



République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et la Recherche
Scientifique



Ecole Normale Supérieure d'Enseignement Technologique
-Skikda-

Département de mathématiques et d'informatique

Mémoire présenté pour obtenir un diplôme en tant que professeur de
l'enseignement moyen

Intitulé :

Une Introduction à La Théorie Des Distributions

Présenter par :

ZAOUI Selma

TARDJET Souha

Soutenu devant le jury composé de :

Mr. GOUASMIA Mouhamed

ENSET SKIKDA

Président

Mr. BOULARES Salah

ENSET SKIKDA

Encadreur

Mme. KENAF Asma

ENSET SKIKDA

Examinatrice

Mme. FENIZRI Fatma Zohra

ENSET SKIKDA

Examinatrice

Année universitaire 2024/2025

Remerciement

Nous tenons à remercier en tout premier dieu Allah tout puissant de nous avoir donné la volonté et la puissance pour élaborer ce travail.

Nous adressons nos profonds remerciements à notre encadreur Mr **BOULERES Salah** pour ses encouragements ses conseils et pour avoir mis à notre disposition tous les moyens dont nous avons besoin .

Tenons également à remercier les membres de jury : **Mr GOUASMIA Mouhamed** **Mme KENAf Asma** , **Mme FENIZRI Fatma Zohra** , qui ont bien voulu accepter de porter leur jugement sur ce modeste travail que nous souhaitons à la mesure de leur satisfaction .

Nous voudrions exprimer nous plus vifs remerciements à tous nos professeurs qui ont contribué à nous transmettre l'inestimable trésor qui est le savoir .

Nos remerciement s'étendent aussi à monsieur **BOUSSENA Djalel** pour l'aide qu'il nous a apportée dans notre travail .

Dédicace

Tout d'abord je remercie le bon dieu de m'avoir donné le courage et la volonté de mener a bien finir cette humble thèse .

Je dédicace ce modeste travail a :

À moi-même, La petite Selma qui a toujours cru a elle-même, qui n'a jamais perdu espoir de réaliser ses objectifs et battu pour ses rêves et attribué pour qu'elle deviennent ce qu'elle est aujourd'hui ... L'enseignante ZAOUÏ SELMA .

Ma chère mère, Mon pilier et mon soutien éternel, qui m'a accompagné avec amour, patience et sacrifices pendant tout ces années , qui as toujours cru en moi, même dans les moments les plus difficiles , ma poussé vers un meilleur avenir .

Mon cher père, qui na jamais cessé de formuler des prières a mon égard de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs .

À mes chères soeurs, Soundous et Ritej . mes confidentes, votre amour, vos encouragements, et votre présence constante ont été une source d'inspiration et de force pour moi.

À mes chères tantes, Nacera et Assia . À vous qui avez toujours été des figures de bienveillance et de soutien dans ma vie. Votre amour, vos conseils et vos prières m'ont accompagné à chaque étape de mon parcours.

À la plus proche et chère personne, **Asma** qui m'a appris le sens le l'amitié .
Au accompagnement du coran , "**halaket Sokia el-rouh**" chacune avec son propre nom .

À ma famille .

À toute personne qui a cru en moi .

À tous ceux qui m'ont accompagné tout au long de mon parcours académique, À tous ceux qui m'ont aidé ou rendu service, qu'Allah les récompense tous avec bonté.

ZAOUÏ SELMA

Dédicace

Louange infinie à Allah, source de lumière, de force et de réconfort.

À **mon père**, fierté de mon cœur et pilier de mes rêves. À **ma mère**, tendresse inépuisable, cœur priant et refuge d'amour. À mes frères **Djaber** et **Anis**, compagnons fidèles de mes joies, de mes peines et de mes silences. À mes amies précieuses, sœurs offertes par la vie : **Dhikra**, **Ghazlene**, **Zaineb**, **Djihane**, éclats de bonheur et refuges dans mes instants sombres. Que vos existences soient parsemées de lumière et de tendresse. À mon neveu bien-aimé **Manef**, éclat de joie et trésor irremplaçable de mon cœur. À celle qui est devenue une sœur de l'âme, **Adra**, âme noble au cœur généreux et au sourire apaisant. À mes cousines, filles de mes tantes paternelles et maternelles **Bouchra**, **Sera**, **Haifa**, **yasmine**, perles précieuses de mon existence. Aux âmes pures qui nous ont quittés, mais dont la mémoire éclaire encore mes nuits et mes prières — qu'Allah les entoure de Sa miséricorde infinie. À toute ma famille et à chaque regard bienveillant rencontré sur mon chemin.

Et enfin, à toi qui lis ces mots... puisse ce modeste travail toucher ton cœur comme il a nourri le mien.

TARDJET SOUHA

Résumé

La théorie des distributions s'est développée à partir des notions de convergence forte et faible. Par ailleurs, les distributions permettent une dérivation autant de fois qu'on le souhaite, ce qui n'est évidemment pas le cas pour les fonctions ordinaires. Au sens des distributions, la dérivabilité s'étend même aux fonctions discontinues, qui deviennent ainsi indéfiniment dérivables.

On présente dans ce mémoire une introduction à la théorie des distributions. Ce travail a été divisé en quatre chapitres dont le premier est consacré à l'étude des espaces des fonctions différentiables et de l'espace des fonctions tests. Le deuxième chapitre présente les notions essentielles et fondamentales de cette théorie. Dans le troisième, nous abordons la transformation de Laplace appliquée aux fonctions et aux distributions. Enfin, le dernier chapitre expose quelques applications dont la résolution s'effectue à l'aide des distributions.

Abstract

The theory of distributions has developed from the notions of strong and weak convergence. Moreover, distributions allow differentiation as many times as desired, which is obviously not the case for ordinary functions. In the sense of distributions, differentiability even extends to discontinuous functions, which thus become infinitely differentiable.

This dissertation presents an introduction to the theory of distributions. The work is divided into four chapters. The first chapter is devoted to the study of spaces of differentiable functions and the space of test functions. The second chapter presents the essential and fundamental concepts of this theory. In the third chapter, we discuss the Laplace transform applied to functions and distributions. Finally, the last chapter presents some applications whose solutions are obtained using distributions.

Contents

introduction	ix
1 PRÉLIMINAIRE	4
1.1 ESPACES DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES	4
1.1.1 Les espaces $\mathcal{C}^k(\Omega)$	4
1.1.2 les espaces $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	4
1.2 Formule de Leibniz	5
1.3 ESPACES DES FONCTIONS TESTS	5
1.3.1 support d'une fonction	5
1.3.2 Espace des fonctions test $\mathcal{D}(\Omega)$	6
1.3.3 la convergence des espaces des fonctions test	6
1.3.4 Les suites régularisantes	8
1.3.5 Produit de convolution	9
2 LES DISTRIBUTIONS	12
2.1 Définition fonctionnelle	12
2.2 L'ordre d'une distribution	14
2.3 Exemples des distributions	15
2.3.1 Distributions régulières	15
2.3.2 distributions non-régulières	16
2.4 Autres exemples	17
2.4.1 Mesures de Radon	17
2.4.2 Distributions positives	17
2.4.3 Distribution d'ordre infini	18
2.5 Support d'une distribution	19
2.6 Distributions à support compact	21

2.7	Opérations sur les distributions	22
2.7.1	Addition	22
2.7.2	Transposition	23
2.7.3	Multiplication par une constante	24
2.7.4	Translation	24
2.7.5	Multiplication des distributions	25
2.8	Dérivation des distributions	26
2.9	Convergence des distributions	29
2.10	Convolution des distributions	32
3	TRANSFORMÉE DE LAPLACE	37
3.1	Transformée de Laplace des fonction	37
3.2	Transformée de Laplace des distributions	45
4	LES APPLICATIONS	49
4.1	La valeur principale vp :	49
4.2	La Dérivée de la fonction $\ln x $ au sens des distribution :	51
4.3	La fonction de Green	52
4.4	L'étude de l'équation des ondes	55
	Conclusion	57
	Bibliography	58

NOTATIONS

- n Entier naturel, dimension de l'espace de travail.
- $\mathbb{R}^n$ Espace euclidien muni de sa norme usuelle notée $|\cdot|$.
- α Multi-indice, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
- $|\alpha|$ Longueur de α , $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, et pour

$$x \in \mathbb{R}^n : x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

- Ω Un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$.
- $\overline{\Omega}$ L'adhérence de Ω .
- $D^\alpha(u)$ Dérivée d'ordre α , $D^\alpha(u) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$.
- $\mathcal{D}(\Omega)$ Espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur Ω .
- $\mathcal{D}'(\Omega)$ Espace des distributions sur Ω .
- $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\Omega)$ Espace des fonctions tests à support inclus dans le compact

$$\mathcal{K} \text{ de } \Omega.$$

- p.p Presque partout.
- $\mathcal{C}_0(\Omega)$ Espace des fonctions continues sur Ω tendant vers 0 à l'infini.
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ Espace des fonctions indéfiniment continûment différentiables

$$\text{sur } \Omega.$$

- $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ Espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact
inclus dans Ω .

- $L^p(\Omega)$ Espace de Lebesgue standard sur Ω d'exposant p .
- $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ Espace des fonctions intégrables sur tout compact de Ω .
- $L^1(\mathbb{R})$ Espace des fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$,

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

- $L^2(\mathbb{R})$ Espace des fonctions carrément intégrables sur $\mathbb{R}$,

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

- $\mathcal{E}'(\Omega)$ Espace des distributions à support compact sur Ω .
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ L'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$, Symboliquement:

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{A \mid A \subseteq \mathbb{R}\}.$$

- Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note : $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.
- Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, on note :
 Produit scalaire : $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$,
 Multiplication scalaire : $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on note : $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, et :

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}.$$

INTRODUCTION

La théorie des distributions fut construite par le mathématicien L. Schwartz entre 1944 et 1950 et lui valut la médaille Fields en 1950[6]. Comme la plupart de grandes découvertes scientifiques, la théorie de distributions est construite sur des bases provenant de travaux effectués par de nombreux chercheurs : Heaviside en 1893, Wiener en 1925, Dirac en 1926-27, Hadamard en 1932, Bochner en 1932, Leray en 1934, Sobolev en 1936 [3], Carleman en 1944, etc.

L'objectif a été de généraliser la notion de fonction, afin de donner un sens mathématique correct à des objets manipulés par les physiciens et les ingénieurs. La théorie des distributions est importante aussi bien en mathématiques que dans plusieurs disciplines scientifiques. Elle s'est révélée être une nécessité pour le progrès de plusieurs théories en physique et en ingénierie où beaucoup de problèmes discontinus conduisent naturellement, entre autres, à des équations différentielles dont les solutions sont des distributions plutôt que des fonctions ordinaires [1, 7]. La théorie assure un certain nombre d'opérations indispensables auxquelles les fonctions ne se prêtent pas toujours et a apporté les outils mathématiques dont les physiciens et les ingénieurs avaient tant besoin [4]. L'exemple le plus célèbre de distribution est l'impulsion de Dirac, indispensable aussi bien pour la formulation de la mécanique quantique qu'en analyse harmonique et en traitement du signal [4]. Elle s'est révélée en particulier être un moyen efficace pour mieux comprendre le produit de convolution et la transformée de Laplace qui sont des instruments puissants de calcul en traitement du signal.

Par ailleurs un autre point important qu'apporte la théorie des distributions sur celle des fonctions provient de ce que les distributions sont dérivables autant de fois que l'on veut, ce qui n'est évidemment pas le cas des fonctions. Au sens des distributions, la dérivabilité s'étend même à des fonctions discontinues, qui sont indéfiniment dérivables[5]. L'approche utilisée par Schwartz est basée sur la dualité dans les espaces

topologiques. Il s'agit là d'un concept abstrait, profond et apparemment sans relation avec la physique. Une telle théorie nécessite donc un bagage mathématique assez poussé en analyse fonctionnelle, notamment sur la notion de convergence forte qui détermine une topologie adéquate dans des espaces de fonctions régulières ou de convergence faible dans les espaces duaux de distributions [2]. En physique, on rencontre souvent des problèmes faisant intervenir des ondes ou des vibrations ou encore des oscillations.

Les théories des distributions, ainsi que les transformations de Laplace, trouvent des applications dans de nombreux domaines :

Physique: Modélisation des ondes, vibrations, acoustique et analyse des signaux.

Ingénierie: Conception de filtres électroniques, analyse de circuits et traitement des données.

Traitement d'images et médecine : Techniques comme l'IRM ou le scanner.

Mathématiques pures: Résolution d'équations fonctionnelles et théorie spectrale.

Les distributions permettent d'étendre les concepts de dérivabilité aux fonctions discontinues, ce qui les rend précieuses pour décrire des phénomènes réels. Associées à des notions d'analyse fonctionnelle avancées, elles forment une base solide pour de nombreuses innovations en sciences et en technologie [7, 1],[9].

L'objectif de cette thèse est de proposer une introduction claire et progressive à la théorie des distributions, en explorant ses fondements mathématiques, ses outils principaux, et ses applications pratiques. Le travail est structuré en quatre chapitres :

Chapitre 1 : Préliminaires Ce chapitre expose les notions fondamentales de l'analyse fonctionnelle et des espaces de fonctions, qui constituent les bases nécessaires pour aborder la théorie des distributions.

Chapitre 2 : Les distributions Nous définissons rigoureusement les distributions, en expliquant leur construction et leurs propriétés fondamentales. Ce chapitre met en lumière les concepts de dérivée forte et de dérivée faible, ainsi que les opérations élémentaires telles que la convolution et la régularisation.

Chapitre 3 : La transformée de Laplace Outil essentiel en mathématiques appliquées, est explorée sous le prisme des distributions. Nous montrons comment cette transformée permet de résoudre des équations différentielles et intégrales, même dans des cas où les solutions classiques ne sont pas définies.

Chapitre 4 : Applications Enfin, ce chapitre illustre la puissance de la théorie des distributions à travers des applications pratiques. Nous examinons des exemples issus de la physique (les équations des ondes), ainsi nous étudions la dérivée de la fonction $\ln$ au sens des distributions, et comme un exemple de mathématique prenant la fonction de green et la valeur principale.

En nous engageant dans cette exploration, nous espérons offrir au lecteur une thèse accessible et rigoureuse à la théorie des distributions, tout en soulignant sa pertinence pour résoudre des problèmes complexes et modernes.

