(z)}{g(z)}, z_0 \right] = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

وكذلك

$$\text{Res} \left[\frac{1}{g(z)}, z_0 \right] = \frac{1}{g'(z_0)}.$$

برهان. من المعطيات لدينا z_0 قطب بسيط لـ $\frac{f(z)}{g(z)}$ و منه

$$\text{Res} \left[\frac{f(z)}{g(z)}, z_0 \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} \right) f(z) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

□

2.3 الدوال الميرومورفية

تعريف 2.3.1: نقول عن دالة مركبة f معرفة في منطقة Ω أنها دالة ميرومورفية، إذا وجدت متتالية من النقاط p_1, p_2, \dots إذا رمزنا بـ $\Omega^* = \Omega \setminus \{p_1, p_2, \dots\}$.

$$\bullet \quad f : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C} \text{ دالة تحليلية}$$

$$\bullet \quad f \text{ تملك أقطاب عند النقاط } p_1, p_2, \dots$$

نرمز لمجموعة الدوال الميرومورفية في Ω بـ $M(\Omega)$.

مثال 2.3.1

الدوال التالية هي عبارة عن دوال ميرومورفية

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1} \quad (1)$$

$$h(z) = \frac{e^z}{z} \quad (2)$$

$$g(z) = \frac{1}{\sin(z)} \quad (3)$$

نظرية 2.3.1: مجموعة الدوال الميرومورفية تشكل فضاء على \mathbb{C} .

أي أن من أجل $f, g, h \in M(\Omega)$ لدينا

$$f + g \in M(\Omega) \bullet$$

$$f \cdot g \in M(\Omega) \bullet$$

$$f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h \bullet$$

$$f \pm 0 = f, \quad f \cdot 1 = f \bullet$$

$$\bullet \text{ إذا كانت } f \neq 0 \text{ فإن } \frac{1}{f} \in M(\Omega)$$

نذكر بأن كل دالة تحليلية بحيث تملك عدد منته من الجذور فإنه يمكن كتابتها على شكل جداء عوامل، شيء مماثل يحدث مع الدوال الميرومورفية

نظرية 2.3.2: لتكن $f \in M(\Omega)$ بحيث f تملك فقط عدد منته من الأقطاب

$$\bullet \{m_1, m_2, \dots, m_n\} \text{ ذات الرتبة } \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$$

إذن توجد دالتين تحليليتين $g, h \in H(\Omega)$ بحيث من أجل كل $z \in \Omega \setminus \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$

فإن

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

أكثر من هذا، يمكننا اختيار g و h بحيث $f(z)$ و $g(z)$ لديهما نفس عدد الجذور مع نفس الرتبة،

في حين أن $h(z)$ تملك أصفاراً بالتحديد عند P_1, P_2, \dots, P_n ذات الرتب

$$\bullet m_1, m_2, \dots, m_n$$

برهان. نعرف الدالة g على $\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ بالعلاقة

$$g(z) = \prod_{k=1}^n (z - p_k)^{m_k} f(z)$$

من الواضح أن g دالة تحليلية، أكثر من ذلك بما أن $f(z)$ لديها قطب من الرتبة m_k عند P_k فإن $g(z)$ تكون محدودة في جوار P_k .

ومنه حسب نظرية النقاط شبه القابلة للرفع فإن $g(z)$ يمكن تمديدها كدالة تحليلية على Ω . النظرية إذن تم برهانها مع

$$h(z) = (z - p_1)^{m_1} (z - p_2)^{m_2} \dots (z - p_n)^{m_n}$$

□

ملاحظة (1)

تبقى النظرية صحيحة حتى إذا كانت الدالة الميرومورفية تملك عدد غير منتهي من الأقطاب.

هذه نتيجة من نظرية التحليل الى جداء عوامل لغير تشراس. سنقوم بإثبات هذه النظرية من أجل الحالة الخاصة لما $\Omega = \mathbb{C}$.

التحليل إلى كسر جزئي لدوال الميرومورفية على \mathbb{C}

إذا كانت f تملك قطب من الدرجة m عند P فإن سلسلة لوران يمكن كتابتها على شكل

$$f(z) = Q_P f \left(\frac{1}{z-p} \right) + H_P f(z)$$

بحيث $H_P f$ دالة تحليلية بالقرب من P و $Q_P f(w)$ كثير حدود

$$Q_P f(z) = q_m w^m + \dots + q_{-1} w.$$

بحيث من أجل $n = 1$, $-m$, وكل $\xi \ll 1$ لدينا

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-p|=\xi} \frac{f(z)}{(z-p)^{1-n}} dz$$

الفرق $f(z) - H_P f(z)$ يسمى بالجزء الأساسي لـ $f(z)$ عند P . إذن لدينا النظرية الأساسية التالية.

نظرية 2.3.3: Mittag-Leffler

لتكن $\{P_k\}$ مجموعة متقطعة من النقاط في Ω ، ومن أجل كل k نضع $Q_k(w)$ كثير حدود دون أي حد ثابت. إذن توجد دالة ميرومورفية $f \in M(\Omega)$ مع قطب عند كل P_n وتحليلية أينما كان ما عدا عند P_n مع جزء أساسي عند كل P_k معطى بـ

$$Q_k\left(\frac{1}{z-P_k}\right).$$

أكثر من هذا، كل هذه الدوال الميرومورفية تملك الشكل

$$f(z) = \sum_k \left(Q_k\left(\frac{1}{z-P_k}\right) - q_k(z) \right) + H(z)$$

بحيث كل من $q_k(z)$ و $H(z)$ دوال تحليلية على Ω .
زيادة عن ذلك لدينا

• إذا كانت $\{P_k\}$ متتالية منتهية، إذن يمكننا أخذ $q_k = 0$.

• إذا كانت $\Omega = \mathbb{C}$ و $|P_k| \rightarrow \infty$ إذن يمكننا أخذ كل دالة q_k لتكون كثير حدود.

برهان. نلاحظ أن السلسلة و الدالة على اليمين كلاهما دوريتان و دورهما 1 و منه $H(z)$ دورية و دورها أيضا 1، أي أن

$$H(z+1) = H(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

حسب متطابقة أولر، اذا كان $z = x + iy$ ، فإن

$$\sin \pi z = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} = \sin(\pi x) \cosh(\pi y) + \sinh(\pi y) \cos(\pi x)$$

و منه

$$|\sin \pi z|^2 = \cosh^2(\pi y) - \cos^2(\pi x) \geq \cosh^2(\pi y) - 1 \rightarrow \infty$$

بانتظام لما $|y| \rightarrow \infty$

كنتيجة فإن $f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ تتقارب بانتظام نحو 0 لما $|y| \rightarrow \infty$.

لكن السلسلة نشتك في هذه الخاصية .

بالفعل، بما أن السلسلة تتقارب بانتظام في المنطقة $|y| \geq 1$ يمكننا النهاية النقطية، و من الواضح أن $(Z-n)^{-2} \rightarrow 0$ بانتظام لما $|y| \rightarrow \infty$.
 كنتيجة أن $H(Z)$ تتقارب بانتظام نحو 0 لما $|y| \rightarrow 0$ و كحالة خاصة فإن $H(Z)$ محدودة في الشريط $\{Z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Re}(Z) \leq 1\}$.

بما أن H دورية ينتج أن H دالة صحيحة محدودة و بالتالي ثابتة حسب ليوفيل، بما أن $\lim_{y \rightarrow 0} H(iy) = 0$

□



الفصل الثالث

الدوال المطابقة



تعتبر الدوال المطابقة (Conformal mapping) من الأدوات القوية في التحليل المركب وذلك بسبب ميزتها وهي الحفاظ على الزوايا مما تسمح بتحويل مناطق مركبة معقدة إلى أخرى أبسط مع الحفاظ على الخصائص الهندسية المهمة. في هذا الفصل، نعرف الدوال الحافظة للزوايا مع ذكر أهم خصائصها ([2], [3], [6], [7])

3.1 الزاوية بين مسارين

ليكن C مسار أملس معادلته الوسيطة

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b]$$

و ليكن نقطة $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ من المسار C ، إذن نعرف العدد الحقيقي θ_0 زاوية ميل شعاع المماس للمسار C عند z_0 كما يلي

$$\theta_0 = \arg z'(t_0)$$

الآن نعتبر الدالة $w = f(z)$ والمعرفة مهما كان z من المسار C ، فإن معادلة المسار Γ (صورة المسار C بالدالة $f(z)$) معطاة بـ

$$w(t) = f[z(t)] = u(t) + iv(t), \quad t \in [a, b]$$

بالمثل، فإن العدد الحقيقي

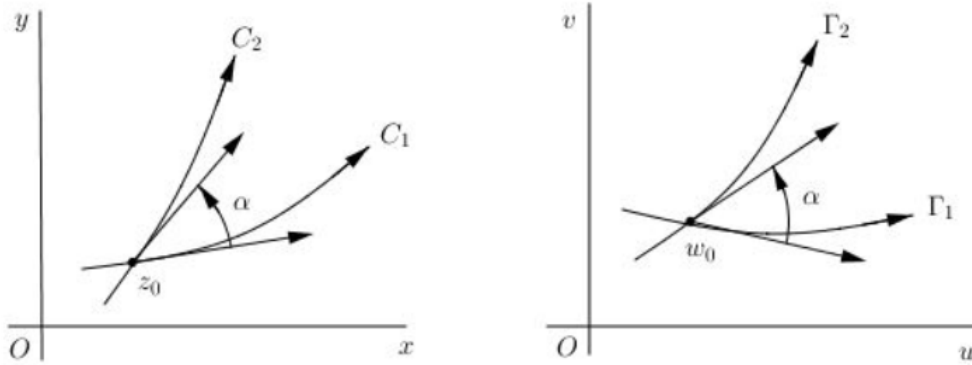
$$\varphi = \arg w'(t_0)$$

هو زاوية ميل شعاع المماس للمسار Γ عند $w_0 = f(z_0)$ ليكن C_1 و C_2 مسارين أملسين يتقاطعان في النقطة z_0 ، ولتكن θ_1 و θ_2 زاويتي ميل أشعة المماس لـ C_1 و C_2 عند z_0 على التوالي. نعرف الزاوية بين المسارين C_1 و C_2 في z_0 لتكون

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = \arg z'_2(t_0) - \arg z'_1(t_0)$$

نعتبر المسارين Γ_1 و Γ_2 صورتين C_1 و C_2 بالدالة $w = f(z)$ ، المتقاطعان في $w_0 = f(z_0)$. الزاوية بين Γ_1 و Γ_2 تكون عندئذ الزاوية

$$\varphi = \arg w'_2(t_0) - \arg w'_1(t_0)$$



شكل 1.3

إذا كانت الزاوية θ بين Γ_1 و Γ_2 هي نفسها الزاوية θ بين C_1 و C_2 في القيمة والجهة ، نقول في هذه الحالة أن الدالة $w = f(z)$ دالة حافظة للزوايا.

تعريف 3.1.1: نقول عن دالة مركبة $w = f(z)$ معرفة في منطقة D أنها دالة حافظة للزوايا (مطابقة conformal) عند النقطة $z_0 \in D$ إذا كانت تحافظ على الزاوية (في القيمة والجهة) بين كل مسارين أملسين يمران عبر z_0 . زيادة على هذا، إذا كانت الدالة $w = f(z)$ تُحوّل المنطقة D من المستوي Z إلى منطقة D' من المستوي w ، وكانت $w = f(z)$ مطابقة عند كل نقطة من D . فإننا نقول عن f أنها دالة مطابقة من D نحو D' .

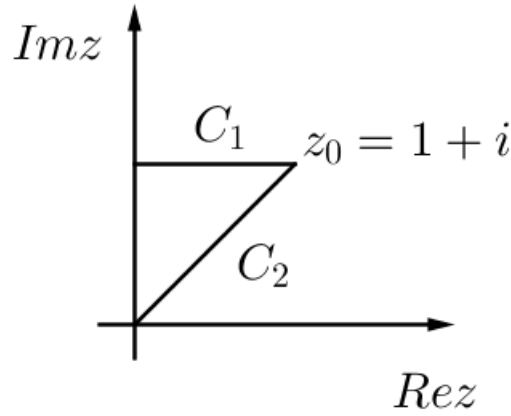
مثال 3.1.1

لنعتبر المسارين

$$C_1 : z_1(t) = t + i, \quad t \in [0, 1]$$

$$C_2 : z_2(t) = t + it, \quad t \in [0, 1]$$

المساران C_1 و C_2 يتقاطعان في النقطة $z_0 = z_1(1) = z_2(1) = 1 + i$ كما هو موضح في الشكل المقابل



شكل 2.3

الزاوية بين المسارين C_1 و C_2 هي الزاوية

$$\theta = \arg z_2'(1) - \arg z_1'(1)$$

إذاً

$$\theta = \arg(1 + i) - \arg(1) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

- لتكن $w = z^2$ ، ومنه صورة المسارين C_1 و C_2 هما المسارين

$$\Gamma_1 = w(t) = f(z_1(t)) = (t + i)^2 = t^2 - 1 + 2it, \quad t \in [0, 1]$$

$$\Gamma_2 = w(t) = f(z_2(t)) = (t + it)^2 = 2it^2, \quad t \in [0, 1]$$

و المتقاطعان في النقطة

$$w_0 = f(z_0) = (1 + i)^2 = 2i$$

الزاوية بين المسارين Γ_1 و Γ_2 في $w_0 = 2i$ معطاة بـ

$$\phi = \arg(4i) - \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

نلاحظ أن $\phi = \theta$ ومنه الدالة $w = z^2$ هي دالة حافظة للزاوية بين المسارين المتقاطعين في $z_0 = 1 + i$

نظرية 3.1.1: إذا كانت $w = f(z)$ دالة تحليلية عند z_0 ، وكانت $f'(z_0) \neq 0$ فإن f دالة مطابقة في z_0 .