PRÉLIMINAIRE

1.1 ESPACES DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

1.1.1 Les espaces $\mathcal{C}^k(\Omega)$

Définition 1.1. [8] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désignera par $\mathcal{C}^0(\Omega)$ (*resp* $\mathcal{C}^1(\Omega)$) l'espace des fonctions continues (*resp. continment différentiables*) sur Ω à valeurs complexes puis, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ on pose:

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega), \quad i = 1, \dots, n \right\}.$$

C'est l'espace des fonctions k fois contiennent différentiables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$. On notera enfin :

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega).$$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω .

1.1.2 les espaces $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$

Définition 1.2. [8]

- 1) Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ désigne l'ensemble des $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ tels que $\text{supp}(u)$ est un compact contenu dans Ω .
- 2) Si K est un compact de Ω , $\mathcal{C}_0^k(K)$ désigne l'ensemble des éléments u de $\mathcal{C}_0^k(K)$ tels que $\text{supp}(u) \subset K$.

1.2 Formule de Leibniz

Définition 1.3. [8] soit $k \geq 1$ et $u, v \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. Alors pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$ on a :

$$\partial^\alpha(u \cdot v) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u \cdot \partial^{\alpha-\beta} v.$$

1.3 ESPACES DES FONCTIONS TESTS

1.3.1 support d'une fonction

Définition 1.4. [4] on définit le support d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ par :

$$\text{supp}(f) = \text{adh} \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}.$$

c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x)$ est non identiquement nulle. Autrement dit, c'est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel f est identiquement nulle.

Exemple 1.1. [4] Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. On définit la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-r^2}\right) & \text{si } |r| < 1, \\ 0 & \text{si } |r| \geq 1. \end{cases}$$

On a :

$\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, qui correspond à la boule de centre 0 et de rayon 1.

Propriétés 1.1. [8] On peut facilement vérifier les propriétés suivantes :

- (i) $\text{supp}(f) = \emptyset \Leftrightarrow f \equiv 0$ dans Ω .
- (ii) $\text{supp}(u \cdot v) \subset \text{supp}(u) \cap \text{supp}(v)$.
- (iii) $\text{supp}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \subset \text{supp}(u)$; $j = 1, \dots, n$ si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

1.3.2 Espace des fonctions test $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 1.5. [4] Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, on appelle espace des fonctions test et on note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \text{supp } f \text{ compact}\}.$$

1.3.3 la convergence des espaces des fonctions test

Définition 1.6. [4] On dit qu'une suite de fonction $(\varphi_k) \in \mathcal{D}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ si :

- (i) tous les supports des (φ_k) sont contenus dans un même compact $\mathcal{K}$.
- (ii) pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite des dérivées $(\varphi_k^{(j)})$ converge uniformément vers $(\varphi^{(j)})$ sur $\mathcal{K}$.

Exemple 1.2. soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, étudions la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des suites suivantes:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x), \quad \eta_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(nx), \quad \theta_n = \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{x}{n}\right), \quad \forall n \geq 1.$$

Solution de l'exemple :

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $a > 0$ tel que $\text{supp}(\varphi) \subset \mathcal{K} = [-a, a]$.

1. étudions la convergence simple de la suite (ψ_n) dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

- étudions la convergence simple de (ψ_n) sur $\mathbb{R}$.

soit x fixé dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \varphi(x) = 0.$$

autrement dit (ψ_n) converge simplement vers $\psi = 0$.

- Remarquons que $\text{supp}(\psi_n) = \text{supp}(\psi)$.

on a :

- 1) $\text{supp}(\psi_n) \subset \mathcal{K}$.
- 2) $\text{supp}(\psi) = \emptyset \subset \mathcal{K}$.
- 3) soit $\alpha \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathcal{K}} |D^\alpha \psi_n(x) - D^\alpha \psi(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sup_{x \in \mathcal{K}} |D^\alpha \varphi(x)| = 0.$$

d'après 1, 2 et 3 nous concluons que (ψ_n) converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vers la fonction nulle $\psi = 0$.

2. étudions la convergence de la suite (η_n) dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

• étudions la convergence simple de la suite (η_n) .

soit x fixé dans $\mathbb{R}$, on pose : $M = \sup_{y \in \mathbb{R}} |\varphi(y)|$ on a :

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |\eta_n(x)| \leq \frac{M}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

donc (η_n) converge simplement vers $\eta = 0$.

• on a :

$$1) \text{ Supp}(\eta_n) \subset \left[-\frac{a}{n}, \frac{a}{n}\right] \subset \mathcal{K}.$$

$$2) \text{ Supp}(\psi) = \emptyset \subset \mathcal{K}.$$

3) soit $\alpha \in \mathbb{N}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} |D^\alpha \eta_n(x) - D^\alpha \eta(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-1} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(nx)| = +\infty, \forall \alpha > 1.$$

De là, nous concluons que (η_n) ne convergent pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3. étudions la convergence de la suite (θ_n) dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

• étudions la convergence simple de la suite (θ_n) .

soit x fixé dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}\right) \varphi\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n}\right) = \varphi(0) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ainsi (θ_n) converge simplement vers 0.

• nous avons : $\text{supp}(\theta_n) \subset [-an, an]$, Si φ non nulle, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$

Nous remarquons que :

$$\theta_n(nx_0) = \frac{1}{n} \varphi(x_0) \neq 0.$$

donc $nx_0 \in \text{supp}(\theta_n)$ quelle soit n et l'ensemble des points nx_0 n'existe pas, donc $\text{supp}(\theta_n)$ est non borné, donc il n'est pas compact.

par conséquent, on en déduit que la suite (θ_n) ne converge pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exemple 1.3. soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, posons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \varphi_n(x) = \varphi\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \varphi(x).$$

alors $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. en effet, si $\text{supp } (\varphi) \subset [-M, M]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $\text{supp } (\varphi_n) \subset [-M-1, M+1]$, puis par le théorème des accroissement finis, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left| \varphi^{(k)} \left(x + \frac{1}{1+n} \right) - \varphi^{(k)}(x) \right| \leq \frac{1}{n+1} \|\varphi^{(k+1)}\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

1.3.4 Les suites régularisantes

Définition 1.7. [3] soit (φ_k) une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on appelle une suite régularisante définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_k : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \varphi_k(x) = k^n \varphi(kx). \end{aligned}$$

Les éléments de la suite régularisante associée à φ :

- (i) On a : $(\varphi_k) \geq 0$, $\varphi_k \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) On a : $\text{supp } (\varphi_k) \subset \mathcal{B}\left(0, \frac{1}{k}\right)$.
- (iii) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) dx = 1$.

Comment construire une suite régularisante :

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, non-négative et non identique à zéro . On a $\text{supp } (\psi) \subset \mathcal{B}(0, a)$ avec $a > 0$. On définit :

$$\psi_0(x) = \frac{\psi(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx}.$$

On remarque que $\text{supp } (\psi_0) \subset \mathcal{B}(0, a)$ et :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_0(x) dx = 1, \forall x : \psi_0(x) \geq 0.$$

On pose :

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{\varepsilon_j^n} \psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right).$$

avec $\varepsilon_j > 0$ et $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varepsilon_j = 0$. On a :

- 1) $\forall j \in \mathbb{N}, \varphi_j \geq 0$.
- 2) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x) dx = \frac{1}{\varepsilon_j^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_0\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right) dx.$

En effectuant le changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon_j}$, on trouve que : $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x) dx = 1$.

3) $\text{supp}(\varphi_j) \subset \mathcal{B}(0, \varepsilon_j a)$ avec $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varepsilon_j = 0$.

il suffit de poser $r_j = \varepsilon_j a$ dans la définition. Ainsi, la suite est régularisante.

1.3.5 Produit de convolution

Définition 1.8. [4] On définit le produit de convolution (quand il existe) de deux fonctions f et g par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On dit aussi que $f * g$ est la convolée de f et g .

• Le produit de convolution est **commutatif** c'est grâce à notre observation :

Si $f * g$ existe, le produit $g * f$ existe aussi et $f * g = g * f$. On fait, en utilisant le changement de variable $u = x - t$ donc :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) f(x-u) du = (g * f)(x).$$

• Le produit de convolution est **distributif** par rapport à l'addition, nous remarquons que :

Si $f * g$ et $f * h$ existent, alors $f * (\alpha g + \beta h)$ existe aussi et on a :

$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha (f * g) + \beta (f * h).$$

Cela résulte de la linéarité de l'intégrale.

Proposition 1.1. [4] soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors :

- (i) $f * g$ existe presque partout, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.
- (ii) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.
- (iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$ où $h \in L^1(\mathbb{R})$.

Preuve.

(i) En effectuant le changement de variables : $u = t, v = x - t$, dont le jacobien est égal à 1, on obtient immédiatement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |g(x-t)| dx dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g(v)| dv < +\infty,$$

pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Dès lors, la fonction $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dx$ existe presque partout et $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, en vertu du théorème de Fubini.

(ii) On a :

$$\begin{aligned}
 \|f * g\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |(f * g)(x)| dx, \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |g(x-t)| dt dx, \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g(v)| dv, \\
 &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.
 \end{aligned}$$

D'après ce qui précède.

(iii) On a :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 ((f * g) * h)(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) \cdot h(y-x) dx, \quad y \in \mathbb{R}, \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)h(y-x) dt dx,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (g * h)(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)h(z-s)ds, \quad z \in \mathbb{R}, \\
 (f * (g * h))(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)(g * h)(y-r) dr, \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)g(s)h(y-r-s) dr ds.
 \end{aligned}$$

En posant $r = t$, et $s = x - t$, on obtient le résultat cherché.

Proposition 1.2. soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ Alors, la fonction $f * g$ existe et on a :

$$|f * g|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Preuve. Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. L'inégalité de Schwarz entraîne que :

$$\begin{aligned}
 |f * g|^2(x) &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt \right|^2, \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|^2 dt, \\
 &= \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Donc $f * g$ est bien définie et $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$.

Remarque 1.1. Nous avons montré dans la proposition précédente, que si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. par contre, si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $f * g$ existe mais peut ne pas appartenir à $L^2(\mathbb{R})$.

Exemple 1.4. Considérons la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^\alpha}, \text{ avec } \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$$

Montrons que $f \in L^2(\mathbb{R})$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x|)^{2\alpha}}$$

cette intégrale converge si $2\alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha > \frac{1}{2}$. Donc, pour $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$, on a bien, $f \in L^2(\mathbb{R})$ Et ceci constitue **un contre-exemple** à la remarque précédente.

LES DISTRIBUTIONS

2.1 Définition fonctionnelle

Définition 2.1. [3] (**Dual Topologique**) Soit E un espace vectoriel topologique. On appelle Dual Topologique de E qu'on note E' , l'espace des formes linéaires continues sur E .

Définition 2.2. [8] (**D'une distribution**) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une distribution $\mathcal{T}$ sur Ω est une forme linéaire de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{K}$ tell que :
pour tout compact $\mathcal{K} \in \Omega$ il existe $\mathcal{C}_{\mathcal{K}} > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tell que :

$$\|\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle\| \leq \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathcal{K}} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{K})$

Remarque 2.1. [8] On a une équivalence entre les quatre propriétés suivantes :

- (i) $\mathcal{T}$ est une distribution sur Ω .
- (ii) $\mathcal{T}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que pour tout compact $\mathcal{K}$ de Ω , la restriction de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est continue.
- (iii) $\mathcal{T}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

(iv) Pour toute suite (φ_j) de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que :

a) il existe $\mathcal{K}$ compact de Ω tel que : $\text{supp}(\varphi_j) \subset \mathcal{K}, \forall j \in \mathbb{N}$.

b) $(\varphi_j) \rightarrow 0$ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{K})$, alors : $\lim_{j \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{T}, \varphi_j \rangle = 0$.

Preuve. [8]

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) En effet $\|\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle\| \leq C_{\mathcal{K}} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathcal{K}} |\partial^\alpha \varphi(x)|$ exprime la continuité de la restriction à $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{K})$ de $\mathcal{T}$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv) Ensuite comme $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{K})$ est métrisable, la continuité est équivalente à la continuité sur les suites d'où .

Enfin (ii) et (iii) sont équivalentes en vertu de la topologie mise sur $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Exemple 2.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ une fonction localement intégrable. Montrons que f engendre une distribution dans $\mathbb{K}$.

On définit la distribution associée $\mathcal{T}_f$ par :

$$\langle \mathcal{T}_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx.$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On vérifie ensuite deux propriétés fondamentales :

1. Linéarité :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}_f, \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(x) (\alpha \varphi_1(x) + \beta \varphi_2(x)) dx, \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_1(x) dx + \beta \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_2(x) dx, \\ &= \alpha \langle \mathcal{T}_f, \varphi_1 \rangle + \beta \langle \mathcal{T}_f, \varphi_2 \rangle. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{T}_f$ est une forme linéaire.

2. Continuité :

Considérons une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions test telles que :

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ dans } \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Par définition de la convergence dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\forall j \in \mathbb{N}, \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathcal{K}} |\varphi_k^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(x)| = 0.$$

pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$. Montrons que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathcal{T}_f, \varphi_k \rangle = \langle \mathcal{T}_f, \varphi \rangle.$$

En effet :

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{T}_f, \varphi_k - \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) (\varphi_k(x) - \varphi(x)) dx \right|, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |\varphi_k(x) - \varphi(x)| dx. \end{aligned}$$

Puisque le support de $\varphi_k - \varphi$ est contenu dans un compact $[a, b]$, et f est localement intégrable :

$$|\langle \mathcal{T}_f, \varphi_k - \varphi \rangle| \leq \sup_{x \in [a, b]} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \int_a^b |f(x)| dx.$$

Or, comme $\varphi_k \rightarrow \varphi$ uniformément sur $[a, b]$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| = 0.$$

Donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathcal{T}_f, \varphi_k \rangle = \langle \mathcal{T}_f, \varphi \rangle.$$

Ce qui montre la continuité de $\mathcal{T}_f$. Ainsi, f engendre bien une distribution sur $\mathbb{R}$.

2.2 L'ordre d'une distribution

Définition 2.3. [8] Soit k un entier, une distribution $\mathcal{T}$ sur Ω est dite d'ordre inférieur ou égal à k si pour tout compact $\mathcal{K}$ de Ω il existe $\mathcal{C}_{\mathcal{K}} > 0$ telle que :

$$|\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle| \leq \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathcal{K}} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{K})$. L'ensemble de ces distributions est noté $\mathcal{D}'^{(k)}(\Omega)$.

On pose : $\mathcal{D}'^{(F)}(\Omega) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{D}'^{(k)}(\Omega)$. C'est l'espace des distributions d'ordre fini.

Exemple 2.2. On considère la distribution de Dirac δ définie par :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)|.$$

Or, on sait que :

$$|\varphi(0)| \leq \sup_{x \in \mathcal{K}} |\varphi(x)|.$$

Donc, la distribution δ ne dépend que des valeurs de φ (pas de ses dérivées). Donc δ est une distribution d'ordre 0.

Résumant dans ce tableaux :

Distribution	Ordre
δ	0
δ'	1
$\delta^{(n)}$	n

2.3 Exemples des distributions

2.3.1 Distributions régulières

Les Fonctions localement intégrables :

Définition 2.4. [4] Une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est dite **localement sommable** (ou **localement intégrable**) si, pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, on a :

$$\int_{\mathcal{K}} |f(x)| dx < +\infty.$$

Autrement dit, la fonction est intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.3. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. La distribution associée $\mathcal{T}_f$ est donnée par :

$$\mathcal{T}_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Propriétés 2.1. Soient deux fonctions $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telles que :

$$f(x) = g(x) \quad (\text{p.p sur } \mathbb{R}).$$

Alors, les distributions associées à ces fonctions sont égales :

$$\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_g.$$

Preuve. Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle \mathcal{T}_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x) dx = \langle \mathcal{T}_g, \varphi \rangle.$$

car la différence $f(x) - g(x)$ est nulle presque partout, et donc son intégrale contre toute fonction test est nulle :

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x)) \varphi(x) dx = 0.$$

Ainsi, on conclut que :

$$\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_g.$$

Théorème 2.1. [3] Soit f une fonction localement intégrable. Alors, la distribution associée $\mathcal{T}_f$ est nulle si et seulement si $f(x) = 0$ (p.p.).

$$\mathcal{T}_f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ (p.p.)}.$$

Définition 2.5. Une distribution $\mathcal{T}$ est dite *régulière* si elle est associée à une fonction localement intégrable f .

Notation 2.1. Lorsque le contexte ne prête à aucune confusion, il est très souvent plus simple de noter $\mathcal{T}_f$ tout simplement f . En revanche, la notation $f(x)$, tolérée pour une fonction f , l'est beaucoup moins pour la distribution $\mathcal{T}_f$, car elle laisse à tort croire qu'il est possible de connaître la valeur d'une distribution en un point précis x .

Exemple 2.4. [4] C'est ainsi que nous définissons la distribution (régulière) constante C par :

$$\langle C, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} C \varphi(x) dx = C \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx.$$

pour toute fonction d'essai φ . En particulier, $C = 0$ définit la distribution régulière nulle.

2.3.2 distributions non-régulières

1. La distribution de Dirac

Définition 2.6. [8] Soit $x_0 \in \Omega$. La forme linéaire :

$$\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}.$$

définie par :

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

est une distribution d'ordre 0.

En effet, soient $\mathcal{K}$ un compact de Ω et $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}(\Omega)$. Alors :

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle| = |\varphi(x_0)| \leq \sup_{x \in \mathcal{K}} |\varphi(x)|.$$

Ainsi, la caractérisation d'une distribution est satisfaite avec $C_{\mathcal{K}} = 1$ et $N = 0$. Par suite, δ_{x_0} est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 0.

2. La distribution "Valeur principale"

Définition 2.7. [8] La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Cependant, on peut quand même lui associer une distribution appelée **valeur principale de $\left(\frac{1}{x}\right)$** , notée $V_p\left(\frac{1}{x}\right)$, définie comme suit :

$$\left\langle V_p\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ainsi, $V_p\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre 1.

2.4 Autres exemples

2.4.1 Mesures de Radon

Définition 2.8. [9] Soit μ une mesure de Radon sur Ω . La forme linéaire :

$$\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \mapsto \int_{\Omega} \varphi d\mu.$$

est une distribution d'ordre 0 sur Ω .

Théorème 2.2. Soit $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution d'ordre 0. Alors, il existe une mesure de Radon μ sur Ω telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \langle \mathcal{T}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \varphi d\mu.$$

Preuve. On admettra ce théorème. La démonstration se base sur le fait que les mesures de Radon positives sur Ω s'identifient aux formes linéaires positives sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$ via :

$$f \in \mathcal{C}_0(\Omega) \mapsto \int_{\Omega} f d\mu.$$

C'est le théorème de représentation de Riesz[2].

2.4.2 Distributions positives

Définition 2.9. On dit qu'une distribution $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est **positive** lorsque :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0 \Rightarrow \langle \mathcal{T}, \varphi \rangle \geq 0.$$

Montrons que toute distribution positive est d'ordre 0. En effet, soit $\mathcal{K}$ un compact de Ω , et soit $\mathcal{X} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que :

$$\mathcal{X} = 1 \text{ sur } \mathcal{K}, \quad 0 \leq \mathcal{X} \leq 1.$$

Si $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset \mathcal{K}$ et φ réelle, alors les fonctions :

$$\psi_\pm(x) = \mathcal{X}(x) \sup_{y \in \mathcal{K}} |\varphi(y)| \pm \varphi(x).$$

appartiennent à $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et sont positives. Par conséquent :

$$\langle \mathcal{T}, \psi_\pm \rangle \geq 0.$$

D'où :

$$|\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle| \leq |\langle \mathcal{T}, \mathcal{X} \rangle| \cdot \sup_{x \in \mathcal{K}} |\varphi(x)| = C_{\mathcal{K}} \sup_{x \in \mathcal{K}} |\varphi(x)|.$$

Ainsi, $\mathcal{T}$ est de l'ordre 0.

2.4.3 Distribution d'ordre infini

Définition 2.10. [8] On considère la forme linéaire $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par :

$$\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j).$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne la dérivée j -ième de φ .

Soit $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ un compact. Alors il existe $\mathcal{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{K} \subset [-\mathcal{N}, \mathcal{N}]$. Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$|\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle| \leq \sum_{j=0}^{\mathcal{N}} |\varphi^{(j)}(j)| \leq \sum_{j=0}^{\mathcal{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(j)}(x)|.$$

Donc $\mathcal{T}$ est bien une distribution.

Supposons qu'elle soit d'ordre fini. Alors il existerait $k \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ tels que pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$|\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle| \leq C \sum_{j=0}^k \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(j)}(x)|.$$

Considérons une fonction $\psi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

et $0 \leq \psi_0(x) \leq 1$. Posons alors :

$$\psi(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \psi_0(x).$$

Par la formule de Leibniz, on a :

$$\psi^{(k+1)}(0) = 1.$$

Définissons ensuite :

$$\varphi(x) = \psi(\lambda(x - (k+1))).$$

où $\lambda \geq 1$ est un paramètre destiné à tendre vers $+\infty$. On a alors :

$$\text{supp}(\varphi) \subset \left\{ x \in \mathbb{R} : |x - (k+1)| \leq \frac{1}{2\lambda} \right\}.$$

En particulier : $\varphi^{(j)}(j) = 0$ si $j \neq k+1$ et :

$$\varphi^{(k+1)}(k+1) = \lambda^{k+1} \psi^{(k+1)}(0) = \lambda^{k+1}.$$

D'autre part, pour tout $j \leq k$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \sup_{y \in \mathbb{R}} |\psi^{(j)}(y)|.$$

Si l'inégalité supposée valable pour une distribution d'ordre fini s'appliquait à φ , on aurait :

$$\lambda^{k+1} \leq C \sum_{j=0}^k \lambda^j \sup_{y \in \mathbb{R}} |\psi^{(j)}(y)|.$$

Ce qui est absurde lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. On conclut donc que $\mathcal{T}$ n'est pas d'ordre fini.

2.5 Support d'une distribution

Définition 2.11. [8] Soient $\mathcal{T}$ une distribution définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et ω un ouvert tel que $\omega \subset \Omega$.

On dit que la distribution $\mathcal{T}$ est *nulle sur* ω si, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$. C'est à dire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans ω , on a :

$$\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Lemme 2.1. [8] Si une distribution $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est nulle sur chaque ouvert d'une famille $\{\omega_i\}_{i \in I}$, alors $\mathcal{T}$ est nulle sur $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$.

Preuve. [8] Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$. Alors il existe un compact $\mathcal{K} \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$ tel que $\text{supp}(\varphi) = \mathcal{K}$. Comme $\mathcal{K}$ est compact, on peut extraire du recouvrement $\{\omega_i\}_{i \in I}$ un sous-recouvrement fini $\{\omega_i\}_{i \in J}$.

Soit $\{\chi_i\}_{i \in J}$ une partition de l'unité relative à $\{\omega_i\}_{i \in J}$, c'est-à-dire $\chi_i \in \mathcal{D}(\omega_i)$ pour tout $i \in J$ et :

$$\sum_{i \in J} \chi_i(x) = 1, \forall x \in \mathcal{K}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathcal{K}$, on a :

$$\varphi(x) = \sum_{i \in J} \chi_i(x) \varphi(x).$$

Chaque $\chi_i \varphi \in \mathcal{D}(\omega_i)$, et comme $\mathcal{T}$ est nulle sur chaque ω_i , on a :

$$\langle \mathcal{T}, \chi_i \varphi \rangle = 0.$$

Par linéarité de l'action de $\mathcal{T}$:

$$\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle = \left\langle \mathcal{T}, \sum_{i \in J} \chi_i \varphi \right\rangle = \sum_{i \in J} \langle \mathcal{T}, \chi_i \varphi \rangle = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{T}$ est nulle sur ω .

Définition 2.12. Soit $\{\omega_i\}_{i \in I}$ la famille de tous les ouverts de Ω sur lesquels $\mathcal{T}$ est nulle. Alors :

$$\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i.$$

est le plus grand ouvert de Ω sur lequel $\mathcal{T}$ est nulle. Par définition, le support de $\mathcal{T}$ est le complémentaire de ω dans Ω :

$$\text{supp}(\mathcal{T}) = \Omega \setminus \omega.$$

Remarquons que $\text{supp}(\mathcal{T})$ est un fermé.

Propriétés 2.2. [8]

(1) $x_0 \in \text{supp}(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \forall V_{x_0}$ voisinage de x_0 , $\exists \varphi \in \mathcal{D}(V_{x_0})$ tel que :

$$\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle \neq 0.$$

(2) $\text{supp}(\mathcal{T}) \subset F \Leftrightarrow \mathcal{T} = 0$ sur F^c .

(3) Si une distribution $\mathcal{T}$ est donnée par une fonction continue f ; $\mathcal{T} = [f]$, alors :

$$\text{supp}(\mathcal{T}) = \text{supp}(f).$$

(4) Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ sont deux distributions, alors :

$$\text{supp}(\mathcal{T} + \mathcal{S}) \subset \text{supp}(\mathcal{T}) + \text{supp}(\mathcal{S}).$$

Proposition 2.1. [8] Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que :

$$\text{supp}(\mathcal{T}) \cap \text{supp}(\varphi) = \emptyset.$$

alors :

$$\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle = 0.$$

Preuve. $\text{supp}(\varphi) \subset (\text{supp}(\mathcal{T}))^c$ qui est ouvert, alors :

$$\forall x \in \text{supp}(\varphi), \exists \mathcal{V}_x \subset (\text{supp}(\mathcal{T}))^c, \text{ ou est un voisinage ouvert de } x.$$

d'où $\chi_{\mathcal{V}(x)}, \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{V}_x)$ par suite $\langle \mathcal{T}, (\chi_{\mathcal{V}_x})\varphi \rangle = 0$ et comme :

$$\text{supp}(\varphi) = \bigcup_{x \in \text{supp}(\varphi)} \mathcal{V}_x \subset (\text{supp}(\mathcal{T}))^c,$$

est compact, il existe un recouvrement finie $\{V_i\}_{i \in I}$ tel que :

$$\text{supp}(\varphi) = \bigcup_{i \in I} V_i \subset (\text{supp}(\mathcal{T}))^c.$$

soit $\{\chi_i\}$ une partition de l'unité associée à $\{V_i\}_{i \in I}$ alors $\varphi = \sum_{i \in I} \chi_i \varphi$ et :

$$\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle = \sum_{i \in I} \langle \mathcal{T}, \chi_i \varphi \rangle = 0.$$

2.6 Distributions à support compact

Définition 2.13. [8] Le sous-ensemble des distributions à support compact dans Ω se note par $\mathcal{E}'(\Omega)$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposition 2.2. Toute distribution à support compact s'identifie à une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Preuve. 1) Soient $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Il existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi = 1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ contenant $\text{supp}(\mathcal{T})$, c'est-à-dire $\text{supp}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{U} \subset \Omega$. Alors, $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ car :

$$\text{supp}(\psi\varphi) \subset \text{supp}(\psi).$$

On définit une forme linéaire $\tilde{\mathcal{T}}$ sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ par :

$$\langle \tilde{\mathcal{T}}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{T}, \psi\varphi \rangle.$$

$\tilde{\mathcal{T}}$ est continue. En effet, si une suite (φ_p) converge dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vers φ , alors pour tout compact $\mathcal{K} \subset \Omega$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$D^\alpha \varphi_p \rightarrow D^\alpha \varphi.$$

uniformément sur $\mathcal{K}$. En particulier, $D^\alpha(\psi\varphi_p) \rightarrow D^\alpha(\psi\varphi)$ uniformément sur $\mathcal{K} \cap \text{supp}(\mathcal{T})$, ce qui signifie la convergence de $(\psi\varphi_p)$ vers $(\psi\varphi)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Par suite :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \langle \tilde{\mathcal{T}}, \varphi_p \rangle = \lim_{p \rightarrow \infty} \langle \mathcal{T}, \psi\varphi_p \rangle = \langle \mathcal{T}, \psi\varphi \rangle = \langle \tilde{\mathcal{T}}, \varphi \rangle.$$

2) Soit $\tilde{\mathcal{T}}$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et soit $\mathcal{T}$ sa restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrons que le support de $\mathcal{T}$ est compact.