برهان. لنفرض أن المسارين

$$c_1 : z_1 = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b]$$

و

$$c_2 : z_2 = x(\tau) + iy(\tau), \quad \tau \in [a, b]$$

متقاطعان عند نقطة z_0 ، و منه الزاوية بين C_1 و C_2 في z_0 هي

$$\theta = \arg z'_2(t_0) - \arg z'_1(t_0)$$

المساران و هما صورتني C_1 و C_2 بالدالة $w = f(z)$ و المعرفين بالمعادلتين

$$\Gamma_1 : w_1(t) = f[z_1(t)], \quad t \in [a, b]$$

$$\Gamma_2 : w_2(\tau) = f[z_2(\tau)], \quad \tau \in [a, b]$$

متقاطعين في النقطة $w_0 = f(z_0)$ الزاوية بين Γ_1 و Γ_2 في معرفة ب

$$\phi = \arg w'_2(t_0) - \arg w'_1(t_0)$$

إذا كانت

$$w(t) = f[z(t)]$$

فإن

$$w'(t) = z'(t)f'[z(t)]$$

ومنه

$$\arg w'(t) = \arg z'(t) + \arg f'[z(t)]$$

ينتج لنا عندئذ أن

$$\phi = \arg z'_2(t_0) + \arg f'(z_0) - \arg z'_1(t_0) - \arg f'(z_0) = \arg z'_2(t_0) - \arg z'_1(t_0) = \theta$$

□

إذن f دالة مطابقة عند z_0 .

مثال 3.1.2

لنعتبر الدالة

$$f(z) = \cos z$$

هذه دالة صحيحة بحيث

$$f'(z) = -\sin z$$

$$f'(z_0) = 0 \iff \sin z = 0 \iff z_k = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

إذن f دالة مطابقة في $\mathbb{C} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

نظرية 3.1.2: إذا كانت $w = f(z)$ دالة تحليلية عند نقطة z_0 بحيث

$$f'(z_0) = 0, \quad f''(z_0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

فإن f تكبر الزاوية بين كل مسارين متقاطعين في z_0 بمقدار m مرة.

مثال 3.1.3

لتكن $f(z) = z^2$ ، ومنه الدالة f دالة صحيحة بحيث $f'(z) = 2z$ لدينا

$$f'(z) = 0 \iff z = 0$$

كذلك

$$f''(z) = 2 \neq 0$$

إذن f تكبر الزاوية بين كل مسارين متقاطعين في $z_0 = 0$ بمقدار الضعف.

3.2 الدالة العكسية المحلية

نظرية 3.2.1: إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية، فإن $w = f(z)$ يكون لديها دالة عكسية في جوار كل نقطة z بحيث $f'(z) \neq 0$.

برهان. إذا كانت $z = x + iy$ و $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$ ، فإن الشرط على $f(z)$ حتى يكون لديها دالة عكسية هو أن يكون محدد المصفوفة اليعقوبية للتحويل يختلف عن 0.

أي أن،

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y \neq 0$$

بما أن $w = u + iv = f(z)$ دالة تحليلية، فإن u و v يحققان معادلتى Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \quad \text{و} \quad u_y = -v_x$$

وبالاستبدال في المحدد J ، نحصل على

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |u_x + iv_x|^2 = |f'(z)|^2$$

ومنه الشرط على وجود الدالة العكسية للتحويل $w = f(z)$ ، عندما تكون f دالة تحليلية، يصبح $|f'(z)| \neq 0$ بمعنى، في جوار كل نقطة، بحيث تكون مشتقة التحويل لا تساوي صفر.

□ النقاط الخاصة والتي من أجلها تكون $f'(z) = 0$ تُعرف بالنقاط الحرجة للتحويل.

نظرية 3.2.2: صورة دالة توافقية $h(x, y)$ تبقى دالة توافقية بواسطة تحويل واحد لواحد مطابق $w = f(z)$.

برهان. بما أن $w = f(z)$ متباين، فإن التحويل العكسي $z = f^{-1}(w)$ يكون موجوداً، ليكن $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

وبما أن $w = f(z)$ تحويل محافظ، فإن $f'(z)$ موجودة وتختلف عن 0. ومنه

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{f'(z)}$$

موجود عند كل نقطة. إذن $f^{-1}(w)$ تحويل تحليلي. ليكن $g(x, y)$ المرافق التوافقي لـ $h(x, y)$ ، إذن:

$$h + ig = H(z)$$

بحيث H دالة تحليلية. بواسطة $w = f(z)$ هذا يصبح

$$h + ig = H[f^{-1}(w)]$$

والذي هو دالة تحليلية لأن H و f^{-1} تحليليتان وبالتالي الجزء الحقيقي والتحيلي توافقيتان وعليه $h[x(u, v), y(u, v)]$ دالة توافقية. □

أحد أهم الأسباب لدراسة التحويلات الحافظة للزوايا هو أن الحلول لمعادلة لابلاس في البعد 2 تبقى حلول لابلاس عندما تُطبق على تحويلات حافظة. أكثر دقة، لدينا النظرية التالية.

نظرية 3.2.3: إذا كانت $\phi(x, y)$ حلا للمعادلة

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

إذن عندما نُحوّل $\phi(x, y)$ إلى دالة لـ u و v بواسطة تحويل مطابق $w = f(z)$ ، فإنها تحقق المعادلة

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = 0$$

أينما كان، باستثناء احتمال عند صورة النقطة z بحيث

$$f'(z) = 0.$$

برهان. لتكن $w = u(x, y) + iv(x, y)$ تعرف تحويل محافظ (مطابق)، والذي من خلاله

الدالة $\phi(x,y)$ تحول إلى دالة ل u و v إذن

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

و

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

بالإشتقاق للمرة الثانية بنفس الكيفية نتحصل على

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.2)$$

بالجمع نجد

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ &\quad + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial \phi}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

بما أن $w = u + iv$ دالة تحليلية فإن u و v توافقيتين كذلك u و v تحققان معادلتى Cauchy-Riemann و منه

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{-\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right] \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= |f'(z)|^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

إذن، عند كل نقطة أين يكون التحويل محافظ، أي أن $f'(z) \neq 0$ ، فإن

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = 0$$

□

3.3 التحويلات الخطية الكسرية

تعريف 3.3.1:

نقصد بالتحويل الخطي الكسري (أو تحويل موبوس) التحويل الذي عبارته من الشكل

$$w = \frac{az + b}{cz + d}; \quad ad - bc \neq 0$$

بحيث a, b, c, d تنتمي إلى \mathbb{C}

نظرية 3.3.1: التحويلات ثنائية الخطية تحول المستوي المركب الممدد $\bar{\mathbb{C}}$ إلى نفسه، كما تحول المستقيمت والدوائر إلى مستقيمت أو دوائر، وهي تحويلات مطابقة (حافضة للزوايا).

الآن، ليكن T_1 و T_2 تحويلين كسريين خطيين بحيث عبارتهما

$$w = T_1(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$\xi = T_2(z) = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$$

إذن التركيب $T_2 T_1$ هو أيضا تحويل كسري خطي بحيث عبارته معطاة كما يلي

$$\xi = \frac{\alpha \frac{az + b}{cz + d} + \beta}{\gamma \frac{az + b}{cz + d} + \delta} = \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)}$$

لاحظ أن المعاملات يمكن الحصول عليها عن طريق ضرب المصفوفتين للتحويلين T_1 و T_2 كما يلي

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

بحساب المحدد نحصل على

$$(\alpha a + \beta c)(\gamma b + \delta d) - (\alpha b + \beta d)(\gamma a + \delta c) \neq 0.$$

إذا كانت T_1 ، T_2 و T_3 ثلاثة تحويلات كسرية خطية، فإن

$$T_3(T_2 T_1) = (T_3 T_2) T_1.$$

وذلك لأن ضرب المصفوفات يحقق الخاصية التجميعية.
التحويل الكسري الخطي T_0 الذي عبارته $w = z$ يمثل التحويل المحايد، ومنه من أجل أي تحويل كسري T لدينا $TT_0 = T_0T = T$

في الأخير، إذا كانت عبارة التحويل T معطاة بـ $z = \frac{-dw + b}{cw - a}$ فإن التحويل T^{-1} الذي عبارته $w = \frac{az + b}{cz + d}$ يسمى معاكس T أي أن $TT^{-1} = T^{-1}T = T_0$.

3.4 النقاط الصامدة للتحويل الكسري الخطي

ليكن T تحويل كسري خطي بحيث

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

إذا كان $c = 0$ فإن ∞ هي نقطة صامدة بالتحويل T وذلك لأن $T(\infty) = (\infty)$.

على وجه الخصوص إذا كان $c = 0$ و $\frac{a}{d} \neq 1$ ، فإن كل من النقطتين ∞ و $\frac{b}{d-a}$ هما النقطتين الصامدتين الوحيدتين بالتحويل T ، لأن

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

ومنه

$$T(z) = z \Leftrightarrow \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z.$$

$$\Leftrightarrow az + b = dz.$$

$$\Leftrightarrow (a-d)z = -b \Leftrightarrow z = \frac{-b}{a-d}.$$

إذا كان $c = 0$ و $\frac{a}{d} = 1$ يصبح التحويل $T(z) = z + b$ إنسحاباً، وبالتالي النقطة ∞ هي النقطة الصامدة الوحيدة.

في الحالة العامة، بوضع $T(z) = z$ نجد $z = \frac{az + b}{cz + d}$ ومنه ينتج لنا $cz^2 - (a-d)z - b = 0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية ($c \neq 0$) تملك حلين منتهيين. (يمكن أن يكون حلاً مضاعفاً)، وهكذا نتحصل على النظرية التالية.

نظرية 3.4.1: كل تحويل كسري خطي يختلف عن الصفر لديه على الأكثر نقطتين صامدتين. على وجه الخصوص، إذا كان التحويل الكسري يملك ثلاثة نقط صامدة فهو التطبيق المحايد.

نظرية 3.4.2: يمكن تحويل ثلاثة نقط مختلفة z_1, z_2, z_3 إلى ثلاثة نقط مختلفة w_1, w_2, w_3 على التوالي بواسطة تحويل كسري واحد وحيد.

البرهان 1.3.4.

ليكن T_1 و T_2 تحويلين كسريين معرفين كما يلي

$$T_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

$$T_2(z) = \frac{z - w_1}{z - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$

نلاحظ أن التحويل T_1 يحول النقط z_1, z_2, z_3 إلى النقط $0, 1, \infty$ على التوالي شرط أن تكون z_1, z_2, z_3 نقط منتهية، وبالمثل فإن T_2 يحول النقط w_1, w_2, w_3 إلى النقط $0, 1, \infty$.

• إذا كان $z_1 = \infty$ فإننا نضع $T_1(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$

• إذا كان $z_2 = \infty$ فإن $T_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$

• إذا كان $z_3 = \infty$ فإن $T_1(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

ونفس العمل بالنسبة لـ T_2 . إذن التحويل $T = T_2^{-1}T_1$ يحول النقط z_1, z_2, z_3 إلى النقط w_1, w_2, w_3 على التوالي.

لنفرض أن S تحويل كسري يحول النقط z_1, z_2, z_3 إلى النقط w_1, w_2, w_3 على الترتيب. إذن التحويل $S^{-1}T$ يمثل التحويل المحايد أي أن $S = T$.

3.5 النسبة الثنائية

ليكن z_1, z_2, z_3, z_4 أربعة نقط من المستوي المركب الممدد $\bar{\mathbb{C}}$ النسبة المزدوجة لهذه النقط نرمز لها بـ (z_1, z_2, z_3, z_4) المعرفة

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

بحيث إذا كانت ∞ إحدى هذه النقط، فإن العاملين اللذين يحتويان هذه النقطة يحذفان.

نظرية 3.5.1: النسبة الثنائية لأربعة نقط لا تتغير بواسطة تحويل كسري خطي.

البرهان 1.3.5

ليكن $w = \frac{az + b}{cz + d}$ تحويل كسري خطي ولتكن w_i هي صور النقط z_i بحيث $i = 1, \dots, 4$. إذن

$$w_i - w_j = \frac{az_i + b}{cz_i + d} - \frac{az_j + b}{cz_j + d} = \frac{(ad - bc)(z_i - z_j)}{(cz_i + d)(cz_j + d)}$$

والتي منها ينتج لنا

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

خاصية 3.5.1:

لتكن z_1, z_2, z_3 ثلاثة نقط متميزة وليكن $\lambda \in \mathbb{C}$ بحيث $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ ، $1 \neq \lambda \neq 0$. ومنه توجد نقطة وحيدة z_4 بحيث $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$ لأنه إذا كان

$$\lambda = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

فإنه يمكننا حل هذه المعادلة للجهول z_4 . بوضع $\mu = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ نحصل على

$$z_4 = \frac{\mu z_2 - \lambda z_1}{\mu - \lambda}.$$

3.6 بعض التحويلات الخطية الكسرية

لنعتبر الآن بعض التحويلات الخطية الكسرية. أولا سنجد عبارة التحويل الكسري الخطي والذي يحول نصف المستوي العلوي $\{z \in \mathbb{C}, \text{Im}z \geq 0\}$ إلى كرة الوحدة $\{w \in \mathbb{C}, |w| \leq 1\}$. بما أن التحويلات الكسرية الخطية تحول المستقيمت إلى مستقيمت أو دوائر، فإن صورة المحور الحقيقي يجب أن تكون دائرة.

وبما أن المحور الحقيقي يمثل حدودية نصف المستوي العلوي والتحويل الكسري الخطي تحويل مستمر، فإن صورة المحور الحقيقي يجب أن تكون دائرة الوحدة $|w| = 1$ على وجه الخصوص، إذا كانت عبارة التحويل هي

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

فإن $|T(0)| = |T(\infty)| = 1$. ومنه يجب أن يكون $|a| = |c|$ و $|b| = |d|$. بما أن $\left|\frac{a}{c}\right| = 1$ فإنه يمكننا أن نكتب $\frac{a}{c} = e^{i\theta}$ ومنه عبارة T تصبح

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}}$$

وبما أنه لدينا أيضا $|b| = |d|$ ، فإننا نحصل على $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{d}{c}\right|$ وإذا كان x أي عدد حقيقي، فإن $|T(x)| = 1$ ومنه $\left|x + \frac{b}{a}\right| = \left|x + \frac{d}{c}\right|$ وبالتالي

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)\left(x + \frac{\bar{b}}{a}\right) = \left(x + \frac{d}{c}\right)\left(x + \frac{\bar{d}}{c}\right)$$

أو

$$\left(\frac{b}{a} + \frac{\bar{b}}{a}\right)x = \left(\frac{d}{c} + \frac{\bar{d}}{c}\right)x$$

بحيث $\left(\frac{b}{a} + \frac{\bar{b}}{a}\right) = 2\text{Re}\left(\frac{b}{a}\right)$ وبالمثل بالنسبة ل $\frac{d}{c}$ ، وهكذا $\frac{b}{a}$ و $\frac{d}{c}$ لديهما نفس الجزء الحقيقي

ونفس الطويلة. إذن ينتج لنا إما $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ أو $\frac{b}{a} = \frac{\bar{d}}{c}$. إذا كان $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ فإن التحويل يصبح

$T(z) = e^{i\theta} = cst$ ، أما إذا كان $\frac{b}{a} = \frac{\bar{d}}{c}$ نضع $z_0 = \frac{-b}{a}$ لنحصل على

$$T(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

هذا هو التحويل الكسري المطلوب شريطة أن تكون z_0 تقع في نصف المستوى العلوي، لكن إذا كانت z_0 كانت تقع في نصف المستوى السفلي، فإن نصف المستوى العلوي يحول إلى خارجية دائرة الوحدة.