Soit $(\mathcal{K}_p)$ une suite croissante de compacts telle que :

$$\Omega = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_p.$$

Posons $\omega_p = \Omega \setminus \mathcal{K}_p$. Si $\text{supp}(\mathcal{T})$ n'est pas compact, alors pour tout p , la restriction de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{D}(\omega_p)$ n'est pas nulle. Il existe donc $\varphi_p \in \mathcal{D}(\omega_p)$ telle que :

$$\langle \mathcal{T}, \varphi_p \rangle \neq 0.$$

Or, la suite (φ_p) tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et donc dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, tandis que $\langle \mathcal{T}, \varphi_p \rangle$ ne tend pas vers 0, ce qui est une contradiction.

2.7 Opérations sur les distributions

2.7.1 Addition

Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$. La forme linéaire $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$, définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p), \langle \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2, \varphi \rangle = \langle \mathcal{T}_1, \varphi \rangle + \langle \mathcal{T}_2, \varphi \rangle.$$

est bien une distribution.

Preuve. Soit $I = [\alpha, \beta]$ un intervalle, et soient $(c_1, c_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ tels que les propriétés de continuité de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ s'écrivent :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : |\mathcal{T}_1(\varphi)| \leq c_1 \left\| \varphi^{(p_1)} \right\|_\infty, \quad |\mathcal{T}_2(\varphi)| \leq c_2 \left\| \varphi^{(p_2)} \right\|_\infty.$$

Supposons par exemple que $p_1 \leq p_2$, et notons $m = p_2$. En appliquant récursivement la formule des accroissements finis, on montre que :

$$\max \left| \varphi^{(p_1)} \right| \leq (\beta - \alpha)^{m-p_1} \max \left| \varphi^{(m)} \right|.$$

ce qui revient à :

$$\left\| \varphi^{(p_1)} \right\|_\infty \leq (\beta - \alpha)^{m-p_1} \left\| \varphi^{(m)} \right\|_\infty.$$

et donc :

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2, \varphi \rangle| &= |\langle \mathcal{T}_1, \varphi \rangle + \langle \mathcal{T}_2, \varphi \rangle|, \\ &\leq |\langle \mathcal{T}_1, \varphi \rangle| + |\langle \mathcal{T}_2, \varphi \rangle|, \\ &\leq c_1 \left\| \varphi^{(p_1)} \right\|_\infty + c_2 \left\| \varphi^{(p_2)} \right\|_\infty, \\ &\leq c_1 (\beta - \alpha)^{m-p_1} \left\| \varphi^{(m)} \right\|_\infty + c_2 \left\| \varphi^{(m)} \right\|_\infty, \\ &= \left(c_1 (\beta - \alpha)^{m-p_1} + c_2 \right) \left\| \varphi^{(m)} \right\|_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ satisfait bien la propriété de continuité d'une distribution de degré m , et appartient donc à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2.7.2 Transposition

Définition 2.14. [10] Soit f une fonction localement sommable. On note $\tilde{f}$ la fonction définie par :

$$\tilde{f}(x) = f(-x).$$

appelée transposée de f . La distribution associée à $\tilde{f}$ vérifie :

$$\langle \mathcal{T}_{\tilde{f}}, \varphi \rangle = \int f(-x) \varphi(x) dx = \int f(y) \varphi(-y) dy = \langle \mathcal{T}_f, \tilde{\varphi} \rangle.$$

où $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Définition 2.15. [10] (La transposée d'une distribution)

La transposée d'une distribution $\mathcal{T}$, notée $\tilde{\mathcal{T}}$, est la distribution définie par :

$$\langle \tilde{\mathcal{T}}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{T}, \tilde{\varphi} \rangle.$$

pour toute fonction test φ .

Remarque 2.2. Ceci permet de définir des distributions **paires** et **impaires**, comme pour les fonctions usuelles.

2.7.3 Multiplication par une constante

Soient $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p), \langle \lambda \mathcal{T}, \varphi \rangle = \lambda \langle \mathcal{T}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{T}, \lambda \varphi \rangle.$$

(cette dernière égalité découle de la linéarité des distributions).

2.7.4 Translation

Définition 2.16. [4] Soit f une fonction sommable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{T}_f$ la distribution qui lui est associée. On souhaite déterminer la distribution associée à $f(x - a)$ où $a \in \mathbb{R}$ est une constante. Par définition:

$$(\mathcal{T}_a f)(x) = f(x - a).$$

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \mathcal{T}_a f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - a) \varphi(x) dx.$$

En posant $y = x - a$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}_a f, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi(y + a) dy, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) (\mathcal{T}_a \varphi)(y) dy, \\ &= \langle f, \mathcal{T}_a \varphi \rangle. \end{aligned}$$

De manière générale, pour une distribution $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et une constante $a \in \mathbb{R}$:

$$\langle \mathcal{T}_a \mathcal{T}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{T}, \mathcal{T}_a \varphi \rangle.$$

c'est-à-dire explicitement :

$$\langle \mathcal{T}(x - a), \varphi(x) \rangle = \langle \mathcal{T}(x), \varphi(x + a) \rangle.$$

Exemple 2.5. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle \mathcal{T}_a \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{T}_a \varphi \rangle = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle.$$

D'où :

$$\mathcal{T}_a \delta = \delta_a.$$

2.7.5 Multiplication des distributions

Définition 2.17. [4] Le produit de deux distributions arbitraires n'est pas toujours défini. Par exemple, si une distribution est définie par une fonction localement sommable $f(x)$, le produit $f^2(x)$ n'est pas forcément sommable.

Par exemple, la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$

est localement sommable sur tout intervalle ne contenant pas 0, mais $f^2(x) = \frac{1}{|x|}$ n'est pas localement sommable à l'origine.

Dans ce qui suit, nous allons définir le produit d'une distribution $\mathcal{T}$ par une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Supposons tout d'abord que cette distribution soit associée à une fonction localement sommable $f(x)$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle gf, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\varphi(x) dx = \langle f, g\varphi \rangle.$$

où $g\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ car le produit d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et d'une fonction à support compact et infiniment dérivable reste dans $\mathcal{D}$.

Définition 2.18. [4] Le produit d'une distribution quelconque $\mathcal{T}$ par une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ est défini par :

$$\langle g\mathcal{T}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{T}, g\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ce produit $g\mathcal{T}$ définit une distribution. En effet, soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :

$$\langle g\mathcal{T}, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle g\mathcal{T}, \varphi_1 \rangle + \beta \langle g\mathcal{T}, \varphi_2 \rangle.$$

Donc $g\mathcal{T}$ est linéaire.

Pour la continuité : Si $\varphi_k \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $g\varphi_k \rightarrow g\varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par continuité de $\mathcal{T}$, on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle g\mathcal{T}, \varphi_k \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathcal{T}, g\varphi_k \rangle = \langle \mathcal{T}, g\varphi \rangle = \langle g\mathcal{T}, \varphi \rangle.$$

Ainsi, $g\mathcal{T}$ est bien une distribution.

Lemme 2.2. [4] Soit g une fonction indéfiniment dérivable. Alors :

$$g\delta = g(0)\delta.$$

Preuve. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle g\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, g\varphi \rangle = g(0)\varphi(0) = g(0)\langle \delta, \varphi \rangle = \langle g(0)\delta, \varphi \rangle.$$

D'où le résultat :

$$g\delta = g(0)\delta.$$

2.8 Dérivation des distributions

Définition 2.19. [4] Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. En intégrant par parties, on :

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = -\langle f, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

car $\varphi(\pm\infty) = 0$. On est ainsi conduit à la définition générale suivante :

Définition 2.20. [4] On appelle **dérivée** $\mathcal{T}'$ d'une distribution $\mathcal{T}$, la fonctionnelle définie par :

$$\langle \mathcal{T}', \varphi \rangle = -\langle \mathcal{T}, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Proposition 2.3. [4] Toute distribution admet des dérivées d'ordre quelconque qui sont aussi des distributions.

Preuve. Soient $\mathcal{T}$ une distribution et $\varphi \in \mathcal{D}$. Par définition :

$$\langle \mathcal{T}', \varphi \rangle = -\langle \mathcal{T}, \varphi' \rangle, \quad \langle \mathcal{T}'', \varphi \rangle = -\langle \mathcal{T}', \varphi' \rangle = \langle \mathcal{T}, \varphi'' \rangle.$$

et en général :

$$\langle \mathcal{T}^{(j)}, \varphi \rangle = (-1)^j \langle \mathcal{T}, \varphi^{(j)} \rangle.$$

Or, comme $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$, toutes ses dérivées $\varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(j)}$ existent.

- Montrons que $\mathcal{T}^{(j)}$ est une distribution :

Linéarité : Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On a :

$$\langle \mathcal{T}^{(j)}, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle \mathcal{T}^{(j)}, \varphi_1 \rangle + \beta \langle \mathcal{T}^{(j)}, \varphi_2 \rangle.$$

Continuité : Soit une suite (φ_k) convergeant vers φ dans $\mathcal{D}$. Alors, la suite $(\varphi_k^{(j)})$ converge uniformément vers $\varphi^{(j)}$, et donc :

$$\langle \mathcal{T}^{(j)}, \varphi_k \rangle = (-1)^j \langle \mathcal{T}, \varphi_k^{(j)} \rangle.$$

converge vers :

$$(-1)^j \langle \mathcal{T}, \varphi^{(j)} \rangle = \langle \mathcal{T}^{(j)}, \varphi \rangle.$$

Ce qui prouve la continuité et donc que $\mathcal{T}^{(j)}$ est bien une distribution.

Exemple 2.6. [4] (Dérivée de la distribution de Dirac) On a :

$$\langle \delta', \varphi \rangle = - \langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0).$$

De façon générale :

$$\langle \delta^{(m)}, \varphi \rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(0), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Exemple 2.7. [4] (La fonction de Heaviside)

Soit H la fonction de Heaviside sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

et détermine une distribution notée H . Au sens des fonctions, la dérivée de $H(x)$ n'existe pas au point $x = 0$. Mais au sens des distributions, on a pour $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\langle H', \varphi \rangle = - \langle H, \varphi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

car $\varphi(+\infty) = 0$. Par conséquent, $H' = \delta$, donc la distribution H a pour dérivée la distribution de Dirac. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de préciser la valeur de $H(x)$ pour $x = 0$, qui est un ensemble de mesure nulle. Par réitérations, on obtient :

$$H^{(m+1)} = \delta^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Exemple 2.8. (La fonction signe)

Soit la fonction signe sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}.$$

c'est-à-dire :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On peut aussi écrire cette fonction à l'aide de la fonction de Heaviside $H(x)$:

$$\operatorname{sgn}(x) = H(x) - H(-x).$$

Calculons maintenant sa dérivée au sens des distributions :

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{sgn}', \varphi \rangle &= - \langle \operatorname{sgn}, \varphi' \rangle, \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{x} \varphi'(x) dx, \\ &= - \left(\int_{-\infty}^0 \frac{-x}{x} \varphi'(x) dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{x} \varphi'(x) dx \right), \\ &= - \left(\int_{-\infty}^0 (-1) \varphi'(x) dx + \int_0^{+\infty} (1) \varphi'(x) dx \right), \\ &= - \left(- [\varphi(x)]_{-\infty}^0 + [\varphi(x)]_0^{+\infty} \right), \\ &= - \left(-(\varphi(0) - \varphi(-\infty)) + (\varphi(+\infty) - \varphi(0)) \right). \end{aligned}$$

Or, puisque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\varphi(+\infty) = \varphi(-\infty) = 0.$$

Il reste alors :

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{sgn}', \varphi \rangle &= -(-\varphi(0) - \varphi(0)), \\ &= 2\varphi(0), \\ &= 2 \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient au sens des distributions :

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sgn}(x) = 2\delta(x).$$

Théorème 2.3. *La dérivation est une opération linéaire continue dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans le sens suivant :*

$$D^\alpha(af + bg) = aD^\alpha f + bD^\alpha g, \quad \forall f, g \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et } a, b \in \mathbb{C}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

$$\text{Si } f_k \rightarrow f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ alors } D^\alpha f_k \rightarrow D^\alpha f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a, b \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{aligned}
 \langle D^\alpha (af + bg), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle af + bg, D^\alpha \varphi \rangle, \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \langle af, D^\alpha \varphi \rangle + (-1)^{|\alpha|} \langle bg, D^\alpha \varphi \rangle, \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \langle f, a D^\alpha \varphi \rangle + (-1)^{|\alpha|} \langle g, b D^\alpha \varphi \rangle, \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha (a\varphi) \rangle + (-1)^{|\alpha|} \langle g, D^\alpha (b\varphi) \rangle, \\
 &= \langle D^\alpha f, a\varphi \rangle + \langle D^\alpha g, b\varphi \rangle, \\
 &= \langle a D^\alpha f, \varphi \rangle + \langle b D^\alpha g, \varphi \rangle, \\
 &= \langle a D^\alpha f + b D^\alpha g, \varphi \rangle.
 \end{aligned}$$

C'est à dire que D^α , $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, est une opération linéaire sur $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Montrons que si :

$$f_k \rightarrow f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ alors, } D^\alpha f_k \rightarrow D^\alpha f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

En effet puisque $f_k \rightarrow f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\langle f_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$, quand,

$k \rightarrow +\infty$, On sait que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors, $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, par suite :

$\langle f_k, D^\alpha \varphi \rangle \rightarrow \langle f, D^\alpha \varphi \rangle$, $k \rightarrow +\infty$ donc, $\langle D^\alpha f_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle D^\alpha f, \varphi \rangle$, $k \rightarrow +\infty$, c'est à dire que $D^\alpha f_k \rightarrow D^\alpha f$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2.9 Convergence des distributions

Définition 2.21. [4] On dit qu'une suite de distributions $\{\mathcal{T}_k\}$ converge dans $\mathcal{D}'$ vers une distribution $\mathcal{T}$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, la suite numérique $\langle \mathcal{T}_k, \varphi \rangle$ converge dans $\mathbb{C}$ vers le nombre $\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle$.

Définition 2.22. [4] On dit qu'une série de distributions $\sum \mathcal{T}_k$ converge dans $\mathcal{D}'$ et a pour somme la distribution $\mathcal{T}$, si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, la série numérique $\sum \langle \mathcal{T}_k, \varphi \rangle$ converge dans $\mathbb{C}$ et pour somme le nombre $\langle \mathcal{T}, \varphi \rangle$. Il s'agit de la convergence simple (dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'$).

Notation 2.2. [4] On écrit parfois $\mathcal{T}_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} \mathcal{T}$ (resp. $\sum \mathcal{T}_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} \mathcal{T}$) pour dire que $(\mathcal{T}_k)$ (resp. $\sum \mathcal{T}_k$) converge dans $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{T}$.

Exemple 2.9. [4] Montrons que : $\delta_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$. En effet, on a $\langle \delta_k, \varphi \rangle = \varphi(k)$ et puisque φ est à support borné, alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \delta_k, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = 0.$$

Proposition 2.4. [4] Soit $(f_k(x))$ une suite de fonctions localement sommables et supposons qu'elle converge uniformément vers une fonction $f(x)$. Alors la fonction $f(x)$ est localement sommable et la suite des distributions (f_k) associées aux fonctions $f_k(x)$ converge vers la distribution f associée à $f(x)$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} |\langle f_k, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_k(x) - f(x)) \varphi(x) dx \right|, \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_k(x) - f(x)| |\varphi(x)| dx, \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)| \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx \right). \end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)| \right) = 0 \quad (\text{convergence uniforme}).$$

et que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx$ est finie (φ est à support borné), alors $\langle f_k, \varphi \rangle$ converge vers $\langle f, \varphi \rangle$. La fonction $f(x)$ est évidemment localement sommable; il suffit de remarquer que :

$$\int_K |f(x)| dx \leq \int_K |f_k(x)| dx + \int_K |f_k(x) - f(x)| dx.$$

où K est un compact

Proposition 2.5. [4] Soit $(f_k(x))$ une suite de fonctions localement sommables. Supposons que :

- (i) la suite $(f_k(x))$ converge simplement presque partout vers une fonction $f(x)$.
- (ii) il existe une fonction localement sommable $g(x)$ telle que : $|f_k(x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction $f(x)$ est localement sommable, et la suite des distributions (f_k) associées aux fonctions $f_k(x)$ converge vers la distribution f associée à $f(x)$.

Preuve. Les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue étant satisfaites, la fonction $f(x)$ est localement sommable et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) \varphi(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \varphi(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx, \\ &= \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

d'où le résultat .

Proposition 2.6. (a) Si une suite de distributions $(\mathcal{T}_k)$ converge vers une distribution $\mathcal{T}$, alors les distributions dérivées $(\mathcal{T}'_k)$ convergent vers $\mathcal{T}'$.

(b) Toute série de distributions convergente, est dérivable terme à terme.

Preuve. Il suffit de démontrer :

(a) On a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathcal{T}'_k, \varphi \rangle = - \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathcal{T}_k, \varphi' \rangle = - \langle \mathcal{T}, \varphi' \rangle = \langle \mathcal{T}', \varphi \rangle.$$

d'où :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}'_k = \mathcal{T}'.$$

Exemple 2.10. [4] La suite de fonctions $f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge vers $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$.

Étudions la convergence de la suite dérivée $f'_k(x) = \cos kx$. Au sens classique, la suite $(f'_k(x))$ diverge. Au sens des distributions, la suite (f'_k) converge vers 0, en vertu de la proposition précédente. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{T}$ avec $\text{supp}(\varphi) = [a, b]$. On a :

$$\langle f'_k, \varphi \rangle = - \langle f_k, \varphi' \rangle = - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin kx \cdot \varphi'(x) dx.$$

d'où :

$$|\langle f'_k, \varphi \rangle| \leq \frac{1}{k} \left(\int_a^b |\sin kx| dx \right) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)| = \frac{b-a}{k} \cdot \sup_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)|.$$

et par conséquent $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f'_k, \varphi \rangle = 0$.

Définition 2.23. [4] On dit qu'une suite de fonctions localement sommables (f_k) converge dans L^1 vers f si $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| dx = 0$. On dit aussi que (f_k) converge en moyenne vers f .

Proposition 2.7. [4] Soit (f_k) une suite de fonctions localement sommables. Si cette suite converge dans L^1 vers f , alors elle converge dans $\mathcal{D}'$ vers f .

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ avec $\text{supp}(\varphi) \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} |\langle f_k - f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_k - f)(x) \varphi(x) dx \right|, \\ &\leq \int_a^b |f_k(x) - f(x)| dx \cdot \sup_{x \in [a, b]} |\varphi(x)|. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.10 Convolution des distributions

Définition 2.24. [4] Soient f et g deux fonctions de $L_1(\mathbb{R})$. On a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f * g \rangle(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) \varphi(x) dt dx.$$

En posant $u = t, v = x - t$, on obtient :

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(v) \varphi(u+v) du dv.$$

ce qui nous conduit à écrire cette expression sous la forme :

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f \otimes g, \varphi(u+v) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

où $f \otimes g$ est le produit tensoriel de f et g . Cette expression fait intervenir la fonction

$$(u, v) \longmapsto \psi(u, v) = \varphi(u+v), \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

à laquelle il s'agit d'appliquer le produit $f \otimes g$. Or si $\varphi \in \mathcal{D}$, la fonction ψ est indéfiniment dérivable mais n'appartient pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ car son support n'est pas borné. En effet, si $\text{supp}(\varphi) = [a, b]$, alors $(u, v) \in \text{supp}(\psi)$ si et seulement si $u+v \in \text{supp}(\varphi)$ et $\text{supp}(\psi) = (u, v) \in \mathbb{R} : a \leq u+v \leq b$, c'est-à-dire une bande de $\mathbb{R}$ délimitée par les droites d'équations $u+v = a$ et $u+v = b$.

Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ deux distributions. S'inspirant de ce qui vient d'être fait, on va définir le produit de convolution de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ et essayer de trouver des conditions d'existence de ce produit. La difficulté vient du fait que ψ n'appartient pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et celle-ci sera surmontée moyennant l'utilisation d'une extension de $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ (voir ci-dessous) à l'espace de ces fonctions ψ (espace plus large que $\mathcal{D}$).

Définition 2.25. [4] On définit le produit de convolution (quand il existe) de deux distributions $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ par :

$$\langle \mathcal{S} * \mathcal{T}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}_y, \varphi(x+y) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Où $\mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}_y$ est le produit tensoriel de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$.

Pour que cette définition ait un sens, il faut que $\mathcal{S} * \mathcal{T}$ existe. On a si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\text{supp}(\psi)$ n'est pas borné.

Supposons que $\text{supp}(\psi) \cap \text{supp}(\mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}_y)$ soit borné. On définit une extension de $\mathcal{S} * \mathcal{T}$ à l'espace des fonctions ψ , en posant :

$$\langle \mathcal{S} * \mathcal{T}, \psi \rangle = \langle \mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}_y, \psi \rangle = \langle \mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}_y, \alpha \psi \rangle.$$

avec $\alpha \in \mathcal{D}$ valant 1 sur un voisinage de $\text{supp}(\psi) \cap \text{supp}(\mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}_y)$.

D'après la proposition : $\text{supp}(\mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}_y) = \text{supp}(\mathcal{S}) \times \text{supp}(\mathcal{T})$. On arrive ainsi à la condition suffisante suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Le produit de convolution } \mathcal{S} * \mathcal{T} \text{ aura un sens si } \text{supp}(\psi) \cap \text{supp}(\mathcal{S}) \times \text{supp}(\mathcal{T}) \\ \text{est borné} \end{array} \right.$$

Cette condition est satisfaite par exemple lorsque :

- (i) $\text{supp}(\mathcal{S})$ ou $\text{supp}(\mathcal{T})$ est borné : En effet, supposons par exemple $\text{supp}(\mathcal{S})$ borné, alors pour tout $(x, y) \in \text{supp}(\psi) \cap \text{supp}(\mathcal{S}) \times \text{supp}(\mathcal{T})$, on a $x \in \text{supp}(\mathcal{S})$, $y \in \text{supp}(\mathcal{T})$ et $x + y \in \text{supp}(\varphi)$. Donc x et $x + y$ sont bornés.

Comme $y = (x + y) - x$, on en déduit que y est aussi borné. Même raisonnement pour le cas où $\text{supp}(\mathcal{T})$ est borné.

- (ii) $\text{supp}(\mathcal{S})$ et $\text{supp}(\mathcal{T})$ sont bornés d'un même côté : En effet, supposons que $\text{supp}(\mathcal{S})$ et $\text{supp}(\mathcal{T})$ soient bornés à gauche, c'est-à-dire: $\text{supp}(\mathcal{S}) \subset [c_1, +\infty[$ et $\text{supp}(\mathcal{T}) \subset [c_2, +\infty[$.

Pour tout $(x, y) \in \text{supp}(\psi) \cap (\text{supp}(\mathcal{S}) \times \text{supp}(\mathcal{T}))$, on a $x \geq c_1$ et $y \geq c_2$.

Comme $x + y \in \text{supp}(\varphi)$, alors il existe une constante c telle que : $x + y \leq c$. Dès lors, $c_1 \leq x \leq c - y \leq c - c_2$ et $c_2 \leq y \leq c - x \leq c - c_1$. Donc x et y sont bornés.

Même raisonnement pour le cas où $\text{supp}(\mathcal{S})$ et $\text{supp}(\mathcal{T})$ sont bornés à droite.

Proposition 2.8. [4] (*Commutativité*) : Soit $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{D}'$. Si $\mathcal{S} * \mathcal{T}$ existe, alors :

$$\mathcal{S} * \mathcal{T} = \mathcal{T} * \mathcal{S}.$$

Preuve. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S} * \mathcal{T}, \varphi \rangle &= \langle \mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}_y, \varphi(x + y) \rangle, \\ &= \langle \mathcal{S}_x, \langle \mathcal{T}_y, \varphi(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle \mathcal{S}_y, \langle \mathcal{T}_x, \varphi(y + x) \rangle \rangle, \\ &= \langle \mathcal{T}_x \otimes \mathcal{S}_y, \varphi(x + y) \rangle, \\ &= \langle \mathcal{T} * \mathcal{S}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

d'où le résultat .

Proposition 2.9. [4] (*Distributivité par rapport à l'addition*) : Soit $\mathcal{S}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{D}'$. Si $\mathcal{S} * \mathcal{T}_1$ et $\mathcal{S} * \mathcal{T}_2$ existent, alors :

$$\mathcal{S} * (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) = \mathcal{S} * \mathcal{T}_1 + \mathcal{S} * \mathcal{T}_2.$$

Preuve. En effet, il suffit d'utiliser la distributivité du produit tensoriel[4] et la linéarité des distributions.

Proposition 2.10. [4] (*Associativité*) : Soit $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{D}'$. On a :

$$(\mathcal{R} * \mathcal{S}) * \mathcal{T} = \mathcal{R} * (\mathcal{S} * \mathcal{T}).$$

si deux au moins de ces distributions sont à supports bornés ou si toutes ces distributions ont leurs supports bornés d'un même côté.

Preuve. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{R} * \mathcal{S}) * \mathcal{T}, \varphi \rangle &= \langle (\mathcal{R} * \mathcal{S})_x \otimes \mathcal{T}_z, \varphi(x + z) \rangle, \\ &= \langle (\mathcal{R} * \mathcal{S})_x, \langle \mathcal{T}_z, \varphi(x + z) \rangle \rangle, \\ &= \langle \mathcal{R}_x \otimes \mathcal{S}_y, \langle \mathcal{T}_z, \varphi(x + y + z) \rangle \rangle, \\ &= \langle \mathcal{R}_x \otimes \mathcal{S}_y, \otimes \mathcal{T}_z, \varphi(x + y + z) \rangle. \end{aligned}$$

On montre de même que,

$$\langle \mathcal{R} * (\mathcal{S} * \mathcal{T}), \varphi \rangle = \langle \mathcal{R}_x \otimes \mathcal{S}_y, \otimes \mathcal{T}_z, \varphi(x + y + z) \rangle.$$

d'où le résultat

Remarque 2.3. [4] Il faut bien noter qu'en général $(\mathcal{R} * \mathcal{S}) * \mathcal{T} \neq \mathcal{R} * (\mathcal{S} * \mathcal{T})$.

Proposition 2.11. [4] (*Support d'une convolution*) : Soit $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{D}'$ et supposons que $\mathcal{S} * \mathcal{T}$ existe. Alors :

$$\text{supp}(\mathcal{S} * \mathcal{T}) \subset \overline{\text{supp}(\mathcal{S}) + \text{supp}(\mathcal{T})}.$$

Preuve. En effet, posons $\mathcal{F} = \text{supp}(\mathcal{S}) + \text{supp}(\mathcal{T})$. L'ensemble $\mathcal{F}$ est un fermé puisque $\text{supp}(\mathcal{S})$ et $\text{supp}(\mathcal{T})$ sont des fermés et $\text{supp}(\psi) \cap (\text{supp}(\mathcal{S}) \times \text{supp}(\mathcal{T}))$ est borné, $\psi(x, y) = \varphi(x + y)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ telle que : $\text{supp}(\varphi) \subset \mathcal{F}^c$ et montrons que $\langle \mathcal{S} * \mathcal{T}, \varphi \rangle = 0$. Par définition, $\langle \mathcal{S} * \mathcal{T}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}_y, \varphi(x + y) \rangle$. On a le support d'un produit tensoriel :

$$\mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}_y = \text{supp}(\mathcal{S}_x) \times \text{supp}(\mathcal{T}_y)$$

et que $(x, y) \in \text{supp}(\psi)$ si et seulement si $x + y \in \text{supp}(\varphi)$, $\text{supp}(\psi) = \{(x, y) : x + y \in \text{supp}(\varphi)\}$.
Si $x \in \text{supp}(\mathcal{S})$ et $y \in \text{supp}(\mathcal{T})$, alors $x + y \in \text{supp}(\mathcal{S}) + \text{supp}(\mathcal{T})$. Or $\text{supp}(\varphi) \cap \mathcal{F} = 0$,
on en déduit que :

$$\text{supp}(\psi) \cap (\text{supp}(\mathcal{S}_x) \otimes \text{supp}(\mathcal{T}_y)) = 0.$$

D'où, $\langle \mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}_y, \varphi(x + y) \rangle = 0$, c'est-à-dire que $\langle \mathcal{S} * \mathcal{T}, \varphi \rangle = 0$ et la démonstration est complète.