باستعمال هذه الطريقة يمكننا إيجاد الشكل العام لعبارة التحويل الكسري الخطي الذي يحول قرص الوحدة إلى نصف المستوى العلوي. بأخذ $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ قرص الوحدة و $\{\zeta \in \mathbb{C}, \text{Im}\zeta \geq 0\}$ نصف المستوى العلوي، نتحصل على

$$\zeta = T^{-1}(z) = \frac{\bar{z}_0 \cdot z - e^{i\theta} z_0}{z - e^{i\theta}}$$

نعتبر الآن تحويل ثابت عبارته مثل هذا الأخير، على سبيل المثال

$$\zeta = S(z) = -i \frac{z-1}{z+1}$$

إذن التحويل

$$U(z) = T(\zeta) = TS(z)$$

يحول قرص الوحدة إلى قرص الوحدة. بما أن $T = US^{-1}$ هو التحويل الكسري الخطي في الشكل العام الذي يحول نصف المستوى العلوي إلى قرص الوحدة، فإن التحويل U هو التحويل الكسري الخطي الذي يحول قرص الوحدة إلى قرص الوحدة. إيجاد عبارة التحويل U ، لدينا

$$\begin{aligned} U(z) &= e^{i\theta} \frac{-i \frac{z-1}{z+1} - z_0}{-i \frac{z-1}{z+1} - \bar{z}_0} \\ &= e^{i\theta} \frac{-(z_0+i)z - (z_0-i)}{-(\bar{z}_0+i)z - (\bar{z}_0-i)} \\ &= e^{i\theta} \frac{(z_0+i)(-1)}{(1-\bar{z}_0i)(-i)} \cdot \frac{z + \frac{z_0-i}{z_0+i}}{\left(-\frac{\bar{z}_0+i}{z_0-i}z - 1\right)} \end{aligned}$$

نلاحظ أن $\left| \frac{z_0-i}{z_0+i} \right| < 1$ ، وذلك لأن z_0 تقع في نصف المستوى العلوي، وهكذا، بوضع $z_1 = -\frac{z_0-i}{z_0+i}$ نتحصل على

$$U(z) = e^{i\theta} \frac{z-z_1}{\bar{z}_1 z - 1}$$

بحيث \emptyset عدد حقيقي و z_1 يقع في قرص الوحدة المفتوح.

لنعتبر مسألة البحث عن التحويل الكسري الخطي الذي يحول نصف المستقيم العلوي إلى نفسه مسألة بسيطة.

إذا كانت النقطة ∞ نقطة صامدة، فإن $w = az + b$ بحيث $a > 0$ و $b \in \mathbb{R}$ يحول نصف المستوي العلوي إلى نفسه.

على العموم، بما أن المحور الحقيقي يجب أن يحول إلى المحور الحقيقي.

لتكن النقط $0, 1$ و ∞ هي صورة الأعداد الحقيقية x_1, x_2 و x_3 على الترتيب. بحساب النسبة المزدوجة

$$(w, 1, 0, \infty) = (z, x_2, x_1, x_3).$$

نجد

$$w = \frac{z - x_1}{z - x_3} \cdot \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1}$$

بما أن التحويل يحول نصف المستوي العلوي إلى نفسه فإن الجزء التخيلي لصورة i يجب أن يكون موجب. إذن

$$\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_1 - x_3}{x_3^2 + 1} > 0.$$

وهكذا، نكتب التحويل على الشكل $w = \frac{az + b}{cz + d}$ بحيث المحدد $ad - bc$ للتحويل يكون موجب. على وجه الخصوص يمكننا أن نكتب $w = \frac{az + b}{cz + d}$ بحيث $ad - bc > 0$ و a, b, c و d أعداد حقيقية.

إذن T يحول نصف المستوي العلوي إلى نفسه إذا وفقط إذا كان عبارته $w = \frac{az + b}{cz + d}$ بحيث a, b, c و d أعداد حقيقية.



الفصل الرابع

تفكيك بعض الدوال الميرومورفية إلى كسور جزئية



4.1 الدوال المتسامية و الدوال الميرومورفية - الدوال المثلثية

سندرس الدوال الميرومورفية (غير الناطقة) المتسامية التالية

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

وهي دوال ميرومورفية من الشكل العام

$$F(z) = \frac{P(e^{iz})}{Q(e^{iz})} = \frac{a_0 + a_1 e^{iz} + \dots + a_m e^{imz}}{b_0 + b_1 e^{iz} + \dots + b_n e^{inz}} \quad I$$

إذن الدوال المثلثية هي دوال ناطقة للمتغير الأسّي e^{iz} نحصل على نفس الصنف بإعتبار الدوال و التي يمكن تمثيلها على الشكل

$$F(z) = \frac{\sum_{j=-m}^m a_j e^{ijz}}{\sum_{k=-n}^n b_k e^{ikz}}, \quad i = (0, 1)$$

و التي يمكن كتابتها على الشكل

$$F(z) = \frac{a_0 + \sum_{j=1}^m [(a_j + a_{-j}) \cos(jz) + i(a_j - a_{-j}) \sin(jz)]}{b_0 + \sum_{k=1}^n [(b_k + b_{-k}) \cos(kz) + i(b_k - b_{-k}) \sin(kz)]}$$

$$F(z) = \frac{a_0 + \sum_{j=1}^m (A'_j \cos(jz) + iA''_j \sin(jz))}{b_0 + \sum_{k=1}^n (B'_k \cos(kz) + iB''_k \sin(kz))}$$

في الحالة الخاصة لما يكون المقام ثابت، يمكننا أخذ $b_0 = 1$ نحصل على كثير حدود مثلثي

$$F(z) = a_0 + \sum_{j=1}^m (A'_j \cos(jz) + iA''_j \sin(jz))$$

إذا كان على الأقل أحد العددين A'_m أو A''_m غير معدوم، فإن $F(z)$ يصبح كثير حدود مثلثي من الدرجة m .
بالتأكيد، كل دالة مثلثية تكون دورية و دورها 2π و منه يكفي دراسة سلوكها في أي شريط

$$G : x_0 \leq x \leq x_0 + 2\pi$$

عندما يغير z في الشريط G (والذي يشمل المستقيم $x = x_0$) فإن $z_i = iz$ يتغير في الشريط :

$$G : x_0 \leq y < x_0 + 2\pi$$

بوضع $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ في (I) نجد

$$f(z) = R(e^{iz})$$

لنفرض أن درجة كثيري الحدود $P(t)$ و $Q(t)$ هما من الدرجتين m و n على التوالي، فإن الدالة الناطقة $R(t)$ تكون من الرتبة $N = \max(m, n)$.
إذن، من أجل عدد مركب A ، المعادلة

$$R(t) = A \quad \text{II}$$

تملك N جذر في المستوى المركب الممدد، ويوجد على الأكثر $m+n$ قيمة لـ A بحيث يمكن للمعادلة (II) أن تملك جذوراً مضاعفة.
مع ذلك، فبالنسبة لحالتنا، فإن القيمتين $t = 0 \wedge t = \infty$ مستبعدتان، لأنهما قيمتان غير ممكنتين بالنسبة للدالة $t = e^{iz}$.
إذن، يمكننا فقط ضمان أن المعادلة (II) تملك N جذر (بعضها قد يكون مضاعفاً) لكل قيمة نأخذها A ، مع إمكانية استثناء القيمتين $R(0) \wedge R(\infty)$.
وبما أن العلاقة بين z و t هي علاقة واحد لواحد في الشريط G ، وبما أن سلوك الدالة $z = e^{it}$ يكون مطابقاً في جميع الأشرطة G_k حيث $k = 0, \pm 1, \dots$ و $G_0 = G$.

نظرية 4.1.1: إذا كانت

$$f(z) = R(e^{iz})$$

حيث R ليست دالة ثابتة، وكانت $f(z)$ دالة مثلثية، فإن المعادلة

$$f(z) = A$$

تملك عدداً غير منته من الجذور من أجل كل عدد مركب A ، مع إمكانية استثناء القيمتين $R(0)$ و $R(\infty)$ ، اللتين من أجلهما قد لا تملك المعادلة جذوراً إطلاقاً.

مثال 4.1.1

لتكن $f(z) = e^{inz}$ ومنه

$$t = e^{iz} \quad \text{بحيث} \quad R(t) = t^n$$

4.2 تفكيك دوال ميرومورفية تملك أقطاب بسيطة

كحالة خاصة لنظرية كوشي [8] تنص على أنه إذا كانت جميع الأقطاب z_n لدالة ميرومورفية $f(z)$ ، والتي تكون تحليلية عند $z = 0$ ، أقطاباً بسيطة ولها قيم مطلقة متزايدة،

$$|z_1| < |z_2| < |z_3| < \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

وإذا كانت $f(z)$ محدودة

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in C_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1)$$

بحيث $M > 0$ و C_n نظام منتظم من المسارات (سيتم تعريفه لاحقاً)، فإن الصيغة التالية تكون صحيحة

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \text{Res}_{z=z_n} f(z) \quad (4.2)$$

لقد تم الحصول على التفكيك إلى كسور جزئية للعديد من الدوال الأساسية الميرومورفية مثل

$$\frac{1}{\sin z}, \frac{1}{\cos z}, \frac{\sin az}{\sin z}, \frac{\sin az}{\cos z}, \frac{\cos az}{\cos z}, \frac{\cos az}{\sin z}, \tan z, \cot z, \quad (4.3)$$

حيث $|a| < 1$ ، وكذلك الدوال الزائدية المرافقة لها بواسطة العلاقة (4.2). إذا كانت الدالة $f(z)$ تملك قطباً عند $z = 0$ (مثل $\frac{1}{\sin z}$ أو $\cot z$)، فلتطبيق الصيغة (4.2)، ينبغي اعتبار الفرق

$$f(z) - g(z; 0)$$

بدلاً من $f(z)$ ، حيث $g(z; 0)$ يمثل الجزء الأساسي لنشر لوران للدالة $f(z)$ المتمركزة في $z = 0$. فعلى سبيل المثال، بدلاً من $\frac{1}{\sin z}$ و $\cot z$ ، ينبغي اعتبار على التوالي

$$\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}, \quad \cot z - \frac{1}{z}$$

في هذا الجزء، يُستبدل الشرط (4.1) بالشرط

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad (4.4)$$

وبدلاً من الصيغة (4.2)، الصيغة البسيطة التالية

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - z_n} \text{Res}_{z=z_n} f(z) \quad (4.5)$$

لقد تم الإثبات على أن الدوال المذكورة في (4.3) و تحقق الشرط (4.4)، أنها تملك تفكيكاً إلى كسور جزئية بواسطة العلاقة (4.5). التفكيك الناتج عن هذه الطريقة يتطابق مع التفكيك الناتج عن الصيغة الأبسط (4.2). ميزة الصيغة (4.5) على الصيغة (4.2) هي أنه حتى لو كان لـ $f(z)$ قطب بسيط عند $z = 0$ ، فلا حاجة لبناء دالة مساعدة تكون تحليلية عند $z = 0$.

تعريف 4.2.1:

نقول عن نظام المسارات C_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) أنه منتظم إذا كانت الشروط الثلاثة التالية محققة

(a) المسار C_1 يحتوي على النقطة $z = 0$ و كل مسار C_n يقع داخل المنطقة المحددة بواسطة المسار C_{n+1} .

(b) المسافة d_n من C_n إلى المركز تتزايد دون حد لما n يتزايد.

(c) نسبة الطول l_n للمسار C_n تبقى محدودة

$$\frac{l_n}{d_n} \leq A \quad \text{حيث } A > 0 \text{ ثابت}$$

نلاحظ أن النسبة في (c) تساوي 2π من أجل الدائرة $|z| = R$ ، و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ للمربع الذي يكون مركزه المبدأ.

نظرية التفكيك إلى كسور جزئية

سنقوم بإثبات النظرية التالية، والتي هي حالة خاصة من النظرية المبرهنة في [4]

نظرية 4.2.1: لنفترض أن دالة ميرومورفية تحقق الشرط التالي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad (4.6)$$

وذلك بالنسبة لنظام منتظم من المسارات C_n . نفترض أيضاً أن الأقطاب z_k للدالة $f(z)$ هي أقطاب بسيطة وذات طول متزايد

$$|z_1| < |z_2| < |z_3| < \dots < |z_k| < \dots$$

إذن، فإن صيغة التفكيك إلى كسور جزئية (4.5) تكون محققة من أجل كل z بحيث $z \neq z_k$ (حيث $k = 1, 2, 3, \dots$) و $z \notin C_n$ حيث $n = 1, 2, \dots$.

برهان. نعتبر التكامل التالي

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (4.7)$$

حيث إن z نقطة ثابتة لكنها عشوائية وتقع داخل المسار المغلق C_n ومتميزة عن أي من الأقطاب z_k للدالة $f(\zeta)$. إن الدالة تحت التكامل في المعادلة (4.7) تحتوي على أقطاب بسيطة عند $\zeta = z$ وعند $\zeta = z_k$ داخل المنطقة G_n المحصورة بالمسار C_n . لذلك، ووفقاً لمبرهنة البواقي، لدينا

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) + \sum_{z_k \in G_n} \text{Res}_{\zeta=z_k} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) \quad (4.8)$$

لكن

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\zeta=z_k} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) &= \lim_{\zeta \rightarrow z_k} \left((\zeta - z_k) \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) \\ &= \frac{1}{z_k - z} \lim_{\zeta \rightarrow z_k} ((\zeta - z_k) f(\zeta)) \\ &= \frac{1}{z_k - z} \text{Res}_{\zeta=z_k} f(\zeta) \\ &= \frac{1}{z_k - z} \text{Res}_{z=z_k} f(z) \end{aligned}$$

إذن يمكن إعادة كتابة المعادلة (4.8) بالشكل

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) + \sum_{z_k \in G_n} \frac{1}{z_k - z} \text{Res}_{z=z_k} f(z) \quad (4.9)$$

بأخذ النهاية في المعادلة (4.9) عندما $n \rightarrow \infty$ وبالاعتماد على الشرط (4.4)، نحصل على الصيغة (4.5).