Proposition 2.12. [4](Dérivation d'une convolution) soit $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{D}'$. Si $\mathcal{S} * \mathcal{T}$ existe, alors:

$$(\mathcal{S} * \mathcal{T})' = \mathcal{S}' * \mathcal{T} = \mathcal{S} * \mathcal{T}'.$$

et plus généralement

$$D^\alpha(\mathcal{S} * \mathcal{T}) = D^\alpha \mathcal{S} * \mathcal{T} = \mathcal{S} * D^\alpha \mathcal{T}.$$

ou D^α désigne une dérivation d'ordre α .

Preuve. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ on a :

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{S} * \mathcal{T})', \varphi \rangle &= -\langle \mathcal{S} * \mathcal{T}, \varphi' \rangle, \\ &= -\langle \mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}_y, \varphi'(x + y) \rangle, \\ &= -\langle \mathcal{S}_x, \langle \mathcal{T}_y, \varphi'(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle \mathcal{S}_x, -\langle \mathcal{T}_y, \varphi'(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle \mathcal{S}_x, \langle \mathcal{T}'_y, \varphi(x + y) \rangle \rangle, \\ &= \langle \mathcal{S}_x \otimes \mathcal{T}'_y, \varphi(x + y) \rangle, \\ &= \langle \mathcal{S} * \mathcal{T}', \varphi \rangle. \end{aligned}$$

d'où $(\mathcal{S} * \mathcal{T})' = \mathcal{S} * \mathcal{T}'$. En tenant compte de la commutativité, on obtient aussi $(\mathcal{S} * \mathcal{T})' = \mathcal{S}' * \mathcal{T}$, d'où le résultat.

Proposition 2.13. [4] (Continuité de la convolution) Soient $(\mathcal{S}_\alpha)$ et $(\mathcal{T}_\alpha)$ deux familles de distributions dépendantes d'un paramètre α telles que : $\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}$, $\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} \mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}$ (λ fini ou non).

Posons : $\psi(x, y) = \varphi(x + y)$, $\varphi \in \mathcal{D}$ et supposons que $\text{supp}(\mathcal{S}_\alpha)$ et $\text{supp}(\mathcal{T}_\alpha)$ soient contenus dans deux ensembles fermés fixes A et B tels que : $\text{supp}(\psi) \cap (A \times B)$ soit borné. Alors,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} (\mathcal{S}_\alpha * \mathcal{T}_\alpha) = \mathcal{S} * \mathcal{T}.$$

Cas particulier : soient $\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}$ des distributions comme ci-dessus et $\mathcal{S}$ une distribution quelconque. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- (i) $\text{supp}(\mathcal{T}_\alpha)$ est contenu dans un ensemble fermé fixe.
- (ii) $\text{supp}(\mathcal{S})$ est borné.
- (iii) $\text{supp}(\mathcal{T}_\alpha)$ et $\text{supp}(\mathcal{S})$ sont contenus dans le demi-espace $x \geq 0$. Alors :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \lambda} (\mathcal{S} * \mathcal{T}_\alpha) = \mathcal{S} * \mathcal{T}.$$

Proposition 2.14. [4] (Régularisation des distributions) Soient $\mathcal{T}$ une distribution et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si $\mathcal{T} * f$ existe, alors c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, donnée par :

$$\mathcal{T} * f(t) = \langle \mathcal{T}_x, f(t-x) \rangle = g(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T} * f, \varphi \rangle &= \langle \mathcal{T}_x \otimes f(t), \varphi(x+t) \rangle, \\ &= \langle \mathcal{T}_x, \langle f(t), \varphi(x+t) \rangle \rangle, \\ &= \langle \mathcal{T}_x, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(x+t) dt \rangle, \\ &= \langle \mathcal{T}_x, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x) \varphi(t) dt \rangle, \\ &= \langle \mathcal{T}_x, \langle \varphi(t), f(t-x) \rangle \rangle, \\ &= \langle \varphi(t), \langle \mathcal{T}_x, f(t-x) \rangle \rangle, \\ &= \langle \langle \mathcal{T}_x, f(t-x) \rangle, \varphi(t) \rangle, \\ &= \langle g(t), \varphi(t) \rangle. \end{aligned}$$

où $g(t) = \langle \mathcal{T}_x, f(t-x) \rangle$. On a :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle \mathcal{T}_x, f(t+h-x) - \langle \mathcal{T}_x, f(t-x) \rangle \rangle}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \langle \mathcal{T}_x, \frac{f(t+h-x) - f(t-x)}{h} \rangle. \end{aligned}$$

et on montre, que $g'(t) = \langle \mathcal{T}_x, f'(t-x) \rangle$. On procède de même pour les dérivées successives et on obtient finalement l'expression $g^k(t) = \langle \mathcal{T}_x, f^k(t-x) \rangle$ d'où le résultat.

Remarque 2.4. [4] Dans la proposition précédente, si $f \in \mathcal{D}$ et $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'$ alors le produit de convolution $\mathcal{T} * f$ existe car $\text{supp}(f)$ est borné. De même, si $f \in \mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty$ et $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'$ alors $\text{supp}(\mathcal{T})$ est borné et $\mathcal{T} * f$ existe.

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

3.1 Transformée de Laplace des fonction

Définition 3.1. [4] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow (\text{ou } \mathbb{C})$, une fonction localement sommable. On appelle transformée de Laplace de $f(x)$ la fonction notée $\mathcal{L}\{f(x)\}$ ou $F(p)$ de la variable complexe $p = \sigma + i\omega$ définie par :

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(x) \exp(-px) dx.$$

La fonction f est appelée original de F et, F l'image de f .

Les notations de la transformée de Laplace sont très variées. Citons à titre d'exemple :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}, \mathcal{L}(f)(p), \tilde{f}, f(x) \leftarrow F(p), f(x) \sqsupset F(p).$$

Remarque 3.1. [4]

- a) Il faut noter que $F(p)$ n'existe pas toujours. Pour s'en convaincre, il suffit de choisir l'exemple $f(x) = \exp(x^2)$ Pour cette fonction l'intégrale ci-dessus n'est pas définie.
- b) Les valeurs de f pour $x < 0$, n'interviennent pas dans la définition ci-dessus. Une fonction f telle que : $f = 0$ pour $x < 0$ est dite causale. Évidemment, on peut rendre une fonction causale en la multipliant par la fonction de Heaviside.

- c) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C})$ est une fonction localement sommable, on définit la transformée de Laplace bilatérale par:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(x) \exp(-px) dx.$$

Notons que la transformée de Laplace de f définie par avant coïncide avec la transformée de Laplace bilatérale de $H(x)f(x)$ où $H(x)$ est la fonction de Heaviside.

- e) Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, nulle pour tout $x < 0$, continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et si en outre ils existent des constantes $M > 0$ et σ_0 telles que :

$$|f(x)| \leq M \exp(\sigma_0 x), \quad \forall x \geq x_0$$

(la fonction f est dite de type exponentielle à l'infini), alors la transformée de Laplace existe pour tout $\sigma > \sigma_0$.

Proposition 3.1. [4] Si l'intégrale (Définitions 3.1) converge pour $\operatorname{Re} p = \sigma_0$, alors il en est de même pour tout p tel que : $\operatorname{Re} p \geq \sigma_0$.

Preuve. En effet, on a:

$$|f(x) \exp(-px)| = |f(x)| \exp(-\sigma x) \leq |f(x)| \exp(-\sigma_0 x).$$

Puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \exp(-\sigma_0 x) dx$ existe, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) \exp(-px)|$ existe aussi. Par conséquent, la transformée de Laplace $F(p)$ existe dans le demi-plan défini par $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \geq \sigma_0\}$, d'où le résultat.

Corollaire 3.1. [4] Si l'intégrale (Définitions 3.1) diverge pour $\operatorname{Re} p = \sigma_0$, alors elle diverge pour $\operatorname{Re} p < \sigma_0$.

Définition 3.2. [4] Soit $f \in L_{loc}([0, +\infty[)$. Le nombre :

$$\sigma_0 = \inf \{ \sigma \in \mathbb{R} : f(x) \exp(\sigma x) \in L_{loc}([0, +\infty[) \}.$$

s'appelle abscisse de sommabilité ou abscisse de convergence absolue de la fonction f . Le demi-plan de convergence $\{p = \sigma + i\omega : \operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0\}$ est le domaine de sommabilité sur lequel $F(p)$ est défini.

Exemple 3.1. [4] La transformée de Laplace de la fonction Heaviside $H(x)$ égale à 1 si $x > 0$, 0 si $x < 0$, est

$$\mathcal{L}\{H(x)\} = \int_0^{\infty} \exp(-px) dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1 - \exp(pu)}{p} = \frac{1}{p}.$$

pourvu que $\operatorname{Re} p > 0$, c'est-à-dire l'abscisse de sommabilité est $\sigma_0 = 0$.

Nous allons étudier ci-dessous un certain nombre de propriétés élémentaires sur les transformées de Laplace.

Propriétés 3.1. [4](Linéarité).

La transformée de Laplace est une application linéaire. Plus précisément, Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ pour toutes fonctions f, g , d'abscisses de sommabilité respectives σ_0, ζ_0 , alors:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(x)\} + \beta \mathcal{L}\{g(x)\} = \alpha F(p) + \beta G(p).$$

où $\operatorname{Re} p > \max\{\sigma_0, \zeta_0\}$.

Preuve. [4] En effet, si les fonctions f et g admettent des transformées de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p) = \int_0^\infty f(x) \exp(-px) dx ; \quad \mathcal{L}\{g(x)\} = G(p) = \int_0^\infty g(x) \exp(-px) dx.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} &= \int_0^\infty (\alpha f(x) + \beta g(x)) \exp(-px) dx, \\ &= \alpha \int_0^\infty f(x) \exp(-px) dx + \beta \int_0^\infty g(x) \exp(-px) dx, \\ &= \alpha \mathcal{L}\{f(x)\} + \beta \mathcal{L}\{g(x)\}, \\ &= \alpha F(p) + \beta G(p), \end{aligned}$$

où α et β sont des constantes. Si les abscisses de sommabilité de f et g sont respectivement σ_0 et ζ_0 , alors le domaine de sommabilité sur lequel $\alpha f + \beta g$ est défini sur lequel $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \max\{\sigma_0, \zeta_0\}\}$.

Propriétés 3.2. [4](Translation).

Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors :

$$\mathcal{L}\{f(x) - c\} = \exp(-cp)F(p), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

Preuve. Posons :

$$g(x) = \begin{cases} f(x - c) & \text{si } x > c, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(x)\} &= \int_0^\infty g(x) \exp(-px) dx, \\ &= \int_0^c g(x) \exp(-px) dx + \int_c^\infty g(x) \exp(-px) dx, \\ &= \int_c^\infty f(x - c) \exp(-px) dx, \\ &= \exp(-pc) \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt, \quad t = x - c, \\ &= \exp(-pc)F(p). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Propriétés 3.3. [4] Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors :

$$\mathcal{L}\{f(x) \exp(\alpha - x)\} = F(p + \alpha), \quad \operatorname{Re}(p + \alpha) > \sigma_0.$$

Preuve. On a évidemment :

$$\mathcal{L}\{f(x) \exp(-\alpha x)\} = \int_0^\infty f(x) \exp(-(\alpha + p)x) dx = F(p + \alpha).$$

D'où le résultat.

Propriétés 3.4. [4] (Changement d'échelle).

Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors :

$$\mathcal{L}\{f(cx)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right), \quad c > 0.$$

Preuve. On a :

$$\mathcal{L}\{f(cx)\} = \int_0^\infty f(cx) \exp(-px) dx = \frac{1}{c} \int_0^\infty f(t) \exp\left(-\frac{p}{c}t\right) dt = \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right),$$

où $t = cx$, d'où le résultat.

Propriétés 3.5. [4] (Conjugaison complexe).

Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors :

$$\mathcal{L}\{\bar{f}(x)\} = \bar{F}(\bar{p}).$$

Preuve. On a :

$$\mathcal{L}\{\bar{f}(x)\} = \int_0^\infty \bar{f}(x) \exp(-px) dx = \overline{\int_0^\infty f(x) \exp(-\bar{p}x) dx} = \bar{F}(\bar{p}).$$

d'où le résultat.

Exemple 3.2. [4] Les transformées de Laplace des fonctions exponentielle et trigonométriques sont :

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{L}\{\exp(-\alpha x)\} &= \int_0^\infty \exp(-(\alpha + p)x) dx = \frac{1}{\alpha + p}, \quad \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} \alpha. \\ \bullet \mathcal{L}\{\cos \omega x\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\exp(i\omega x) + \exp(-i\omega x)}{2}\right\}, \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}\{\exp(i\omega x)\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{\exp(-i\omega x)\}, \quad (\text{propriété de linéarité}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-i\omega + p}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i\omega + p}\right), \\ &= \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \end{aligned}$$

et :

$$\bullet \mathcal{L} \{ \sin \omega x \} = \mathcal{L} \left\{ \frac{\exp(i\omega x) - \exp(-i\omega x)}{2i} \right\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Proposition 3.2. [4] La transformée de Laplace d'une fonction localement sommable f , est une fonction holomorphe dans le domaine de sommabilité $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \sigma_0\}$ et on a la formule:

$$F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-x)^n f(x) \exp(-px) dx = (-1)^n \mathcal{L} \{x^n f(x)\}.$$

Preuve. Soient $F(p) = \int_0^\infty f(x) \exp(-px) dx$, la transformation de Laplace de $f(x)$ et σ_0 l'abscisse de sommabilité de $f(x)$. En dérivant formellement les deux membres, on obtient successivement :

$$F'(p) = - \int_0^\infty x f(x) \exp(-px) dx, \quad F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-x)^n f(x) \exp(-px) dx.$$

Montrons que l'abscisse de sommabilité de $(-x)^n f(x)$ est encore σ_0 . En effet, par hypothèse f est localement sommable, donc on ne tiendra pas compte des grandes valeurs de x . Or à l'infini, les fonctions $f(x) \exp(-px)$ et $(-x)^n f(x) \exp(-px)$ ont même comportement, donc elles ont le même abscisse de sommabilité. Pour établir la formule de dérivation ci-dessus, il suffit de vérifier les conditions d'application du théorème de dérivation sous le signe somme.