وبما أن الطرف الأيسر من المعادلة (4.9) يؤول إلى الصفر عندما $n \rightarrow \infty$ ، فإن الطرف الأيمن المعادلة (4.9) يقترب هو أيضاً من الصفر، مما يضمن تقارب السلسلة في المعادلة (4.5). □

ملاحظة (1)

يجب فهم السلسلة في (4.5) بالشكل التالي

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{z_k(z-z_k)} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{z_k \in G_n} \frac{z}{z_k(z-z_k)} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \quad (4.10)$$

أي أنه يتم أولاً حساب الحدود المتعلقة بالأقطاب الواقعة داخل C_1 ، ثم يُضاف إلى المجموع الجزئي الحدود المتعلقة بالأقطاب الواقعة بين C_1 و C_2 ، وهكذا.

مثال 4.2.1

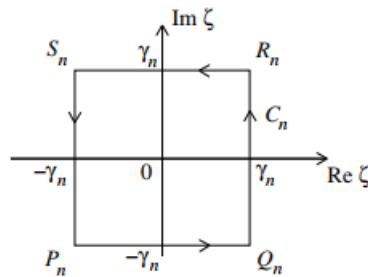
فكك الدالة الميرومورفية التالية $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ إلى كسور جزئية.

الحل

من أجل استعمال الصيغة (4.5)، يجب إثبات أن الدالة تحقق الشرط (4.7).
نأخذ المسار C_n عبارة عن مربع $P_n Q_n R_n S_n$ ذي الأضلاع العمودية المارة بالنقاط

$$\pm \gamma_n = \pm \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

انظر شكل (1.4) التالي.



شكل 1.4

إذا كتبنا $\zeta = \xi + i\eta$ ، فإن لدينا

$$|I_n| := \left| \int_{C_n} \frac{d\zeta}{(\zeta - z) \sin \zeta} \right| \leq \int_{C_n} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z| |\sin \zeta|} \leq \frac{1}{d_n} \int_{C_n} \frac{|d\zeta|}{|\sin \zeta|} \quad (4.11)$$

حيث

$$d_n = \min_{\zeta \in C_n} |\zeta - z|, \quad |\sin \zeta| = \sqrt{\sinh^2 \eta + \sin^2 \xi}$$

وبما أن z ثابت، فإن $d_n \rightarrow \infty$ عندما $n \rightarrow \infty$ ، وبالتالي

$$|I_n| \leq \frac{1}{d_n} \left(\int_{P_n Q_n} \frac{|d\zeta|}{|\sin \zeta|} + \int_{Q_n R_n} \frac{|d\zeta|}{|\sin \zeta|} + \int_{R_n S_n} \frac{|d\zeta|}{|\sin \zeta|} + \int_{S_n P_n} \frac{|d\zeta|}{|\sin \zeta|} \right) \quad (4.12)$$

على القطعة $P_n Q_n$ ، نضع $\zeta = \xi - i\gamma_n$ ومنه $d\zeta = d\xi$. بافتراض $\xi = \gamma_n t$ ، نحصل على

$$\begin{aligned} \int_{P_n Q_n} \frac{|d\zeta|}{|\sin \zeta|} &= \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{d\xi}{\sqrt{\sinh^2 \gamma_n + \sin^2 \xi}} \\ &= \gamma_n \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{\sinh^2 \gamma_n + \sin^2 \gamma_n t}} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

لما $n \rightarrow \infty$

بالمثل، التكامل على $R_n S_n$ يقترب من 0 لما $n \rightarrow \infty$.
على القطعة $Q_n R_n$ ، نأخذ $\zeta = \gamma_n + i\eta$ ، وبالتالي $d\zeta = d\eta$. نحصل على

$$\begin{aligned} \int_{Q_n R_n} \frac{|d\zeta|}{|\sin \zeta|} &= \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{d\eta}{\sqrt{\sinh^2 \eta + \sin^2 \xi}} \\ &= 2 \int_0^{\gamma_n} \frac{d\eta}{\cosh \eta} \\ &= \langle \arctan e^\eta \rangle_0^{\gamma_n} \\ &= 4 \left(\arctan e^{\gamma_n} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &\rightarrow \pi \end{aligned} \quad (4.14)$$

لما $n \rightarrow \infty$

بالمثل، يمكننا إثبات أن التكامل على طول القطعة $S_n P_n$ يقترب من $-\pi$ لما $n \rightarrow \infty$.
إذن ينتج من (4.14)، (4.12) بأن التكامل $I_n \rightarrow 0$ لما $n \rightarrow \infty$.

وبالتالي حسب الصيغة (4.5)، لدينا

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - n\pi} \operatorname{Res}_{z=n\pi} \frac{1}{\sin z} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - n\pi} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - n\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z + n\pi} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right] \\ &= \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2\pi^2} \end{aligned}$$

مثال 4.2.2

فكك إلى كسور جزئية الدالة

$$f(z) = \cot z$$

الحل

أولا نبين أن الشرط للنظرية محقق من أجل المربع $C_n = P_n Q_n R_n S_n$ الشكل (1.4). في هذه الحالة، من المناسب الاثبات وذلك بجمع التكاملين على طول القطع المتقابلة للمربع C_n . باستخدام العلاقة

$$\begin{aligned} \cot \zeta &= \cot(\xi + i\eta) \\ &= \frac{\cos \xi \sin \xi - i \cosh \eta \sinh \eta}{\cosh^2 \eta - \cos^2 \xi} \end{aligned}$$

يكون لدينا (أنظر شكل (1.4) و مثال 4.2)

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{P_n Q_n} + \int_{R_n S_n} \right) \left[\frac{\cot \zeta}{\zeta - z} d\zeta \right] = \\
 & = \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \left[\frac{\cot(\xi - i\gamma_n)}{\xi - i\gamma_n - z} - \frac{\cot(\xi + i\gamma_n)}{\xi + i\gamma_n - z} \right] d\xi \\
 & = \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{1}{(\xi - z)^2 + \gamma_n^2} \{ (\xi - z) [\cot(\xi - i\gamma_n) - \cot(\xi + i\gamma_n)] \\
 & \quad + i\gamma_n [\cot(\xi + i\gamma_n) + \cot(\xi - i\gamma_n)] \} d\xi \\
 & = 2i \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{\xi - z}{(\xi - z)^2 + \gamma_n^2} \frac{\cosh \gamma_n \sinh \gamma_n}{\cosh^2 \gamma_n - \cos^2 \xi} d\xi \\
 & \quad + 2i \gamma_n \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{1}{(\xi - z)^2 + \gamma_n^2} \frac{\cos \xi \sin \xi}{\cosh^2 \gamma_n - \cos^2 \xi} d\xi \\
 & = 2i \int_{-1}^1 \frac{t - z/\gamma_n}{(t - z/\gamma_n)^2 + 1} \frac{\cosh \gamma_n \sinh \gamma_n}{\cosh^2 \gamma_n - \cos^2 \gamma_n t} dt \\
 & \quad + 2i \int_{-1}^1 \frac{1}{(t - z/\gamma_n)^2 + 1} \frac{\cos \gamma_n t \sin \gamma_n t}{\cosh^2 \gamma_n - \cos^2 \gamma_n t} dt \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