Notons que pour tout $p = \sigma + i\omega$, avec $\sigma > \sigma_0$, on a :

$$|(-x)^n f(x) \exp(-px)| \leq x^n |f(x)| \exp(-\sigma_0 x).$$

La fonction $x^n |f(x)| \exp(-\sigma_0 x)$ est sommable et on en déduit que $(-x)^n f(x) \exp(-px)$ est sommable aussi et qu'il est donc légitime de dériver sous le signe somme tant que $\sigma > \sigma_0$. D'où le résultat.

Exemple 3.3. [4] Déterminons la transformée de Laplace de x^n . D'après la proposition précédente, on a $\mathcal{L} \{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(p)$. Ici $f(x) = 1$ et $F(p) = \frac{1}{p}$ d'où :

$$\mathcal{L} \{x^n\} = (-1)^n \left(\frac{1}{p} \right)^{(n)}.$$

Explicitement, on a :

$$\mathcal{L} \{x\} = \frac{1}{p^2}, \quad \mathcal{L} \{x^2\} = \frac{2}{p^3}, \quad \mathcal{L} \{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Le résultat suivant joue un rôle important dans la résolution des équations intégrales.

Propriétés 3.6. [4] Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$ et $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(p)$, alors :

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\} = F(p)G(p), \quad \text{Re } p > \max \sigma_0 \zeta_0,$$

où σ_0 et ζ_0 sont les indices de sommabilité de f et g respectivement .

Preuve. On a :

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\} = \int_0^\infty (f * g)(x) \exp(-px) dx = \int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)g(x-t) dt \right) \exp(-px) dx.$$

Notons que : $0 \leq t \leq x$, $0 \leq x < \infty$ ou $0 \leq t < \infty$, $t \leq x < \infty$. Pour pouvoir utiliser le théorème de Fubini, il faut s'assurer que l'intégrale double :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(t)g(x-t) \exp(-px) dt dx,$$

converge. en posant $T = x - t$ et en tenant compte du fait que le jacobien est égal à 1, cette intégrale se ramène à :

$$\int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt \int_0^\infty g(\tau \exp(-pT)) dT.$$

Cette dernière existe car par hypothèse $\mathcal{L}\{f(x)\}$ et $\mathcal{L}\{g(x)\}$ existent. Dès lors,

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} \mathcal{L}\{g(x)\} = F(p)G(p),$$

d'où le résultat.

Proposition 3.3. [4] Soit f une fonction localement sommable. On suppose que pour tout $x > 0$ f est continue, sa dérivée $f'(x)$ existe et est continue par morceaux. S'il existe des constantes $M > 0$ et σ_0 telles que: $|f(x)| \leq M \exp(\sigma_0 x)$, pour tout $x \geq x_0$, alors :

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = p \mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+) = pF(p) - f(0^+), \text{ Re } p > \sigma_0.$$

Preuve. On a pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que: $\text{Re } p > \sigma_0$

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = \int_0^\infty f'(x) \exp(-px) dx.$$

En faisant une intégration par parties, on obtient :

$$\int_\varepsilon^u f'(x) \exp(-px) dx = f(u) \exp(-pu) - f(\varepsilon) \exp(-p\varepsilon) + p \int_\varepsilon^u f(x) \exp(-px) dx.$$

Comme $|f(u)| \leq M \exp(\sigma_0 u)$, alors :

$$f(u) \exp(-pu) \leq M \exp(\sigma_0 u) |\exp(-pu)| = M \exp((\sigma_0 - \sigma)u), \quad p = \sigma + iw.$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque $u \rightarrow +\infty$ car $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$.

Dès lors,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\infty} f'(x) \exp(-px) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(p \int_{\varepsilon}^u f(x) \exp(-px) dx - f(\varepsilon) \exp(-p\varepsilon) \right),$$

et cette limite existe si et seulement si $f(0^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon)$ existe. D'où :

$$\mathcal{L} \{f'(x)\} = p \int_0^{\infty} f(x) \exp(-px) dx - f(0^+) = p \mathcal{L} \{f(x)\} - f(0^+),$$

d'où le résultat.

En général, si $f(x)$ est discontinue aux points $x_1, \dots, x_n$, alors :

$$\mathcal{L} \{f'(x)\} = p \mathcal{L} \{f(x)\} - f(0^+) - \sum_{k=1}^n \exp(-px_k) (f(x_k^+) - f(x_k^-)).$$

Notons aussi que les expressions ci-dessus se généralisent par récurrence pour les dérivées d'ordres supérieures. Par exemple pour l'expression obtenue dans la proposition précédente, supposons que f est localement sommable, f est continue pour tout $x > 0$, les dérivées $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ existent et sont continues par morceaux, il existe des constantes $M > 0$ et σ_0 telles que: $|f(x)| \leq M \exp(\sigma_0 x)$ pour tout $x \geq x_0$ alors :

$$\mathcal{L} \{f^n(x)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+).$$

En effet, pour $n = 1$, on vient de prouver que:

$$\mathcal{L} \{f'(x)\} = p \mathcal{L} \{f(x)\} - f(0^+).$$

Supposons la formule en question vraie jusqu'au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$. On a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{f^{(n+1)}(x)\} &= p \mathcal{L} \{f^{(n)}(x)\} - f^{(n)}(0^+), \\ &= p \left(p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+) \right) \\ &\quad - f^{(n)}(0^+), \\ &= p^{n+1} F(p) - p^n f(0^+) - p^{n-1} f'(0^+) - \dots - p f^{(n-1)}(0^+) - f^{(n)}. \end{aligned}$$

Proposition 3.4. [4] Si $\mathcal{L} \{f(x)\} = F(p)$, alors :

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x f(t) dt \right\} = \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > \max(0, \sigma_0).$$

Preuve. Posons $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. D'après la proposition (3.3), on a :

$$\mathcal{L}\{g'(x)\} = p\mathcal{L}\{g(x)\} - g(0) = p\mathcal{L}\{g(x)\}.$$

car $g(0) = 0$. Or $g'(x) = f(x)$ d'où $\mathcal{L}\{g'(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$ On en déduit que :
 $p\mathcal{L}\{g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$ c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{\mathcal{L}\{f(x)\}}{p} = \frac{F(p)}{p}.$$

ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 3.5. [4] (comportement à l'infini).

Si f est une fonction ayant une abscisse de sommabilité σ_0 , alors pour $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0.$$

Preuve. soit $F(p) = \int_0^\infty f(x) \exp(-px)dx$. Posons $p = \sigma_0 + iw = \sigma_0 + r \exp(i\theta)$ pour $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ on a $\cos \theta > 0$ et :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} |f(x) \exp(-px)| = \lim_{p \rightarrow +\infty} |f(x)| \exp(-\sigma_0 x) \exp(-r \cos(\theta x)) = 0.$$

et il suffit d'utiliser le théorème de convergence dominée pour avoir le résultat.

Proposition 3.6. [4] (théorème de la valeur initiale).

Soit f une fonction ayant une transformée de Laplace et telle que $f(0^+)$ existe. Alors :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = f(0^+).$$

Preuve. on a :

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = \int_0^\infty f'(x) \exp(-px)dx = pF(p) - f(0^+).$$

D'après la proposition (3.5), toute transformée de Laplace tend vers 0 quand $p \rightarrow \infty$. Par conséquent :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} (pF(p) - f(0^+)) = 0.$$

Proposition 3.7. [4] (théorème de la valeur finale).

Soit f une fonction ayant une transformée de Laplace et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$ existe et est finie. Alors :

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(+\infty).$$

Preuve. D'après le théorème de convergence dominée, on a:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(x) \exp(-px) dx = \int_0^{\infty} f'(x) dx = f(+\infty) - f(0^+).$$

Or d'après la proposition (3.3) on sait que :

$$\mathcal{L} \{ f'(x) \} = pF(p) - f(0^+),$$

et le résultat en découle.

3.2 Transformée de Laplace des distributions

Définition 3.3. [4] Soit $\mathcal{T}$ une distribution de $\mathcal{D}'_+$ (c'est-à-dire à support borné à gauche). Supposons qu'il existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour $\sigma > \sigma_0$, la distribution $\exp(-\sigma x)\mathcal{T}$ soit tempérée. Alors, la transformée de Laplace de $\mathcal{T}$ est la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\mathcal{LT}(p) = \langle \mathcal{T}, \exp(-px) \rangle, \quad \text{Re } p = \sigma > \sigma_0.$$

Comme pour les fonctions, ici aussi la borne inférieure des σ_0 s'appelle abscisse de sommabilité. Il n'est pas difficile de montrer que l'expression ci dessus a bien un sens. En effet, soit $\alpha(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support limité à gauche et égale à 1 sur un voisinage de $\mathbb{R}_+$,

Pour $\text{Re } p = \sigma > \sigma_0$, il existe $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ tel que : $\sigma_0 > \sigma_1 > \sigma$. Dès lors:

$\exp(-\sigma x)\mathcal{T} \in \mathcal{S}'$, $\alpha(x) \exp(-(p - \sigma_1)x)\mathcal{T} \in \mathcal{S}'$, et l'expression

$$\langle \exp(-\sigma_1 x)\mathcal{T}, \alpha(x) \exp(-(p - \sigma_1)x) \rangle,$$

a un sens. Cette définition ne dépend ni du choix de σ_1 ni celui de $\alpha(x)$. Pour σ_1 , c'est évident. Pour $\alpha(x)$, soit $\beta(x)$ une autre fonction satisfaisant aux mêmes hypothèses que $\alpha(x)$. Alors, la fonction $\alpha(x) - \beta(x)$ est nulle sur un voisinage de $\text{supp}(\mathcal{T})$ et par conséquent l'expression:

$$\langle \exp(-\sigma_1 x)\mathcal{T}, (\alpha(x) - \beta(x)) \exp(-(p - \sigma_1)x) \rangle.$$

est nulle. On peut définir la transformée de Laplace d'une distribution dans d'autres cas. Mais il faut bien noter que si $\mathcal{T}$ est une distribution quelconque, la fonction $\mathcal{LT}(p)$ n'est pas définie puisque la fonction $\exp(-px)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais n'est pas à support borné, donc $\exp(-px) \notin \mathcal{D}$. Par contre si $\mathcal{T} \in \mathcal{S}'$, $\mathcal{LT}(p)$ est définie (sur $\text{Re } p > 0$) pour tout p tel que $\exp(-px)$ soit à décroissance rapide en tant que fonction de x .

Exemple 3.4. [4] La transformée de Laplace de la distribution δ de Dirac est $\mathcal{L}\delta = 1$. En effet, on a :

$$\mathcal{L}\delta = \langle \delta, \exp(-px) \rangle = 1.$$

Exemple 3.5. [4] La transformée de Laplace de la dérivée n -ième de la distribution δ de Dirac est $\mathcal{L}(\delta^{(n)}) = p^n$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\delta^{(n)}) &= \langle \delta^{(n)}, \exp(-px) \rangle, \\ &= (-1)^n \langle \delta, (\exp(-px))^{(n)} \rangle, \\ &= (-1)^n \langle \delta, (-p)^{(n)} \exp(-px) \rangle, \\ &= (-1)^n (-p)^{(n)}, \\ &= p^n. \end{aligned}$$

Remarque 3.2. [4] Lorsque $\mathcal{T}$ est associée à une fonction localement sommable f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on aura :

$$\mathcal{L}f(x) = \langle f(x), \exp(-px) \rangle = \int_0^\infty f(x) \exp(-px) dx.$$

On retrouve ainsi la définition de la transformée de Laplace au sens des fonctions.

Comme pour les fonctions, la transformée de Laplace des distributions est évidemment linéaire. Si $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'_+$ admet une transformée de Laplace pour $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ et si $\mathcal{S} \in \mathcal{D}'_+$ admet une transformée de Laplace pour $\operatorname{Re} p > \zeta_0$, alors on a pour :

$$\operatorname{Re} p > \max(\sigma_0, \zeta_0), \quad \mathcal{L}(\alpha\mathcal{T} + \beta\mathcal{S}) = \alpha(\mathcal{L}\mathcal{T}) + \beta(\mathcal{L}\mathcal{S}),$$

où α et β sont des constantes.

Proposition 3.8. [4] Dans son demi-plan de définition $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \sigma_0\}$, la fonction $\mathcal{L}\mathcal{T}(p)$ est holomorphe et on a :

$$(\mathcal{L}\mathcal{T})^{(n)} = \mathcal{L}(-x^n)\mathcal{T}.$$

Preuve. En effet, soient $p \in \mathbb{C}$ et h assez petit tels que : $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ et $\operatorname{Re}(p+h) > \sigma_0$. Posons $F(p) = \mathcal{L}\mathcal{T}(p)$. D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(p+h) - F(p)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\langle \mathcal{T}, \exp(-(p+h)x) \rangle - \langle \mathcal{T}, \exp(-px) \rangle), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \langle \mathcal{T}, \frac{\exp(-(p+h)x) - \exp(-px)}{h} \rangle. \end{aligned}$$

Quand $h \rightarrow 0$, $\frac{\exp(-(p+h)x) - \exp(-px)}{h}$ tend vers $-x \exp(-px)$, au sens de la convergence dans $\mathcal{S}$. Dès lors, $\mathcal{T}$ étant continue, on a :

$$F'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(p+h) - F(p)}{h} = \langle \mathcal{T}, -x \exp(-px) \rangle,$$

et généralement,

$$F^{(n)}(p) = \langle \mathcal{T}, (-x)^n \exp(-px) \rangle = \langle (-x)^n \mathcal{T}, \exp(-px) \rangle,$$

d'où le résultat .

Proposition 3.9. [4] Soient $\mathcal{T}, \mathcal{S} \in \mathcal{D}'_+$ et possédant des transformées de Laplace $\mathcal{LT}$ et $\mathcal{LS}$. Alors:

$$\mathcal{L}(\mathcal{T} * \mathcal{S}) = (\mathcal{LT})(\mathcal{LS}).$$

Preuve. En effet, par hypothèse $\mathcal{T}, \mathcal{S} \in \mathcal{D}'_+$, donc $\mathcal{T} * \mathcal{S}$ existe. Si $\mathcal{LT}$ (resp. $\mathcal{LS}$) est définie pour $\text{Re } p > \sigma_0$ (resp. $\text{Re } p > \zeta_0$), alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{T} * \mathcal{S})(p) &= \langle \mathcal{T} * \mathcal{S}, \exp^{-px} \rangle, \\ &= \langle \mathcal{T}_u \otimes \mathcal{S}_v, \exp^{-p(u+v)} \rangle, \\ &= \langle \mathcal{T}_u, \exp^{-pu} \rangle \cdot \langle \mathcal{S}_v, \exp^{-pv} \rangle, \\ &= (\mathcal{LT})(p) \cdot (\mathcal{LS})(p). \end{aligned}$$

Pour $\text{Re } p > \max(\sigma_0, \zeta_0)$, d'où le résultat.

Exemple 3.6. [4] En posant $\mathcal{S} = \delta$ dans la formule ci-dessus, En effet, on a dans ce cas:

$$\mathcal{L}(\mathcal{T} * \delta) = \mathcal{LT} \mathcal{LS}.$$

or $\mathcal{T} * \delta = \mathcal{T}$, d'où $\mathcal{LT} = (\mathcal{LT})(\mathcal{L}\delta)$ et par conséquent $\mathcal{L}\delta = 1$.

Proposition 3.10. [4] Si $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'_+$ et admet une transformée de Laplace $\mathcal{LT}$, alors :

$$\mathcal{L}(\mathcal{T}^n) = p^n (\mathcal{LT}).$$

Preuve. En effet, puisque $\mathcal{T}^n = \delta^n * \mathcal{T}$, alors :

$$\mathcal{L}(\mathcal{T}^n) = \mathcal{L}(\delta^{(n)} * \mathcal{T}) = \mathcal{L}(\delta^{(n)}) \cdot (\mathcal{LT}) = p^n (\mathcal{LT}),$$

d'où le résultat.

Exemple 3.7. [4] La transformée de Laplace de la dérivée n^{ime} de la distribution δ de Dirac est :

$$\mathcal{L}(\delta^{(n)}) = p^n(\mathcal{L}\delta) = p^n.$$

Proposition 3.11. Une fonction holomorphe $F(p)$ est la transformée de Laplace d'une distribution $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'_+$, si et seulement s'il existe un demi-plan

$$\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \sigma_0, \sigma_0 \in \mathbb{R}\}.$$

dans lequel on $|F(p)| \leq P(|p|)$, où $P(|p|)$, est un polynôme en $|p|$.

LES APPLICATIONS

4.1 La valeur principale vp :

On définit :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $a > 0$ tel que : $\text{Supp}(\varphi) \subset [-a, a]$, c'est-à-dire :

$$\left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

a) $\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$ est bien défini et on a :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(u) du.$$

En utilisant le changement de variable $u = tx$ avec $t \in [0, 1]$, on obtient :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \int_0^1 \varphi'(tx) dt.$$

On pose $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx) dt$ et on a :

$$\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{|x| > \varepsilon} \psi(x) dx.$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^a \psi(x) dx + \int_{-a}^{-\varepsilon} \psi(x) dx \right).$$

D'une part, puisque la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est impaire, on a :

$$\int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(0)}{x} dx - \int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(0)}{x} dx = 0.$$

D'autre part, ψ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^a \psi(x) dx \right) = \int_{-a}^0 \psi(x) dx + \int_0^a \psi(x) dx = \int_{-a}^a \psi(x) dx.$$

alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} = \int_{-a}^a \psi(x) dx.$$

Donc, l'opérateur est bien défini.

b) $\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$ est linéaire. En effet, si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors :

$$\begin{aligned} \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\alpha \varphi_1(x) + \beta \varphi_2(x)}{x} dx, \\ &= \alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_1(x)}{x} dx + \beta \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_2(x)}{x} dx, \\ &= \alpha \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi_1 \right\rangle + \beta \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

c) La continuité de $\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, et soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$, il existe $a \leq 0$ tel que $K \subset [-a, a]$. On a :

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle \right| &= \left| \int_{-a}^a \psi(x) dx \right|, \\ &\leq \int_{-a}^a |\psi(x)| dx, \\ &\leq \int_{-a}^a \left(\int_0^1 \varphi'(tx) dt \right) dx, \\ &\leq \sup_{y \in K} |\varphi'(y)| \int_{-a}^a \left(\int_0^1 dt \right) dx, \\ &\leq 2a_{K,1}(\varphi). \end{aligned}$$

Donc $\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$ est continue.

Il en résulte que $\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre fini et d'ordre $m \leq 1$.

- Montrons que l'ordre de la distribution $\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$ est exactement $m = 1$, donc il suffit de prouver que $\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$ n'est pas de l'ordre 0, c'est-à-dire qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que pour toute constante de constante $C > 0$ on a :

$$\exists \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad \left| \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle \right| > C \|\varphi\|_{\infty}.$$

Considérons une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que :

- $\text{Supp}(\varphi_n) \subset [-2, 2]$.
- $0 \leq \varphi_n \leq 1$.
- $\varphi_n(x) = 1, \forall x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$.
- $\varphi_n(x) = 0, \forall x \in \left]-2, \frac{1}{2n}\right]$.

D'une part, on a : $\|\varphi_n\|_\infty = 1$, et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi_n \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x} dx \right], \\ &= \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\varphi_n(x)}{x} dx + \int_1^2 \frac{\varphi_n(x)}{x} dx, \\ &\geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x} dx = \ln(n). \end{aligned}$$

Donc, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi_n \right\rangle = +\infty$ en déduit que l'ordre du $\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$ n'est pas égale 0, donc égale 1 nous allons maintenant démontrer que : $x \cdot \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right) = 1$.

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ En effet :

$$\begin{aligned} \left\langle x \cdot \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi(x) \right\rangle &= \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), x\varphi(x) \right\rangle, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \varphi(x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Donc : $x \cdot \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right) = 1$.

4.2 La Dérivée de la fonction $\ln |x|$ au sens des distribution :

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $a > 0$ tel que $\text{supp}(\varphi) \subset [-a, a]$. Notons $\mathcal{T}$ la distribution associée à la fonction $\ln |x|$, Donc :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{T}', \varphi \rangle &= -\langle \mathcal{T}, \varphi' \rangle, \\
&= -\int_{-a}^a \varphi'(x) \ln|x| \, dx, \\
&= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{-\epsilon} \varphi'(x) \ln(-x) \, dx + \int_{\epsilon}^a \varphi'(x) \ln(x) \, dx \right).
\end{aligned}$$

mais :

$$\begin{aligned}
\int_{\epsilon}^a \varphi'(x) \ln(x) \, dx &= [\varphi(x) \ln(x)]_{\epsilon}^a - \int_{\epsilon}^a \frac{\varphi(x)}{x} \, dx, \\
&= -\varphi(\epsilon) \ln(\epsilon) - \int_{\epsilon}^a \frac{\varphi(x)}{x} \, dx,
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{-\epsilon} \varphi'(x) \ln(-x) \, dx &= [\varphi(x) \ln(-x)]_{-a}^{-\epsilon} - \int_{-a}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx, \\
&= -\varphi(-\epsilon) \ln(\epsilon) - \int_{-a}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx.
\end{aligned}$$

Maintenant :

$$\begin{aligned}
(\varphi(-\epsilon) - \varphi(\epsilon)) \ln(\epsilon) &= \left(\varphi(0) - \epsilon \varphi'(0) - \varphi(0) - \epsilon \varphi'(0) + 0(\epsilon) \right) \ln(\epsilon), \\
&= -2\varphi'(0)\epsilon \ln(\epsilon) + 0(\epsilon \ln(\epsilon)).
\end{aligned}$$

Mais comme $\epsilon \ln(\epsilon) \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$, on en déduit finalement que :

$$\langle \mathcal{T}', \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx + \int_{\epsilon}^a \frac{\varphi(x)}{x} \, dx \right) = \left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle.$$

4.3 La fonction de Green

LA FONCTION DE GREEN

Mathématiquement, la **fonction de Green**, notée $G(x, s)$, est définie pour un opérateur différentiel linéaire L tel que :

$$[G(x, s)] = \delta(x - s).$$

où δ est la fonction delta de Dirac, qui modélise une source ponctuelle localisée en s .

Cette équation indique que l'application de l'opérateur L à la fonction de Green donne une distribution qui est nulle partout sauf en $x = s$, où elle est infinie de manière à satisfaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - s) \, dx = 1.$$

Dans le cas d'une équation différentielle non homogène de la forme :

$$[u(x)] = f(x).$$

la solution générale peut être exprimée à l'aide de la fonction de Green comme :

$$u(x) = \int G(x, s) f(s) ds.$$

Cette approche transforme la résolution d'une équation différentielle complexe en un problème d'intégration, ce qui est souvent plus simple analytiquement ou numériquement.

Considérons le problème suivant :

$$y'' + y = \exp(-x), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

• **La fonction de Green associée à ce problème :**

Nous considérons le problème suivant :

$$y'' + y = e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

La fonction de Green $G(x, \xi)$ est la solution de :

$$G''(x, \xi) + G(x, \xi) = \delta(x - \xi),$$

avec les conditions aux limites :

$$G(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x}(0, \xi) = 0.$$

Prenons la transformation de Laplace des deux membres de l'équation :

$$\mathcal{L}\{G''\} + \mathcal{L}\{G\} = \mathcal{L}\{\delta(x - \xi)\}.$$

En utilisant les propriétés de la transformation de Laplace :

$$\mathcal{L}\{G''\} = s^2 G(s) - sG(0, \xi) - G'(0, \xi) = s^2 G(s),$$

$$\mathcal{L}\{G\} = G(s),$$

$$\mathcal{L}\{\delta(x - \xi)\} = e^{-\xi s}.$$

L'équation devient alors :

$$(s^2 + 1)G(s, \xi) = e^{-\xi s}.$$

Nous obtenons :

$$G(s, \xi) = \frac{e^{-\xi s}}{s^2 + 1}.$$

La transformée inverse de Laplace de $\frac{1}{s^2 + 1}$ est donnée par :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] = \sin x.$$

En utilisant la propriété de translation :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[e^{-\xi s} F(s) \right] = H(x - \xi) f(x - \xi),$$

nous obtenons :

$$G(x, \xi) = H(x - \xi) \sin(x - \xi),$$

où $H(x - \xi)$ est la fonction de Heaviside.

- **Trouvant la solution explicite $y(x)$ en utilisant la convolution avec la fonction de Green :**

La solution de l'équation différentielle s'écrit comme une convolution :

$$y(x) = \int_0^x G(x, \xi) e^{-\xi} d\xi.$$

En substituant $G(x, \xi)$:

$$y(x) = \int_0^x \sin(x - \xi) e^{-\xi} d\xi.$$

Par changement de variable $u = x - \xi$, l'intégrale devient :

$$y(x) = e^{-x} \int_0^x \sin u \cdot e^u du.$$

Utilisant l'identité :

$$\int \sin u \cdot e^u du = \frac{1}{2} e^u (\sin u - \cos u),$$

nous obtenons :

$$\int_0^x \sin u \cdot e^u du = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}.$$

Ainsi, nous trouvons :

$$y(x) = e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} \right].$$

Donc, la solution finale du problème est :

$$y(x) = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} e^{-x}.$$

4.4 L'étude de l'équation des ondes

Problème :

On considère l'équation des ondes à une dimension :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

avec les conditions initiales :

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

où $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont des distributions.

1. Transformée de Laplace :

On applique la transformée de Laplace en t , en notant $\mathcal{L}\{u(x, t)\} = \hat{u}(x, s)$. On utilise la propriété :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2 \hat{u}(x, s) - sf(x) - g(x).$$

On obtient donc l'équation transformée :

$$s^2 \hat{u}(x, s) - sf(x) - g(x) = c^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}(x, s).$$

2. Équation différentielle en x :

On réécrit l'équation sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}(x, s) - \frac{s^2}{c^2} \hat{u}(x, s) = -\frac{sf(x) + g(x)}{c^2}.$$

C'est une équation différentielle non homogène avec second membre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Résolution via la fonction de Green :

On considère l'opérateur :

$$L_s = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2}.$$

Son inverse formel est donné par la convolution avec la fonction de Green :

$$G_s(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda = \frac{s}{c}.$$

Donc :

$$\hat{u}(x, s) = G_s * \left(\frac{sf + g}{c^2} \right) (x).$$

4. Transformée de Laplace inverse :

On obtient la solution distributionnelle $u(x, t)$ via :

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \hat{u}(x, s) \}.$$

Exemple :

Prenons :

$$f(x) = \delta(x), \quad g(x) = 0.$$

Alors :

$$\hat{u}(x, s) = \frac{s}{c^2} G_s(x) = \frac{1}{2c} e^{-\frac{s}{c}|x|}.$$

Transformée de Laplace inverse :

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \delta \left(t - \frac{|x|}{c} \right).$$

C'est la solution fondamentale représentant une onde se propageant à vitesse c .

Conclusion

En conclusion, Nous avons présenté dans ce mémoire les bases de la théorie des distributions à travers l'étude des espaces fonctionnels et différentiable , des concepts fondamentaux de la distributions , de la transformation de Laplace et de quelques applications pratiques .

j'espère que cette modeste introduction à la théorie des distributions constituera une référence simple et utile pour ceux qui souhaitent approfondir ce domaine, et qu'elle servira de point de départ à ceux qui voudront développer ce travail à l'avenir.

Bibliography

- [1] J.-M. Bony. *Cours d'analyse: théorie des distributions et analyse de Fourier*. Editions Ecole Polytechnique, 2001.
- [2] H. Brezis, P. G. Ciarlet, and J. L. Lions. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*, vol. 91. *Dunod, Paris*, 1999.
- [3] M.-T. Lacroix-Sonnier. *Distributions, espaces de Sobolev: applications*. Ellipses Paris, 1998.
- [4] A. Lesfari. *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace: cours et exercices*. 2012.
- [5] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [6] L. Schwartz. *Théorie des distributions*, hermann, paris, 1966. MR, 35:730, 2002.
- [7] C. Zuily. *Problems in distributions and partial differential equations*, volume 143. Elsevier, 1988.
- [8] C. Zuily. *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles: cours et problèmes résolus*, volume 130. Dunod, 2002.

المراجع

- [9]الدكتور عمران قوبا : التحليل الجزء 5. منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية و التكنولوجيا .
الجمهورية العربية السورية 2018 .
- [10] سعد الله ومسعودي : نظرية التوزيعات وتطبيقاتها. مكتبة العبيكان للنشر . الرياض 2013 .