بما أن $\gamma_n = (2n + 1)\pi/2$ ، فإنه من أجل كل $t \in [-1, 1]$ لدينا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cosh \gamma_n \sinh \gamma_n}{\cosh^2 \gamma_n - \cos^2 \gamma_n t} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \gamma_n t \sin \gamma_n t}{\cosh^2 \gamma_n - \cos^2 \gamma_n t} = 0$$

بما أن الدوال تحت التكامل في (4.15) مستمرة في المجال $-1 \leq t \leq 1$ من أجل $1 \leq n < \infty$ ، فإن النهاية و التكامل يمكن التبديل بينهما ولدينا

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{P_n Q_n} + \int_{R_n S_n} \right) \left[\frac{\cot \zeta}{\zeta - z} d\zeta \right] & = 2i \int_{-1}^1 \frac{t}{t^2 + 1} dt \\
 & = 0. \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

بالمثل،

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{P_n R_n} + \int_{S_n P_n} \right) \left[\frac{\cot \zeta}{\zeta - z} d\zeta \right] \\
 &= i \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \left[\frac{\cot(\gamma_n + i\eta)}{\gamma_n + i\eta - z} - \frac{\cot(\gamma_n - i\eta)}{\gamma_n - i\eta + z} \right] d\eta \\
 &= i \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{1}{\gamma_n^2 + \eta^2 + 2iz\eta - z^2} \{ \gamma_n [\cot(\gamma_n + i\eta) - \cot(\gamma_n - i\eta)] \\
 &\quad + (z - i\eta) [\cot(\gamma_n + i\eta) - \cot(\gamma_n - i\eta)] \} d\eta \\
 &= 2\gamma_n \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{1}{\gamma_n^2 + \eta^2 + 2iz\eta - z^2} \frac{\cosh \eta \sinh \eta}{\cosh^2 \eta - \cos^2 \gamma_n} d\eta \\
 &\quad + 2 \int_{-\gamma_n}^{\gamma_n} \frac{z - i\eta}{\gamma_n^2 + \eta^2 + 2iz\eta - z^2} \frac{\cosh \eta \sinh \eta}{\cosh^2 \eta - \cos^2 \gamma_n} d\eta
 \end{aligned}$$

بوضع $\eta = \gamma_n t$ و ملاحظة أن $\cos \gamma_n = 0$ نجد

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2 + 1 + 2izt/\gamma_n - z^2/\gamma_n^2} \tanh \gamma_n t dt \\
 &= 2 \int_{-1}^1 \frac{t^2 + 1 - z^2/\gamma_n^2 - 2izt/\gamma_n}{(t^2 + 1 - z^2/\gamma_n^2)^2 + 4z^2 t^2/\gamma_n^2} \tanh \gamma_n t dt \\
 &= 2 \int_{-1}^1 \frac{(t^2 + 1 - z^2/\gamma_n^2) \tanh \gamma_n t}{(t^2 + 1 - z^2/\gamma_n^2)^2 + 4z^2 t^2/\gamma_n^2} dt \\
 &\quad - 4 \int_{-1}^1 \frac{(izt/\gamma_n) \tanh \gamma_n t}{(t^2 + 1 - z^2/\gamma_n^2)^2 + 4z^2 t^2/\gamma_n^2} dt \\
 &\quad \rightarrow 0,
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

لما $n \rightarrow \infty$

إذن يمكن تفكيك $f(z) = \cot z$ إلى كسور جزئية وذلك باستعمال الصيغة (4.5)

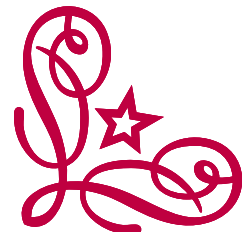
$$\begin{aligned}
 \cot z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - n\pi} \operatorname{Res}_{z=n\pi} \cot z \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z - n\pi} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{z - n\pi} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{z + n\pi} \right) \quad (4.18) \\
 &= \frac{1}{z} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2} \\
 &= \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}.
 \end{aligned}$$



خاتمة

تتحور موضوع مذكرتنا حول الدوال الميرومورفية والدوال المطابقة ، لما له من أهمية في التحليل العقدي . سعينا إلى عرض المفاهيم بشكل واضح ومنهجي ، مع التركيز على الجوانب النظرية وتقديم أمثلة رياضية تساعد على الفهم . اعتمدنا في الطرح على تبسيط المادة العلمية دون الإخلال بالدقة ، بهدف تسهيل هذا الموضوع على الطالب الجامعي وتمكينه من استيعاب أساسياته وتطبيقاته الرياضية .

نرجو أن نكون قد وفّقنا في عرض المحتوى بشكل مفيد ومنظم ، فإن أصبنا فبفضل الله ، وإن أخطأنا فننا ، ويكفينا شرف المحاولة .





المراجع العلمية

[1] وليام ر. دريك : التحليل المركب و تطبيقاته، النشر العلمي و المطابع - جامعة الملك سعود .

[2] محمود كتكت: مبادئ التحليل المركب، دار و مكتبة الهلال بيروت.

[3] David E.Blair: Inversion Theory and Conformal Mapping, AMS The American Mathematical Society, 2000.

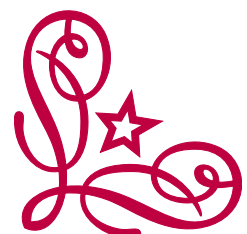
[4] G. Sansone and J. Gerretsen: Lectures on the theory of functions of a complex variable. I. Holomorphic functions, P. Noordhoff, Gronigen, 1960. .

[5] Jmes Ward Brown.Ruel V.Churchill: COMPLEX VARIABLES AND APPLICATIONS Mc Graur Hill Higher Education, 2009.

[6] Antimrov.Andrei.A.koyshkin-rénn-vail : Analyse Complex.

[7] Peter J.Oher F: Complex Analysis and Conformal Mapping, University of Minnesota, 2020.

[8] S. Saks and A. Zygmund: functions, 3rd ed., Elsevier, New York, 1971.





ملخص

يهدف موضوع مذكرتنا لمعرفة أهمية كل من الدوال الميرومورفية والدوال المطابقة وللوصول إلى العنوان الرئيسي للبحث تطرقنا قبل ذلك لدوال التحليلية و التوافقية، و من ثم تناولنا فصل الدوال الميرومورفية و يليه فصل الدوال المطابقة أو ما تعرف أيضا بالدوال الحافظة للزوايا و في الأخير تطرقنا للفصل الذي أضفنا فيه خصائص أخرى لدوال الميرومورفية

الكلمات المفتاحية

الدوال التحليلية، الدوال الميرومورفية، الدوال المطابقة.

